

SULLA CONTRAZIONE DELLE VENE LIQUIDE

« Atti Ist. Veneto », t. LXIV (1904-905), Parte 2^a,

pp. 1465-72.

Il fenomeno della contrazione delle vene liquide è stato oggetto di studi sperimentali, che, almeno per i bisogni della idraulica, possono dirsi esaurienti.

Non altrettanto progredito è lo studio teorico, pur trattandosi di una questione, in cui sono perfettamente applicabili le ordinarie equazioni e condizioni ai limiti della idrodinamica pura.

Manca infatti persino il teorema di esistenza e nemmeno si è in grado di affrontare, con procedimenti approssimativi, le determinazioni quantitative (¹). Solo si arriva a riconoscere che, nel caso ordinario di fori non rigurgitati, il coefficiente di contrazione è sempre $> \frac{1}{2}$, mentre si riduce sensibilmente ad $\frac{1}{2}$ per gli orifizi provvisti di imboccatura cilindrica interna (tubo di BORDA).

Se ne trovano in molti trattati (²) giustificazioni semplicissime, basate sul teorema delle quantità di moto, ma il punto di vista è sempre particolare e vi si trascura qualche cosa fin da principio.

Si può invece — ecco il contenuto della presente Nota — stabilire in modo altrettanto semplice una formula rigorosa e generale, da cui discendono come immediate conseguenze pratiche le due sopra ricordate, e inoltre la seguente, che forse non è stata ancora avvertita: *È possibile far discendere il coefficiente di contrazione di una vena liquida al disotto*

(¹) Fanno naturalmente eccezione le classiche ricerche di STOKES e di HELMHOLTZ sui movimenti in due dimensioni, che danno la teoria completa dei veli fluidi uscenti da fenditure indefinite (praticamente abbastanza lunghe). Nulla però autorizza — nè la intuizione fisica, nè il raffronto delle equazioni di condizione — a ravvisare in quei risultati una attendibile approssimazione per il caso dell'efflusso da un foro a contorno chiuso, senza dimensioni preponderanti, di forma per es. quadrata o circolare.

(²) Cfr. per es. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1895, pag. 27; POINCARÉ, *Cinématique et mécanismes*, Paris, 1899, pag. 339-343; nonché i due articoli di LOVE nell'« Encyclopädie, ecc. » (Bd. IV, 15, 10 e 16, 1 f.).

di $\frac{1}{2}$, e ciò coll'applicare all'orifizio una imboccatura interna divergente (cfr. fig. 3).

Ho comunicata quest'ultima osservazione al Collega prof. TURAZZA, il quale mi ha cortesemente promesso di istituirne quanto prima la verifica sperimentale.

1. - Un corollario del lemma di Green.

Sia σ una superficie chiusa (o più semplicemente un sistema di tali superficie); S lo spazio interno a σ ; n la normale a σ in un punto generico, vólta verso l'interno; α, β, γ i coseni direttori di n ; $\varphi(x, y, z)$ una funzione uniforme, armonica e regolare entro S (contorno incluso):

$$(1) \quad V^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2.$$

Dalla identità

$$\frac{1}{2} \frac{dV^2}{dz} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx dz} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2\varphi}{dy dz} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

moltiplicando per dS ed integrando, si ha

$$\frac{1}{2} \int_s \frac{dV^2}{dz} dS = \int_s \left\{ \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx dz} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2\varphi}{dy dz} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right\} dS.$$

Il primo membro, colla solita trasformazione di GREEN, equivale a

$$-\frac{1}{2} \int_{\sigma} V^2 \gamma \sigma;$$

analogamente il secondo (tenuto conto che φ è armonica) a

$$-\int_{\sigma} \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\varphi}{dz} d\sigma.$$

Ne risulta

$$(2) \quad \int_{\sigma} \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\varphi}{dz} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\sigma} V^2 \gamma d\sigma,$$

in cui evidentemente si può intendere con z una direzione generica, con γ il coseno dell'angolo che questa direzione forma colla normale n .

2. - Specificazione dei caratteri del moto.

Un liquido (fluido incompressibile) fluisca attraverso un orifizio, limitato da un contorno piano π : diciamo Ω questo orifizio, ossia, per essere esatti, la porzione del piano di π , interna allo stesso π .

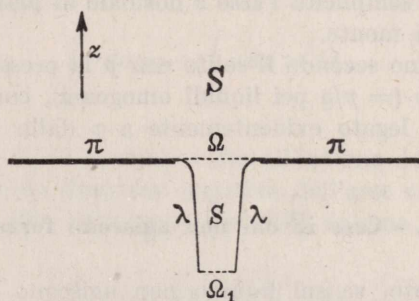


Fig. 1.

Consideriamo un efflusso, che presenti i caratteri qualitativi delle ordinarie vene d'acqua (o d'altro liquido pesante).

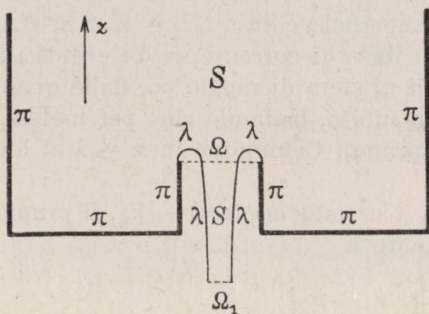


Fig. 2.

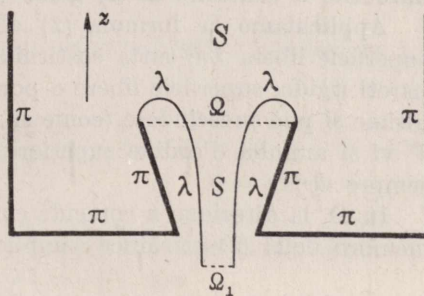


Fig. 3.

In modo preciso supponiamo che si formi oltre Ω — possiamo dire, come gli idraulici, a valle di Ω — una superficie libera tubolare, dotata (eventualmente a distanza infinita) di una *sezione contratta* Ω_1 , *parallela ad Ω , attraversata da tutti i filetti fluidi normalmente e colla stessa velocità V_0 .*

Sia λ (cfr. le figure) la porzione di superficie della vena, compresa fra l'orifizio Ω e la sezione contratta Ω_1 ; S l'intero spazio occupato dalla

massa fluida (a monte della sezione contratta Ω_1); $\Omega_1 + \lambda + \pi$ il contorno completo di questo spazio ⁽³⁾.

Ammetteremo che in tutto S il moto del fluido sia permanente ed irrotazionale; più precisamente, detto $\varphi(x, y, z)$ il corrispondente potenziale di velocità, lo riterremo funzione uniforme, armonica, regolare e tale che nei punti all' ∞ , appartenenti ad S , le derivate si annullino d'ordine superiore al primo.

Prenderemo per semplicità l'asse z normale al piano dell'orifizio colla direzione positiva a monte.

Infine designeremo secondo il solito con p la pressione, con ρ la densità, con $P \int dp/\rho$ ($= p/\rho$ per liquidi omogenei), con V il valore assoluto della velocità, legato evidentemente a φ dalla (1).

3. - Caso in cui non agiscono forze.

Tutto ciò ritenuto, se sul liquido non agiscono forze di massa, le equazioni indefinite del moto si riassumono nell'unica

$$(3) \quad \frac{1}{2}V^2 - P = \text{cost.}$$

Da essa in particolare risulta che, sulla superficie libera λ , V conserva un valore costante, che è poi il V_0 relativo alla sezione contratta Ω_1 , dato che il contorno di Ω_1 giace su λ .

Applichiamo la formula (2) alla superficie chiusa $\Omega_1 + \lambda + \pi$. La superficie libera λ è tutta costituita da linee di corrente; π da eventuali pareti rigide, superficie libere e porzioni di sfera di raggio ∞ , dalle quali ultime si può prescindere (come si vede subito, badando che, per ipotesi, V vi si annulla d'ordine superiore al primo). Comunque in $\pi + \lambda$ si ha sempre $d\varphi/dn = 0$.

In Ω_1 la direzione n coincide con z , e siccome $d\varphi/dz = -V_0$, il primo membro della (2) si riduce semplicemente a

$$V_0^2 \Omega_1.$$

Il secondo membro, per essere $V = V_0$ tanto sopra λ , quanto sopra Ω_1 , può essere scritto

$$\frac{1}{2} V_0^2 \int_{\Omega_1 + \lambda} \gamma d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\pi} V^2 \gamma d\pi,$$

⁽³⁾ Non è escluso che S si estenda in un qualche senso fino all'infinito: in tal caso π si deve al solito intendere completato con una sfera di raggio grandissimo. Giova notare che un movimento *rigorosamente* stazionario (con portata non nulla attraverso l'orifizio) è possibile solo a patto che il campo S non sia finito.

e così abbiamo

$$V_0^2 \Omega_1 = \frac{1}{2} V_0^2 \int_{\Omega_1 + \lambda} \gamma d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\pi} V^2 \gamma d\pi.$$

Ora $\Omega_1 + \lambda + \Omega$ è ancora una superficie chiusa (eventualmente intrecciata, come si vede nelle figg. 2 e 3), e per conseguenza

$$\int_{\Omega_1 + \lambda} \gamma d\sigma = - \int_{\pi} \gamma d\sigma = \Omega,$$

perchè, nei punti di Ω , la normale volta all'interno della superficie $\Omega_1 + \lambda + \Omega$ coincide colla direzione negativa dell'asse z e quindi $\gamma = -1$.

In definitiva risulta, dividendo per ΩV_0^2 da una parte e dall'altra,

$$(4) \quad \frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Omega} \int_{\pi} \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \gamma d\pi.$$

Questa formula mostra che il coefficiente di contrazione Ω_1/Ω è maggiore di $\frac{1}{2}$ ogniquale volta l' $\int_{\pi} (V/V_0)^2 \gamma d\pi$ risulta positivo, il che dipende esclusivamente da γ , ossia dalla forma geometrica del contorno della massa fluida a monte dell'orifizio.

Se questo è praticato in un suolo piano indefinito (fig. 1), si ha $\gamma = 1$, e la (4) diviene

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Omega} \int_{\pi} \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 d\pi,$$

dalla quale relazione (nella ipotesi di un orifizio circolare) il sig. WIEN (*) seppe ingegnosamente ricavare le due disuguaglianze

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} > 0,53$$

e

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} < 0,71.$$

(*) Cfr. il suo *Lehrbuch der Hydrodynamik*, Leipzig, 1900, pag. 110-115.

4. - Osservazione relativa al caso, in cui agiscono forze conservative.

Detto U il potenziale (unitario) si ha, in luogo della (3), l'equazione

$$\frac{1}{2}V^2 - P = U + \text{cost.}$$

Basta evidentemente che si possano trascurare, di fronte a $\frac{1}{2}V_0^2$, le variazioni di U sopra la superficie λ , perchè nei punti di questa valga ancora la (3) e tutto stia come nel numero precedente.

Nelle circostanze ordinarie, in cui U designa il potenziale della gravità $-gz$, la condizione in parola è naturalmente verificata. Si ha infatti $\frac{1}{2}V_0^2 = gh$ (h carico sull'orifizio), mentre fra Ω e Ω_1 si hanno differenze di livello assai piccole di fronte ad h . Per conseguenza, detta δ la massima di queste differenze di livello, sarà a ritenersi trascurabile δ/h . Ora la massima variazione di U in λ non è che $g\delta$ ed il suo rapporto a $\frac{1}{2}V_0^2$ è appunto la quantità trascurabile δ/h .

5. - Conseguenze pratiche.

Se si nota che, nello spazio S , a breve distanza dall'orifizio, il fluido è sensibilmente in quiete, si vede che il segno dell'integrale $\int_{\pi} (V/V_0)^2 \gamma d\pi$ può ritenersi individuato da quello di γ in prossimità dell'orifizio. Di qua le conclusioni pratiche ben note:

$\Omega_1/\Omega > \frac{1}{2}$ ogniqualvolta si tratti d'orifizi scolpiti in pareti piane ($\gamma = 1$), o convesse, o più generalmente tali che sia $\gamma > 0$.

Se c'è una imboccatura interna cilindrica (fig. 2), sopra di essa $\gamma = 0$; l'integrale è sensibilmente nullo, e si ha il caso di BORDA $\Omega_1/\Omega = \frac{1}{2}$.

Ma si può anche rendere $\Omega_1/\Omega < \frac{1}{2}$. Basta supporre l'orifizio munito di un imbuto interno divergente (fig. 3), con che la normale n all'imbuto volta verso S forma con z un angolo ottuso ($\gamma < 0$).

In una eventuale verifica sperimentale bisognerà aver cura che la divergenza dell'imbuto non sia troppo forte. E ciò per evitare che la vena (dopo essersi formata, zampillando dall'orlo superiore dell'imbuto) incontri la parete interna, nel qual caso non ci troveremmo più nelle condizioni supposte di avere fra Ω ed Ω_1 una effettiva superficie libera.