30.

SUR UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE D'UNE CERTAINE SÉRIE DE NOMBRES ENTIERS.

[*Comptes Rendus*, LXXXVIII. (1879), pp. 1297, 1298.]

NOMMONS le nombre de termes distincts qui figurent dans le développement d'un déterminant gauche son *dénumérant.* Soit

$$[1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)]\, u_n$$

le dénumérant d'un déterminant gauche de l'ordre $2n$. On aura pour u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, ... les valeurs successives

$$1,\ 2,\ 8,\ 50,\ 418,\ 4348,\ \ldots$$

et en général

$$u_x = (2x-1)\, u_{x-1} - (x-1)\, u_{x-2}.$$

Soit $\theta\left(\dfrac{2x+1}{8}\right)$ l'entier le plus proche (en excès ou en défaut) de $\dfrac{2x+1}{8}$. Alors je dis que *le plus grand diviseur commun à* u_x, u_{x+1} *est égal au nombre* 2 *élevé à la puissance* $\theta\left(\dfrac{2x+1}{8}\right)$.

Ce théorème se déduit des deux propositions suivantes :

1°. On démontre que u_x et x ne peuvent avoir un facteur commun impair pour aucune valeur de x; c'est une conséquence immédiate de cette loi que deux u consécutifs ne peuvent avoir non plus un facteur commun impair.

2°. On démontre que $\dfrac{u_{4x-2}}{2^x}$, $\dfrac{u_{4x-1}}{2^x}$, $\dfrac{u_{4x}}{2^x}$, $\dfrac{u_{4x+2}}{2^x}$ sont tous les quatre des nombres entiers, dont le premier et le troisième sont des nombres impairs ; cela suffit pour établir le théorème. Mais j'ajoute, comme corollaire, que la quatrième de ces quantités est aussi un nombre impair et la seconde un nombre pair, qui est toujours divisible par 4.

Le fondement du raisonnement au moyen duquel on établit cette proposition remarquable est l'identité que j'ai donnée dans * l'*American Journal of Mathematics*

$$\frac{e^{\frac{t}{4}}}{\sqrt[4]{(1-t)}} = 1 + u_1 \frac{t}{2} + u_2 \frac{t^2}{2\,.\,4} + u_3 \frac{t^3}{2\,.\,4\,.\,6} + \ldots.$$

[* p. 272 below.]