XI.

SUL TEOREMA DI ESISTENZA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

« Atti Ist. Veneto di Sc., lettere ed arti », t. $LXIX_2$ (1909-1910), pp. 291-302.

La risoluzione di equazioni implicite mediante approssimazioni successive può farsi risalire al metodo di falsa posizione dei geometri greci; certo da molto tempo (oserei dire fin da KEPLERO) viene correntemente praticata in questioni astronomiche, tra le quali merita speciale menzione la determinazione di orbite ellittiche in base a tre osservazioni.

In questi ultimi anni, per iniziativa di PICARD, il metodo delle successive approssimazioni ha assunto posto cospicuo anche nell'analisi pura. Ben ovvia è perciò la presunzione che esso si presti, tra altro, a dimostrare, con tutto il desiderabile rigore, il teorema di esistenza delle funzioni implicite, sotto le condizioni generalmente supposte nei corsi di calcolo.

Non mi consta tuttavia che una tale dimostrazione sia stata effettivamente esposta (1). Mi permetto quindi di svolgerla nella presente Nota, anche in considerazione dell'interesse didattico, e dei vantaggi che essa offre sul procedimento abituale.

Quest'ultimo infatti stabilisce bensì l'esistenza e le proprietà qualitative delle funzioni definite da equazioni implite, ma non ne dà un algoritmo costruttivo atto a calcolarne le espressioni esplicite. Invece il metodo delle approssimazioni successive costruisce e dimostra ad un tempo, presentando sotto forma generale e sistematica l'andamento delle

(1) (*Nota aggiunta durante la correzione delle bozze*). Un recentissimo scritto del sig. COTTON, *Sur les équations différentielles dépendant de paramètres arbitraires*, « Bulletin de la Société Math. de France », t. XXXVII, 1909, pp. 204-214, richiama un precedente lavoro del sig. GOURSAT, *Sur la théorie des fonctions implicites*, « Ibidem », t. XXXI, 1903, pp. 184-192, che mi era sfuggito e che contiene pressochè tutte le osservazioni qui presentate. Chiedo venia di essermene accorto troppo tardi.

operazioni, quali, anche praticamente, dovrebbero effettuarsi per arrivare alla valutazione numerica.

Può anche aggiungersi che la natura del metodo rende superflua qualcuna delle ipotesi ammesse ordinariamente.

1. - Preliminari. Specificazione delle ipotesi.

Sia

$$u_l(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

un sistema di n equazioni destinate a definire altrettanti argomenti y in funzione di m variabili indipendenti x (m ed n designando interi positivi qualisivogliono).

Per semplificare la notazione, rappresenteremo con x (senza alcun indice), non solo (come si fa sempre) una qualunque delle m variabili $x_1, x_{,}. ,,, x_m$, ma anche (come si fa talvolta) il complesso da esse costituito; analogo significato avrà y rispetto a $y_1, y_2, \ldots, y_n$; e così per altre lettere, che ricorreranno più innanzi.

Con tale convenzione potremo scrivere le equazioni proposte sotto la forma abbreviata

$$(1) \qquad u_l(x; y) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Supponiamo che le (1) siero verificate, quando alle x e alle y si attribuiscono speciali valori numerici $x^{(0)}$, $y^{(0)}$. In tal caso si può addirittura supporre, sempre per semplicità di notazione, che i valori in questione siano nulli. Infatti, ove ciò non accadesse, basterebbe premettere un ovvio cambiamento di variabili, assumendo come variabili indipendenti le $x - x^{(0)}$, in luogo delle x; come funzioni incognite le $y - y^{(0)}$ in luogo delle y.

Adopereremo l'apice $^{(0)}$ per designare il valore assunto da una generica funzione delle x, y, in corrispondenza al valore zero di tutti gli argomenti.

Circa le funzioni u, faremo le ipotesi seguenti:

a) Esse sono finite e continue in un certo intorno Γ dei valori zero degli $m+n$ argomenti x, y. Intenderemo caratterizzato questo intorno mediante un numero positivo H e le $m+n$ disuguaglianze

$$|x| \leqslant H\,, \qquad |y| \leqslant H\,.$$

Sarà poi indifferente che le funzioni u si ritengano definite soltanto per valori reali ovvero anche per valori complessi delle x, y: vuol dire che, nel primo caso, vanno considerati i soli valori reali del campo $|x| \leqslant H$, $|y| \leqslant H$, e, nel secondo, più generalmente, tutti i valori del campo.

b) Esistono le n^2 derivate prime delle u rapporto alle y, finite e continue in Γ (²).

c) Il determinante funzionale

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

non si annulla per i valori zero delle x e delle y. Si ha cioè $D^{(0)} \neq 0$, e si può quindi considerare, accanto ad un generico elemento

$$\left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right)^{(0)}, \qquad (l, j = 1, 2, ..., n),$$

di $D^{(0)}$ il suo elemento reciproco c_{lj} (complemento algebrico diviso per $D^{(0)}$): le c_{lj} — quasi è superfluo il notarlo — rappresentano (al pari di $D^{(0)}$ e dei suoi elementi) altrettante costanti.

2. - Trasformazione lineare delle equazioni proposte.

Per risolvere le equazioni (1) rapporto alle y, giova premettere un'ovvia trasformazione, che sarebbe esauriente nel caso elementare di un sistema lineare (nelle y) e che, in generale, rende manifesta la via alle successive approssimazioni.

(²) Di solito si ammette ancora l'esistenza e la continuità delle derivate delle u rapporto alle variabili indipendenti x. G. Peano ha però modificata la dimostrazione di esistenza francandola da tali ipotesi. Cfr. per es., F. D'Arcais, *Corso di calcolo infinitesimale*, vol. I (seconda ediz., Padova: Draghi, 1899), p. 145.

Consideriamo all'uopo le n espressioni lineari nelle y

$$\sum_1^n {}_j \left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right)^{(0)} y_j ,$$

e le differenze

$$v_l(x; y) = \sum_1^n {}_j \left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right)^{(0)} y_j - u_l(x; y) , \qquad (l = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

alle quali manifestamente competono derivate nulle rapporto alle y, per $x = y = 0$.

Ora le n equazioni (1) equivalgono a

$$\sum_1^n {}_j \left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right)^{(0)} y_j = v_l(x; y) , \qquad (l = 1, 2, \dots, n),$$

od anche, badando all'ipotesi c) e risolvendo rapporto alle y (in quanto esplicitamente contenute nei primi membri) mediante la regola di Cramer, a

$$y_i = \sum_1^n {}_l c_{li} v_l(x; y) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Scriveremo più concisamente

$$y_i = f_i(x; y) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1'}$$

tenendo presente che le n funzioni

$$f_i(x; y) = \sum_1^n {}_l c_{li} v_l(x; y) , \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

posseggono, al pari delle v_l, derivate rapporto alle y, che si annullano tutte per $x = y = 0$.

3. - Algoritmo risolutivo.

Se le equazioni (1) fossero state lineari (rapporto alle y) il passaggio alle equivalenti (1') le avrebbe senz'altro risolute, risultando le f_i indipendenti dalle y. In generale non sarà così; però la circostanza che le f_i ammettono, per $x = y = 0$, derivate nulle rispetto alle y, può enunciarsi in modo espressivo dicendo che le f_i stesse variano poco colle y, nell'immediata prossimità di $x = y = 0$. Ciò mostra che (almeno in un piccolo intorno dei valori $x = 0$) una prima approssimazione $y_i^{(1)}$ delle incognite funzioni y_i può ottenersi, trascurando addirittura la (lieve) variabilità delle f colle y, ponendo cioè

$$y_i^{(1)} = f_i(x; 0) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4}$$

con che in particolare $y_i^{(1)} = 0$, per $x = 0$.

Trovata una prima approssimazione, è naturale di cercarne una seconda $y_i^{(2)}$, introducendo nei secondi membri delle (1′), in luogo dei valori iniziali zero (con che era completamente trascurata la dipendenza delle f dagli argomenti y), le già conseguite prime approssimazioni $y^{(1)}$, ponendo cioè

$$y_i^{(2)} = f_i(x, y^{(1)}) \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

con che anche le $y_i^{(2)}$ si annullano tutte per $x = 0$.

Di qua si passa ad una ulteriore approssimazione, e via dicendo. Dopo ν operazioni ($\nu = 1, 2, 3, ...,$) si hanno delle espressioni approssimate $y_i^{(\nu)}$, che diremo d'ordine ν, nulle anch'esse per $x = 0$; se ne traggono quelle d'ordine successivo $\nu+1$, a norma delle formule generiche

$$y_i^{(\nu+1)} = f_i(x; y^{(\nu)}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, ..., n \\ \nu = 1, 2, 3, ... \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ed è ben chiaro che, per $x = 0$, si seguita ad avere $y_i^{(\nu+1)} = 0$.

Per la giustificazione del procedimento basterà accertare:

1) La effettiva costruibilità delle successive approssimazioni senza uscire dal campo Γ, in cui sono definite le f_i. Più precisamente che esiste almeno un campo γ di valori delle x, compreso in Γ (diciamo $|x| \leqslant h$, essendo $0 < h \leqslant H$) entro cui una generica $y^{(\nu)}$ si mantiene in modulo inferiore ad H: converrà anzi (cfr. n. 5) introdurre un certo numero $k \leqslant H$. Comunque, riescono con ciò legittime (in base all'ipotesi a) del n. 1) le posizioni (5), che definiscono le approssimazioni d'ordine immediatamente superiore $y_i^{(\nu+1)}$; e queste risultano funzioni delle x, continue in γ, se tali sono le $y^{(\nu)}$.

2) Che le approssimazioni successive $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, y_i^{(3)}, ...$ di una stessa y_i convergono *uniformemente*, *entro* γ, verso una funzione continua φ_i delle x.

Invero, ove siano stabiliti questi due punti, si ha, per la continuità delle funzioni f_i in Γ,

$$\lim_{\nu=\infty} f_i(x; y^{(\nu)}) = f_i(x; \varphi),$$

e le (5) porgono di conseguenza, passando al limite per $\nu = \infty$,

$$\varphi_i = f_i(x, \varphi) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{6}$$

le quali ci mostrano che le funzioni φ_i verso cui convergono le successive approssimazioni delle y_i, rendono identicamente soddisfatte le equazioni (1′), ossia porgono l'espressione esplicita delle n funzioni delle x, che si trattava appunto di definire come soluzioni delle equazioni stesse.

La dimostrazione dei due punti suaccennati poggia su alcune disuguaglianze, che passo a dedurre.

4. - Disuguaglianze conseguenti dall'ammesso comportamento delle funzioni u (ipotesi a) e b)).

Le f, al pari delle u, sono, entro Γ, finite e continue, e dotate di derivate prime rapporto alle y, pure finite e continue.

Designamo con x, y; x, $y + \Delta y$ due generici sistemi di valori degli argomenti appartenenti entrambi al campo Γ, e poniamo

$$\eta_j = y_j + t\Delta y_j \qquad (j = 1, 2, ..., n), \tag{7}$$

con che, per $0 \leqslant t \leqslant 1$, anche le η appartengono a Γ. Potremo intanto scrivere

$$\frac{df(x;\eta)}{dt} = \sum_1^n{}_j \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \Delta y_j ,$$

e quindi, integrando rispetto a t fra 0 e 1 e badando alle (7),

$$f(x; y + \Delta y) - f(x; y) = \int_0^1 dt \sum_1^n{}_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \Delta y_j . \tag{8}$$

Ove si ricordi che il modulo di un integrale è inferiore o tutt'al più eguale all'integrale dei moduli e si indichi con L un limite superiore dei valori assoluti delle n^2 derivate prime $|\partial f_i / \partial y_i|$ nel campo che si considera, si ricavano tosto dalla (8) le n disuguaglianze [3]

$$|f_i(x; y + \Delta y) - f_i(x; y)| \leqslant L \sum_1^n{}_j |\Delta y_i| \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{9}$$

---

[3] È appena necessario osservare che, nel campo reale, le stesse disuguaglianze si hanno subito dal così detto teorema dell'aumento finito (o del valore medio).

Ciò premesso, sfruttiamo la circostanza che le derivate delle f rapporto alle y sono funzioni continue, le quali si annullano tutte per $x = y = 0$.

Scelto a piacimento un numero positivo $\varepsilon < 1$, potremo in conformità coordinargli un altro numero positivo $k \leqslant H$, tale che, per $|x| \leqslant k$, $|y| \leqslant k$, ogni $\partial f_i/\partial y_i$ si conserva, in modulo, minore di ε/n.

E ancora, per essere le $f_i(x, 0)$ funzioni continue delle x, che si annullano per $x = 0$, siamo fatti certi che esse si mantengono inferiori, in modulo, a $k(1-\varepsilon)$, per valori abbastanza piccoli delle $|x|$: diciamo per $|x|$ non superiore ad un conveniente numero h, che è sempre lecito rimpicciolire, sì da ridurlo (ove già non fosse) $\leqslant k$. Designeremo con γ l'intorno $|x| \leqslant h$.

In definitiva possiamo ritenere che *in un certo intorno* $|x| \leqslant h$, $|y| \leqslant k$ *dei valori zero degli* $m+n$ *argomenti* x, y, *tutto contenuto in* Γ, *sussistono le disuguaglianze*

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| < \frac{\varepsilon}{n}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n), \tag{10}$$

$$|f_i(x; 0)| < k(1+\varepsilon) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{11}$$

in cui ε *rappresenta una frazione propria.*

Tenendo conto delle (10), le (9), limitate a valori dell'intorno suddetto, possono essere scritte

$$|f_i(x; y + \Delta y) - f_i(x; y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_{1}^{n}{}_j |\Delta y_j|, \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{12}$$

5. - Dimostrazione di illimitata applicabilità delle successive approssimazioni.

Consideriamo un generico sistema di valori delle x, contenuti nel campo γ ($|x| \leqslant h$). Le prime approssimazioni delle y

$$y_i^{(1)} = f_i(x; 0) \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{4}$$

risultano, in modulo, $< k(1-\varepsilon)$, a norma delle (11), e quindi a fortiori $< k$.

Per riconoscere il comportamento delle seconde approssimazioni $y_i^{(2)}$, consideriamo *le correzioni*

$$\delta_i^{(1)} = y_i^{(2)} - y_i^{(1)} = f_i(x; y^{(1)}) - f_i(x; 0) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{13}$$

che vanno apportate alle prime approssimazioni $y_i^{(1)}$ per conseguire le $y_i^{(2)}$.

Si ha dalle (12)

$$|\delta_i^{(1)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_1^n{}_j |y_j^{(1)}|,$$

e per conseguenza, essendo ogni prima approssimazione $y_i^{(1)}$ inferiore a $k(1-\varepsilon)$ in valore assoluto,

$$(14) \qquad |\delta_i^{(1)}| \leqslant \varepsilon k(1-\varepsilon) \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Con ciò le (13) porgono

$$|y_i^{(2)}| = |y_i^{(1)} + \delta_i^{(1)}| \leqslant |y_i^{(1)}| + |\delta_i^{(1)}| \leqslant k(1-\varepsilon) + \varepsilon k(1-\varepsilon),$$

ossia

$$(15) \qquad |y_i^{(2)}| \leqslant k(1-\varepsilon^2) \leqslant k \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

donde apparisce che anche le seconde approssimazioni non superano k in valore assoluto.

È facile ora provare induttivamente che, se si introducono le correzioni dei vari ordini

$$(16) \qquad \delta_i^{(\nu)} = y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, ..., n \\ \nu = 1, 2, 3, ... \end{pmatrix},$$

si ha, per un ν generico,

$$(17) \qquad |\delta_i^{(\nu)}| \leqslant \varepsilon^\nu k(1-\varepsilon) \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

$$(18) \qquad |y_i^{(\nu+1)}| \leqslant k(1-\varepsilon^{(\nu+1)}) \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

dalle quali ultime in particolare discende (per essere in ogni caso $1-\varepsilon^{\nu+1} < 1$) che si resta indefinitamente al disotto di k, in valore assoluto.

Invero le due disuguaglianze (17) e (18) valgono per $\nu = 1$, riducendosi allora alle (14) e (15), testè stabilite. Supposto poi che esse sussistano fino ad un certo ordine $\nu - 1$, si estendono al successivo ν, come segue:

Dalle (16) e (5) si ha

$$\delta_i^{(\nu)} = y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)} = f_i(x; y^{(\nu)}) - f_i(x; y^{(\nu-1)}),$$

donde, prendendo i valori assoluti e badando alle (12),

$$|\delta_i^{(\nu)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_{1}^{n}{}_j |y_j^{(\nu)} - y_j^{(\nu-1)}| .$$

Le differenze $y_i^{(\nu)} - y_j^{(\nu-1)}$ non sono altro che le correzioni $\delta_j^{(\nu-1)}$, per le quali supponiamo già constatate le disuguaglianze (17)

$$|\delta_j^{(\nu-1)}| \leqslant \varepsilon^{\nu-1} k(1-\varepsilon) .$$

Ne vengono le disuguaglianze analoghe

$$|\delta_j^{(\nu)}| \leqslant \varepsilon^{\nu} k(1-\varepsilon)$$

per le correzioni d'ordine ν.

D'altra parte le (16) danno

$$y_i^{(\nu+1)} = y_i^{(\nu)} + \delta_i^{(\nu)} ;$$

quindi, ritenute valide le (18) per $|y_i^{(\nu)}|$, e usando la limitazione testè conseguita per $|\delta_i^{(\nu)}|$, si ha

$$|y_i^{(\nu+1)}| \leqslant k(1-\varepsilon^\nu) + \varepsilon^\nu k(1-\varepsilon) = k(1-\varepsilon^{\nu+1}) , \qquad \text{c. d. d.}$$

Per uniformità di notazione, conviene risguardare lo zero (valore assunto da ogni y, per $x = 0$) come approssimazione d'ordine zero, $y_i^{(0)}$. Del pari conviene introdurre le correzioni d'ordine zero

$$\delta_i^{(0)} = y_i^{(1)} - y_i^{(0)} = f_i(x; 0) \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

che coincidono colle $y_i^{(1)}$ e verificano le disuguaglianze

$$|\delta_i^{(0)}| = |y_i^{(1)}| \leqslant k(1-\varepsilon) .$$

Con ciò le (17) e le (18), di cui era stata provata la validità da $\nu = 1$ in avanti, rimangono estese anche al valore zero dell'ordine ν.

6. - Convergenza.

Le disuguaglianze (17) mostrano che, qualunque sia il sistema di valori delle x contenuti in γ (cioè in modulo non superiori ad h), che si prendono a considerare, le n serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_\nu \, \delta_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

sono uniformemente convergenti, e, siccome i singoli termini sono funzioni continue delle x, nulle per $x = 0$, tali risultano anche le loro somme φ_i.

Ora, dalla stessa definizione delle varie correzioni δ [cioè dalle (19) e (16)], si ha manifestamente

$$y_i^{(\nu)} = \delta_i^{(0)} + \delta_i^{(1)} + \ldots + \delta_i^{(\nu-1)}$$

ossia $y_i^{(\nu)}$ è somma dei primi ν termini di una serie assolutamente e uniformemente convergente in γ. Ne consegue che si ha (uniformemente nel campo γ)

$$\lim y_i^{(\nu)} = \sum_0^\infty {}_\nu\, \delta_i^{(\nu)} = \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

designando le φ funzioni delle variabili indipendenti x, finite e continue in γ, le quali si annullano per $x = 0$.

Così le funzioni implicite y_i, definite dalle (1), rimangono esplicitate quali somme di serie (assolutamente e uniformemente convergenti).

Dal punto di vista della rappresentazione analitica formale, è questo il risultato definitivo; più espressiva e più comoda per il calcolo effettivo è la determinazione sotto forma di limite delle approssimazioni successive.

7. - Univocità della risoluzione.

Mostriamo che, oltre delle φ_i, non può esistere un diverso sistema di funzioni

$$y_i = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

annullantisi per $x = 0$, finite e continue nell'intorno di questi valori, le quali verifichino le stesse equazioni implicite (1').

All'uopo cominciamo coll'osservare che, annullandosi queste ipotetiche ψ_i per $x = 0$ ed essendo continue, esiste un certo intorno nel quale esse si mantengono in valore assoluto minori di quel numer positivo k, che figura nelle precedenti considerazioni.

Limitiamo, ove occorra, questo intorno in modo che sia tutto contenuto in γ, e diciamolo γ^*.

Si constaterà che in γ^* le funzioni ψ_i necessariamente coincidono colle φ_i.

Proviamoci infatti a supporre il contrario e formiamo le n differenze

$$\omega_i = \varphi_i - \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

I valori assoluti, che loro competono in γ^*, ammetteranno (nell'ipotesi che si tende ad escludere) un limite superiore λ, *diverso da zero*. Di più, trattandosi di funzioni continue, potremo asserire che c'è un ben determinato sistema di valori x^* del campo γ^*, per i quali una almeno delle ω, quella d'indice l diciamo, assume precisamente un valore di modulo λ.

Ciò posto, sfruttiamo la circostanza che tanto le φ, quanto le ψ sono soluzioni delle (1'). Dovremo avere

$$\varphi_l = f_l(x; \varphi), \qquad \psi_l = f_l(x; \psi),$$

donde, per differenza,

$$\omega_l = f_l(x; \varphi) - f_l(x, \psi). \tag{21}$$

Attribuiamo alle x i valori x^*, chiamando φ^*, ψ^*, ω^* i valori corrispondentemente assunti dalle φ, ψ, ω, e osserviamo che tanto le φ^* quanto le ψ^* sono in modulo inferiori a k, sicchè alla differenza del secondo membro può applicarsi la disuguaglianza (21). Ciò dà

$$|f_l(x^*; \varphi^*) - f_l(x^*; \psi^*)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_1^n {}_j |\varphi_j^* - \psi_j^*| = \frac{\varepsilon}{n} \sum_1^n {}_j |\omega_j^*|.$$

Nessuna delle $|\omega|$ supera λ. Il secondo membro della (21) ha perciò un valore assoluto non superiore a $\varepsilon\lambda$ ($\varepsilon < 1$). Invece (per gli stessi valori x^* delle x) il primo membro è proprio eguale λ in valore assoluto. L'ipotesi $\lambda > 0$ porta, come si vede, a manifesta contraddizione.

Sarà dunque $\lambda = 0$, il che è quanto dire $\psi_i = \varphi_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) in tutto il campo γ^*, c. d. d.