OSSERVAZIONI SULLA TEORIA DEL BARATTO SECONDO IL PROF. WALRAS

È noto in che cosa consista il problema del baratto secondo il Prof. WALRAS e sono anche noti i teoremi economici, che quell'insigne scienziato ne ha dedotti.

In un mercato X si presentino varii portatori di più merci di qualità diverse e ogni portatore abbia prima stabilito quanta merce di ogni specie acquisterà o venderà in cambio di altra merce venduta o acquistata, per ogni sistema di prezzi di tutte le merci rispetto a una determinata (1). Supposto, che nessun baratto parziale avvenga prima, che la domanda effettiva e l'offerta effettiva di ogni merce, da parte di tutti i portatori insieme considerati, siano divenute eguali (2), si domanda come si potranno determinare i *prezzi d'equilibrio del mercato*, cioè quel sistema (o quei sistemi) di prezzi di tutte le merci in una prestabilita, pel quale (pei quali) si verifichi, relativamente a ogni singola merce, la uguaglianza della domanda effettiva e dell'offerta effettiva, totali.

Il modo di risolvere questo problema teoricamente più rapido e preciso è quello di ricorrere all'analisi matematica, cioè quello, che consiste nel riguardare i prezzi d'equilibrio come altrettante incognite di un certo sistema di equazioni, nello scrivere queste equazioni e, dato che si possa, nel risolverle. Ma il Prof. WALRAS ha

(1) Questa merce (*numerario*), nella quale si esprimono i prezzi di tutte le altre, può essere una di quelle esistenti sul mercato, ma può anche non comparire affatto tra le merci, che si tratta di barattare.

(2) Noti il lettore tutta l'importanza di questa restrizione. Così non gli accadrà, per avventura, di ripetere contro la teoria del Prof. WALRAS una obbiezione assai superficiale del Prof. BERTRAND, cui il Prof. WALRAS medesimo ha egregiamente risposto. Cfr. BERTRAND, *Journal des Savants*, sett. 1883; WALRAS, *Journal des Économistes*, aprile 1885, oppure WALRAS, *Études d'Économie sociale* Lausanne, 1896, pag. 352.

dimostrato, che, senza scrivere un tal sistema di equazioni, la sua soluzione si può praticamente raggiungere affidandosi al puro e semplice meccanismo della libera concorrenza; per il quale, supposto che, relativamente a certi prezzi delle merci in una determinata, per qualche merce o per tutte non si verifichi l'uguaglianza della domanda e dell'offerta, complessive, si passano a considerare, come più prossimi ai prezzi d'equilibrio, prezzi ottenuti dai precedenti rialzando quelli che corrispondono a merci, la cui domanda totale sia inferiore all'offerta totale, e ribassando quelli, che corrispondono a merci, la cui domanda totale sia inferiore all'offerta totale.

Ora alla teoria del Prof. WALRAS, che ci pare di aver esposta abbastanza esattamente in questi brevi tratti sintetici (1), si possono muovere, come vedremo, varii appunti: soprattutto, non sembra, che possa concludersi, così senz'altro, la libera concorrenza essere un mezzo atto a risolvere il sistema di equazioni, cui dà luogo il baratto di più merci: ma in ogni modo non va disconosciuto il merito grandissimo, che il Prof. WALRAS ha avuto nel tentare di porre i problemi fondamentali di questa teoria con tanta chiarezza, da permettere l'immediata applicazione del linguaggio più preciso, che si conosca, cioè del linguaggio matematico.

La forma del mio lavoro, le modifiche che esso apporta ad alcune considerazioni assai comuni sulle varie specie degli equilibri dei mercati ed infine l'importanza delle questioni, che in esso si solsollevano, spero, che basteranno a convincere il lettore della perfetta obbiettività delle mie osservazioni critiche. Esse sono mosse non dalla vana soddisfazione, che ogni spirito gretto e piccino prova nel poter cogliere in fallo i maestri, ma dall'amore della verità e dal desiderio di contribuire a quel movimento scientifico così felicemente iniziato da alcuni valenti economisti, che ha per scopo di dare a qualche teoria dell'Economia politica un assetto armonico e definitivo col razionale impiego delle notazioni e dei teoremi matematici.

Il Prof. WALRAS rispondendo, negli scritti citati, ad un articolo del Prof. BERTRAND sopra la sua *Théorie mathématique de la richesse sociale* (Lausanne, 1883), dopo aver osservato, che le obbiezioni del Prof. BERTRAND hanno un carattere più economico, che matematico, conclude: « Comme je redoutais beaucoup plus la critique des ma

(1) Nel seguito, per la esposizione delle ricerche del Professor WALRAS, che sono state pubblicate a varie riprese in varii luoghi e per le relative citazioni mi riferirò sempre al trattato: *Éléments d'Économie politique pure*, Lausanne, 1900, come alla fonte meno antica e più completa.

thématiciens que celle des économistes, j'avoue que ma théorie, après l'examen qu'elle a subi de la part de l'illustre secrétaire de l'Académie des sciences, me paraît être assez solide et mériter quelque peu la peine que je me donne pour tàcher d'en partager équitablement entre GOSSEN, JEVONS et moi la propriété scientifique — » [1]; quindi, confortato dall'autorevole parere dello stesso WALRAS, non mi pare d'aver fatto opera inutile riguardando qui la questione da un lato più logico-matematico, che economico.

1. Cominciamo, per semplicità e per chiarezza, dal caso di un mercato, nel quale si tratti del baratto di due sole merci e, per comodità del lettore, riassumiamo brevemente le considerazioni del Prof. WALRAS.

2. In un mercato X più compratori e più venditori scambino tra di loro merci di due sole qualità, e si indichino queste merci con (A) e (B). Per ogni valore del prezzo p_a di (A) in (B) o del prezzo $p_b = \frac{1}{p_a}$ di (B) in (A), ogni individuo intervenuto al mercato ha interesse a scambiare una determinata quantità della merce, che egli possiede con la quantità dell'altra merce, che, in virtù dei valori dei prezzi le corrisponde: quindi, per ogni coppia di valori dei prezzi p_a e p_b, legati dalla relazione

$$p_a p_b = 1,$$

si avranno in totale delle determinate domande ed offerte effettive delle merci (A) e (B), di cui indicheremo rispettivamente le misure con D_a, O_a, D_b, O_b.

Si ha, per definizione:

$$(1)\qquad \begin{aligned} D_a &= O_b p_b \qquad & O_a &= D_b p_b \\ D_b &= O_a p_a \qquad & O_b &= D_a p_a, \end{aligned}$$

quindi, se si pone, per indicare che D_a e D_b (al pari del resto di O_a e O_b) sono funzioni di p_a e p_b [2],

$$(2)\qquad D_a = F_a(p_a), \qquad D_b = F_b(p_b)$$

[1] *Études d'Économie sociale*, pag. 352.

[2] Grazie alla relazione $p_a p_b = 1$, D_a e D_b (al pari di O_a e O_b) possono considerarsi come funzioni di quella delle due variabili p_a e p_b, che meglio ci piace.

si ha:

$$O_a = F_b(p_b)\,p_b\,, \qquad O_b = F_a(p_a)\,p_a\,. \tag{3}$$

Nel mercato si ha equilibrio solo quando $D_a = O_a$ e, conseguentemente per le (1), $D_b = O_b$: quindi i valori di p_a e p_b pei quali si ha l'equilibrio sono tutti e soli quelli delle radici (reali, positive) del sistema di equazioni:

$$F_a(p_a) = F_b(p_b)\,p_b\,, \qquad p_a\,p_b = 1 \tag{4}$$

la cui risoluzione si riduce subito a quella dell'unica equazione:

$$F_a(p_a) = F_b\left(\frac{1}{p_a}\right)\frac{1}{p_a}. \tag{5}$$

Arrivati a questo punto, è chiaro che null'altro di preciso può dirsi sul problema dal lato matematico, finchè nessuna restrizione si introduca sulla natura delle funzioni F_a ed F_b.

Il Prof. WALRAS, in seguito a considerazioni di carattere economico dice qualcosa riguardo a tale natura, ma comunque sia, esse non bastano per autorizzarlo a dedurre dal ragionamento qui riportato il teorema:

Deux marchandises étant données, pour qu'il y ait équilibre du marché à leur égard, ou prix stationnaire de l'une en l'autre, il faut et il suffit que la demande effective de chacune de ces deux marchandises soit égale à son offre effective. Lorsque cette égalité n'existe pas, il faut, pour arriver au prix d'équilibre, une hausse du prix de la marchandise dont la demande effective est supérieure à l'offre effective, et une baisse du prix de celle dont l'offre effective est supérieure à la demande effective [1].

È vero, che egli, dopo aver posto il problema nella forma analitica precedente, prima di enunciare il suo risultato finale rappresenta le funzioni $F_a(p_a)$ ed $F_b\left(\frac{1}{p_a}\right)\frac{1}{p_a}$ mediante curve, rispetto a un sistema di assi coordinati ortogonali, e, *supposto che queste curve abbiano un sol punto comune e che nell'intorno di quel punto si comportino opportunamente,* prosegue il suo discorso. Ma non si può intendere, che il teorema sia essenzialmente tratto da questi ulteriori argomenti, poichè nel suo enunciato non compajono le restrizioni introdotte nel caso particolare discusso.

[1] *Éléments* etc., pag. 64.

3. Del resto sarà bene far vedere con le stesse parole del Prof. Walras, quanto questa sua proposizione sia poco precisa. Per ciò è opportuno richiamare all'attenzione del lettore alcune cose che egli espone nel suo trattato prima e dopo la dimostrazione del teorema in questione.

A pag. 52 degli *Éléments* etc, il Prof. Walras, osservato che si ha equilibrio solo se $D_a = O_a$, si chiede come si possa raggiungere l'eguaglianza dell'offerta e della domanda effettiva quanto $D_a \gtrless O_a$ e corrispondentemente $O_b \gtrless D_b$. Egli dice a pag. 53: Sans doute, il faudra toujours faire la hausse de p_a (ou la baisse de p_b) si D_a est plus grand que O_a, ou faire au contraire la hausse de p_b (ou la baisse de p_a) si c'est D_b qui est plus grand que O_b.... Lorsque le prix augmente, la demande ne peut pas augmenter, elle ne peut que diminuer. Et lorsque le prix diminue, la demande ne peut pas diminuer, elle ne peut qu' augmenter.... Ainsi, une hausse de p_a, qui sera une baisse de p_b, ne peut que faire diminuer D_a et augmenter D_b; au contraire, une hausse de p_b, qui sera une baisse de p_a, ne peut que faire diminuer D_b et augmenter D_a. Mais que deviendront O_a et O_b? C'est ce qu' il ne pas possible de dire... Comment savoir, par conséquent, si l'on s'achemine vers l'équilibre? Ora, poichè a questa domanda egli crede di poter rispondere *rigorosamente* (pag. 65) col teorema « *Deux marchandises* etc. », *affinchè il teorema medesimo contenga qualche cosa di più di quel che è asserito nelle parole precedenti,* si deve intendere come dimostrato con esso, che col rialzo del prezzo della merce la cui domanda effettiva supera la offerta effettiva e col ribasso di quella la cui domanda effettiva è inferiore all'offerta effettiva si raggiunge *sempre* l'equilibrio.

Altre affermazioni del Prof. Walras confortano questa interpretazione. Per esempio, dopo aver svolto quella, che egli chiama *Théorie géométrique de la determination des prix* nel caso del baratto di più merci tra di loro, conclude (*Éléments* etc. pag. 472): « Quelques critiques se sont pourtant égayés du nombre de pages que j'employais à démontrer qu'on doit arriver au prix courant en faisant la hausse en cas d'excédent de la demande sur l'offre et la baisse en cas d'excédent de l'offre sur la demande. —

« Et vous, ai-je dit une fois à l'un d'eux, comment le démontrez-vous? — Mais, me répondit-il, un peut surpris et même assez embarassé, cela a-t-il besoin d'être démontré? Il me semble que c'est une chose évidente. — Il n'y a d'évident que les axiomes, et ceci n'en est pas un. Mais vous sous-entendez, je suppose, ce raisonnement, que Jevons a formulé explicitement dans son petit traité de *Political Economy*.... — Précisément. — Eh bien! il y a là une erreur.... — Mais, s'il en est ainsi, comment la hausse est-elle un moyen d'arriver au prix courant? — C'est ce que la théorie vous expliquera. Deux individus peuvent se rejoindre soit en marchant en sens contraire l'un de l'autre, soit en marchant dans le même sens, si l'un va plus vite que l'autre. L'offre et la demande s'égalisent tantôt de la première manière, tantôt de la seconde. »; e nella *Théorie de la propriété* (1), esponendo l'analisi del fenomeno del baratto dovuta al Jevons, che con « quelques modifications et additions necessaires » coincide in sostanza con quella sua, dice: « Jevons a reconnu et signalé... dans le troc de grain contre viande entre deux individus A et B, les éléments quantitatifs essentiels de l'échange économique tel qu'il s'opère sur le marché... On essaye au hasard un *prix* de grain en viande, inverse d'un prix de la viande en grain. A ces prix proposés, chaque troqueur décide à la fois quelle quantité de sa marchandise il veut céder et quelle quantité de l'autre marchandise il veut acquérir... Mais, généralement le troc ne s'effectue pas ainsi du premier coup, parce que, généralement, la quantité de chaque marchandise offerte par son propriétaire ne sera pas égale à la quantité demandée par le propriétaire de l'autre marchandise. En ce cas, on essaiera un autre prix du grain en viande..., plus élevé si la demande effective du grain est plus forte que son offre effective... et moins élevé dans le cas contraire. À ces nouveaux prix les deux troqueurs prendront des décisions nouvelles.... Et la mathématique montre qu'on arrive ainsi à l'*égalité de la demande et de l'offre des deux marchandises* ».

Ora, posto che la interpretazione data del teorema sia quella voluta dall'autore, come porre d'accordo la conclusione che con quei tali rialzi e ribassi dei prezzi si arriva sempre all'eguaglianza della domanda e dell'offerta delle due merci, con l'osservazione fatta dal Prof. Walras medesimo a pagine 67-68 degli *Éléments*, che in qualche caso l'equazione (5) può benissimo mancare di radici reali, e che quindi in qualche caso l'equilibrio del mercato non può esser raggiunto in nessun modo?

4. D'altra parte, a pag. 68 degli *Éléments* non è escluso che l'equazione (5) possa avere più di una radice reale positiva, e allora

(1) *Revue socialiste*, giugno e luglio 1896, oppure: *Études d'Économie sociale*, pag. 205 e seg.

come si fa a parlare *del* prezzo di equilibrio, quando questi prezzi d'equilibrio possono essere più d'uno, e come si può dire, che per raggiungere (badisi bene, soltanto per raggiungere!) un prezzo d'equilibrio, dato che si possa raggiungerlo, debbasi necessariamente fare un rialzo del prezzo della merce di cui la domanda effettiva supera l'offerta effettiva e un ribasso del prezzo della merce di cui la domanda effettiva è inferiore all'offerta effettiva?

Se, ad esempio, le funzioni $F_a(p_a)$ ed $F_b\left(\frac{1}{p_a}\right)\frac{1}{p_a}$ sono rappresentate dalle due curve AB e CD della *fig. 1*, tanto l'ascissa del punto E, quanto quella del punto F, rappresentano prezzi d'equilibrio; cosicchè, se all'inizio del baratto il prezzo p_a avesse il valore

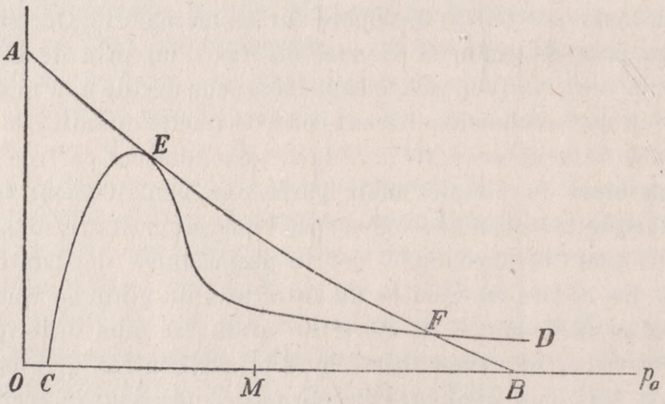

Fig. 1.

rappresentato dall'ascissa OM, si potrebbe arrivare a un prezzo d'equilibrio tanto aumentando il valore di p_a, quanto diminuendolo.

Non pare al lettore, che il Prof. WALRAS dia alla parola *raggiungere* un senso complesso, ben differente dal puro significato etimologico, *suggerito* dalla conclusione, che egli vuol trarre relativamente alla libera concorrenza?

5. Nella figura precedente ho dato a bella posta alle curve AB e CD nel loro punto comune E un comportamento che nelle ordinarie applicazioni della matematica all'Economia politica non apparisce mai, per dimostrare senz'altro con un esempio, che la distinzione degli equilibri stabili ed instabili data dal Prof. WALRAS a pag. 69 e 70 degli *Éléments* non è completa.

Per richiamare al lettore le definizioni di queste diverse specie di equilibrio suppongasi per un momento, che le curve AB e CD della domanda e dell'offerta presentino l'aspetto della *fig. 2.* — In tal caso ambedue i punti E ed F corrispondono a prezzi d'equilibrio del mercato, ma nel caso del punto E « *au delà* du point d'é-

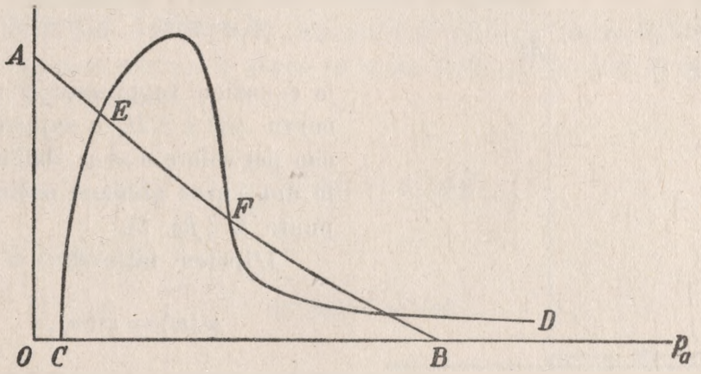

Fig. 2.

quilibre, *l'offre de la marchandise est supérieure à sa demande,* ce qui doit amener une baisse de prix, c'est-à-dire un retour vers le point d'équilibre » e « *en deçà* du point d'équilibre, *la demande de la marchandise est supérieure à son offre,* ce qui doit amener une hausse de prix, c'est-à dire un acheminement vers le point d'équilibre » ; mentre nel caso del punto F, « *au delà* du point d'équilibre, *la demande de la marchandise est supérieure à son offre,* ce qui doit amener une *hausse* de prix, c'est-à-dire un éloignement du point d'équilibre » e « *en deçà* du point d'èquilibre *l'offre de la marchandise est supérieure à sa demande,* ce qui doit amener une *baisse* de prix, c'est-a-dire encore un éloignement du point d'équilibre ».

Quindi, per analogia a note proprietà di un corpo grave sospeso per un solo punto, si può convenire di chiamare E un *punto d'equilibrio stabile* ed F un *punto d'equilibrio instabile.*

Ma il punto E della *fig. 1.* mostra chiaramente al lettore, che non ogni punto d'equilibrio rientra necessariamente in una di queste due categorie.

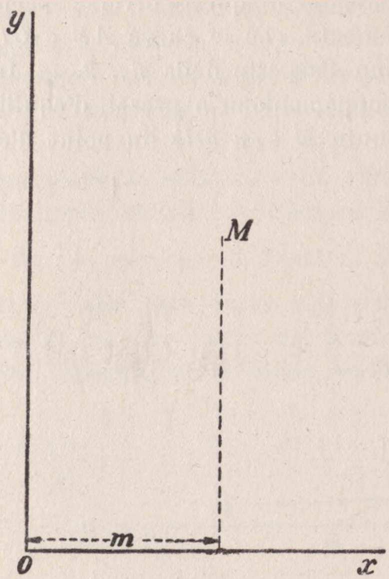

Fig. 3.

6. Per approfondire la questione dei punti d'equilibrio, indichiamo per comodità di scrittura con x le ascisse e con y le ordinate: poi diciamo rispettivamente

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x)$$

le equazioni rappresentative delle curve AB e CD, e supponiamo, che pel valore $x = m$ dell'ascissa le due curve abbiano comune un punto M (*fig. 3*).

L'ipotesi fatta dà

$$\varphi(m) = \psi(m),$$

d'altra parte, la formula di Taylor abbreviata:

$$\varphi(m+h) = \varphi(m) + h\,\varphi'(m) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(m) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(m+\theta h)$$

$$\psi(m+h) = \psi(m) + h\,\psi'(m) + \frac{h^2}{2!}\psi''(m) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(m+\theta_1 h)$$

dove θ e θ_1 sono due numeri compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), dunque:

$$\varphi(m+h) - \psi(m+h) = h[\varphi'(m) - \psi'(m)] + \frac{h^2}{2!}[\varphi''(m) - \psi''(m)] + \ldots$$

$$+ \frac{h^n}{n!}[\varphi^{(n)}(m+\theta h) - \psi^{(n)}(m+\theta_1 h)].$$

Per h sufficientemente piccolo in valore assoluto, il segno del polinomio del secondo membro dipende dal segno del termine che contiene la potenza di h con l'esponente minimo, dunque se $\varphi'(m) - \psi'(m)$ non è zero, per h sufficientemente piccolo in valore assoluto il segno di $\varphi(m+h) - \psi(m+h)$ è uguale al segno del prodotto

$$h[\varphi'(m) - \psi'(m)].$$

Ne segue, che se $\varphi'(m) - \psi'(m)$ è positivo, per h abbastanza piccolo in valore assoluto il segno di $\varphi(m+h) - \psi(m+h)$ è uguale al segno di h, cioè il punto M è un punto *d'equilibrio instabile*, mentre se $\varphi'(m) - \psi'(m)$ è negativo, per h abbastanza piccolo in valore assoluto il segno di $\varphi(m+h) - \psi(m+h)$ è contrario al segno di h e quindi M è un punto *d'equilibrio stabile*.

Se $\varphi'(m) - \psi'(m) = 0$, ma non è $\varphi''(m) - \psi''(m) = 0$, allora per h abbastanza piccolo, il segno di $\varphi(m+h) - \psi(m+h)$ è uguale al segno del prodotto

$$\frac{h^2}{2!}[\varphi''(m) - \psi''(m)],$$

cioè al segno di

$$\varphi''(m) - \psi''(m)$$

e quindi è indipendente dal segno di h.

In questo caso le curve AB e CD hanno in M un *contatto di 1^0 ordine* e il punto M è un punto d'equilibrio, che non può considerarsi nè come un punto d'equilibrio stabile, nè come un punto d'equilibrio instabile; poichè, supposto, che il prezzo abbia un valore m' leggermente diverso dal valore m dell'ascissa del punto M, si avrà, per effetto della libera concorrenza, un allontanamento o un avvicinamento del prezzo al prezzo d'equilibrio non indipendentemente dal segno della differenza $m' - m = h$, ma proprio in corrispondenza di questo segno.

Ulteriori ipotesi si potrebbero fare sul comportamento delle curve AB e CD nel punto M supponendo nulle tutte le differenze

$$\varphi'(m) - \psi'(m); \qquad \varphi''(m) - \psi''(m)\ldots;$$

fino a quella, in cui compajono le derivate di un certo ordine r: cioè, supponendo più o meno intimo il contatto delle curve AB e CD nel punto M. Ma com'è naturale, casi nuovi d'equilibrio non si presentano, e si vede subito che, se si conviene di dire, che AB e CD hanno in M un contatto d'ordine zero, quando ivi semplicemente si intersecano, può enunciarsi il teorema:

Il punto M è un punto d'equilibrio stabile od instabile solo quando in esso le due curve hanno un contatto d'ordine pari (ordine, che può anche essere zero); mentre se AB e CD hanno in M un contatto *d'ordine dispari, M è un punto d'equilibrio della nuova specie qui considerata* (1).

7. Torniamo all'equazione (5). Come si è detto, essa può avere più di una radice (reale, positiva): quindi possono aversi sul mercato più prezzi d'equilibrio fra di loro differenti.

Ciò posto, se il prezzo d'equilibrio deve stabilirsi col calcolo vi è luogo a una scelta tra i varii prezzi d'equilibrio tenuto conto dell'ammontare dell'utilità totale che verrebbe a corrispondere a ciascun concorrente in relazione a ognuno di quei prezzi: mentre se il prezzo d'equilibrio deve stabilirsi col semplice meccanismo della libera concorrenza si arriverà a uno dei prezzi pei quali si ha equilibrio stabile o equilibrio della nuova specie ora esaminata, piuttosto che a un altro, o si indovinerà senz'altro, *per caso*, un prezzo pel quale si ha equilibrio instabile, a seconda del valore del primo prezzo, che ha servito sul mercato come punto di partenza. Conseguentemente non pare che possa concludersi: la libera concorrenza condurre in modo pratico alla risoluzione dell'equazione del baratto. In qualche caso, la risoluzione che essa fornisce è incompleta dal lato matematico e, forse, dal lato economico non conveniente agli interessi dei singoli concorrenti.

8. È bene insistere su questo punto meritevole di un più minuto e accurato esame di quel che noi, colle nostre deboli forze possiamo fare. La questione è più economica che matematica; perciò, lasciando che altri più valenti di noi nelle discipline economiche ne faccia una discussione approfondita, ci limitiamo ad illustrare

(1) Se non erriamo, considerazioni analoghe a queste possono ripetersi in molti altri casi. Ad esempio, sembra che non sarebbe inopportuna una revisione minuta degli interessanti teoremi del MARSHALL esposti dal Prof. PANTALEONI a pag. 227 e seg. dei suoi ottimi *Principi di Economia pura*, poichè, almeno per una via immediata, non si vede come possano escludersi dei contatti fra le curve di *alcuni* dei diagrammi, che ivi compajono.

Badi il lettore, che noi non tanto vogliamo asserire senz'altro l'esistenza reale di una nuova specie d'equilibrio, quanto richiamare l'attenzione degli studiosi sulle prove, che si posseggono, di molti teoremi economici. Può darsi benissimo che questi teoremi debbano in sostanza rimanere intatti nel loro enunciato odierno: ma è certo che allora bisogna escludere la possibilità economica di certe congiunture, che matematicamente non sono affatto improbabili.

Così più minute indagini economiche si rendono necessarie, e se esse porteranno a qualche risultato nuovo, non sarà questo uno dei più deboli argomenti per provare l'utilità delle applicazioni della matematica all'Economia politica.

Il lettore tenga conto di questa nostra dichiarazione anche per quel che è detto nei num. seguenti.

ancora più chiaramente con le notazioni walrasiane quel che abbiamo affermato.

Le curve AB e CD della domanda e dell'offerta complessive della merce (A), risultando per composizione dalle curve di domanda e di offerta parziali della merce medesima relative ai vari concorrenti del mercato, dipendono in ultima analisi, dalle curve di utilità di questi concorrenti relative alle merci (A) e (B). Perciò volgiamoci alla considerazione di queste curve e per fissar le idee supponiamo, che l'individuo *Primus* prenda parte al mercato, possedendo delle merci (A) e (B) le quantità misurate rispettivamente da $q_{a,1}$ e $q_{b,1}$, e, che le *rarità* dell'individuo medesimo dopo il consumo di una quantità q della merce (A) o della merce (B) siano date rispettivamente dalle equazioni:

$$r = \varphi_{a,1}(q) \qquad r = \varphi_{b,1}(q) .$$

Allora, come il Prof. WALRAS ha dimostrato e come è ben noto, se al prezzo p_a *Primus* riconosce utile per sè comprare una quantità misurata da d_a della merce (A) pagando con una parte della quantità della merce (B) che possiede, e non di comprarne più o di comprarne meno, deve aversi

$$\varphi_{a,1}(q_{a,1} + d_a) = p_a \, \varphi_{b,1}(q_{b,1} - d_a p_a) ;$$

e quindi al prezzo p_a di (A) in (B), *Primus* domanderà una quantità della merce (A) misurata da d_a, d_a essendo ricavata dall'equazione precedente.

Al prezzo p'_a di (A) in (B), *Primus* potrà riconoscere più utile per sè non prender al baratto o di barattare una parte della merce (A), che possiede, con merce (B) o di barattare ancora una parte della merce (B), che possiede, con della merce (A). Supponiamo che si verifichi quest'ultimo caso: la misura della sua domanda d'_a sarà questa volta data dall'equazione

$$\varphi_{a,1}(q_{a,1} + d'_a) = p'_a \, \varphi_{b,1}(q_{b,1} - d'_a p'_a) .$$

Ora suppongasi, che tanto p_a quanto p'_a siano prezzi d'equilibrio: per *Primus* sarà indifferente, che nel mercato si raggiunga piuttosto il prezzo d'equilibrio p_a che il prezzo p'_a, oppure per *Primus* sarà più utile, che il baratto si effettui a uno dei due prezzi p_a, p'_a anzichè all'altro?

Per risolvere questa questione si osservi, che se il baratto si effettua al prezzo p_a, *Primus* ritorna dal mercato rispettivamente con le quantità delle merci (A) e (B) misurate da $q_{a,1}+d_a$ e $q_{b,1}-d_a p_a$, quindi con una corrispondente utilità totale misurata dalla somma:

$$\int_0^{q_{a,1}+d_a} \varphi_{a,1}(q)\,dq + \int_0^{q_{b,1}-d_a p_a} \varphi_{b,1}(q)\,dq\,; \tag{6}$$

mentre se il baratto si effettua al prezzo p'_a, *Primus* ritorna dal mercato rispettivamente con le quantità delle merci (A) e (B) misurate da $q_{a,1}+d'_a$ e $q_{b,1}-d'_a p'_a$, quindi con una corrispondente utilità totale misurata dalla somma

$$\int_0^{q_{a,1}+d'_a} \varphi_{a,1}(q)\,dq + \int_0^{q_{b,1}+d'_a p'_a} \varphi_{b,1}(q)\,dq\,. \tag{7}$$

È chiaro, che la decisione di *Primus* dipenderà dalla ispezione delle somme (6) e (7), e che egli sarà indifferente alla scelta dei prezzi p_a o p'_a o cercherà di far adattare l'uno piuttosto che l'altro come prezzo d'equilibrio secondochè le due somme (6) e (7) saranno uguali o disuguali.

9. In generale, supposto, che per tutti i valori del prezzo p_a di (A) in (B) compresi nell'intervallo $(p_a^{(0)}, p_a^{(1)})$ *Primus* riconosca conveniente di barattare parte della merce (B), che possiede con della merce (A), per ogni valore p_a del prezzo compreso in quell'intervallo domanderà una quantità della merce (A) misurata dalla radice d_a dell'equazione:

$$\varphi_{a,1}(q_{a,1}+d_a) = p_a\,\varphi_{b,1}(q_{b,1}-d_a\,p_a) \tag{8}$$

e quindi per quel valore p_a del prezzo conseguirà una utilità totale misurata da:

$$\int_0^{q_{a,1}+d_a} \varphi_{a,1}(q)\,dq + \int_0^{q_{b,1}-d_a p_a} \varphi_{b,1}(q)\,dq\,. \tag{9}$$

Ora, riguardiamo questa espressione (9) come una funzione di p_a, definita per tutti i valori della variabile indipendente compresi nell'intervallo $(p_a^{(0)}, p_a^{(1)})$ e indichiamola con $\Psi(p_a)$; poniamo cioè:

$$\Psi(p_a) = \int_0^{q_{a,1}+d_a} \varphi_{a,1}(q)\,dq + \int_0^{q_{b,1}-d_a p_a} \varphi_{b,1}(q)\,dq\,.$$

È evidente, che, fra tutti i prezzi di (A) in (B) compresi nell'intervallo $(p_a^{(0)}, p_a^{(1)})$, *Primus* preferirà quello pel quale $\Psi(p_a)$ raggiunge il massimo assoluto, che sarà da scegliersi fra $p_a^{(0)}, p_a^{(1)}$ e le radici dell'equazione:

$$(10) \qquad \varphi_{a,1}(q_{a,1}+d_a)\frac{d\,d_a}{d\,p_a} - \varphi_{b,1}(q_{b,1}-d_a\,p_a)\left(d_a+\frac{d\,d_a}{d\,p_a}p_a\right)=0\,,$$

ottenuta annullando la derivata della funzione $\Psi(p_a)$.

Nella equazione (10) d_a è da considerarsi come funzione implicita di p_a definita dalla equazione (8): dunque:

$$(11) \qquad \frac{d\,d_a}{d\,p_a} = \frac{\varphi_{b,1}(q_{b,1}-d_a\,p_a) - d_a\,p_a\,\varphi'_{b,1}(q_{b,1}-d_a\,p_a)}{\varphi'_{b,1}(q_{a,1}+d_a)+p_a^2\,\varphi'_{b,1}(q_{b,1}-d_a\,p_a)}$$

dove, al solito, si è posto:

$$\varphi'_{a,1} = \frac{d\,\varphi_{a,1}(q)}{d\,q}\,, \qquad \varphi'_{b,1}(q) = \frac{d\,\varphi_{b,1}(q)}{d\,q}\,.$$

Sostituendo il valore di $\frac{d\,d_a}{d\,p_a}$, dato dalla (11), nell'equazione (10) si ha un'equazione per *Primus*, sfuggita finora all'attenzione degli economisti matematici, e che non avrebbero dovuto trascurare affatto.

Come le *rarità* sono state considerate dal WALRAS (e, sotto nomi diversi, da tanti altri notissimi, che è qui inutile ricordare), per esprimere in una maniera esatta e suscettibile di essere trattata col calcolo la *disposizione,* che ogni individuo intervenuto al mercato ha, di trarre il massimo utile da ogni baratto eseguito a un prezzo determinato, così mi pare, che non sarebbe stata da trascurare questa equazione, la quale allude alla *disposizione*, che ogni individuo intervenuto al mercato ha, di fare in modo, che i prezzi d'equilibrio risultino certi prefissati.

10. Naturalmente, quando si introducano considerazioni di questo genere, il problema del baratto muta aspetto, e non è più così semplice come quello esaminato dal professor WALRAS: ma d'altra parte, se, guidati dalla critica precedente, noi cerchiamo di valutare l'importanza intrinseca dei risultati della teoria walrasiana, noi troviamo, che questa non è poi tale da non far desiderare una diversa posizione del problema.

11. Le obbiezioni, fatte alla detta teoria nel caso di due merci soltanto, si ripetono più formidabili, quando si passa a considerare

il caso del baratto di più merci fra di loro, stante la natura più complicata delle funzioni colle quali si ha da fare.

Così anche qui può darsi, che non sia possibile raggiungere un sistema di prezzi d'equilibrio, e può darsi (o, almeno, non si vede come possa con un ragionamento semplice escludersi), che i sistemi di prezzi di equilibrio siano più d'uno. E allora in questo secondo caso [1] non si comprende come la libera concorrenza, che per natura sua conduce, fissato il sistema di prezzi di partenza, a un solo sistema di prezzi d'equilibrio, possa considerarsi come un mezzo pratico atto a risolvere le equazioni cui dà luogo il baratto.

La dimostrazione del Prof. WALRAS, ci duole il dirlo, non regge a un esame rigoroso: anzi, possiamo affermare, che neppure egli stesso crede di aver portato nell'argomento una parola definitiva, poichè a pag. 132-133 del suo trattato, dopo aver detto: « Toutes ces opérations effectuées, on a

$$F_b(p''_b, p''_c, p''_d \dots) \gtrless 0 ;$$

et ce qu'il faut établir, c'est que cette inégalité est plus près de l'égalité que l'inégalité primitive,

$$F_b(p'_b, p'_c, p'_d, \dots) \lesseqgtr 0 \text{ »};$$

nelle quali frasi è racchiuso il nocciolo della questione, esce in queste parole: « Or cela paraîtra probable, si l'on songe ... » — parole, che se mettono in luce l'onestà scientifica dell'autore ed esprimono un parere degno di alta considerazione, perchè proveniente da un economista valente e provetto, non possono certamente essere accolte in un ragionamento matematico.

12. Sul fatto, che le equazioni del baratto nel caso di più merci possano ammettere varii sistemi di soluzioni, nè il Prof. WALRAS, nè altri — che io mi sappia — hanno fermata la propria attenzio-

[1] Ciò che è detto a pag. 163 degli *Éléments*: « Quand les marchandises sur le marché sont en grand nombre, la courbe de vente de chacune d'elles, alors même qu'elle ne se confond pas en tout ou partie avec la parallèle de la quantité totale existante, s'en rapproche évidemment pour la plupart des prix entre les plus faibles et les plus forts; de sorte qu'il n'y a pas généralement, dans les cas de l'échange de plusieurs marchandises entre elles, plusieurs prix courants d'équilibre possibles, comme cela a lieu dans le cas de l'échange de deux marchandises entre elles » non è esso stesso esente da difficoltà e in ogni modo non basta a togliere ogni valore a quello, che qui si afferma.

ne: ed è strano, poichè esso porta a quistioni economiche nuove e complicate.

Per esempio, sarebbe da tentare una estensione a questo caso della teoria degli equilibri. Io ho cercato di definire le condizioni, a cui devono soddisfare le funzioni rappresentanti le domande e le offerte totali, quando si voglia, che un certo sistema di prezzi $p_a, p_b, p_c \dots$ corrisponda a una specie di equilibrio del mercato, che si potrebbe dire *ordinario*, cioè un sistema, che potesse esser raggiunto col procedimento proprio della libera concorrenza, partendo da un sistema di prezzi $p'_a, p'_b, p'_c \dots$ non corrispondente a un equilibrio del mercato: ma credo inutile esporre qui delle ricerche incomplete e non aventi uno spiccato carattere economico.

13. Due parole di conclusione non ci sembrano fuor di luogo.

Il Prof. WALRAS, dopo aver stabilito quel che egli chiama le due leggi della determinazione e della variazione dei prezzi e che raccoglie sotto il nome comprensivo di legge della domanda e dell'offerta, passa alla teoria della produzione e quivi con procedimenti analoghi stabilisce altre leggi, che, insieme con quelle, considera come costituenti la giustificazione razionale del notissimo principio « *laissez faire, laissez passer* » in materia di scambio e di produzione (*Éléments* etc., pag. 231 e seg.). Stante l'enorme importanza pratica e scientifica di questo risultato, non sembra che la critica precedente sia da considerarsi come inutile. Essa, ben inteso, non infirma il principio « *laissez faire, laissez passer* »: solo vuole affermare, che si è ben lontani dal poterne dare una dimostrazione matematica.

Tutto ciò per noi e, speriamo, anche pei lettori non deve implicare e non implica, che le applicazioni della matematica all'Economia politica non siano utili. Al contrario, noi le riguardiamo come assolutamente necessarie *in quelle parti* dell'economia politica *nelle quali possono esser fatte*, e crediamo, che *su queste parti* appunto debbano vertere le ricerche degli studiosi, perchè esse potranno poi servire come base di una costituzione razionale dell'edifizio economico.

Sappiamo bene che queste nostre parole ci attireranno sorrisi ironici di molti lettori e noi stessi non le abbiamo scritte senza un qualche ritegno. Ma da una parte l'autorità di scienziati, quali il WALRAS e il PARETO, dall'altra il sentimento di sconforto provato nel passar dai campi della matematica pura, così sereni e così *obbiettivi*, a quelli dell'Economia politica, così *soggettivi* e così irti di discussioni passionate e, per ciò stesso, antiscientifiche, non ci hanno lasciato molto in dubbio sulla loro opportunità.

L'introduzione del linguaggio matematico nell'Economia politica, come è stato detto tante volte e ottimamente dagli economisti matematici, contribuisce a darle chiarezza, semplicità e precisione, e soprattutto *costringe* a delimitare con rigore il senso e la portata dei postulati economici fondamentali (1).

A considerare il modo di scrivere di parecchi economisti sembra, che essi obbediscano più a delle preoccupazioni letterarie, che a delle esigenze scientifiche: così che pare di non esser troppo lontani dal vero quando si afferma, che essi non si fanno un conto esatto dell'estrema importanza dello stretto rigore nelle dimostrazioni. Ebbene, non sarà male rammentare, che i grandi progressi ottenuti nella matematica nel secolo ora trascorso, oltre che a circostanze intrinseche (per esempio, la grande semplicità logica dell'Analisi e della Geometria) ed estrinseche (per es. di ordine sociale, favorevoli al suo sviluppo e a quello di tutte le scienze fisico-matematiche), sono dovuti all'introduzione generale di quel rigore logico, di cui fra gli Analisti è stato modello il prof. WEIERSTRASS dell'Università di Berlino, da pochi anni defunto. L'Analisi, liberatasi dalle pastoie metafisiche dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande concepiti in modo attuale, adoperando su larga scala la nozione di numero complesso e in generale di numeri a più unità, non solo ha corretto moltissimi errori, in cui era caduta fra le mani degli analisti anteriori, e si è costituita su basi assolutamente solide, ma anche ha fatto progressi incalcolabili: e la Geometria, con un esame attento dei suoi principi fondamentali, con qualche semplice modificazione *formale* nella espressione delle proprietà primitive degli enti geometrici più semplici e con l'applicazione di quel principio generale di logica, che si cela sotto la legge più feconda della Geometria moderna, *la legge della sostituibilità degli enti geometrici*, ha raggiunto colle ricerche sugli spazi a un numero qualunque di dimensioni e più ancora con le ricerche della così detta *Geometria degli enti algebrici* una purezza, semplicità e grandiosità di linee, davvero imponenti.

(1) Ciò ha visto ed espresso assai nettamente il sig. WHEVEL nelle sue due Memorie: *Mathematical exposition of some economical doctrines* (Transactions of the Camb. phil. Soc. 1829, 1831), alle quali ci piace di rimandar il lettore. Siamo sicuri, che quando egli ne avrà ben compreso il concetto informatore non vorrà ripetere su di esse il severo e ingiustificato giudizio del prof. BOCCARDO (*Biblioteca dell'Economista*, serie 3a, vol. 2o), e forse nemmeno vi troverà quelle contraddizioni strane, che vi trova il prof. VIRGILI (*La Rassegna Nazionale*, 1o giugno 1890).

Che proprio, dunque, l'Economia politica non debba ricavar nessun frutto dalle fatiche di chi intende a darle una base solida? (1).

Pisa, 8 gennaio 1902.

(1) Avevo già mandato il manoscritto di questo lavoro alla Direzione del *Giornale*, quando il Prof. PANTALEONI cortesemente mi avvertì, che il MARSHALL aveva già osservato, che le due specie di equilibrio distinte coi nomi di equilibrio stabile ed equilibrio instabile non esauriscono tutte le specie possibili. Non ostante ciò, ho creduto opportuno mantenere inalterato il mio scritto, perchè il passo del MARSHALL non esaurisce la questione e lascia adito a qualche incertezza. Ecco le parole di questo autore racchiuse in una parentesi della nota a pag. 492 dei suoi *Principles of Economics* (London, 1891): «If the curves touch one another at any point, the equilibrium corresponding to it will be stable for displacements in one direction, and unstable for displacements in the other. No practical interest attaches to the investigation of this barely possible case».