

SCIE E LEGGI DI RESISTENZA

« Rend. Circolo mat. di Palermo », t. XXIII, (1907),
pp. 1-37.

Un corpo, animato da traslazione uniforme, il quale si trovi immerso in un liquido (perfetto e non sollecitato da forze) incontra una resistenza diretta rigorosamente nulla, qualora si ammetta che sia ovunque continuo il moto subordinato, entro la massa fluida, dalla traslazione del solido.

Questo risultato teorico, in patente contraddizione coll'esperienza quotidiana, è noto sotto il nome di paradosso di D'ALEMBERT ⁽¹⁾.

Per lungo tempo lo si attribuì all'ipotesi, preliminarmente ammessa dalla teoria, che si tratti di liquidi perfetti e di pareti rigide prive di attrito, mentre i fluidi naturali sono tutti dotati di un certo grado di viscosità, e i solidi offrono resistenza d'attrito allo scorrimento delle particelle fluide. Ma, se si cerca di precisare l'influenza di questi elementi, si riconosce senza difficoltà che essi possono contribuire solo per una parte (in generale non molto importante) al valore totale della resistenza, quale risulta dalle misure dirette.

Le esperienze antiche e moderne si accordano infatti nella constatazione ⁽²⁾ che la resistenza varia sensibilmente in ragione del quadrato della velocità ⁽³⁾.

Ora, se la parte preponderante della resistenza diretta provenisse dalla viscosità del liquido, la resistenza stessa dovrebbe risultare (almeno

⁽¹⁾ Una constatazione del paradosso, semplicissima e di carattere affatto generale, si può vedere nella recente nota del sig. CISOTTI, *Sul paradosso di d'Alembert*, « Atti del R. Istituto Veneto », t. LXV, 1906, pp. 1291-1295.

⁽²⁾ Cfr. W. H. WHITE, *Manuale di architettura navale* (traduz. italiana), Roma, Forzani, 1884, pag. 463. Per maggiori dettagli: POLLARD et DUDEBOUT, *Théorie du navire*, Paris, Gauthier-Villars, 1892, t. III, pp. 347-438.

⁽³⁾ Oltre un certo limite di velocità, interviene in modo notevole (per le navi e per i modelli galleggianti, cui principalmente si riferisce il materiale d'osservazione) l'influenza delle perturbazioni superficiali. Si formano cioè le *onde di resistenza*, designate appunto con tale qualifica perchè provocano un aumento non trascurabile della resistenza diretta. La parte, dovuta ad esse, può rappresentare, secondo il FROUDE, fin la metà del totale, raggiungendosi però questo massimo solo in condizioni speciali, che possono dirsi di risonanza.

in via approssimativa) proporzionale alla velocità ⁽⁴⁾; se provenisse dall'attrito fra liquido e solido, dovrebbe, per piccole velocità (pochi metri al secondo) essere quasi indipendente dalla velocità ⁽⁵⁾.

La resistenza diretta è dunque essenzialmente distinta così dalla viscosità come dall'attrito, che sono a risguardarsi fenomeni dissipativi secondari; essa deve potersi spiegare anche prescindendo da tali fenomeni, di cui soltanto bisognerà tener conto nelle applicazioni concrete, calcolando o almeno valutando approssimativamente i corrispondenti termini correttivi.

In definitiva, la spiegazione del paradosso di D'ALEMBERT deve essere possibile senza esorbitare dall'idrodinamica razionale: conclusione tanto più soddisfacente, quando si pensi che la teoria dei fluidi perfetti ha corrisposto finora — nei limiti di approssimazione, che erano a priori presumibili — alle circostanze di fatto, sicchè sarebbe assai strano che, nello stesso ordine di questioni, intervenisse inopinatamente e dominasse qualche fenomeno, che sfugge allo schema dei meccanismi ordinari.

Come effettivamente si possa, nell'ambito della meccanica pura, rimuovere il paradosso di D'ALEMBERT fu indicato da STOKES e da HELMHOLTZ.

Il principio è quanto mai semplice e consiste nel rinunciare all'ipotesi, apparentemente indifferente, della incondizionata continuità di moto del fluido, sostituendola coll'ipotesi della *scia*.

Si ammette cioè che il corpo mobile *C* trascini dietro sè una colonna liquida, indefinita, solidale con esso (*scia*).

Nello spazio occupato dal liquido si hanno così due regioni distinte (la regione anteriore *A* e la scia *B*, come si vede nelle figg. 1 e 2, p. 525), separate da una superficie di discontinuità.

Lo studio dei moti discontinui presenta gravi difficoltà analitiche, e finora potè essere fatto in modo completo solo per casi particolarissimi. Ma, ad attestarne l'importanza, basta la conclusione di carattere generale che, ammessa la scia, la resistenza diretta varia, a parità di condizioni, precisamente come il quadrato della velocità ⁽⁶⁾.

⁽⁴⁾ La proporzionalità sussiste rigorosamente nel caso schematico di una parete piana; cfr. LAMB, *Hydrodynamics* (terza edizione), Cambridge University Press, 1906, cap. XIX, art. 318.

⁽⁵⁾ Veggasi la nota sulla resistenza d'attrito in appendice alla presente memoria. Importa notare che i più autorevoli trattatisti di architettura navale affermano ad un tempo che la resistenza diretta è dovuta per massima parte all'attrito, e che, entro limiti assai lati, essa può ritenersi proporzionale al quadrato della velocità.

La contraddizione con quanto si afferma nel testo è soltanto apparente, e proviene dal fatto che quegli autori raccolgono sotto la denominazione generica di attrito anche altri fenomeni dissipativi, in particolare la formazione di discontinuità.

⁽⁶⁾ Cfr. la Nota *Sulla resistenza dei mezzi fluidi*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. X, 2° sem. 1901, pp. 3-9 [in questo vol.: V, pp. 129-135].

Sorge così spontaneo il desiderio di approfondire le ricerche in questo indirizzo per riconoscere anche le leggi, secondo cui la resistenza dipende dalla forma del corpo, che si muove.

Data la difficoltà della questione, conviene limitarla a due dimensioni, ciò che consente il valido sussidio della rappresentazione complessa.

Anche semplificando così, non manca l'interesse pratico.

È chiaro infatti che, nel caso di una nave in acqua tranquilla, il movimento comunicato alle particelle fluide si svolgerà sensibilmente in piani orizzontali, almeno per le sezioni non troppo vicine alla chiglia, nè al piano di galleggiamento.

Ci si trova così ricondotti ad un problema piano, il profilo rigido, mobile nel proprio piano, essendo una generica sezione orizzontale della nave.

I tipi di profili, per cui è stata determinata la legge di resistenza sono i seguenti: un segmento perpendicolare od obliquo alla direzione della traslazione (HELMHOLTZ); due segmenti di eguale lunghezza comprendenti un angolo 2α (BOBYLEFF), caso particolarmente interessante perchè rispecchia la forma rudimentale di una prora; i profili costituiti da un numero qualunque di tratti rettilinei (questione risolta per vie differenti da JOUKOWSKY, MICHELL e LOVE (?)).

Un progresso considerevole può essere raggiunto, riprendendo la questione *ab initio* e analizzandone un po' intimamente la natura matematica.

Si riesce infatti ad assegnare l'integrale generale dei moti irrotazionali, dotati di scia.

A ciò è dedicato il presente lavoro.

Con opportune trasformazioni si mettono anzi tutto in evidenza le singolarità caratteristiche. Si può allora, coi metodi della teoria delle funzioni, riconoscere la forma analitica e dare le espressioni effettive degli elementi del moto.

Queste espressioni constano di due parti: la prima, affetta da due parametri α , δ (*) (che si riducono ad uno nel caso, in cui vi sia una linea di simmetria) corrisponde alla singolarità caratteristica; nella seconda tutto è regolare, e il grado di arbitrarietà è quello di una funzione analitica Ω (più precisamente di una serie di TAYLOR convergente entro e sopra una circonferenza di raggio 1).

Il valore della resistenza diretta (fornito con procedimento elegante

(?) Cfr. l'articolo di LOVE, *Hydrodynamik*, II, nella « Enc. der math. Wiss. », IV, 2, 1, pag. 99.

(*) $\alpha + \delta$ e $\alpha - \delta$ rappresentano le inclinazioni sulla direzione del moto delle due tangenti al profilo mobile, nel punto angoloso di prora.

dalla teoria dei residui di CAUCHY) dipende soltanto dal primo dei coefficienti della serie Ω (e dai due parametri α e δ).

Per $\Omega = 0$ si ritrovano nel modo più naturale e spontaneo i profili angolari di BOBYLEFF. Facendo variare Ω , si ottengono tutti i possibili profili colle relative resistenze.

Sorge così un doppio ordine di questioni, di cui spero potermi prossimamente occupare:

1) un problema di indole esclusivamente matematica, cioè la ricerca della funzione Ω corrispondente ad un profilo preventivamente assegnato.

La Ω rimane caratterizzata (§ 13 del presente lavoro) da una relazione fra la parte reale e il coefficiente dell'immaginario, che deve essere soddisfatta al contorno del cerchio di regolarità. È un problema funzionale di tipo più elevato degli ordinari.

2) un problema tecnico di concreta applicazione alle navi. Si tratta cioè di tener conto delle esigenze pratiche, limitando la discussione a forme semplici di Ω , e determinando le costanti, che rimangono disponibili, in modo da desumerne i profili più convenienti: questione, cui manca attualmente qualsiasi base scientifica.

In attesa di poter effettivamente portare in questo campo le conseguenze del nostro studio, sì che il controllo sperimentale valga indirettamente a saggiare anche le premesse, è conveniente di dare una giustificazione diretta delle premesse stesse, mediante un'analisi critica delle circostanze di fatto.

Anzitutto che la traslazione di un solido in un liquido provochi discontinuità si può ritenere assolutamente provato dalle esperienze di MAREY (*) e di AHLBORN (10).

La natura della discontinuità è però più complessa di quella postulata dalla teoria. La regione B infatti non risulta in realtà occupata da fluido solidale col corpo C , nè tanto meno si estende indefinitamente. In essa intervengono (le fotografie delle citate esperienze lo lasciano scorgere in modo manifesto) movimenti vorticosi e turbolenti, che vanno gradatamente attenuandosi (per viscosità ed altre eventuali azioni dissipatrici) quanto più ci si allontana dal corpo C , cosicchè, ad una certa distanza, lo stato di moto del fluido non presenta più traccia di discontinuità, anzi cessa addirittura ogni sensibile influenza del moto del solido, le particelle apparendo immobili.

(*) *Le mouvement des liquides, étudié dans la chronophotographie*, « Comptes Rendus », t. CXVI, pp. 913-923 (séance du 1^{er} mai 1893); con osservazioni complementari nella Nota: *Changement de direction*, etc., ibidem, t. CXXXII, pp. 1291-1205 (séance du 3 juin 1901).

(10) *Ueber den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes*, Hamburg, Friederichsen, 1902, (estratto dal vol. XVII delle « Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften », edite dal Naturwissenschaftlicher Verein di Amburgo).

Malgrado ciò, l'ipotesi schematica della scia deve assai verosimilmente condurre ad una esatta valutazione della resistenza diretta. Ed ecco perchè.

Sia π la porzione del contorno γ del corpo C (i due tratti π_1, π_2 delle figg. 1 e 2, p. 525), che confina colla regione anteriore A , la rimanente porzione confinando invece con B .

Ciò premesso, si ponga mente alle circostanze seguenti:

a) Conseguenza teorica dell'ipotesi della scia è (cfr. il § 8 del presente lavoro) che la resistenza dipende esclusivamente dallo stato di moto delle particelle fluide in π .

b) Due distinte regioni A e B esistono, come abbiamo or ora accennato, anche nella realtà fisica. La B differisce profondamente dalla ipotetica scia, solidale col corpo. La regione anteriore A presenta invece in prossimità delle pareti rigide un andamento regolare, conforme alla previsione teorica ⁽¹¹⁾.

D'altra parte si riconosce per via intuitiva ⁽¹²⁾ che gli elementi determinativi della resistenza diretta risiedono tutti nello stato del fluido, il quale si trova in contatto col corpo nella zona anteriore ai fenomeni dissipativi.

Ciò è quanto dire che la resistenza dipende soltanto dallo stato di moto in π .

⁽¹¹⁾ Cfr. in particolare AHLBORN, loc. citato, pag. 13.

⁽¹²⁾ All'uopo convien ragionare così:

La superficie di discontinuità λ (rappresentata in λ_1, λ_2 nelle figure 1 e 2), che si riattacca alla zona π del contorno del corpo e che, per un certo tratto, si estende nettamente a poppavia, non è altro che una superficie vorticoso. In coda ad essa si staccano anelli vorticosi e vortici elementari, che si insinuano in B e vanno di continuo degradando (cioè trasformandosi in calore).

Attesa la stazionarietà del fenomeno, nuovi anelli vorticosi debbono di continuo emanare da π e scendere, per così dire, lungo λ in sostituzione di quelli, che si staccano in coda. Alla formazione di questi vortici concorrono, come è manifesto, solo particelle fluide previamente in contatto con π , e vi concorrono secondo una legge, che dipende dal regime di moto in π , e da esso soltanto.

Giustificiamo quest'ultimo punto.

La produzione di vortici è, come tutti gli altri fenomeni concomitanti alla traslazione di C , caratterizzata dalla velocità di traslazione e dalla forma geometrica del contorno; però la parte di questo a poppavia di π non può avere sensibile influenza, semprechè, come noi vogliamo supporre, si tratti di corpi non molto lunghi. Infatti, quando le dimensioni longitudinali sono moderate, la detta parte a poppavia di π si trova inserita entro λ , prima della zona, in cui avviene (per viscosità) il distacco degli anelli vorticosi. L'inserito corpo rigido, discosto dalla superficie λ , può evidentemente influire ben poco su questo distacco.

Ciò posto, la resistenza da valutare eguaglia l'energia, che deve essere somministrata al corpo nell'unità di tempo per sopperire alle influenze passive, cioè (prescindendosi dagli attriti) per compensare l'anzidetta produzione di vortici. Questa dipende esclusivamente dal regime di moto in π ; lo stesso vale dunque per la resistenza diretta. C. d. d.

Anche nel caso teorico della scia indefinita si potrebbe manifestamente (in luogo di riportarsi alle formule del § 8) istituire un'analoga considerazione energetica. Basterebbe aver presente che, ammessa la scia indefinita, gli anelli vorticosi, costituenti la superficie di discontinuità, non se ne staccano, ma migrano fino all'infinito e vi accumulano energia.

Dacchè teoria e pratica convengono nel risultato che la resistenza è individuata dallo stato di moto in π , il quale stato di moto è sensibilmente lo stesso nei due casi, scende legittima la conclusione che il valore della resistenza fornito dal calcolo è a presumersi assai prossimo al valore reale, malgrado le sostanziali differenze, che possono intercedere sotto altri rapporti fra la rappresentazione teorica e le circostanze di fatto.

Queste riflessioni giustificano preventivamente l'indagine matematica, che stiamo per imprendere, e incoraggiano a ulteriori deduzioni d'indole pratica.

1. - Posizione del problema.

Ipotesi surroganti la incondizionata continuità.

Sia C una porzione di piano animata di traslazione uniforme nel suo stesso piano; γ il contorno di C (profilo rigido).

Si assuma la direzione della traslazione come direzione *negativa* di un asse x rigidamente connesso con C .

Sia poi O il punto — che supponiamo unico — di γ più avanzato nel senso del moto: lo diremo *prora* e lo sceglieremo per origine delle coordinate. Immagineremo ancora di prendere per velocità unitaria quella di traslazione.

Risguardiamo C immerso in un liquido (fluido incompressibile), indefinito e non sollecitato da forze, e supponiamo che rimanga subordinato nel liquido un moto con scia.

In modo preciso introduciamo le ipotesi seguenti (cfr. figg. 1 e 2).

1) Una colonna fluida B (scia) estendentesi indefinitamente dietro C si muove come se fosse solidale col corpo (cioè immobile rispetto agli assi xy).

2) Il campo B, C costituisce un tutto connesso, *comprendente il semiasse delle x positive*, separato dal rimanente piano (regione A) mediante un'unica linea s , che passa per O , e, da una parte e dall'altra, si estende indefinitamente.

La linea s è dotata in ogni punto di tangente, *variabile ovunque con continuità, tranne in O , che può essere un punto angoloso*. Essa segue per due certi tratti π_1 e π_2 (da una parte e dall'altra di O) il profilo rigido γ ; poi se ne stacca, segnando, nei due tratti indefiniti λ_1, λ_2 il confine fra A e la scia B .

In π — così designeremo l'insieme dei due archi π_1 e π_2 — *anche la curvatura è finita e continua* (eccezion fatta, si intende, quanto alla continuità, per l'eventuale punto angoloso di prora).

Osservazione. - L'ipotesi circa l'andamento di s sembra perfettamente giustificata nel caso di contorni γ convessi (con o senza punto angoloso di prora) quali quelli, che ricordano la sezione di una nave; semprechè inoltre essi sieno orientati rispetto al moto in modo da rimanere attraversati dal semiasse delle x positive.

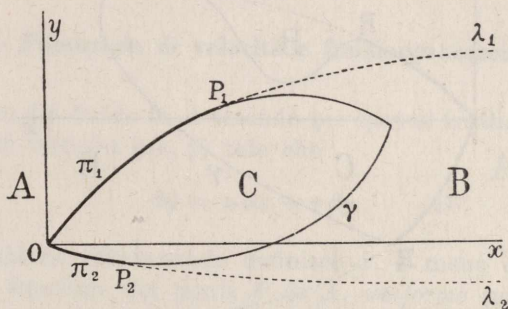


Fig. 1.

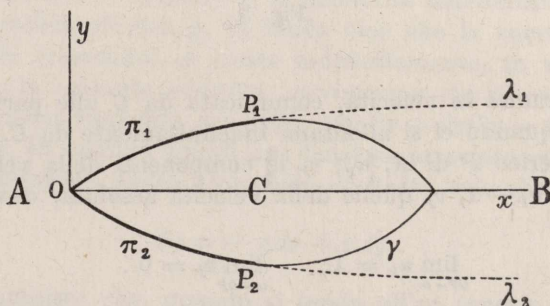


Fig. 2.

Per contorni non convessi (di cui qui non intendiamo occuparci) si dovrebbe ricorrere ad altre ipotesi con scie complesse, come nella fig. 3: le due linee λ_1, λ_2 , continuazione di π_1, π_2 , non sono più interamente libere, ma interrotte da uno o più tratti finiti (uno in figura) appartenenti ancora a γ .

D'altra parte, se il contorno γ , pur essendo convesso, restasse tutto da una parte del semiasse delle x positive, la s , a partire da O , seguirebbe il profilo γ soltanto in un senso, mentre nell'altro uscirebbe addirittura come linea libera.

3) Nella regione A , il liquido è animato da movimento *stazionario*, rispetto al corpo C , cioè rispetto ai nostri assi di riferimento xy , *continuo* (nel senso che le componenti della velocità sono a ritenersi finite e continue) e *irrotazionale*.

4) L'influenza del moto di C sulle particelle fluide appartenenti ad A è tanto meno sensibile quanto più ci si discosta da C .

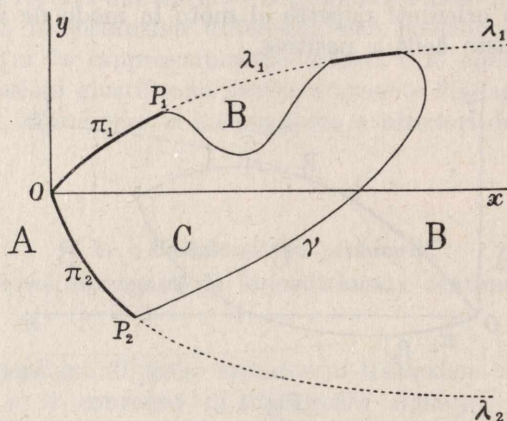


Fig. 3.

In altri termini la velocità, comunicata da C alle particelle liquide, tende a zero quando ci si allontana indefinitamente da C . Dicendo, per un punto generico P di A , u_P, v_P le componenti della velocità, *relativa* a C , e quindi $u_P - 1, v_P$ quelle della velocità assoluta, dovremo ritenere

$$(1) \quad \lim_{OP \rightarrow \infty} u_P = 1, \quad \lim_{\infty \rightarrow OP} v_P = 0.$$

5) Per raffigurarsi intuitivamente l'andamento del moto (relativo) delle particelle di A rispetto al corpo C , giova ricorrere al notissimo artificio di imprimere a tutto il sistema (A, B, C) una traslazione uniforme, con che evidentemente non si altera nè lo stato dinamico, nè il moto relativo delle sue parti. Immaginando in particolare impressa una traslazione di velocità 1 nel senso delle x positive, il corpo C e la scia B con esso son ridotti alla quiete, le particelle di A a grande distanza da C scorrono con velocità limite 1 nel senso delle x positive, e l'aspetto del fenomeno è quello di una corrente modificata dalla presenza di un solido immobile C .

La modificazione si presenta schematicamente così:

Un solo filetto fluido, quello che colpisce il corpo a monte (nella prora O), rimane momentaneamente arrestato in O ; ivi si bipartisce e prosegue scorrendo lungo π_1 e π_2 . Gli altri filetti vengono più o meno deviati, nessuno subisce arresti.

Questo equivale a dire che il valore assoluto $V = |\sqrt{u^2 + v^2}|$ della velocità relativa delle particelle fluide è nullo in O , e > 0 in ogni altro punto di A .

Ciò premesso, veniamo alla parte deduttiva.

2. - Potenziale di velocità e funzione associata.

Il movimento del fluido in A essendo per ipotesi irrotazionale, avremo un potenziale di velocità $\varphi(x, y)$ tale che

$$(2) \quad d\varphi = u dx + v dy .$$

Questa equazione differenziale definisce φ , a meno di una costante additiva, come funzione dei punti P di A , *uniforme* (perchè A è semplicemente connesso), *finita e continua* in ogni punto P a distanza finita, perchè tali sono u e v . Quando P si allontana indefinitamente (in direzione non parallela all'asse y , in modo cioè che la coordinata x vada indefinitamente crescendo), φ cresce indefinitamente, in virtù delle (1).

Per fissare la costante additiva, converremo che sia $\varphi = 0$ in O .

Attesa l'incompressibilità del fluido ($\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$), sarà φ *funzione armonica*, ed esisterà quindi una funzione associata $\psi(x, y)$ (funzione di corrente) *uniforme, finita e continua al finito*, tale che

$$(3) \quad d\psi = -v dx + u dy .$$

Di qua apparisce che, quando si tenda all' ∞ (questa volta in direzione non parallela all'asse x , sì che y tenda all' ∞) ψ cresce indefinitamente.

Anche per ψ la costante additiva si intenderà presa in modo che la funzione si annulli nel punto O .

Consideriamo il piano del moto come rappresentativo di una variabile complessa $z = x + iy$, e poniamo

$$(4) \quad \begin{cases} w = u - iv , \\ f = \varphi + i\psi . \end{cases}$$

In virtù delle (2) e (3), w ed f risultano, come è notissimo, funzioni della variabile complessa z , e si ha

$$(5) \quad \frac{df}{dz} = w .$$

Per quanto si è osservato circa φ e ψ , si potrà asserire che la fun-

zione f si comporta regolarmente entro A , tranne per $z = \infty$, corrispondentemente a cui

$$(6) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |f| = \infty.$$

La w è invece regolare in A , punto all'infinito compreso.

3. - Condizioni ai limiti. Pressione.

Il contorno di una massa fluida, dotata di moto permanente, è sempre costituito da linee di flusso. Nel caso nostro lo sarà l'intero contorno s di A , si avrà cioè in ogni punto di s velocità puramente tangenziale (componente normale nulla).

Designando con dx/ds , dy/ds i coseni direttori di s in un punto generico, l'annullarsi della componente normale si esprime mediante la relazione

$$-v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds} = 0,$$

ossia, in virtù della (3),

$$\frac{d\psi}{ds} = 0,$$

od ancora, per essere $\psi = 0$ in O ,

$$(7) \quad \psi = 0 \text{ in ogni punto di } s.$$

Dobbiamo inoltre tener conto della circostanza che parte di s (i due archi λ_1 , λ_2) sono *liberi*, separano cioè la massa fluida, di cui si considera il movimento, da altro fluido (la scia B), il che implica continuità nei valori della pressione (malgrado vi sia discontinuità nel moto). Vediamo cosa si può dire delle pressioni in A e in B rispettivamente.

Per entrambe va notato che non occorre riferirsi al moto assoluto, ma è lecito contemplare quello relativo, rispetto a C , poichè i due moti differiscono per una traslazione uniforme, che non ha influenza su alcun elemento dinamico, nè in particolare sulla pressione.

In A si ha, per ipotesi, moto irrotazionale e permanente in assenza di forze.

Le equazioni idrodinamiche si compendiano perciò in una relazione integrale fra la pressione p e la velocità V . Attribuendo per semplicità il valore 1 alla densità del liquido, tale relazione è:

$$p = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante}.$$

Nella scia B le particelle liquide sono in quiete (relativamente a C): ivi regna pertanto una pressione costante p_0 .

L'eguaglianza delle pressioni lungo le due linee libere λ_1, λ_2 porge

$$p_0 = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante},$$

cioè la velocità V è essa stessa costante su queste linee. Siccome λ_1, λ_2 (§ 1, II) si estendono indefinitamente, e, in ogni punto di A a distanza infinita, si ha $V=1$ (§ 1, IV), così

$$(8) \quad V=1 \quad \text{sopra } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2.$$

Dalla relazione $p_0 = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante}$ scende poi che la costante ha il valore $p_0 + \frac{1}{2}$ e che quindi, in ogni punto di A ,

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Le (7) e (8) esauriscono evidentemente le condizioni ai limiti concernenti il campo A .

4. - Corrispondenza fra i due piani complessi $z = x + iy, f = \varphi + i\psi$.

Rappresentiamo in un piano complesso $f = \varphi + i\psi$ i valori, che assume la funzione $f(z)$ al variare di z entro A .

Quando z si trova sul contorno s , f è reale in causa della (7).

Più precisamente al punto O ($z = 0$) corrisponde $f = 0$. Procedendo poi da O su s in uno qualunque dei due sensi (percorrendo cioè π_1, λ_1 ovvero π_2, λ_2) f assume valori positivi, costantemente crescenti, e tende all' ∞ con z .

Per giustificare l'asserto, conviene ricordare (§ 1, V) che $V > 0$ in ogni punto di A , e in particolare di s , diverso da O . Ora, sopra s , in quanto linea di flusso, si ha

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

intendendosi assunta come direzione, cui si riferiscono gli incrementi dx, dy , quella del flusso e riguardandosi ds come essenzialmente positivo (elemento di cammino).

Ne viene

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = V > 0.$$

φ , che è nullo in O , va dunque sempre crescendo quando si procede nel senso del flusso, sia su π_1, λ_1 che su π_2, λ_2 .

Siccome poi, su λ_1 e λ_2 , $V=1$, così, quando ci si allontana indefinitamente sull'uno o sull'altro dei due rami, φ cresce oltre ogni limite.

In sostanza, tanto a π_1, λ_1 , quanto a π_2, λ_2 corrispondono ordinatamente tutti i valori reali e positivi di f : c'è quindi corrispondenza (1, 2) fra l'intera linea s del piano z e il semiasse positivo delle φ nel piano f .

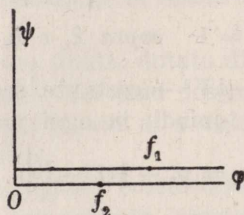


Fig. 4.

La corrispondenza si rende ovviamente biunivoca immaginando di praticare, nel piano f , un taglio lungo il semiasse positivo delle φ (fig. 4).

Con ciò l'asse stesso rimane sdoppiato, e, per la biunivocità della corrispondenza, basta per es. convenire che il bordo superiore del taglio (quello rivolto verso il semipiano $\psi > 0$) rappresenti i valori presi sul ramo π_1, λ_1 , il bordo inferiore quelli presi sull'altro ramo.

Al punto P_1 (figg. 1 e 2), in cui si raccordano π_1 e λ_1 corrisponderà un certo punto f_1 (fig. 4) del bordo superiore; all'altro punto di raccordo P_2 , un certo punto f_2 del bordo inferiore.

I due bordi del taglio costituiscono complessivamente, nel piano f , una linea indefinita (identica, dal punto di vista dell'analysis situs, alla linea s del piano z).

Riconosciuto il comportamento al contorno, associamovi la circostanza fondamentale che $f(z)$ si mantiene regolare al variare di z in A per valori finiti, mentre al punto $z = \infty$, in virtù della (6), corrisponde per f pure il punto all'infinito.

Abbiamo quanto basta per poter legittimamente concludere ⁽¹³⁾ che la relazione funzionale

$$f = f(z)$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca senza eccezione fra il campo A e il piano f (tagliato).

(13) Cfr. per es. l'articolo del sig. Osgood nella « Enc. der Math. Wiss. », II, 2, 1, n. 18.

Perciò, considerando reciprocamente z come funzione dell'argomento f , il campo, in cui si deve far variare f , è l'intero piano; quando lo si intenda tagliato secondo il semiasse positivo delle φ , la funzione z vi è *uniforme, regolare* in ogni punto fuori del taglio e a distanza finita, mentre $\lim_{f \rightarrow \infty} |z| = \infty$.

5. - La funzione $w(f)$ e il suo logaritmo $-i\omega$.

$w = u - iv$ è funzione di z uniforme e regolare in A , punto all'infinito compreso, dove, in virtù delle (1), $w = 1$.

Immaginando z espressa per f , la w si potrà considerare come funzione di f , finita e continua in tutto il piano tagliato (bordi del taglio compresi), olomorfa ovunque (bordi del taglio eventualmente esclusi).

La (8), riportata alla variabile indipendente f , esprime che

$$(8') \quad |w| = 1$$

sul bordo superiore del taglio, per $\varphi > f_1$, sul bordo inferiore, per $\varphi > f_2$:

Siccome, eccezion fatta per il solo punto $f = 0$ (la prora O del piano z), $V = |w| > 0$ (§ 1, V), così, ponendo

$$(9) \quad w = e^{-i\omega}$$

e convenendo che, per $f = \infty$ ($w = 1$), sia $\omega = 0$, rimane definita una funzione ω , uniforme nel piano tagliato, finita e continua anche sui bordi del taglio, tranne che per $f = 0$, avvicinandosi al qual punto $i\omega$ tende verso $+\infty$.

Alla (8') fa riscontro per la ω la proprietà di assumere valori reali.

6. - Introduzione di una variabile ausiliaria ζ .

Vogliamo effettuare un cambiamento di variabile, che sostituisca al piano tagliato f un campo di variabilità più comodo, e precisamente un *semicerchio*, il cui contorno corrisponda al taglio per modo che quella porzione dei due bordi, in cui ω è reale, si trasformi nel diametro.

Per raggiungere lo scopo, poniamo anzitutto

$$(10) \quad f = F^2,$$

e consideriamo il semipiano (complesso) F di ordinata positiva.

La (10) lo riferisce biunivocamente al piano tagliato f in modo che all'asse reale di F corrispondono i due bordi del taglio (convenuto che

al semiasse positivo corrisponda il bordo superiore e quindi al negativo l'inferiore).

Ai punti f_1, f_2 fanno allora riscontro

$$F_1 = \sqrt{f_1},$$

$$-F_2 = -\sqrt{f_2},$$

i radicali intendendosi presi positivamente.

Colla trasformazione lineare

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)Z + \frac{1}{2}(F_1 - F_2)$$

si portano i punti F_1 e $-F_2$ nei punti $+1$ e -1 del piano Z .

L'origine $F = 0$ si porta nel punto

$$Z = -\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}$$

dell'asse reale.

Per essere F_1 e F_2 entrambi positivi e non nulli, esiste uno ed un solo arco σ_0 , tale che

$$\cos \sigma_0 = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \quad (0 < \sigma_0 < \pi).$$

Ponendo

$$\frac{1}{2}(F_1 + F_2) = a \quad (14),$$

la formula di passaggio fra F e Z assume l'aspetto

$$(11) \quad F = a(Z + \cos \sigma_0) \quad (0 < \sigma_0 < \pi).$$

Colla ulteriore trasformazione

$$(12) \quad Z = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

il campo di variabilità del piano $\zeta = \xi + i\eta$ risulta quello desiderato.

Consideriamo infatti (fig. 5) la semicirconferenza $1, i, -1$, e il relativo diametro (segmento $-1, 1$ dell'asse reale).

(14) Questa costante (positiva) a si potrebbe senz'altro assumere eguale all'unità, come già si è fatto per la velocità di traslazione (§ 1) e per la densità del fluido (§ 3). Preferiamo tuttavia di lasciarla indeterminata, non essendovi a priori, fra i dati della questione, un terzo elemento, naturalmente designato a fungere da unità.

Immaginiamo di far percorrere a ζ l'arco $1, i, -1$; detta σ l'anomalia di ζ , avremo, lungo quest'arco, $\zeta = e^{i\sigma}$ con σ variabile da 0 a π ; quindi in virtù della (12), $Z = -\cos \sigma$. Alla semicirconferenza vien dunque a corrispondere (biunivocamente), nel piano Z , il tratto $-1, 1$ dell'asse reale. Al diametro (ζ reale e variabile da -1 ad 1) corrispondono, sempre biunivocamente, le porzioni rimanenti; più precisamente, andando ζ da 1 al centro, Z descrive il segmento $-1, -\infty$; andando ζ da -1 al centro, Z va da 1 a $+\infty$. Avvicinandosi comunque ζ all'origine, $|Z| = \frac{1}{2}|\zeta + 1/\zeta|$ tende all' ∞ .

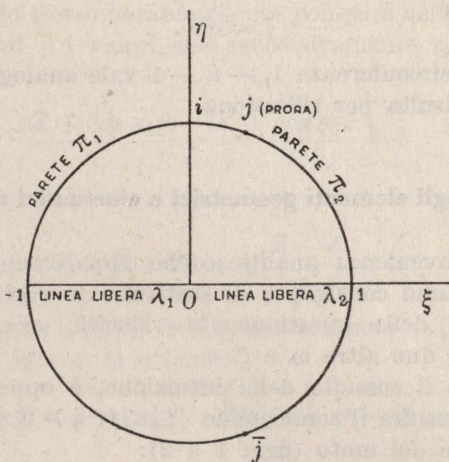


Fig. 5.

Per ζ interno al semicerchio $|\zeta| \leq 1$, $\eta > 0$, cioè della forma $\rho e^{i\sigma}$ (con $\rho < 1$ e $0 < \sigma < \pi$), il coefficiente di i in Z , $-\frac{1}{2}(\rho - 1/\rho) \sin \sigma$, è positivo.

Da tutto ciò si raccoglie che c'è corrispondenza biunivoca fra l'accennato semicerchio e il semipiano Z di ordinata positiva (contorni inclusi).

Combinando le (10), (11) e (12), si passa da f a ζ .

Ogni funzione di f , regolare nel piano tagliato, si può così considerare funzione di ζ , regolare entro il semicerchio. In particolare la funzione ω , legata a w dalla (9) del precedente §.

Per il modo, con cui abbiamo scelto la variabile ausiliaria ζ , $\omega(\zeta)$ risulta nulla per $\zeta = 0$ ($f = \infty$), reale su tutto il diametro $-1, 1$, e vi è finita e continua, tale essendo il comportamento di $\omega(f)$ sui due bordi del taglio, da f_1 , rispettivamente da f_2 , in avanti.

In questa condizione di cose, il noto principio di SCHWARZ ⁽¹⁵⁾ ci assicura che $\omega(\zeta)$ è continuabile per riflessione analitica nel sottostante semicerchio; essa è quindi regolare in tutto il cerchio $|\zeta| < 1$.

Sulla semicirconferenza $1, i, -1$ sarà ancora ω finita e continua, fatta eccezione per quel solo punto $\zeta = j$, che corrisponde a $f = 0$. Questo punto, in virtù delle (10), (11) e (12), è definito da

$$(13) \quad \cos \sigma_0 = \frac{1}{2} \left(j + \frac{1}{j} \right) \quad (0 < \sigma_0 < \pi),$$

il che è quanto dire

$$(13') \quad j = e^{i\sigma_0}.$$

Sull'altra semicirconferenza $1, -i, -1$ vale analogo comportamento, cioè quello, che risulta per riflessione.

7. - Espressione degli elementi geometrici e cinematici mediante ζ ed $\omega(\zeta)$.

Ragioni di convenienza analitica (che appariranno più nettamente in appresso) ci hanno consigliato di sostituire le variabili naturalmente offerte dall'indole della questione (la velocità w come funzione del posto z) mediante due altre ω e ζ .

Per conservare il sussidio della intuizione, è opportuno fissare che, nella corrispondenza fra il semicerchio $|\zeta| \leq 1, \eta \geq 0$ del piano ζ (fig. 5) e il campo A sede del moto (figg. 1 o 2):

il punto j rappresenta la prora O ;

gli archi di circonferenza $j, 1$ e $j, -1$ rappresentano i due tratti di parete rigida π_2 e π_1 , rispettivamente;

i punti 1 e -1 i raccordi P_2 e P_1 del profilo rigido colle linee libere λ_2 e λ_1 ;

l'origine ($\zeta = 0$) il punto all'infinito di A ; i raggi $(1, 0)$, $(-1, 0)$ le linee libere λ_2, λ_1 .

Immagine delle linee di flusso. - Una generica linea di flusso è caratterizzata dalla equazione

$$\psi(x, y) = \text{cost.}$$

È facile assegnare la rappresentazione di queste linee nel piano ζ . All'uopo basta evidentemente usufruire le formule di trasformazione (10), (11), (12).

⁽¹⁵⁾ Cfr. per es. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars, vol. I, 1887, pp. 174-175.

Per effettuare il calcolo in modo spiccio, conviene (anzichè scindere il reale dall'immaginario) introdurre le quantità \bar{f} , \bar{F} , \bar{Z} , $\bar{\zeta}$ complesse coniugate a f , F , Z , ζ , e notare che valgono anche per esse le formule di passaggio (10), (11), (12).

Essendo $f = \varphi + i\psi$ e quindi $\psi = (f - \bar{f})/(2i)$, la equazione da trasformare è

$$\frac{f - \bar{f}}{2i} = \text{cost.}$$

Indichiamo con $a^2b/2$ la costante reale del secondo membro [dove si intende con a quello stesso parametro, che compare nella (11)], ed avremo, sostituendo ad f ed \bar{f} i valori che successivamente risultano dalla (10) ed (11),

$$\frac{(Z + \cos \sigma_0)^2 - (\bar{Z} + \cos \sigma_0)^2}{i} = b,$$

ossia

$$[Z + \bar{Z} + 2 \cos \sigma_0] \frac{Z - \bar{Z}}{i} = b.$$

Di qua, mediante la (12), ove si sostituiscono a ζ , $\bar{\zeta}$ i loro valori e si riduca a forma intera, si ottiene:

$$[\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2 \cos \sigma_0(\xi^2 + \eta^2)](\xi^2 + \eta^2 - 1)\eta = b(\xi^2 + \eta^2)^2,$$

che è appunto l'equazione in coordinate cartesiane ξ , η delle immagini delle linee di flusso.

Come si vede, queste immagini sono sestiche. Di esse, naturalmente, ha interesse soltanto la porzione interna al nostro semicerchio $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$. Il contorno del semicerchio è, come sappiamo, immagine delle linee di flusso π_1 , λ_1 , π_2 , λ_2 , che corrispondono al valore zero di ψ (e quindi di b). Se ne ha conferma nell'equazione testè esplicitata, la quale, per $b = 0$, si spezza in

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,$$

$$\eta = 0,$$

$$\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2 \cos \sigma_0(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Quest'ultima è una cubica, che passa per l'origine e per il punto j ($\xi = \cos \sigma_0$, $\eta = \sin \sigma_0$); essa è l'immagine di quella tale linea di flusso a proravia del corpo C (§ 1, V), che, arrivando in O , si bipartisce e va a costituire l'intero contorno s di A .

Velocità e posizione corrispondenti a un ζ generico. — La (9)

$$w = u - iv = e^{-i\omega}$$

definisce senza ambiguità la velocità in funzione di ζ . Ponendo

$$(14) \quad \omega = \vartheta + i\tau \quad (\vartheta, \tau \text{ reali})$$

si ha

$$(15) \quad |w| = V = |e^{-i\omega}| = e^{\tau},$$

nonchè

$$\frac{u + iv}{V} = e^{i\vartheta},$$

dalla quale apparisce che la parte reale di ω è l'anomalia del vettore $u + iv$, cioè la inclinazione della velocità sulla direzione diametralmente opposta alla traslazione; in forma più precisa, l'angolo (contato positivamente nel verso $x \rightarrow y$, negativamente nel verso opposto) che la velocità (nel punto P di A , che corrisponde al considerato valore generico della variabile ausiliaria ζ) forma colla direzione positiva dell'asse x .

Per essere completi, è bene giustificare l'asserto che ϑ va contato positivamente in un verso e negativamente nell'opposto (e non per es. di seguito in uno stesso verso da 0 a 2π).

Ricordiamo perciò che, fra le infinite determinazioni di cui ω è suscettibile in base alla (9) (determinazioni, che differiscono l'una dall'altra per multipli interi di 2π), abbiamo convenuto di scegliere quella, che si annulla nel punto all'infinito del piano del moto ($\zeta = 0$), rimanendo allora definito per continuità un ramo *uniforme* in tutto il campo A (il semicerchio $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$ del piano ζ).

Come ω , si annulla naturalmente la sua parte reale ϑ .

Dobbiamo dunque ritenere che ϑ , inclinazione del flusso sulla direzione positiva dell'asse x , è sempre nulla (non, eventualmente, 2π) in ogni punto di A a distanza infinitamente grande dall'origine.

Negli altri punti P di A va attribuito all'angolo ϑ quel valore (certo univocamente determinato per l'uniformità di ω), che si ottiene dallo zero, procedendo per continuità entro A .

Le ipotesi, da noi ammesse (§ 1, II), mostrano ovviamente che, fra i valori assunti da ϑ , ve ne saranno in ogni caso tanto di positivi quanto di negativi. Quando sia segnata graficamente la direzione della velocità in un punto P di A , si può ritenere come regola pratica — risparmiandosi di fare la deduzione per continuità — che ϑ va contato fra

— π e π , positivamente nel verso $x \rightarrow y$, a partire dalla direzione positiva dell'asse x .

Occupiamoci ora del posto P da coordinare ad un ζ assegnato. Esso rimane definito dalla (5)

$$dz = \frac{df}{w} = e^{i\omega} df,$$

tenendo conto che $z = 0$ per $f = 0$.

Dalle (10), (11) e (12) si ha

$$df = 2F dF,$$

$$dF = a dZ,$$

$$dZ = -\frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

e da queste, esprimendo anche $2F$ per ζ ,

$$(16) \quad df = \frac{1}{2} a^2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Siccome si corrispondono $z = 0$, $f = 0$, $\zeta = j$, così la espressione finita di z si scriverà

$$(17) \quad z = \int_j^\zeta e^{i\omega} df,$$

intendendo df dato dalla (16) e l'integrale da j a ζ preso lungo un cammino qualunque del piano ζ , che non esca dal solito semicerchio.

Elemento d'arco. — L'espressione dell'elemento lineare del piano z , cioè di $|dz| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}|$ in termini di ζ è

$$(18) \quad |dz| = |e^{i\omega}| |df| = e^{-\tau} |df|,$$

come risulta dalla (15).

Curvatura di una linea di flusso. — L'angolo di contingenza lungo una linea di flusso è $d\vartheta$; usufruendo la (18) per l'elemento d'arco, ricaviamo la formula notevole

$$c = e^\tau \frac{d\vartheta}{|df|},$$

in cui $|c|$ designa la curvatura.

Sulle linee libere, dove $V = e^\tau = 1$, si ha in particolare

$$c = \frac{d\vartheta}{|df|}.$$

Rappresentazione dei tratti di parete π_1 e π_2 . - Immaginando di prendere l'integrale (17) lungo la semicirconferenza 1, $j, -1$, l'affissa z andrà descrivendo π , e precisamente π_2 o π_1 secondochè da j si va verso 1 o verso -1 . Basterà poi separare nell'espressione di z la parte reale dall'immaginaria per avere l'espressione parametrica delle coordinate x, y .

Se si nota che, sull'accennata semicirconferenza, $\xi = e^{i\sigma}$ (con σ reale e compreso fra 0 e π), la (16) porge

$$(16') \quad df = -2a^2(\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma,$$

e quindi

$$(17') \quad z = -2a^2 \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{i\omega} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{i\omega} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma.$$

Se ne trae, per essere $\omega = \vartheta + i\tau$,

$$x = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} \cos \vartheta (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma,$$

$$y = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} \operatorname{sen} \vartheta (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma,$$

dove tutto è reale.

L'arco elementare $d\omega$, a norma delle (18) e (16'), ha per espressione

$$d\pi = 2a^2 e^{-\tau} |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \operatorname{sen} \sigma |d\sigma|,$$

e la curvatura (dacchè si tratta di archi appartenenti a linee di flusso)

$$(19) \quad c = \frac{d\vartheta}{d\omega} = \frac{e^\tau}{2a^2 |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \operatorname{sen} \sigma} \frac{d\vartheta}{|d\sigma|}.$$

Siccome $\cos \sigma - \cos \sigma_0$ è positivo o negativo secondochè $\sigma \leq \sigma_0$, e $d\sigma$ è positivo o negativo secondochè σ va crescendo o decrescendo, così

$$(20) \quad \pi = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma$$

rappresenterà, tanto per π_1 , quanto per π_2 , la lunghezza dell'arco compreso fra la prora e un punto generico.

Rappresentazione delle linee libere. — Per far descrivere a z le linee libere, bisogna che ζ percorra l'asse reale; allora anche df ed ω sono reali.

Mandando per es. ζ da -1 a zero, descriveremo λ_1 dal punto di raccordo P_1 fino all'infinito.

Se $z_1 = x_1 + iy_1$ designa l'affissa di P_1 , avremo, per un generico punto z di λ_1 , dalle (17) e (16),

$$(17'') \quad z = z_1 + \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} df = z_1 + \frac{1}{2}a^2 \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

La funzione sotto il segno tende, come si vede, a diventare infinita (di terz'ordine) al convergere di ζ verso zero.

Per separare il reale dall'immaginario, basta evidentemente tener conto che $z_1 = x_1 + iy_1$ e che $e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$, poichè ω e ζ sono reali.

L'elemento d'arco

$$d\lambda = |e^{i\omega}| |df|$$

si riduce a

$$d\lambda = |df|.$$

Ora (§ 4), mentre z percorre la linea libera λ_1 dal raccordo P_1 in avanti, f cresce costantemente da f_1 in avanti. Si può dunque sopprimere il segno di valore assoluto e si ha, per integrazione, che la lunghezza dell'arco λ_1 (contato da P_1 fino a un punto generico) non è altro che $f - f_1$, ossia, per la (10), $F^2 - F_1^2$.

La (11),

$$F = a(Z + \cos \sigma_0),$$

badando che F_1 è il valore di F cui corrisponde $Z = 1$, porge

$$F_1 = a(1 + \cos \sigma_0)$$

e quindi

$$\lambda_1 = F^2 - F_1^2 = a^2 [Z^2 - 1 + 2 \cos \sigma_0 (Z - 1)].$$

Ne viene, in virtù della (12),

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right)^2 - a^2 \cos \sigma_0 \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta + 2 \right)$$

con ζ compreso fra -1 e zero.

Si vedrebbe analogamente che, sull'altra linea libera, l'arco λ_2 , contato dal raccordo P_2 fino a un punto generico, vale

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right)^2 - a^2 \cos \sigma_0 \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta - 2 \right),$$

ζ essendo compreso fra 1 e zero.

8. - Resistenza diretta e azioni deviatrici.

Designi $d\gamma$ un elemento del contorno γ di C , n la normale a $d\gamma$ volta verso l'interno di C .

L'azione dinamica, che il liquido esercita sopra un solido immerso, è caratterizzata dalla risultante e dal momento risultante delle pressioni subite dagli elementi di contorno.

Nel caso presente, in cui si tratta di un sistema piano, basterà considerare le due componenti

$$R_x = \int_{\gamma} p \cos (nx) d\gamma,$$

$$R_y = \int_{\gamma} p \cos (ny) d\gamma$$

della risultante, e il momento

$$M = \int_{\gamma} p [x \cos (ny) - y \cos (nx)] d\gamma,$$

che tende a provocare rotazione attorno alla normale al piano (nel verso $x \rightarrow y$ o nell'opposto, secondochè esso è positivo o negativo).

R_x misura evidentemente la resistenza diretta; R_y ed M rappresentano azioni deviatrici.

Per valutare queste tre quantità, ricordiamo anzitutto (§ 3) che in ogni punto di A si ha

$$p = p_0 + \frac{1}{2} (1 - V^2),$$

mentre, in ogni punto della scia B , p si riduce al valore costante p_0 .

Ora il contorno γ confina con A lungo π (il complesso dei due tratti

π_1 e π_2), con B nella parte rimanente. Si ha quindi

$$R_x = p_0 \int_{\gamma} \cos(nx) d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) \cos(nx) d\omega$$

e analogamente per R_y e per M .

I primi addendi sono identicamente nulli, e rimane

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_x = \frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) \cos(nx) d\pi, \\ R_y = \frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) \cos(ny) d\pi; \end{array} \right.$$

$$(22) \quad M = \frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) [x \cos(ny) - y \cos(nx)] d\pi,$$

le quali mostrano che la resistenza dipende esclusivamente dallo stato di moto in π .

Osserviamo che, immaginando di percorrere π sempre nello stesso senso, da P_2 per O fino in P_1 , si ha (tanto su π_2 , quanto su π_1)

$$\cos(nx) d\pi = dy,$$

$$\cos(ny) d\pi = -dx,$$

essendo dx , dy le componenti dell'arco elementare $d\pi$.

Alla (22) daremo così l'aspetto

$$(22') \quad M = -\frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) (x dx + y dy)$$

e non ce ne occuperemo ulteriormente.

Rivolgendoci alle (21), osserviamo anzitutto che, posto

$$\mathbf{R} = R_x + iR_y,$$

esse si possono compendiare in

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2i} \int (1 - V^2) dz,$$

l'integrale curvilineo del secondo membro estendendosi al cammino P_2OP_1 .

In virtù delle (5) e (9), esso si trasforma in

$$\frac{1}{2i} \int (1 - e^{2\tau}) e^{i\omega} df,$$

il quale, inteso per df il valore (16), va preso nel piano ζ lungo la semicirconferenza $1, j, -1$. Avremo pertanto

$$R = \frac{1}{2i} \int_{(1, j, -1)} e^{i\omega} df - \frac{1}{2i} \int_{(1, j, -1)} e^{2\tau + i\omega} df.$$

Ora è da notare che, ω essendo reale sull'asse reale, in punti coniugati ζ e $\bar{\zeta}$, la parte reale ϑ assume valori eguali, il coefficiente dell'immaginario τ valori eguali e di segno opposto. In formule:

$$\vartheta_{\zeta} = \vartheta_{\bar{\zeta}}, \quad \tau_{\zeta} = -\tau_{\bar{\zeta}}.$$

Ne viene

$$2\tau_{\zeta} + i\omega_{\zeta} = \tau_{\zeta} + i\vartheta_{\zeta} = -\tau_{\bar{\zeta}} + i\vartheta_{\bar{\zeta}} = i\omega_{\bar{\zeta}},$$

e, siccome sulla circonferenza $|\zeta| = 1$, $\bar{\zeta}$ non è altro che $1/\zeta$, così potremo ritenere, sopprimendo l'indice ζ ,

$$2\tau + i\omega = i\omega \left(\frac{1}{\zeta} \right).$$

D'altra parte l'espressione (16) di df non muta per lo scambio di ζ in $1/\zeta$.

Perciò l'integrale

$$\int_{(1, j, -1)} e^{2\tau + i\omega} df = \int_{(1, j, -1)} e^{i\omega(1/\zeta)} df,$$

che compare nella espressione di R , cambiandovi ζ in $1/\zeta$, si trasforma in

$$\int e^{i\omega(\zeta)} df,$$

esteso alla linea corrispondente, che è la semicirconferenza $1, \bar{j}, -1$ (percorsa nell'ordine scritto).

Si ottiene così per R l'espressione notevole

$$(21') \quad R = \pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} e^{i\omega} df,$$

l'integrale essendo esteso all'intera circonferenza in senso diretto ($x \rightarrow y$).

Avuto riguardo alla (16) e alla circostanza che le funzioni

$$e^{i\omega}, \quad \frac{1}{2} a^2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta}$$

si mantengono regolari entro il cerchio $|\zeta| < 1$, fatta eccezione dell'origine per la seconda di esse, siamo condotti all'enunciato seguente:

La resistenza totale $\mathbf{R} = R_x + iR_y$ è rappresentata (in senso vettoriale) dal prodotto di π per il residuo della funzione

$$\frac{1}{2} a^2 e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta}$$

relativo al polo $\zeta = 0$. La resistenza diretta R_x non è che la parte reale di tale prodotto.

Il residuo si valuta con tutta facilità.

Basta osservare che le derivate successive di $e^{i\omega}$ rapporto a ζ sono:

$$\begin{aligned} & i\omega' e^{i\omega}, \\ & (i\omega'' - \omega'^2) e^{i\omega}, \\ & \dots \end{aligned}$$

sicchè, ricordando che $\omega(0) = 0$, si ha come sviluppo di $e^{i\omega}$ nell'intorno dell'origine:

$$e^{i\omega} = 1 + \zeta \cdot i\omega'(0) + \frac{\zeta^2}{2} [i\omega''(0) - \omega'^2(0)] + \dots$$

Dopo ciò si vede subito che il coefficiente di $1/\zeta$, nello sviluppo di

$$e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta} = e^{i\omega} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta^3} - 2 \cos \sigma_0 + 2 \cos \sigma_0 \frac{1}{\zeta^2} \right),$$

è dato da

$$-\frac{1}{2} (i\omega''(0) - \omega'^2(0)) + 2 \cos \sigma_0 \cdot i\omega'(0) = \frac{1}{2} \omega'^2(0) + i[2 \cos \sigma_0 \cdot \omega'(0) - \frac{1}{2} \omega''(0)].$$

In definitiva risulta

$$(21'') \quad \mathbf{R} = R_x + iR_y = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0) + i \frac{\pi a^2}{2} [2 \cos \sigma_0 \cdot \omega'(0) - \frac{1}{2} \omega''(0)].$$

9. - Comportamento di $\omega(\zeta)$ per $\zeta = j$ (prora).

Avendosi nel punto di prora ($\zeta = j$) $V = e^\tau = 0$, la funzione $\omega = \vartheta + i\tau$ non può conservarsi finita, come abbiamo già osservato a § 5.

Il modo, con cui essa diventa infinita, non è accessibile all'intuizione diretta, ma lo è invece l'andamento della parte reale, il che basta, come ora mostreremo, a caratterizzare la natura della singolarità.

Sia 2α l'angolo delle due tangenti in O a π_1, π_2 ($2\alpha \leq \pi$, il valore π corrispondendo al caso, in cui la prora O è un punto ordinario, non angoloso).

Sia $\delta + \alpha$ l'angolo, che la tangente a π_1 , nel senso del flusso, si

intende, forma colla direzione positiva dell'asse x ; l'angolo dell'analogha tangente a π_2 sarà allora $\delta - \alpha$ (δ è evidentemente zero, quando si tratta di profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto alla direzione del moto).

Si noti (§ 1) che $\delta + \alpha$ e $\delta - \alpha$ devono ritenersi non superiori a $\pi/2$ in valore assoluto, e di segno contrario: non superiori a $\pi/2$ perchè si è supposto che la prora sia il punto più avanzato nel senso del moto; di segno contrario perchè si è supposto che la direzione positiva dell'asse x attraversi C , sia cioè compresa fra π_1 e π_2 .

Tenendo presente il significato di ϑ , abbiamo senz'altro (§ 1, II)

$$(23) \quad \begin{cases} \lim \vartheta = \delta - \alpha, & \text{avvicinandosi a } j \text{ lungo l'arco } \widehat{1, j}, \\ \lim \vartheta = \delta + \alpha, & \text{avvicinandosi a } j \text{ lungo l'arco } \widehat{-1, j}, \end{cases}$$

mentre in ogni altro punto della semicirconferenza ϑ è a risguardarsi funzione continua, e dotata di derivata pure continua (conseguenza questa dell'ipotesi che sia finita e continua la curvatura degli archi π_1 e α_2). Essa è inoltre (come parte reale della ω , regolare per $|\zeta| < 1$ e reale sull'asse reale) armonica entro il cerchio $|\zeta| < 1$, e simmetrica rispetto all'asse reale ($\vartheta_{\zeta} = \vartheta_{\bar{\zeta}}$).

La simmetria implica una discontinuità nel punto $\bar{j} = 1/j$, e precisamente:

$$(23') \quad \begin{cases} \lim \vartheta = \delta - \alpha, & \text{avvicinandosi a } \bar{j} \text{ lungo l'arco } \widehat{1, \bar{j}}, \\ \lim \vartheta = \delta + \alpha, & \text{avvicinandosi a } \bar{j} \text{ lungo l'arco } \widehat{-1, \bar{j}}, \end{cases}$$

mentre, in ogni altro punto della semicirconferenza $1, j, -1, \vartheta$ resta continua assieme alla sua derivata.

Sia ϑ_0 una particolare funzione armonica, soddisfacente a tutte queste condizioni qualitative; τ_0 la sua associata (la costante additiva intendendosi presa in modo che τ_0 si annulli nell'origine);

$$\omega_0 = \vartheta_0 + i\tau_0$$

la corrispondente funzione della variabile complessa ζ .

Le relazioni

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial \xi} = \frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} = -\frac{\partial \tau_0}{\partial \xi},$$

tenendo conto che ϑ_0 è funzione pari di η , danno

$$\tau_0(\xi, -\eta) = -\tau_0(\xi, \eta) + \text{cost.},$$

e, siccome τ_0 si annulla per $\xi = \eta = 0$, così essa risulta funzione dispari di η , e quindi ω_0 reale sull'asse reale.

Posto

$$\Theta = \vartheta_0 - \vartheta,$$

la differenza Θ si mantiene evidentemente *continua su tutta la circonferenza* $|\zeta| = 1$, e vi ammette derivata pure continua (ad eventuale esclusione dei soli punti j, \bar{j} , dove può essere discontinua); inoltre essa si annulla per $\zeta = j$, e per $\zeta = \bar{j}$.

In questa condizione di cose, la Θ dà luogo ad un'associata T , funzione dispari di η , continua anch'essa senza restrizione su $|\zeta| = 1$, e si ha in definitiva

$$(24) \quad \omega = \omega_0 - \Omega,$$

designando $\Omega = \Theta + iT$ una funzione della variabile complessa ζ , reale sull'asse reale e regolare entro il cerchio $|\zeta| < 1$, al pari di ω e di ω_0 , ma avente sopra di esse il vantaggio di restare finita e continua anche sulla circonferenza.

Dacchè, mediante $\omega(\zeta)$, rimangono definiti, come abbiám visto, tutti gli elementi del moto, si può dire che la (24) *costituisce l'integrale generale della classe di problemi qui considerati: la funzione*

$$(25) \quad \Omega(\zeta) = \sum_0^{\infty} c_n \zeta^n,$$

dove le c_n sono costanti reali e la serie converge entro e sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$, ne mette nettamente in evidenza il grado di arbitrarietà.

La condizione che la parte reale Θ di Ω si annulli, in j e in \bar{j} , porta manifestamente fra le c l'unico vincolo espresso dalla equazione

$$(26) \quad \Theta(\sigma_0) = \sum_0^{\infty} c_n \cos n\sigma_0 = 0.$$

Siccome poi ω si annulla per $\zeta = 0$, così si dovrà anche avere $\omega_0(0) - \Omega(0) = 0$, cioè

$$(27) \quad c_0 = \omega_0(0).$$

10. - Costruzione di una trascendente elementare ω_0 , dotata della singolarità caratteristica.

Alle (23) e (23') si soddisfa evidentemente supponendo che ϑ_0 abbia il valore costante $\delta - \alpha$ sull'arco $\bar{j}, 1, j$, e il valore pure costante $\delta + \alpha$ sull'arco complementare $j, -1, \bar{j}$.

Per formare la ω_0 corrispondente, giova partire dalla funzione

$$\frac{1}{i} \log \frac{j - \zeta}{\bar{j} - \zeta},$$

anzi, più precisamente, da quel ramo di essa, uniforme e regolare entro la circonferenza $|\zeta| = 1$, che si riduce per $\zeta = 0$ a

$$2\sigma_0 = \frac{1}{i} \log \frac{j}{\bar{j}}.$$

La parte reale ϑ^* non è altro che l'angolo $\bar{j}\zeta j$, o per essere esatti, la misura (compresa 0 e 2π) di tale angolo, contato a partire dal lato ζj nel verso $\xi \rightarrow \eta$.

Ovvie considerazioni di geometria elementare mostrano che, sull'arco \bar{j} , 1, j , si ha

$$\vartheta^* = \pi + \sigma_0,$$

e, sull'arco complementare j , -1 , \bar{j} ,

$$\vartheta^* = \sigma_0.$$

La funzione è poi reale sull'asse reale perchè la sua espressione rimane inalterata cambiandovi i in $-i$ (il che implica scambio di j con \bar{j}).

Sottraendo $\sigma_0 + \pi/2$, viene

$$\frac{1}{i} \log \frac{j - \zeta}{\bar{j} - \zeta} - \left(\sigma_0 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{i} \log \frac{j - \zeta}{\bar{j} - \zeta} - \frac{1}{i} \log e^{i(\sigma_0 + \pi/2)} = \frac{1}{i} \log \frac{j - \zeta}{\bar{j} - \zeta} - \frac{1}{i} \log ij,$$

ossia, per essere $j\bar{j} = 1$, $1/i = -i$,

$$-i \log \frac{-ij + i\zeta}{1 - j\zeta},$$

la cui parte reale $\vartheta^* - (\sigma_0 + \pi/2)$ prende, sui due archi \bar{j} , 1, j ; j , -1 , \bar{j} , i valori $\pm \pi/2$. Moltiplicando per $-2\alpha/\pi$, questi valori divengono $\mp \alpha$.

Dopo ciò è manifesto che

$$(28) \quad \omega_0 = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{-ij + i\zeta}{1 - j\zeta}$$

[dove il logaritmo ha la determinazione, che si riduce a $i(\sigma_0 - \pi/2)$ per $\zeta = 0$] fornisce la funzione cercata.

Dacchè

$$\omega_0(0) = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2} \right),$$

la (27) assume l'aspetto

$$(27') \quad \Omega(0) = c_0 = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2} \right).$$

II. - Interpretazione di ω_0 . Problema di Bobileff.

Cerchiamo a qual tipo di profilo mobile compete la soluzione, che si ottiene dall'integrale generale (24), supponendovi $\Omega = 0$, cioè $\omega = \omega_0$.

Sui due archi $\widehat{1, j, j, -1}$, che corrispondono rispettivamente a π_2 , π_1 , la parte reale ϑ_0 di ω_0 assume, per costruzione, i valori costanti $\delta - \alpha$, $\delta + \alpha$.

Ora ϑ (che nel caso presente si riduce a ϑ_0) rappresenta, per qualsiasi linea di flusso, e in particolare per π_1 e π_2 , l'inclinazione della tangente.

Ne viene che π_1 , π_2 sono due tratti rettilinei inclinati rispettivamente di $\delta + \alpha$, $\delta - \alpha$ sull'asse delle x , e quindi comprendenti un angolo 2α .

Dalla (27') (per $\Omega = 0$) si ha

$$(29) \quad \sigma_0 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\delta}{\alpha} \right).$$

Si noti che, essendo δ minore di α in valore assoluto (§ 9), il valore di σ_0 , fornito dalla (29), risulta, come dev'essere, sempre compreso fra 0 e π .

Sulla semicirconferenza $1, j, -1$ si ha $\zeta = e^{i\sigma}$ con σ compreso fra 0 e π .

Ne viene

$$\frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta} = \frac{-e^{i\sigma_0} + e^{i\sigma}}{1 - e^{i(\sigma_0 + \sigma)}} = \frac{-e^{i\frac{\sigma_0 - \sigma}{2}} + e^{-i\frac{\sigma_0 - \sigma}{2}}}{e^{-i\frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} - e^{i\frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} + \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}},$$

da cui si vede che il rapporto considerato (sempre minore dell'unità in valore assoluto) è positivo o negativo secondoche σ è minore o maggiore di σ_0 . Avremo di conseguenza, per $\sigma < \sigma_0$,

$$\log i \frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta} = i \frac{\pi}{2} + \log \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}};$$

per $\sigma > \sigma_0$,

$$\log i \frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta} = -i \frac{\pi}{2} + \log \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}.$$

Ciò posto, risulta subito dalla (28) che il coefficiente di i in ω_0 ha l'espressione

$$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\pi} \log \frac{\operatorname{sen} \frac{|\sigma_0 - \sigma|}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}},$$

valida su tutta la semicirconferenza 1, j , -1 .

Sarà perciò

$$(30) \quad e^{-\tau_0} = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{|\sigma_0 - \sigma|}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} \right)^{-2\alpha/\pi}.$$

Portando questo valore nella (20) e prendendo successivamente 0 e π come limiti inferiori dell'integrale, si hanno le lunghezze dei due tratti rettilinei π_2 e π_1 .

Ad uno di questi, usufruendo della costante α , si può immaginare attribuito un valore ad arbitrio; quello dell'altro risulta allora determinato. Il rapporto π_2/π_1 dipende in modo trascendente, e in generale complicato, dalle due costanti α e δ .

Calcoliamo la resistenza.

Dalla

$$\omega_0 = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log i \frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta}$$

scende

$$\omega_0'(\zeta) = \frac{2\alpha i}{\pi} \left[\frac{1}{\zeta - j} - \frac{1}{\zeta - \bar{j}} \right],$$

$$\omega_0''(\zeta) = -\frac{2\alpha i}{\pi} \left[\frac{1}{(\zeta - j)^2} - \frac{1}{(\zeta - \bar{j})^2} \right],$$

con che

$$\omega'_0(0) = \frac{2\alpha i}{\pi} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{\bar{j}} \right) = -\frac{4\alpha}{\pi} \operatorname{sen} \sigma_0,$$

$$\omega''_0(0) = \frac{2\alpha i}{\pi} \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{\bar{j}^2} \right) = -\frac{4\alpha}{\pi} \operatorname{sen} 2\sigma_0,$$

e la (21'') porge

$$(31) \quad \mathbf{R} = R_x + iR_y = \frac{4a^2\alpha^2}{\pi} \operatorname{sen}^2 \sigma_0 - ia^2\alpha \operatorname{sen} 2\sigma_0.$$

CASI PARTICOLARI NOTEVOLI.

I) $\alpha = \pi/2$ e δ qualunque (HELMHOLTZ). - Veramente per $\alpha = \pi/2$ e δ non nullo le nostre formule non sono senz'altro applicabili, poichè le premesse implicano (§ 9) $\alpha + \delta \leq \pi/2$. L'estensione formale al caso indicato rimarrà però giustificata a posteriori, constatando che essa dà luogo a casi intuitivamente possibili ed interessanti, per quanto non soddisfacenti in tutto alle ipotesi preliminari del § 1.

Dacchè $\alpha = \pi/2$, i due segmenti π_1, π_2 sono per diritto, e si tratta di un profilo rettilineo (*lamina*).

La (29) porge

$$\sigma_0 = \delta + \frac{\pi}{2};$$

σ_0 rappresenta quindi l'angolo di π_1 — possiam dire della lamina — colla direzione positiva dell'asse x .

La (30) permette poi di scrivere

$$e^{-\tau_0} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{|\sigma_0 - \sigma|}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} \right)^{-1} \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma_0 - \sigma}{2} =$$

$$= \pm 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_0 + \sigma}{2} = \pm [1 - \cos (\sigma + \sigma_0)],$$

valendo il segno superiore per $\sigma < \sigma_0$, l'inferiore per $\sigma > \sigma_0$.

Con ciò, attesa l'identità

$$2 \cos (\sigma + \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma = \operatorname{sen} (2\sigma + \sigma_0) - \operatorname{sen} \sigma_0,$$

la (20) dà

$$\begin{aligned}\pi &= \pm a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} [2 \operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} (2\sigma + \sigma_0) + \operatorname{sen} \sigma_0] d\sigma = \\ &= \pm a^2 \left[-2 \cos \sigma + \frac{1}{2} \cos (2\sigma + \sigma_0) + \sigma \operatorname{sen} \sigma_0 \right]_{\sigma}^{\sigma_0};\end{aligned}$$

quindi in particolare, per $\sigma = 0$,

$$\begin{aligned}\pi_2 &= a^2 [2 - 2 \cos \sigma_0 + \frac{1}{2} (\cos 3\sigma_0 - \cos \sigma_0) + \sigma_0 \operatorname{sen} \sigma_0] = \\ &= a^2 [2 - 2 \cos \sigma_0 - 2 \cos \sigma_0 \operatorname{sen}^2 \sigma_0 + \sigma_0 \operatorname{sen} \sigma_0];\end{aligned}$$

per $\sigma = \pi$ (valendo allora il segno $-$)

$$\begin{aligned}\pi_1 &= a^2 [2 + 2 \cos \sigma_0 + \frac{1}{2} (\cos \sigma_0 - \cos 3\sigma_0) + (\pi - \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma_0] \\ &= a^2 [2 + 2 \cos \sigma_0 + 2 \cos \sigma_0 \operatorname{sen}^2 \sigma_0 + (\pi - \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma_0].\end{aligned}$$

La lunghezza totale l della lamina risulta pertanto

$$(32) \quad l = \pi_1 + \pi_2 = a^2 (4 + \pi \operatorname{sen} \sigma_0),$$

e la distanza dalla prua al centro della lamina, espressa in termini di l ,

$$\begin{aligned}\frac{\pi_1 - \frac{1}{2}l}{l} &= \frac{a^2}{l} \left[2 \cos \sigma_0 (1 + \operatorname{sen}^2 \sigma_0) + \left(\frac{\pi}{2} - \sigma_0 \right) \operatorname{sen} \sigma_0 \right] = \\ &= \frac{2 \cos \sigma_0 (1 + \operatorname{sen}^2 \sigma_0) + \left(\frac{\pi}{2} - \sigma_0 \right) \operatorname{sen} \sigma_0}{4 + \pi \operatorname{sen} \sigma_0}.\end{aligned}$$

Se l'angolo σ_0 , formato da π_1 colla direzione positiva dell'asse x , è acuto ($\delta < 0$), il numeratore è positivo, e quindi π_1 è più grande di $\frac{1}{2}l$; l'opposto accade per σ_0 ottuso ($\delta > 0$). Ciò corrisponde al fatto intuitivamente evidente che la prua si trova spostata dal centro della lamina verso quella banda, che si protende nella direzione del moto.

Per $\sigma_0 = \pi/2$, la lamina è normale alla direzione del moto, la prua cade nel centro e si ha dalla (32)

$$(32') \quad l = a^2 (4 + \pi).$$

Le (31) e (32) danno per la resistenza unitaria

$$(33) \quad \frac{R_x}{l} = \frac{\pi \operatorname{sen}^2 \sigma_0}{4 + \pi \operatorname{sen} \sigma_0} \quad (16),$$

(*) LAMB, loco cit., cap. IV, art. 77. Il nostro σ_0 è l'angolo ivi designato con α .

che, per $\sigma_0 = \pi/2$, assume l'aspetto particolare

$$(33') \quad \frac{R_x}{l} = \frac{\pi}{4 + \pi}.$$

II) $\delta = 0$ e α qualunque (problema di BOBYLEFF). - Questo caso particolare, colla limitazione sottointesa $\alpha < \pi/2$, rientra perfettamente nell'ambito delle nostre ipotesi. Apparirà poi dagli sviluppi, che seguono, che l'interpretazione idrodinamica rimane attendibile anche se α è retto od ottuso.

La (29) dà

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2},$$

con che $j = i$, e l'espressione (28) di ω_0 diviene

$$\omega_0 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

La funzione $i\omega_0$ assume manifestamente valori reali per ζ puramente immaginario; quindi valori complessi coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse immaginario; in particolare, in punti della semicirconferenza 1, i , -1 , aventi anomalie supplementari σ e $\pi - \sigma$.

Essendo

$$i\omega_0 = i\vartheta_0 - \tau_0,$$

τ_0 (in quanto si consideri come funzione di σ sopra la detta semicirconferenza) rimarrà inalterata per lo scambio di σ in $\pi - \sigma$; ossia

$$\tau_0(\sigma) = \tau_0(\pi - \sigma).$$

Ciò posto, osserviamo che la (20), ritenutovi $\sigma_0 = \pi/2$, e presivi successivamente $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$ come limiti inferiori di integrazione, ci dà

$$\pi_1 = \pi_2,$$

in quanto i due integrali si ottengono l'uno dall'altro collo scambio della variabile corrente σ in $\pi - \sigma$.

Ne viene che il profilo consta di due segmenti eguali ed egualmente inclinati sulla direzione del moto.

Dalla (30) si ha, per $\sigma_0 = \pi/2$,

$$e^{-\tau_0} = \left[\frac{\operatorname{sen} \left| \frac{\pi - \sigma}{4} - \frac{\sigma}{2} \right|}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \right)} \right]^{-2\alpha/\pi} = \left(\operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right| \right)^{-2\alpha/\pi};$$

quindi

$$\pi_1 = \pi_2 = 2a^2 \int_0^{\pi/2} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right) \right]^{-2\alpha/\pi} \cos \sigma \operatorname{sen} \sigma \, d\sigma.$$

Assumiamo come variabile di integrazione

$$t = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{1 + \operatorname{sen} \sigma}.$$

Essendo

$$\operatorname{sen} \sigma = \frac{1-t}{1+t} = -1 + \frac{2}{1+t},$$

$$\cos \sigma \, d\sigma = d(\operatorname{sen} \sigma) = -\frac{2 \, dt}{(1+t)^2},$$

risulta subito

$$\pi_1 = 4a^2 \int_0^1 t^{-\alpha/\pi} \left(-1 + \frac{2}{1+t} \right) \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

L'integrale del secondo membro si esprime facilmente per mezzo della funzione β (di STIRLING)

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt \quad (x > 0),$$

legata alla derivata logaritmica Ψ della funzione Γ dalla formula (17)

$$\beta(x) = \frac{1}{2} \left[\Psi \left(\frac{x+1}{2} \right) - \Psi \left(\frac{x}{2} \right) \right].$$

Osserviamo a questo scopo che, ponendo

$$\beta_n = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^n} \, dt \quad (x > 0 \text{ e } n \text{ intero positivo}),$$

(17) Cfr. per es. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, Teubner, 1906, pp. 69 e 16.

con che β_1 non è altro che $\beta(x)$, si ha, per $n > 1$,

$$\beta_n = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^n} (1+t-t) dt = \beta_{n-1} - \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^n} dt,$$

da cui, assumendo $dt/(1+t)^n$ come fattore differenziale ed integrando per parti,

$$\beta_n = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{n-1-x}{n-1} \beta_{n-1}.$$

Da questa formola ricorrente segue in particolare

$$\beta_2 = \frac{1}{2} + (1-x)\beta(x),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(2-x)\beta_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)(1-x)\beta(x),$$

$$2\beta_3 - \beta_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-x) + (1-x)^2\beta(x).$$

Ora la precedente espressione di π_1 non è altro che

$$4a^2(2\beta_3 - \beta_2),$$

le β riferendosi al valore $1 - \alpha/\pi$ di x . Ne viene

$$(34) \quad \pi_1 = a^2 \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2} \beta \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \right].$$

La (31), per $\sigma_0 = \pi/2$, porge

$$\mathbf{R} = R_x + iR_y = \frac{4a^2\alpha^2}{\pi}.$$

R_y è nullo, come era evidente a priori, attesa la simmetria; la resistenza diretta R_x , riportata all'unità di apertura della lamina, divisa cioè per la *larghezza*

$$l = 2\pi_1 \operatorname{sen} \alpha,$$

si presenta sotto la forma

$$(35) \quad \frac{R_x}{l} = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^2}{\operatorname{sen} \alpha \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2} \beta \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \right]} \quad (18).$$

(18) Cfr. LAMB, loco cit., art. 78.

Per $\alpha = \pi/2$ ritroviamo il caso particolare, già precedentemente incontrato, di una lamina rettilinea, di larghezza

$$l = 2\pi_1,$$

normale alla direzione del moto.

Naturalmente si ritrovano anche le formule relative.

Si ha infatti

$$\beta \left(\frac{1}{2} \right) = \int_0^1 \frac{t^{-1/2} dt}{1+t} = \frac{\pi}{2},$$

con che la (34), facendovi $\alpha = \pi/2$, dà per l il valore (32'); la (35) porge poi, come la (33'),

$$\frac{R_x}{l} = \frac{\pi}{4 + \pi}.$$

12. - Contorni simmetrici e simmetricamente orientati rispetto alla direzione del moto.

Fissiamo le proprietà analitiche conseguenti all'ipotesi che vi sia simmetria rispetto all'asse x .

Le velocità, in punti simmetrici, essendo simmetriche, potremo anzitutto asserire che, nella corrispondenza fra i piani $z = x + iy$, $w = u - iv$, a valori coniugati di z fanno riscontro valori coniugati di w ; in particolare che w è reale sull'asse di simmetria.

Anche f risulta allora reale su tale asse e prende quindi valori coniugati in punti simmetrici. Tali essendo i punti di raccordo P_1 e P_2 , lo saranno i corrispondenti valori $f_1 = f_2$; ma si tratta (§ 4) di valori reali; dunque $f_1 = f_2$.

Ne viene (§ 5) $F_1 = F_2$, e per conseguenza

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte (indipendentemente da ogni particolare ipotesi) la formula (12)

$$Z = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\bar{\zeta}} \right)$$

mostra che a valori di ζ di affissa simmetrica rispetto all'asse immaginario (del corrispondente piano), cioè del tipo $\zeta = \xi + i\eta$, $-\bar{\zeta} = -\xi + i\eta$, fanno riscontro valori di Z egualmente simmetrici rispetto all'asse immaginario.

Lo stesso avviene nella corrispondenza fra Z ed F , stabilita dalla (11), in quanto si tenga conto della simmetria [$\cos \sigma_0 = 0$, con che la (11) si riduce a $F = aZ$].

La (10)

$$f = F^2$$

fa finalmente corrispondere valori coniugati di f a coppie del tipo F e $-\bar{F}$.

Da ciò si raccoglie che, ammessa la simmetria, a valori di ζ simmetrici rispetto all'asse immaginario debbono far riscontro valori coniugati di f .

Ora, per quanto abbiamo osservato in principio di questo §, la corrispondenza fra i piani z , w ed f conserva il coniugio. Attesa la biunivocità possiamo quindi asserire:

w , considerata come funzione di ζ , assume valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse immaginario, cioè per valori ζ e $-\bar{\zeta}$ dell'argomento; in particolare w è reale per ζ puramente immaginario.

La (9)

$$w = e^{-i\omega}$$

implica che $i\omega$ sia anch'esso reale, o che la parte immaginaria si riduca ad un multiplo intero di $2\pi i$; ma quest'ultima eventualità è da escludere, perchè ω deve annullarsi con ζ .

In definitiva basterà ritenere che, quando c'è simmetria,

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}, \quad j = e^{i\sigma_0} = i;$$

$i\omega(\zeta)$ è funzione di ζ , reale sull'asse immaginario η . Tenendo conto che $\omega(\zeta)$ è in ogni caso reale sull'asse reale ξ , ciò può anche esprimersi dicendo: $\omega(\zeta)$ è funzione dispari di ζ . Infatti, essendo $\omega(\zeta)$ regolare per $|\zeta| < 1$, si ha lo sviluppo (a coefficienti reali)

$$\omega(\zeta) = \sum_0^{\infty} \frac{\omega^{(n)}(0)}{n!} \zeta^n.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $i\omega$ risulti reale per ζ puramente immaginario è che si annullino tutti i coefficienti delle potenze pari.

C. d. d.

Affatto ovvia è la semplificazione delle formule dei §§ 7-10: la si ottiene materialmente ponendo $\sigma_0 = \pi/2$, $j = i$, e avendo presente, ove giovi, la disparità di $\omega(\zeta)$.

Per es. (§ 7) le immagini, nel piano ζ , delle linee di flusso sono definite da

$$\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1)(\xi^2 + \eta^2 - 1)\eta = b(\xi^2 + \eta^2)^2.$$

Per $b = 0$, oltre a $\xi^2 + \eta^2 = 1$, $\eta = 0$ si ha (come ramo reale della cubica residua) l'asse immaginario $\xi = 0$, che è l'immagine di quella tale linea di flusso a proravia del corpo C , la quale si bipartisce, colpendo la prora O (e coincide, data la simmetria, col semiasse negativo delle x).

L'angolo δ (§ 9) è nullo, quindi, per la (28), la parte singolare ω_0 è

$$\omega_0 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta},$$

la quale da sola dà luogo, come abbiám visto, al problema di BOBYLEFF.

$i\omega_0$ è reale sull'asse immaginario; deve perciò esser tale anche la differenza $i(\omega_0 - \omega) = i\Omega$.

Dacchè Ω è essa pure funzione dispari di ζ , l'espressione generale della serie, che la rappresenta si potrà porre sotto la forma

$$\Omega = \zeta \sum_0^{\infty} b_n \zeta^{2n}.$$

Le b sono costanti reali soggette alla sola restrizione qualitativa di render convergente la serie per $|\zeta| \leq 1$. Dei due vincoli (26) e (27) del caso generale non è più da tener conto, perchè, le c_n di indice pari essendo nulle, $\sigma_0 = \pi/2$ e $\omega_0(0) = 0$, essi risultano identicamente verificati.

Nella espressione (21') della resistenza la parte immaginaria va a zero, e con essa R_x , come è intuitivamente evidente, perchè, tutto essendo simmetrico rispetto alla direzione del moto, non può ingenerarsi alcuna tendenza a deviazioni laterali.

Quanto alla resistenza diretta

$$R_x = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0),$$

è importante l'osservazione seguente:

Se si aggiunge l'ipotesi [sempre verificata nei casi pratici (cfr. fig. 2)] che sul tratto di parete π_1 l'inclinazione ϑ della tangente vari, sempre decrescendo, da α fino ad un certo valore $\vartheta_1 > 0$ (con che, in π_2 , ϑ varierà da

— α a $-\vartheta_1$), rimane esclusa l'eventualità $\omega'(0) = 0$. Quindi R , che non è negativo in alcun caso, risulta essenzialmente > 0 .

La dimostrazione si fa senza difficoltà in base ad un elegante lemma del sig. LANDAU ⁽¹⁹⁾, che si enuncia così:

« Sia $\Omega(\zeta)$ una funzione della variabile complessa ζ , regolare per $|\zeta| < 1$, finita e continua sulla circonferenza $|\zeta| = 1$; Θ la parte reale di Ω , $E(\Theta)$ la massima oscillazione di Θ sulla circonferenza $|\zeta| = 1$: $\Omega'(0)$ non può superare in valore assoluto il prodotto $(2/\pi)E(\Theta)$ ».

Per usufruire di questo lemma, teniamo presente anzitutto che $\vartheta = \vartheta_0 - \Theta$, e che, variando σ , sulla circonferenza $1, i, -1$, da 0 a π , $\vartheta(\sigma)$ (per l'ipotesi complementare da noi introdotta) è sempre decrescente; d'altra parte $\vartheta_0(\sigma)$ ha valore costante ($-\alpha$ o $+\alpha$, secondochè σ appartiene al primo o al secondo quadrante). Θ sarà perciò sempre crescente, e la massima oscillazione, relativa alla semicirconferenza $1, i, -1$, sarà data dalla differenza $\Theta(\pi) - \Theta(0)$. Dalla $\Theta = \vartheta_0 - \vartheta$, essendo $\pm \vartheta_1$ i valori di ϑ nei punti di raccordo P_1, P_2 , cioè per $\sigma = \pi$ e per $\sigma = 0$ rispettivamente, segue

$$\Theta(\pi) - \Theta(0) = 2(\alpha - \vartheta_1).$$

Siccome, per essere Ω reale sull'asse reale, la Θ riprende sulla semicirconferenza $1, -i, -1$ gli stessi valori, che le competono sulla $1, i, -1$, così la massima oscillazione $E(\Theta)$, relativa all'intera circonferenza $|\zeta| = 1$, è ancora $2(\alpha - \vartheta_1)$.

Il lemma di LANDAU ci dà in conformità

$$|\Omega'(0)| < \frac{4}{\pi} (\alpha - \vartheta_1).$$

Ora, da

$$\omega_0 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}$$

scende

$$\omega'_0 = -\frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{1 + i\zeta} + \frac{1}{1 - i\zeta} \right)$$

e quindi

$$\omega'_0(0) = -\frac{4\alpha}{\pi}.$$

⁽¹⁹⁾ Ueber einige Ungleichheitsbeziehungen in der Theorie der analytischen Funktionen, « Archiv der Math. und Physik », III, Reihe, Bd. XI, 1906, pp. 31-36.

Dacchè

$$\omega'(0) = \omega'_0(0) - \Omega'(0),$$

e il valore assoluto del primo addendo supera quello del secondo, si ha necessariamente $\omega'(0) \geq 0$. C. d. d.

Come esempio semplice di contorni (non rettilinei) simmetrici e simmetricamente orientati, si potrebbe approfondire il caso, in cui Ω sia limitato al suo primo termine $b_0 \zeta$. Preferisco però di rimettere lo studio dei casi particolari a quando mi sarò reso conto dei criteri pratici, in base ai quali conviene impostare la discussione.

13. - Relazione fra Θ e T al contorno del cerchio di regolarità.

Osservazioni sul problema matematico relativo ad un profilo prefissato.

Supponiamo che in π_1 e in π_2 la tangente vari sempre nel medesimo senso ⁽²⁰⁾, e richiamiamo la equazione (19).

Badando che, fra le parti reali e i coefficienti di i in ω , ω_0 , Ω sussistono le relazioni

$$\tau = \tau_0 - T, \quad \vartheta = \vartheta_0 - \Theta,$$

che ϑ_0 è costante sulla circonferenza 1, $i, -1$ (eguale a $\delta - \alpha$ per $0 \leq \sigma < \sigma_0$, a $\delta + \alpha$ per $\sigma_0 < \sigma \leq \pi$), e che al verso delle σ crescenti ($|d\sigma| = d\sigma$) fa riscontro sugli archi π_1, π_2 del piano z il verso P_2OP_1 , siamo condotti a porre la (19) sotto la forma

$$(36) \quad \frac{d\Theta}{d\sigma} = \chi(\sigma) \cdot c(\Theta) \cdot e^{\tau} \quad (0 \leq \sigma \leq \pi)$$

dove, per la (30),

$$\begin{aligned} \chi(\sigma) &= 2a^2 |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \operatorname{sen} \sigma e^{-\tau_0} = \\ &= 2a^2 |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{\operatorname{sen} \left| \frac{\sigma_0 - \sigma}{2} \right|}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} \right)^{-2\alpha/\pi} \end{aligned}$$

è una funzione nota di σ , e, scrivendo $c(\Theta)$, abbiamo voluto mettere in evidenza che c è a ritenersi funzione di Θ , perfettamente conosciuta,

⁽²⁰⁾ Questo comportamento è certo implicito nella rappresentazione intuitiva di una scia. Non l'ho enunciato esplicitamente fra le ipotesi del § 1, perchè le considerazioni fatte finora ne sono indipendenti (tranne l'osservazione del paragrafo precedente, concernente R_x ; alla quale fu appunto premessa l'ipotesi complementare circa il modo di variare di ϑ).

tostochè si risguardi conosciuta la forma geometrica del profilo γ : infatti, dato γ , nei tratti di parete rigida π_1 e π_2 , che solo ci interessano, la c (curvatura) è nota come funzione del punto corrispondente, quindi anche come funzione di un qualunque parametro atto a definire univocamente gli archi, di cui si tratta. Attesa l'ipotesi circa il modo di variare della tangente, ϑ è un tale parametro, e perciò anche Θ . Esso presenta sopra ϑ il vantaggio che, al variare di σ nella (36), varia con continuità, mentre ϑ , pur variando sempre nello stesso senso, là dove è continuo, fa un brusco salto (in senso opposto) nel passare per O .

La (36) è manifestamente una relazione fra le funzioni associate Θ e T al contorno del cerchio di regolarità. Essa si riferisce alla semicirconferenza $1, i, -1$; sull'altra semicirconferenza ($\pi \leq \sigma \leq 2\pi$) valendo le relazioni

$$(37) \quad \Theta(\sigma) = \Theta(2\pi - \sigma), \quad T(\sigma) = -T(2\pi - \sigma),$$

che provengono dall'essere Ω reale sull'asse reale, e quindi coniugata in punti simmetrici rispetto a tale asse.

La seconda delle (37), essendo $T(0) = T(2\pi)$, dà luogo in particolare alla relazione $T(0) = 0$, come pure, facendovi $\sigma = \pi$, alla $T(\pi) = 0$.

Ricordiamo ancora le (26) e (27).

La condizione (26) non è altro che

$$(38) \quad \Theta(\sigma_0) = 0;$$

l'altra esprime l'annullarsi di ω per $\zeta = 0$, cioè nel centro del cerchio, ma si traduce subito in una condizione numerica per i valori di Θ al contorno. Si ha infatti dal teorema di CAUCHY

$$\Omega(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta(\sigma) + iT(\sigma)] d\sigma.$$

La parte immaginaria essendo nulla per la seconda delle (37), rimane, in virtù della prima di esse,

$$\Omega(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Theta(\sigma) d\sigma,$$

e la (27') assume l'aspetto

$$(39) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Theta(\sigma) d\sigma = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Il secondo membro — notiamolo incidentalmente — va a zero quando si tratti di profili simmetrici, simmetricamente orientati rispetto alla direzione del moto.

In definitiva riconosciamo che, per un profilo assegnato, la risoluzione del problema idrodinamico implica l'esistenza di due funzioni associate $\Theta(\sigma)$, $\mathbf{T}(\sigma)$ dei punti della circonferenza $|\zeta|=1$, finite, continue e soddisfacenti alle (36), (37), (38), (39) per convenienti valori delle due costanti a^2 e σ_0 (a priori vincolate soltanto ad essere: la prima positiva, la seconda compresa fra 0 e π).

Reciprocamente, esisteranno sempre per un assegnato profilo (convesso, supponiamo, e soddisfacente alle restrizioni che risultano dal § 1) due associate $\Theta(\sigma)$, $\mathbf{T}(\sigma)$, che verifichino tutte le condizioni testè indicate?

Ecco il punto principale della questione dal punto di vista matematico. Superato questo punto, poche considerazioni complementari permetterebbero di esaurire anche l'interpretazione idrodinamica.

Nel caso, in cui vi sia simmetria rispetto all'asse x , la funzione Ω deve essere dispari (§ 12), ossia $i\Omega$ deve assumere valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse immaginario. Questo implica in particolare le relazioni

$$(40) \quad \Theta(\pi - \sigma) = -\Theta(\sigma), \quad \mathbf{T}(\pi - \sigma) = \mathbf{T}(\sigma)$$

fra i valori di Θ e \mathbf{T} , al contorno.

Tenendone conto e badando che σ_0 vale in questo caso $\pi/2$, con che

$$(41) \quad \chi(\sigma) = 2a^2 |\cos \sigma| \operatorname{sen} \sigma \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right) \right|^{-2a/\pi},$$

si vede che basta considerare la (36) per il primo quadrante ($0 \leq \sigma \leq \pi/2$); nel secondo essa si trova di necessità soddisfatta, in virtù delle (40). Pure per la prima delle (40) e per essere $\delta = 0$, le (38) e (39) rimangono identicamente verificate.

Il problema analitico fondamentale, per profili simmetrici e simmetricamente orientati, consiste così nella determinazione di due funzioni associate Θ e \mathbf{T} , i cui valori al contorno $|\zeta|=1$, siano ovunque continui, e soddisfacciano alla (36), col valore (41) di χ , nel primo quadrante ($0 \leq \sigma \leq \pi/2$), rimanendo prolungati negli altri tre quadranti a norma delle relazioni (37) e (40).

NOTA SULLA RESISTENZA D'ATTRITO.

Un corpo C , immerso in acqua tranquilla, proceda orizzontalmente con moto traslatorio uniforme. Si supponga che il moto subordinato

del liquido sia irrotazionale e ovunque continuo; lo si riferisca ad un sistema di assi solidale con C .

Per una generica particella P del liquido, sia W il valore assoluto della velocità, p la pressione.

Diciamo poi (senza specializzare le unità, per poter più comodamente passare ai numeri in unità pratiche) V_0 la velocità (costante) di traslazione del corpo C , ρ la densità (pure costante) del liquido.

Ritenuto che degli assi di riferimento, solidali, per ipotesi, con C , sia quello delle z verticale e diretto verso il basso, il potenziale della gravità sarà gz e (il movimento relativo, di cui si tratta, differendo da un moto assoluto soltanto per una traslazione uniforme) varrà la solita relazione integrale

$$p = \rho gz - \frac{1}{2}\rho W^2 + \text{cost.}$$

Fuori dell'influenza del moto del solido, $W = V_0$, perchè l'acqua vi è in quiete assoluta, il che è quanto dire animata, rispetto al corpo C , da velocità opposta a quella (assoluta) del corpo stesso.

Conveniamo di contare le z a partire dalla superficie libera e designiamo con p_0 la pressione atmosferica. Applicando la relazione precedente ad un punto della superficie libera a grande distanza dal solido ($W = V_0$), troviamo subito che la costante deve avere il valore $p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2$, talchè

$$p = p_0 + \rho gz + \frac{1}{2}\rho(V_0^2 - W^2).$$

Importa osservare che W si può porre sotto la forma $V_0 V$, con V indipendente da V_0 ⁽²¹⁾ (la velocità, che si avrebbe, caeteris paribus, nel punto considerato, per una traslazione unitaria di C).

In definitiva, posto

$$\begin{aligned} p_s &= p_0 + \rho gz && \text{(pressione statica),} \\ q &= \frac{1}{2}\rho V_0^2(1 - V^2) && \text{(correzione cinetica),} \end{aligned}$$

avremo come espressione di p :

$$p = p_s + q,$$

il primo addendo essendo indipendente da V_0 , il secondo proporzionale a V_0^2 .

Per farci un'idea del rapporto numerico dei due addendi, conveniamo anzitutto di riferirci alle unità pratiche metro, secondo, kilogrammo

⁽²¹⁾ Per riconoscerlo, basta pensare alle equazioni, che caratterizzano il potenziale di velocità ϕ del liquido. Ponendovi $\phi = V_0\Phi$, si hanno equazioni definienti Φ , in cui non resta più traccia di V .

(peso). Avremo ρg (peso di un m^3 d'acqua) = 1000, e, in cifra tonda, $\frac{1}{2}\rho = 50$, $p_0 = 10000$.

Quando la velocità di traslazione V_0 è abbastanza piccola, non superiore per es. ai 4 metri al secondo, il secondo addendo q rimane inferiore a 800, mentre la pressione statica p_s (z essendo ≥ 0) supera 10000: come si vede, q si può quasi trascurare di fronte a p_s .

Al crescere di V_0 non è più così, ma, nei limiti delle velocità attualmente raggiungibili dalle navi, il contributo recato dal primo addendo p_s è sempre importante, e non si può dire, nemmeno in grossolana approssimazione, che la somma $p_s + q$ varia in ragione del quadrato della velocità.

È facile convincersi che analoga conclusione sta per la resistenza diretta.

Infatti, conformemente alla legge fondamentale dell'attrito dinamico, tale resistenza proviene, per ciascun elemento $d\gamma$ della superficie del corpo C , da una forza proporzionale alla pressione normale $p d\gamma$, e diretta per verso opposto alla velocità (relativa) della particella fluida in contatto coll'elemento.

Detto k il coefficiente d'attrito, e ϑ l'angolo compreso fra la direzione della velocità, in un generico elemento $d\gamma$, e la direzione diametralmente opposta a quella del moto di C , la resistenza diretta, incontrata da $d\gamma$, vale

$$kp \cos \vartheta d\gamma.$$

La resistenza totale segue di qua per integrazione. In essa si riverbera senz'altro il rapporto quantitativo dei due addendi costituenti p .

In particolare (k essendo indipendente da V_0) rimane giustificata la conclusione che l'attrito non si può riguardare causa preponderante della resistenza diretta, poichè, se ciò fosse, la resistenza diretta dovrebbe, di fronte a piccole velocità di traslazione, variare ben poco, e non riscontrarsi, come si riscontra in fatto, sensibilmente proporzionale ai quadrati di tali velocità.

Padova, Settembre 1906.