XXXIV.

SUR LE MOUVEMENT DE L'ÉLECTRICITÉ SANS LIAISONS NI FORCES EXTÉRIEURES

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXLV (1907), pp. 417-420.

Les équations fondamentales du champ électromagnétique dans le vide (ou dans des milieux tels que l'air) s'écrivent, d'après HERTZ,

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} A\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u\,, \\ A\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v\,, \\ A\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w\,; \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} A\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\,, \\ A\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\,, \\ A\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\,; \end{aligned} \right.$$

$$\text{(III)} \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varrho\,;$$

$$\text{(IV)} \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0\,.$$

Dans ces équations: (X, Y, Z) représente la force électrique, (L, M, N) la force magnétique, ϱ la densité électrique, (u, v, w) le courant; $A = 1/c$ (c vitesse de la lumière); le trièdre de référence $Oxyz$ est supposé *sinistror-*

sum (tandis que MAXWELL et aussi M. LORENTZ ont adopté la convention opposée).

Soit dS un élément de volume dans le champ. Il est occupé par une charge électrique dS et traversé par un courant dont les composantes sont $u\,dS$, $v\,dS$, $w\,dS$. Cet élément se trouve soumis à une force mécanique, définie, d'après M. LORENTZ, par les trinomes

$$dS[\varrho X + A(Mw - Nv)]\,,$$
$$dS[\varrho Y + A(Nu - Lw)]\,,$$
$$dS[\varrho Z + A(Lv - Mu)]\,.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un champ électromagnétique pur, c'est-à-dire entretenu exclusivement par le mouvement de l'électricité, sans intervention de matière pondérable, ni de liaisons entre les charges électriques, ni d'aucune action extérieure. Alors la force dont on vient de parler est la force totale sollicitant dS. D'autre part sa masse matérielle est nulle. Il faut donc (pour ne pas violer le principe fondamental de la dynamique ordinaire: force = masse $\times$ accélération) que l'on ait en tout point du champ

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} \varrho X + A(Mw - Nv) = 0\,, \\ \varrho Y + A(Nu - Lw) = 0\,, \\ \varrho Z + A(Lv - Mu) = 0\,. \end{cases}$$

Ces équations en termes finis, jointes au système différentiel (I)-(IV), sont caractéristiques des champs électromagnétiques purs. Toute région de l'espace où elles sont vérifiées est par là même le siège d'un champ pur. On remarquera qu'elles sont au nombre de 10, précisément égal à celui des inconnues: X, Y, Z; L, M, N; ϱ; u, v, w.

Une conséquence immédiate des (V) et (III) c'est que, dans un champ pur, il ne peut exister nulle part de l'électricité à l'état de repos. Si, en effet, $u = v = w = 0$, il en résulte nécessairement $\varrho = 0$. On arrive à la même conclusion en cherchant à vérifier les équations (I)-(V) par des fonctions linéaires des variables indépendantes. Ces remarques peuvent donner l'impression (¹) qu'un véritable transport d'électricité sans liaisons, ni forces extérieures soit impossible. Il n'en est rien cependant, comme on peut le constater dans la solution particulière que je vais indiquer.

(¹) Voyez par exemple POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. XXI, 1906.

Elle donne lieu d'espérer qu'on en trouvera d'autres, correspondant aux mouvements d'un électron isolé, et permettant ainsi d'éviter les liaisons cinématiques, qui figurent maintenant dans toute mécanique des électrons (Abraham, Lorentz, Bucherer, Langevin, Poincaré). De telles hypothèses particulières sont bien précieuses pour arriver rapidement à des prévisions concrètes avec la certitude qu'en tout cas on ne s'éloignera pas beaucoup de la réalité. Mais elles entraînent la demande: Ces liaisons tout à fait immatérielles d'où proviennent-elles? Il est évidemment à souhaiter de n'avoir pas à se poser de telles questions.

Cherchons à satisfaire à (I)-(V) en supposant que le mouvement de l'électricité soit rectiligne, que le champ soit transversal par rapport à la direction du mouvement, les deux forces électrique et magnétique étant en outre perpendiculaires entre elles.

On peut alors poser

$$u = \varrho V\,, \quad v = w = 0; \qquad Y = E\,, \quad Z = X = 0; \qquad N = H\,, \quad L = M = 0\,,$$

et nos équations se réduisent à

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \frac{\partial H}{\partial y} + 4\pi A \varrho V = 0\,, \quad A\frac{\partial E}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\,;$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \frac{\partial E}{\partial z} = 0\,, \qquad A\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}\,;$$

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = 4\pi\varrho\,;$$

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 0\,;$$

$$\text{(V}'\text{)} \qquad \varrho E + AH\varrho V = 0\,.$$

Il s'ensuit que tout doit être indépendant de z. En se bornant aux trois autres variables x, y, t, en exigeant que ϱ ne s'annule pas et en éliminant ϱV de la première des équations (I′) moyennant (III′) et (V′), on a le système équivalent:

$$\text{(1)} \qquad A\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}\,, \quad A\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}(H^2 - E^2) = 0\,;$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = 4\pi\varrho\,, \qquad cE + HV = 0\,.$$

Les deux dernières équations définissent ϱ et V en fonction de E et de H. Les (1) s'intègrent sans peine et donnent pour E et H les expressions générales que voici:

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \quad \eta(y)\varphi(x-ct) + \frac{1}{\eta(y)}\psi(x+ct), \\ H &= -\eta(y)\varphi(x-ct) + \frac{1}{\eta(y)}\psi(x+ct), \end{aligned} \right.$$

η, φ, ψ désignant des fonctions arbitraires des arguments indiqués.

En prenant $\psi = 0$, on a affaire à des ondes planes (non homogènes, en général) se propageant avec la vitesse c dans la direction positive de l'axe des abscisses. Les équations (2) donnent alors

$$\varrho = \frac{\eta'(y)}{4\pi}\varphi(x-ct), \quad V = c.$$

Dès que η dépend effectivement de y, ϱ n'est pas nul; d'autre part ϱV mesure le courant. C'est donc de l'électricité, qui se meut avec la vitesse de la lumière. Les trajectoires des particules ne sont que les rayons (normales aux surfaces d'onde).

Pour $\eta = \text{const.}$, $\varrho = 0$, et l'on retrouve les ondes de l'éther, envisagées ordinairement. A ce point de vue la théorie ondulatoire se présente comme un cas particulier, ou, si l'on veut, comme un cas limite de la théorie de l'émission.

(*19 août 1907*).