19.

SUR LES COVARIANTS FONDAMENTAUX D'UN SYSTÈME CUBO-BIQUADRATIQUE BINAIRE.

[*Comptes Rendus*, LXXXVII. (1878), pp. 242—4, 287—9.]

LE seul cas du dénombrement des *grundformen* binaires qui restait à déterminer par ma méthode, hors de ceux qui ont été calculés par la méthode de Gordan, est celui de la combinaison d'une forme biquadratique avec une forme cubique binaire.

Grâce à la coopération intelligente et à la grande habileté, comme calculateur, de M. J. Franklin, un de mes élèves à Baltimore, je suis en état de présenter à l'Académie le tableau des invariants et covariants fondamentaux, donné par la méthode de tamisage.

En partant de la forme primitive

$$\frac{1-u^{-2}}{(1-tu^4)(1-tu^2)(1-t)(1-tu^{-2})(1-tu^{-4})(1-\tau u^3)(1-\tau u)(1-\tau u^{-1})(1-\tau u^{-3})},$$

on parvient à la fraction génératrice canonique, dont le dénominateur est

$$(1-t^2)(1-t^3)(1-t^2u^4)(1-tu^4)(1-\tau^4)(1-\tau^2u^2)(1-\tau u^3)(1-t^2\tau^4)$$
$$(1-t\tau^4)(1-t^3\tau^2)(1-t^3\tau^4),$$

et dont le numérateur contient 338 termes, dont ceux qui portent des coefficients positifs sont égaux en nombre à ceux qui portent le signe négatif. En effet, à chaque terme $kt^{\alpha}.\tau^{\beta}.u^{\gamma}$ correspond un terme

$$-kt^{\alpha'}.\tau^{\beta'}.u^{\gamma'},$$

où $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$, $\gamma+\gamma'$ sont des nombres constants, lesquels (si je ne me trompe, car j'ai eu le malheur de perdre le manuscrit) sont respectivement 12, 17, 11.

En représentant un terme $kt^{\alpha}.\tau^{\beta}.u^{\gamma}$ par le symbole $(\alpha.\beta.\gamma)^k$, voici le tableau des termes positifs.

2 . 4 . 0	1 . 1 . 3	7 . 8 . 4	$(10 . 11 . 5)^2$	7 . 13 . 7	$(6 . 7 . 9)^2$
2 . 6 . 0	1 . 3 . 3	7 . 10 . 4	10 . 13 . 5	8 . 7 . 7	$(6 . 9 . 9)^2$
$(3 . 4 . 0)^2$	2 . 1 . 3	$(7 . 12 . 4)^4$	3 . 0 . 6	$(8 . 9 . 7)^5$	7 . 7 . 9
$(3 . 6 . 0)^3$	$(2 . 3 . 3)^3$	$(7 . 14 . 4)^3$	4 . 10 . 6	$(8 . 11 . 7)^4$	$(7 . 9 . 9)^3$
$(4 . 4 . 0)^2$	3 . 1 . 3	$(8 . 8 . 4)^2$	4 . 12 . 6	$(9 . 9 . 7)^3$	$(8 . 9 . 9)^3$
$(4 . 6 . 0)^2$	$(3 . 3 . 3)^5$	8 . 10 . 4	$(5 . 10 . 6)^2$	$(9 . 11 . 7)^4$	$(9 . 9 . 9)^3$
5 . 4 . 0	$(3 . 5 . 3)^2$	$(8 . 12 . 4)^2$	$(5 . 12 . 6)^2$	10 . 9 . 7	10 . 9 . 9
5 . 6 . 0	3 . 11 . 3	$(8 . 14 . 4)^2$	6 . 8 . 6	$(10 . 11 . 7)^2$	4 . 4 . 10
1 . 1 . 1	$(4 . 3 . 3)^3$	9 . 8 . 4	$(6 . 10 . 6)^2$	11 . 11 . 7	$(4 . 6 . 10)^2$
$(1 . 3 . 1)^2$	$(4 . 5 . 3)^3$	9 . 14 . 4	$(6 . 12 . 6)^2$	11 . 13 . 7	4 . 8 . 10
1 . 5 . 1	4 . 11 . 3	10 . 14 . 4	6 . 14 . 6	3 . 4 . 8	5 . 4 . 10
2 . 1 . 1	5 . 3 . 3	11 . 14 . 4	7 . 8 . 6	3 . 6 . 8	$(5 . 6 . 10)^3$
$(2 . 3 . 1)^3$	$(5 . 5 . 3)^2$	1 . 1 . 5	$(7 . 10 . 6)^4$	4 . 6 . 8	$(5 . 8 . 10)^2$
$(2 . 5 . 1)^2$	5 . 11 . 3	2 . 1 . 5	$(7 . 12 . 6)^3$	4 . 8 . 8	$(6 . 6 . 10)^2$
$(3 . 3 . 1)^2$	5 . 13 . 3	4 . 11 . 5	(7 . 14 . 6)	5 . 6 . 8	$(6 . 8 . 10)^3$
$(3 . 5 . 1)^3$	6 . 13 . 3	$(5 . 11 . 5)^2$	8 . 8 . 6	$(5 . 8 . 8)^3$	7 . 6 . 10
(4 . 3 . 1)	$(7 . 13 . 3)^2$	5 . 13 . 5	$(8 . 10 . 6)^5$	5 . 10 . 8	$(7 . 8 . 10)^2$
$(4 . 5 . 1)^2$	7 . 15 . 3	$(6 . 11 . 5)^2$	$(8 . 12 . 6)^4$	$(6 . 8 . 8)^3$	8 . 8 . 10
5 . 5 . 1	8 . 13 . 3	$(6 . 13 . 5)^3$	(8 . 14 . 6)	$(6 . 10 . 8)^3$	9 . 8 . 10
6 . 5 . 1	8 . 15 . 3	6 . 15 . 5	$(9 . 10 . 6)^4$	$(7 . 8 . 8)^4$	3 . 3 . 11
$(1 . 2 . 2)^2$	9 . 15 . 3	7 . 9 . 5	$(9 . 12 . 6)^5$	$(7 . 10 . 8)^3$	5 . 7 . 11
$(1 . 4 . 2)^2$	1 . 2 . 4	$(7 . 11 . 5)^4$	9 . 14 . 6	$(8 . 8 . 8)^2$	5 . 9 . 11
$(2 . 2 . 2)^3$	$(2 . 2 . 4)^2$	$(7 . 13 . 5)^4$	$(10 . 10 . 6)^2$	$(8 . 10 . 8)^3$	$(6 . 7 . 11)^2$
$(2 . 4 . 2)^4$	$(3 . 2 . 4)^3$	7 . 15 . 5	$(10 . 12 . 6)^3$	$(9 . 10 . 8)^4$	$(6 . 9 . 11)^3$
$(3 . 2 . 2)^2$	$(3 . 4 . 4)^2$	$(8 . 9 . 5)^2$	11 . 12 . 6	$(10 . 10 . 8)^2$	$(7 . 7 . 11)^2$
$(3 . 4 . 2)^5$	4 . 2 . 4	$(8 . 11 . 5)^5$	5 . 11 . 7	11 . 10 . 8	$(7 . 9 . 11)^2$
4 . 2 . 2	4 . 4 . 4	$(8 . 13 . 5)^4$	5 . 13 . 7	11 . 12 . 8	8 . 7 . 11
$(4 . 4 . 2)^3$	4 . 12 . 4	8 . 15 . 5	$(6 . 9 . 7)^2$	3 . 5 . 9	8 . 9 . 11
4 . 12 . 2	$(5 . 12 . 4)^3$	$(9 . 9 . 5)^2$	$(6 . 11 . 7)^3$	$(4 . 5 . 9)^2$	
5 . 4 . 2	5 . 14 . 4	$(9 . 11 . 5)^4$	$(6 . 13 . 7)^2$	$(4 . 7 . 9)^2$	
5 . 12 . 2	6 . 10 . 4	$(9 . 13 . 5)^4$	7 . 7 . 7	$(5 . 5 . 9)^2$	
9 . 16 . 2	$(6 . 12 . 4)^4$	(9 . 15 . 5)	$(7 . 9 . 7)^5$	$(5 . 7 . 9)^3$	
0 . 3 . 3	$(6 . 14 . 4)^2$	10 . 9 . 5	$(7 . 11 . 7)^4$	5 . 9 . 9	

En effectuant le tamisage, ces combinaisons se réduisent aux 50 suivantes:

2 . 4 . 0	1 . 1 . 1	$(1 . 2 . 2)^2$	0 . 3 . 3	1 . 2 . 4	1 . 1 . 5	3 . 0 . 6
2 . 6 . 0	$(1 . 3 . 1)^2$	$(1 . 4 . 2)^2$	1 . 1 . 3	2 . 2 . 4	2 . 1 . 5	
$(3 . 4 . 0)^2$	1 . 5 . 1	$(2 . 2 . 2)^2$	1 . 3 . 3	3 . 2 . 4		
$(3 . 6 . 0)^3$	2 . 1 . 1	$(2 . 4 . 2)^2$	2 . 1 . 3			
$(4 . 4 . 0)^2$	$(2 . 3 . 1)^3$	3 . 2 . 2	2 . 3 . 3			
$(4 . 6 . 0)^2$	$(2 . 5 . 1)^2$		3 . 1 . 3			
5 . 4 . 0	$(3 . 3 . 1)^2$		3 . 3 . 3			
5 . 6 . 0	$(3 . 5 . 1)^2$					
	4 . 3 . 1					

En ajoutant à ces 50 *grundformen* secondaires les 11 primaires qui proviennent du dénominateur dont les types sont

2.0.0	0.2.2
3.0.0	0.1.3
0.4.0	1.0.4
1.4.0	2.0.4
2.4.0	
3.2.0	
3.4.0	

on retrouve les 64 types calculés par M. Gundelfinger, selon la méthode de M. Gordan, avec l'exception des 3 suivants: 3.4.2, 3.4.2, 4.5.1.

Il reste à considérer les 3 covariants qui y correspondent; pour cela, je n'ai pas besoin de savoir la construction des *grundformen* données par M. Gundelfinger, car on peut procéder par un calcul algébrique direct pour déterminer si, oui ou non, le nombre des covariants linéairement indépendants appartenant à un quelconque de ces types peut être comblé par la combinaison de certains des 61 covariants connus. Ce nombre, on peut toujours le déterminer *a priori* par le théorème fondamental de M. Cayley, et, de plus, étant donné le type d'un covariant, on peut toujours trouver le covariant lui-même.

C'est par cette méthode, abrégée avec l'aide de quelques considérations appartenant à la théorie générale de la fraction génératrice, que je me suis convaincu de l'exactitude des résultats donnés par le tamisage pour le cas de deux biquadratiques, et que les deux formes, dites *irréductibles*, qui se trouvaient dans le tableau de M. Gordan, mais qui ne figuraient pas dans le mien, étaient superflues.

C'est la méthode la plus courte. Cependant, afin d'ôter toute nécessité d'expliquer la base du raisonnement, au lieu de suivre cette méthode dans la Note insérée dans les *Comptes rendus*, je jugeai préférable de prendre les deux formes qu'on obtient par la construction donnée par M. Gordan et d'en effectuer la décomposition, pour ainsi dire, sous les yeux du lecteur. J'espère, dans une prochaine Communication à l'Académie, par l'une ou l'autre de ces méthodes, pouvoir démontrer que les 3 *grundformen* supposées dont il est question sont superflues aussi, et que le véritable nombre des invariants et covariants irréductibles pour le système cubo-biquadratique binaire est effectivement 61 et non pas 64, comme le pensait M. Gundelfinger. En tout cas, je ferai savoir le vrai nombre de ces *grundformen*.

Pour m'assurer de l'exactitude des résultats précédemment donnés, j'ai fait calculer la fraction génératrice (fonction seulement de t et τ) dont le développement ne contient que les puissances positives de ces lettres, et tel que le coefficient numérique de $t^n . \tau^\nu$ coïncide avec le nombre des covariants (d'un ordre *quelconque* dans les variables) des degrés n, ν dans les coefficients de la biquadratique et la cubique respectivement. Cette fraction se déduit de la génératrice primitive

$$\frac{1}{(1-tu^4)(1-tu^2)(1-t)(1-tu^{-2})(1-tu^{-4})(1-\tau u^3)(1-\tau u)(1-\tau u^{-1})(1-\tau u^{-3})}$$

(qui ne diffère de celle dont je me suis déjà servi que dans le numérateur où se trouve 1 au lieu de $1-u^{-2}$) de la manière suivante. En la traitant comme une fonction de u, et en la décomposant en fractions partielles, on prend la somme des coefficients (fonctions de t et τ) de celles de ces fractions qui ont pour dénominateurs les facteurs de

$$1-tu^4,\ 1-tu\,;\ 1-\tau u^3,\ 1-\tau u:$$

cette somme sera la fraction génératrice cherchée. Or il est facile de démontrer que, en mettant $u=1$ dans la fraction génératrice canonique déjà obtenue, les deux fractions doivent devenir égales: on a fait ce calcul et, en comparant les deux expressions, on a trouvé entre elles un accord parfait sans qu'il y ait eu occasion d'introduire, dans l'une ou l'autre, un changement numérique quelconque, preuve satisfaisante de l'exactitude des résultats et, en même temps, de l'habileté très-peu commune du calculateur (M. Franklin), qui, par son dévouement consciencieux et opiniâtre à ce long et pénible travail, a rendu un véritable service au progrès de la science algébrique.

Ce qui ajoute considérablement à la difficulté du travail est la circonstance suivante, qui est assez intéressante en elle-même pour que je la cite ici. En faisant la décomposition en fractions partielles de la génératrice primitive, on trouvera contenus, dans les coefficients de celles mêmes qu'on doit conserver, les facteurs

$$\frac{1}{t-\tau^2},\ \frac{1}{t-\tau^4},\ \frac{1}{t^3-\tau^2},\ \frac{1}{t^3-\tau^4},$$

lesquels ne doivent et ne peuvent pas paraître dans la fraction canonique, de sorte qu'on sait d'avance que $t-\tau^2$, $t-\tau^4$, $t^3-\tau^2$, $t^3-\tau^4$ seront diviseurs exacts du numérateur de la fraction qui conduit à la fraction canonique. C'est, en effet, un théorème général que (quel que soit le nombre des *quantics* donnés), le dénominateur de la fraction génératrice canonique ne peut jamais contenir des facteurs où les lettres prises avec des exposants positifs sont distribuées entre deux groupes.

Toujours des facteurs de cette forme se présenteront dans le cours du calcul; mais, à la fin, quand toutes les sommations auront été effectuées, ils doivent nécessairement disparaître par voie de division dans le numérateur. Sans cette propriété, qu'on peut démontrer *a priori*, un théorie de la fonction génératrice pour des systèmes de *quantics* binaires aurait été impossible ou tout à fait inutile.

En ajoutant aux fractions canoniques que j'ai déjà données dans les *Comptes rendus* celle qui appartient à deux quadratiques, c'est-à-dire

$$\frac{1-t\tau u^2}{(1-t^2)(1-\tau^2)(1-t\tau)(1-tu^2)(1-\tau u^2)},$$

on voit qu'on est à présent en possession des génératrices canoniques pour tous les systèmes binaires qui proviennent des combinaisons deux à deux des ordres 2, 3, 4, c'est-à-dire 2.2, 2.3, 2.4, 3.3, 3.4, 4.4; et en ajoutant les génératrices déjà connues pour les *quantics* linéaires, quadratiques, cubiques et biquadratiques, pris séparément, à celles que j'ai données dans les *Comptes rendus* pour les *quantics* des ordres 5, 6, 8, on aura de même les génératrices appartenant aux *quantics* pris séparément d'un ordre quelconque, compris entre les limites 1 et 8, avec l'exception de 7, lequel cas M. Cayley a entrepris de calculer. De plus, j'ai donné, dans le second numéro du *American Mathematical Journal*, la génératrice pour la partie invariantive du *quantic* de l'ordre 10, et je me propose de la compléter en faisant calculer, en outre, sa partie covariantive.

J'ai aussi obtenu la génératrice générale pour un nombre quelconque donné des formes linéaires, et la même pour les formes quadratiques, entre lesquelles deux génératrices il existe un rapport algébrique vraiment remarquable, de sorte que, par le moyen d'une substitution algébrique des plus simples, on peut passer immédiatement de l'une à l'autre; mais ce travail n'a pas encore été publié.

Si quelqu'un voulait bien entreprendre le calcul de la génératrice des formes fondamentales pour le *quantic* de l'ordre 9, on aurait une collection très-compacte et assez étendue de ces fonctions importantes.

Je saisis cette occasion pour renouveler mes instances auprès des disciples de M. Gordan, si nombreux et si largement disséminés dans l'Allemagne, l'Italie et ailleurs, de vouloir bien faire exécuter entre eux, par sa méthode, les travaux nécessaires pour confirmer ou réfuter le dénombrement, que j'ai récemment publié dans les *Comptes rendus*, des covariants irréductibles appartenant au *quantic* du huitième degré. Ce serait manquer aux devoirs imposés par la science et la grande renommée de M. Gordan que de ne pas répondre à cet appel. Quant aux résultats que j'ai donnés ici pour le cas de la combinaison des ordres 3 et 4, il est bon d'ajouter que l'ordre le plus élevé des covariants irréductibles 6 est d'accord avec la limite supérieure pour le cas d'un nombre quelconque de *quantics* dont l'ordre de chacun n'excède pas 4, selon la formule donnée par M. Camille Jordan dans une séance toute récente de l'Académie. On trouvera, en effet, que, pour le cas supposé, cette limite est le nombre 6 lui-même.