

## VII.

### SULLA ESPRESSIONE ASINTOTICA DEI POTENZIALI RITARDATI

« Atti del IV Congresso intern. dei matematici, Roma, 1908 »,  
vol. III, Roma, 1909, pp. 89-100.

#### 1. - Richiamo della equazione di Doppler.

Sia  $P$  un punto mobile con data legge, rispetto ad un certo sistema di riferimento;  $O$  un punto fisso.

Dette

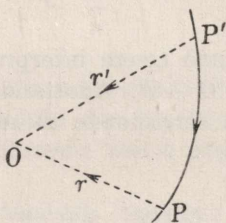
$$(1) \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

le coordinate di  $P$  in un generico istante  $t$ ;  $x_0, y_0, z_0$  le coordinate di  $O$ , si designi al solito la distanza  $\overline{OP}$  con

$$(2) \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Si supponga che da  $P$  emanino azioni di tipo newtoniano, propagantisi per onde sferiche con velocità costante  $c$ .

Si fissi un istante  $t$ , e sia in questo istante la posizione di  $P$  distinta da  $O$ , cioè  $r > 0$ .



Amnesso che la velocità  $v$  di  $P$  sia stata, prima dell'istante considerato, costantemente inferiore ad un limite fisso  $< c$ , esiste sulla traiettoria una ed una sola posizione di *utile emissione*; voglio dire una ed una sola posizione anteriore  $P'$ , tale che, partendone un'azione nell'istante  $t'$ , in cui vi transita il mobile, l'arrivo in  $O$  segue proprio all'istante  $t$ .

Tale univoca esistenza si dimostra subito dando forma analitica alla definizione dell'istante  $t'$  e della corrispondente posizione  $P'$ .

La proprietà caratteristica è che l'intervallo di tempo  $t - t'$  risulti eguale a quello che si richiede per la propagazione con velocità  $c$  da  $P'$  fino in  $O$ .

Sarà pertanto

$$(3) \quad t' = t - \frac{r'}{c}.$$

designando  $r'$  la distanza  $\overline{OP'}$ .

D'altra parte la stessa  $r'$  non è altro che il valore per  $t = t'$  della funzione  $r(t)$ , definita dalla (2).

Si ha così, per determinare  $r'$ , la equazione implicita ben nota

$$(D) \quad r' = r\left(t - \frac{r'}{c}\right),$$

che si può a buon diritto chiamare *equazione di DOPPLER*.

Trovato  $r'$ , la (3) dà il corrispondente istante  $t'$ .

Indichiamo con  $\mathbf{v}$  (vettore) la velocità di  $P$  nell'istante  $t$ , con  $\mathbf{v}'$  l'analoga velocità nell'istante  $t'$ .

Le componenti di  $\mathbf{v}$  sono manifestamente  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ , il punto sovrapposto significando derivazione rapporto a  $t$ .

Dalla (2) si ha

$$\dot{r} = \frac{x - x_0}{r} \dot{x} + \frac{y - y_0}{r} \dot{y} + \frac{z - z_0}{r} \dot{z},$$

in cui il secondo membro può essere interpretato come la componente di  $\mathbf{v}$  secondo la direzione  $O \rightarrow P$ . Adottando come direzione positiva del segmento  $r$  quella che corrisponde al segno di propagazione, cioè la  $P \rightarrow O$ , potremo scrivere

$$(4) \quad r = -v_r.$$

Ciò posto, consideriamo la differenza

$$r' - r \left( t - \frac{r'}{c} \right),$$

come funzione dell'argomento (positivo)  $r'$ .

Derivando rapporto a  $r'$ , e badando alla (4) (riferita all'istante anteriore  $t' = t - (r'/c)$ ), si ha

$$1 - \frac{v_r'}{c}.$$

Comunque vari  $r'$  (per valori positivi), questa espressione ha un limite inferiore  $> 0$ , in base all'ipotesi che la velocità  $v$  (e a fortiori una sua componente  $v_r$ ) si mantenga, in ogni istante anteriore a  $t$ , al disotto di una quantità costante  $< c$ .

Segue da ciò che la differenza in questione va crescendo costantemente al crescere di  $r'$ .

Per  $r' = 0$ , essa ha il valore negativo  $-r(t)$ ; si incontrerà dunque, facendo crescere  $r'$ , uno ed un sol valore positivo, che la rende nulla.

Dacchè la ( $D$ ) equivale all'annullarsi della differenza

$$r' - r \left( t - \frac{r'}{c} \right),$$

rimane provata l'univoca esistenza di una sua radice positiva  $r'$  (funzione del parametro  $t$ ).

## 2. - Definizione (cinetica) di potenziale ritardato.

Un potenziale newtoniano ordinario si presenta sotto la forma

$$\frac{k}{r},$$

essendo  $k$  (per un dato punto potenziante) funzione determinata di  $t$ .

Supponiamo per un momento che il punto potenziante sia in quiete ed esprimiamo che la prepagazione non è istantanea, ma si compie con velocità  $c$ .

All'uopo, basta manifestamente riportare la funzione  $k$  all'istante

dell'emissione, che precede  $t$  di  $r/c$ . Ciò dà

$$\frac{k(t - r/c)}{r},$$

che può ben dirsi la forma statica di un potenziale ritardato. Essa si presenta nel modo il più diretto e spontaneo, quando si ha riguardo ad una posizione di emissione fissa.

Se il punto potenziante  $P$  si muove, interviene una duplice modificazione <sup>(1)</sup>, rilevata dai sigg. LIÉNARD e WIECHERT. Anzitutto bisogna riferirsi alla posizione di utile emissione  $P'$ ; inoltre va introdotto il fattore

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1 - v'_r/c}.$$

Si ha così in generale (cioè comunque <sup>(2)</sup> si muova il punto potenziante  $P$ ), per un potenziale ritardato  $f$ , la forma analitica seguente:

$$(5) \quad f = \frac{k(t - r'/c)}{r'(1 - v'_r/c)}.$$

Come si vede, la  $f$  dipende dalla posizione e dalla velocità del punto  $P$ , non nell'istante attuale  $t$ , ma in un certo istante anteriore  $t'$ , a caratterizzare il quale interviene [a norma della (D)] la storia del mobile, cioè la natura delle funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  in un intervallo *finito* di tempo, precedente  $t$ .

### 3. - Casi limiti e relativi intorni. Condizioni cinematiche caratteristiche. Relazione del secondo caso limite colla quasi-stazionarietà di Abraham.

Vi sono due casi limiti, in cui il carattere funzionale della dipendenza di  $f$  dallo stato di moto del punto  $P$ , viene a sparire:

1) quando si ritorni all'ipotesi classica di una propagazione istantanea ( $1/c = 0$ );  $r'$  e  $t'$  coincidono allora naturalmente con  $r$  e  $t$ ;

2) quando, pur essendo qualunque la velocità di propagazione, la posizione attuale del mobile tenda a confondersi con quella del punto

<sup>(1)</sup> Cfr. per es. la nota *Sul campo elettromagnetico generato*, ecc. (Nuovo Cimento, Ser. V, T. VI, 1903, pagg. 153-162) [in queste « Opere »: vol. secondo, VIII bis, pp. 199-216]; oppure ABRAHAM, *Elektromagnetische Theorie der Strahlung* (Leipzig, Teubner, 1905, pp. 82-84).

<sup>(2)</sup> Rispettando, beninteso, la restrizione qualitativa  $v < c$ .

potenziato  $O$  ( $\lim r = 0$ ). È chiaro infatti che, ove sia nullo il cammino da percorrere, le cose vanno come se la propagazione fosse istantanea.

Per rendersene conto analiticamente, basta osservare la (D): il valore limite della radice  $r'$ , al convergere di  $r(t)$  a zero, è manifestamente  $r' = 0$ .

Particolarmente importante è il comportamento dei potenziali ritardati in prossimità di questi due casi limiti: cioè rispettivamente per  $c$  molto grande, o per  $r$  molto piccolo.

Interessa prima di tutto farsi un'idea del significato concreto delle qualifiche « grande » e « piccolo », in relazione ad altri elementi omogenei del fenomeno di cui si tratta.

Si è prossimi al primo caso limite ( $1/c = 0$ ), quando la velocità  $v$  del mobile (in tutto l'intervallo di tempo, che occorre considerare) è molto piccola di fronte alla velocità di propagazione  $c$ .

Si è invece prossimi al secondo caso limite, quando è piccolo il rapporto numerico

$$\frac{ra}{c^2},$$

designando  $a$  l'accelerazione del mobile, anzi il limite superiore delle accelerazioni, che esso assume, durante l'intervallo di tempo considerato.

Si osservi che  $r/c$  non è altro che il tempo di propagazione da  $P$ , fino in  $O$ , e che di conseguenza  $a(r/c)$  porge un limite superiore per la differenza di velocità del mobile fra l'istante dell'emissione e quello dell'arrivo in  $O$ .

La piccolezza del rapporto  $ra/c^2$  è così suscettibile della interpretazione seguente:

la velocità  $v$  del mobile (anche senza essere di per sè piccola di fronte a  $c$ ) subisce durante il tempo di propagazione (fino al punto potenziato  $O$ ), variazioni, le quali restano sempre piccole di fronte a  $c$ .

Lo sviluppo dei potenziali ritardati, nell'intorno di  $1/c = 0$  <sup>(3)</sup>, e le espressioni approssimate, che ne conseguono, allorchè ci si limita a termini di dato ordine in  $v/c$  sono, si può dire, d'uso corrente. Nè io mi permetterò di spendervi parola, desiderando piuttosto di richiamare l'attenzione sull'altro caso limite e sui corrispondenti sviluppi, che dirò asintotici, visto che un potenziale  $f$  tende a crescere indefinitamente, quando  $r$ , e con esso  $r'$ , converge a zero.

Prima però di esporre il lato matematico della questione, debbo far presente come essa si colleghi indirettamente colle ricerche del signor ABRAHAM <sup>(4)</sup>.

<sup>(3)</sup> Si veggia per lo sviluppo completo la bella Nota del sig. HERGLOTZ, *Ueber die Berechnung retardierter Potentiale* (Göttinger Nachrichten, 1904, pp. 549-556).

<sup>(4)</sup> Cfr. in particolare i §§ 16-23 della citata sua opera.

È ben noto che, anteriormente a tali ricerche, l'unico criterio di riduzione (inteso a sostituire alle espressioni funzionali delle espressioni differenziali approssimate) fu di operare nell'intorno di  $1/c = 0$ , sfruttando la piccolezza del rapporto  $v/c$ .

Il sig. ABRAHAM seppe rinunciare a tale ipotesi restrittiva e riesci a trovare (non proprio per i potenziali, ma per gli elementi fisici, che ne dipendono) un nuovo criterio di riduzione, basato sopra una felice intuizione di analogia meccanica: quella dei fenomeni quasi-stazionari.

Dal punto di vista matematico, l'origine e la giustificazione di un tale procedimento risiede negli sviluppi asintotici. Renderò conto di ciò in un prossimo lavoro, dove farò vedere, illustrandone le conseguenze, come si precisino e si completino alcuni risultati di meccanica elettromagnetica.

Dovrò quindi limitarmi a brevi considerazioni di natura analitica.

#### 4. - Risoluzione asintotica della equazione di Doppler.

Si tratta sostanzialmente di esplicitare la funzione  $r'(t)$  definita dalla

$$(D) \quad r' = r \left( t - \frac{r'}{c} \right),$$

in un intorno di  $r(t) = 0$ . Più precisamente si richiede di trovare uno sviluppo dell'incognita  $r'$ , il quale metta in evidenza i termini di vario ordine rispetto ad  $r(t)$ , nell'ipotesi che, pur restando regolare il moto di  $P$ , la traiettoria tenda a passare per  $O$ . La regolarità del moto va intesa nel consueto significato cinematico: le funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , sono cioè a ritenersi finite, continue e derivabili quanto occorre.

La difficoltà della questione — se pur ve n'è una — risiede nel fatto che, quando la traiettoria tende a passare per  $O$ , la funzione (data)  $r(t)$ , la quale compare nel secondo membro della (D), non si comporta regolarmente, come fanno le coordinate cartesiane, ma ha già una derivata seconda, che non resta finita.

Per girare la difficoltà, conviene quadrare i due membri della (D) e studiare l'equazione

$$(D') \quad r'^2 - q \left( t - \frac{r'}{c} \right) = 0,$$

dove

$$(6) \quad q(t) = r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

è funzione perfettamente regolare di  $t$ , assieme ad  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , e resta tale anche quando (facendo per es. variare dei parametri, che per lo scopo attuale non importa specificare)  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  tendono rispettivamente ad assumere (per un qualche valore di  $t$ ) i valori  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ .

La (D') possiede naturalmente, al pari della (D), una ed una sola radice positiva. Per riconoscerne il comportamento nel senso dichiarato, porremo

$$(7) \quad r' = \lambda r,$$

e applicheremo alla funzione  $q(t - (\lambda r/c))$  lo sviluppo (abbreviato) di TAYLOR fino al terz'ordine (inclusivo).

La (D') diviene con ciò

$$\lambda^2 r^2 - q + \frac{\lambda}{c} \dot{q} r - \frac{\lambda^2}{2c^2} \ddot{q} r^2 + \frac{\lambda^3}{6c^3} \ddot{\ddot{q}} r^3 + Q r^4 = 0,$$

dove,  $q$ ,  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$ ,  $\ddot{\ddot{q}}$  si riferiscono al valore  $t$  dell'argomento, e il coefficiente  $Q$  è a ritenersi finito e continuo anche per  $r$  convergente a zero.

Si noti che la derivazione della (6) porge

$$(8) \quad \dot{q} = 2 \sum (x - x_0) \dot{x} = -2rv_r,$$

il simbolo  $\sum$  designando la somma del termine scritto e di quelli che si ottengono da esso, cambiando successivamente  $x$  in  $y$  ed  $z$ .

Per ulteriore derivazione si ha poi

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \ddot{q} = \sum \dot{x}^2 + \sum (x - x_0) \ddot{x} = v^2 - ra_r, \\ \frac{1}{6} \ddot{\ddot{q}} = \sum \dot{x} \dot{x} + \frac{1}{3} \sum (x - x_0) \ddot{\ddot{x}} = va_v - \frac{1}{3} r \dot{a}_r, \end{cases}$$

dove  $a_v$  rappresenta la componente dell'accelerazione  $\mathbf{a}$  di  $P$  nel senso del moto,  $\mathbf{a}$  il vettore derivato di  $\mathbf{a}$ , rapporto a  $t$ .

Se ora si divide per  $r^2$  la equazione in  $\lambda$ , ricavata dalla (D'), e si ha riguardo alle (6), (8) e (9), ove si ponga per brevità

$$(10) \quad \frac{1}{c} v = \beta,$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{c} v = \beta, \quad \frac{1}{c} v_r = \beta_r;$$

nonchè

$$(11) \quad (1 - \beta^2)\lambda^2 - 2\beta_r\lambda - 1 = \omega_0,$$

$$(12) \quad \frac{1}{c^2} (a_r\lambda^2 + \beta a_v\lambda^3) = \omega_1,$$

$$(13) \quad -\frac{1}{3} \frac{\lambda^3}{c^3} \dot{a}_r + Q = \Omega,$$

con che  $\Omega$  resta finita, anche per  $r$  convergente a zero, risulta

$$(D'') \quad \frac{r'^2 - q(t - r'/c)}{r^2} = \omega = \omega_0 + \omega_1 r + \Omega r^2 = 0.$$

Prendendo sotto questa forma la equazione di definizione di  $\lambda$ , si è raggiunto lo scopo di esplicitare i termini di ordine zero e quelli di ordine 1 rispetto a  $r$ . È chiaro del resto che, protraendo abbastanza lo sviluppo di  $q(t - (\lambda r/c))$ , si potrebbero analogamente esplicitare i termini successivi del primo membro  $\omega$ , fino ad un ordine comunque elevato.

Eguagliando a zero il termine  $\omega_0$ , d'ordine zero, si ha

$$(1 - \beta^2)\lambda^2 - 2\beta_r\lambda - 1 = 0,$$

equazione di secondo grado in  $\lambda$ , la quale, per essere  $\beta = v/c < 1$ , ammette due radici di segno opposto

$$(14) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\beta_r + s}{1 - \beta^2}, \\ \lambda_2 = \frac{\beta_r - s}{1 - \beta^2}, \end{cases}$$

dove

$$(15) \quad s = \sqrt{1 - \beta^2 + \beta_r^2},$$

intendendosi attribuito al radicale il suo valore aritmetico;  $\lambda_1$  rappresenta così la radice positiva, e si ha identicamente

$$(11') \quad \omega_0 = (1 - \beta^2)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$



Ciò premesso, trattiamo l' $r$ , in quanto compare esplicitamente in  $\omega$  (in quanto cioè segna l'ordine dei vari termini), come un parametro, in funzione del quale debba definirsi  $\lambda$  dalla (D''). Per l'equivalenza colla originaria (D), siamo a priori sicuri (in base alla posizione  $r' = \lambda r$ ) che la (D'') ammette una ed una sola radice positiva.

Dacchè, per  $r = 0$ , essa è soddisfatta da  $\lambda = \lambda_1$ , e la derivata del primo membro

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda}\right)_{\substack{\lambda=\lambda_1 \\ r=0}} = (1 - \beta^2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 2s$$

non si annulla, si può trarne  $\lambda$  come funzione di  $r$ , per  $r$  abbastanza piccolo. È questa la soluzione, che a noi interessa. A meno di termini in  $r$ , si avrà manifestamente  $\lambda = \lambda_1$ .

Formando la

$$\frac{d\lambda}{dr} = - \frac{\partial \omega / \partial r}{\partial \omega / \partial \lambda},$$

e ponendovi  $r = 0$ , si otterrà il coefficiente del termine in  $r$ .

In generale, se nella (D'') si trovano esplicitati i termini fino ad un certo ordine  $n$ , si potrà, per derivazione successiva, trarne i corrispondenti termini della radice  $\lambda$ .

### 5. - Espressione asintotica di un potenziale ritardato.

Determinato per  $\lambda$  (e quindi per  $r' = \lambda r$ ) uno sviluppo valido nell'intorno di  $r = 0$ , è subito risolta l'analoga questione per un potenziale ritardato.

Ecco del resto come conviene procedere per abbreviare il calcolo. Data l'espressione (6) di  $q$ , si ha

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r'} q \left( t - \frac{r'}{c} \right) = r' \left( 1 - \frac{v_r'}{c} \right),$$

quindi anche

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r'} \left\{ r'^2 - q \left( t - \frac{r'}{c} \right) \right\} = r' \left( 1 - \frac{v_r'}{c} \right).$$

Sostituendo nel primo membro  $\lambda r$  al posto di  $r'$ , e badando alla

posizione

$$\frac{r'^2 - q(t - r'/c)}{r^2} = \omega,$$

potremo scrivere

$$\frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = r' \left( 1 - \frac{v_r'}{c} \right),$$

donde, ponendo ancora

$$(16) \quad \mu = 2 \frac{k(t - \lambda r/c)}{\partial \omega / \partial \lambda},$$

e confrontando colla (5),

$$(5') \quad f = \frac{\mu}{r}.$$

Si intende che in  $\mu$  va sostituito per  $\lambda$  il suo valore definito dalla (D''), cioè quella tale radice di  $\omega = 0$ , che si riduce a  $\lambda_1$  per  $r = 0$ .

Al pari di  $\lambda$ , la funzione  $\mu$  è suscettibile di uno sviluppo procedente per termini d'ordine sempre più elevato rispetto a  $r$ . Per quello d'ordine zero, si avrà in particolare dalla (16), ponendosi  $r = 0$  e quindi  $\lambda = \lambda_1$ ,

$$(17) \quad \mu_0 = (\mu)_{r=0} = 2 \frac{k(t)}{(\partial \omega_0 / \partial \lambda)_{\lambda=\lambda_1}} = \frac{k}{s}.$$

Di qua risulta subito l'espressione asintotica di  $f$ :

$$(I) \quad \frac{\mu_0}{r} = \frac{k}{r} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k(t)}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 + \beta_r^2}}.$$

È il caso di parlare di espressione asintotica perchè, mentre, al convergere di  $r$  a zero, tanto  $\mu/r$ , quanto  $\mu_0/r$  crescono indefinitamente, siamo sicuri che la differenza  $(\mu - \mu_0)/r$  resta finita.

Più generalmente, si potrà chiamare asintotico anche lo sviluppo di  $f$ , che si ottiene esplicitando l'ordine dei vari termini rispetto ad  $r$ .

## 6. - Calcolo del secondo termine. Considerazioni riassuntive.

Valutiamo anche il termine in  $r$ ,  $\mu_1 r$ , nello sviluppo di  $\mu$ . Essendo, a meno di termini in  $r^2$ ,

$$k \left( t - \frac{\lambda r}{c} \right) = k - \dot{k} \frac{\lambda}{c} r,$$

(dove  $k$  e  $\dot{k}$  si riferiscono all'istante attuale  $t$ ), nonchè

$$\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = \frac{\partial \omega_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \lambda} r,$$

avremo colla stessa approssimazione

$$\mu = 2 \frac{k(t - \lambda r/c)}{\partial \omega / \partial \lambda} = \frac{2k}{\partial \omega_0 / \partial \lambda} - 2 \left\{ \frac{k(\partial \omega_1 / \partial \lambda)}{(\partial \omega_0 / \partial \lambda)^2} + \frac{\dot{k}\lambda/c}{\partial \omega_0 / \partial \lambda} \right\} r.$$

Nel secondo addendo si può porre senz'altro  $\lambda = \lambda_1$ . Non così nel primo, dacchè vogliamo trascurare soltanto i termini in  $r^2$ .

Osserveremo perciò che dalla (D'') segue

$$\left( \frac{d\lambda}{dr} \right)_{r=0} = - \frac{\omega_1}{\partial \omega_0 / \partial \lambda},$$

e quindi  $(\partial \omega_0 / \partial \lambda)$  dipendendo da  $r$  — in quanto parametro dell'ordine — solo per tramite di  $\lambda$

$$\frac{1}{\partial \omega_0 / \partial \lambda} = \frac{1}{(\partial \omega_0 / \partial \lambda)_{\lambda=\lambda_1}} + \left\{ \frac{(\partial^2 \omega_0 / \partial \lambda^2) \omega_1}{(\partial \omega_0 / \partial \lambda)^3} \right\}_{\lambda=\lambda_1} r.$$

Il coefficiente di  $r$  nella espressione di  $\mu$  è dunque

$$\mu_1 = \frac{2k}{(\partial \omega_0 / \partial \lambda)^3} \left\{ \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \lambda^2} \omega_1 - \frac{\partial \omega_0}{\partial \lambda} \frac{\partial \omega_1}{\partial \lambda} \right\} - \frac{2\dot{k}}{\partial \omega_0 / \partial \lambda} \frac{\lambda}{c},$$

nella quale  $\lambda$  va dappertutto posto eguale a  $\lambda_1$ , e  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  hanno i valori (11), (12).

Eseguendo materialmente il calcolo, si trova

$$(18) \quad \mu_1 = - \frac{k}{2c^2 s^3} \left\{ a_r + \beta a_v \beta_r \frac{3(1-\beta^2) + 2\beta_r^2}{(1-\beta^2)^2} \right\} - k \frac{\beta a_v}{c^2(1-\beta^2)^2} - \frac{\dot{k}}{c(1-\beta^2)} \left( 1 + \frac{\beta_r}{s} \right),$$

dove, a norma della (15),  $s$  sta per il radicale

$$\sqrt{1 - \beta^2 + \beta_r^2}.$$

Usufruento dello sviluppo  $\mu_0 + \mu_1 r + \dots$  di  $\mu$ , si ha dalla (5')

$$(II) \quad f = \frac{\mu_0}{r} + \mu_1 + \dots,$$

in cui  $\mu_0$  e  $\mu_1$  hanno i valori (17) e (18), e i termini omissi convergono a zero con  $r$ .

Si potrebbe naturalmente procedere nel calcolo dei termini successivi, d'ordine 1, 2, ..., rispetto ad  $r$ . Il loro carattere comune è di dipendere esclusivamente dallo stato di moto del punto nell'istante attuale  $t$ . Però, mentre in  $\mu_0/r$  intervengono soltanto posizione e velocità, in  $\mu_1$  si presenta anche l'accelerazione; e, in generale, da un termine al successivo, il massimo ordine delle derivate, che vi compariscono, aumenta di una unità.

Di ciò è ben facile rendersi conto. Debbo però confessare che non sono riuscito a trovare, per la struttura dei vari termini, o, ciò che è lo stesso, per lo sviluppo asintotico di  $f$ , una forma compendiosa ed espressiva, sul tipo di quella che la serie di LAGRANGE (5) fornisce per l'altro sviluppo (nell'intorno della propagazione istantanea).

Dal punto di vista delle applicazioni, interessano, si può dire, esclusivamente i due termini che abbiamo già esplicitato.

Infatti, per  $r$  abbastanza piccolo, essi preponderano sugli altri in modo che l'influenza di questi ultimi riesce quasi trascurabile. A dire il vero, lo stesso può affermarsi, quanto all'ordine di grandezza, per  $\mu_0/r$  in confronto di  $\mu_1$ , e parrebbe che si potesse addirittura limitarsi al termine asintotico.

Ciò sta indiscutibilmente per  $f$ , e anche per le sue derivate, finchè si considera un valore locale; ma per lo più, occorre piuttosto aver riguardo a certi valori medi, relativi a sistemi continui di punti.

Può allora accadere (e accade infatti) che intervengano dei compensi, per cui il contributo del primo termine  $\mu_0/r$  risulti identicamente nullo.

Ecco perchè, di fronte alle applicazioni elettromagnetiche, viene ad acquistare speciale importanza anche il termine  $\mu_1$ .

(\*) Cfr. HERGLOTZ, loc. cit.