XXV.

SULLE FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI COMPLESSE (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIV$_2$ (1905$_2$), pp. 492-499.

Sia $w = u + iv$ (u e v reali) funzione di una variabile complessa $z = x + iy$.

Applicando alle relazioni di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

il teorema di esistenza (e usufruendo della solita rappresentazione piana dei valori reali di x, y), si è condotti al risultato ben noto:

Se, sopra un arco di curva Σ (analitico e regolare), si danno ad arbitrio due funzioni p, q (reali, analitiche e regolari), rimane univocamente determinata una funzione $w(z)$, che prende sopra Σ i valori $p+iq$, e si comporta regolarmente in un certo campo C del piano x, y, che comprende Σ nel suo interno.

Questo modo di caratterizzare una funzione $w(z)$, in base ai teoremi di esistenza di CAUCHY, è suscettibile di facile estensione alle funzioni di due, e, più generalmente, di quante si vogliono variabili complesse. Limitiamoci intanto al caso di due variabili

$$z = x + iy\,, \qquad z' = x' + iy'\,,$$

e ricorriamo, come d'abitudine, a linguaggio geometrico, considerando uno spazio S_4 rappresentativo dei valori delle quattro variabili reali x, y, x', y'.

Chiamiamo — come si sia condotti a tale definizione apparirà qui appresso — superficie caratteristica di S_4 ogni varietà a due dimensioni, che risulti dal porre fra z e z' un vincolo analitico (il che implica due relazioni reali fra le coordinate x, y, x', y'). Chiamiamo poi genericamente Σ_2 una varietà reale a due dimensioni.

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1905.

Sussiste la proposizione seguente:

Se, sopra una Σ_2 *non caratteristica di* S_4 *(analitica e regolare) si danno ad arbitrio due funzioni (reali, analitiche e regolari)* p *e* q, *rimane univocamente determinata una funzione* $w(z, z')$, *che prende in* Σ_2 *i valori* $p + iq$ *e si comporta regolarmente in un certo campo* C *di* S_4 *(a quattro dimensioni), che contiene la* Σ_2.

Come corollario discende che una funzione $w(z, z')$, la quale si annulla sopra una Σ_2 *non caratteristica*, è identicamente $= 0$. Si noti che la restrizione *non caratteristica* è essenziale, come apparisce da ovvi casi particolari. Prendiamo per es. $w = z' \cdot P$, con P polinomio in z, z'. La funzione w si annulla allora per $z' = 0$, cioè in tutto il piano caratteristico $x' = 0$, $y' = 0$, eppure non è identicamente nulla.

Per il caso di un numero qualunque di variabili veggasi il n. 4.

1. - Dimostrazione del teorema di esistenza in un caso particolare.

Le relazioni di monogeneità per una funzione

$$w(z, z') = u(x, y; x', y') + iv(x, y; x', y')$$

delle due variabili complesse $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ sono

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial v}{\partial y'}, \quad \frac{\partial v}{\partial x'} = -\frac{\partial u}{\partial y'},$$

le quali ci presentano le quattro derivate di u, v rapporto ad x, x' espresse mediante le altre quattro, relative alla coppia y, y'.

È chiaro che, derivando successivamente le (1), si riesce ad esprimere una derivata d'ordine qualunque di u, v, in cui le x, x' appariscano una o più volte come variabili di derivazione, mediante una derivata dello stesso ordine, relativa alla sola coppia y, y'.

Ciò posto, applichiamo il solito procedimento di CAUCHY, immaginando che, di due presunte funzioni (regolari) u, v soddisfacenti alle (1), sieno dati (ad arbitrio, tranne la condizione di regolarità) i valori $p(y, y')$, $q(y, y')$, presi per $x = x' = 0$. Per questi stessi valori rimangono senz'altro definite, a norma della osservazione fatta, anche tutte le derivate, e si possono per conseguenza costruire gli sviluppi formali di TAYLOR. Tutto si riduce a provarne la convergenza, il che è pure pressochè immediato.

Riferiamoci infatti ad un generico sistema di valori di regolarità per p e q, valori, che senza pregiudizio della generalità, potremo supporre essere $y = 0$, $y' = 0$. Potremo del pari assegnare due costanti positive M ed r, tali che

$$\omega = \frac{M}{1 - \dfrac{y + y'}{r}}$$

riesca maggiorante così di p, come di q.

Se si formano le equazioni

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}; \qquad \frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial U}{\partial y'}$$

e si immagina di fare il calcolo delle derivate successive di U e V, in base alle condizioni iniziali: $U = V = \omega$ per $x = x' = 0$, si vede subito che gli sviluppi formali di U, V riescono maggioranti di quelli costruiti per u e v.

Ora questi sviluppi di U, V convergono (per $|x|$, $|x'|$, $|y|$, $|y'| < r/4$), perchè le funzioni U, V, soddisfacenti al sistema ausiliario (2) e alle accennate condizioni iniziali, sono entrambe eguali a

$$\frac{M}{1 - \dfrac{x + x' + y + y'}{r}}.$$

Convergono dunque a fortiori gli sviluppi di u, v. *c. d. d.*

2. - Caso generale.

Cerchiamo se e fino a qual punto si può estendere il teorema di esistenza al caso, in cui la varietà, sulla quale si suppongono dati i valori di u, v, sia una qualunque Σ_2, anzichè il piano $x = x' = 0$. Ricorreremo per ciò, come si fa costantemente in circostanze analoghe, al cambiamento di variabili.

Se

$$(3) \qquad \begin{cases} \varrho_1(x, y, x', y') = 0, \\ \varrho_2(x, y, x', y') = 0, \end{cases}$$

sono due equazioni definienti Σ_2, e ϱ_3, ϱ_4 due generiche funzioni di x, y, x', y', costituenti assieme a ϱ_1, ϱ_2 una quaterna indipendente, potremo pensare le u, v funzioni di x, y, x', y' pel tramite delle ϱ, e attribuire per conseguenza alle equazioni (1) la forma:

$$
(1')\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_1^4{}_i \left\{ \frac{\partial u}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} \right\} = 0\,,\\
&\sum_1^4{}_i \left\{ \frac{\partial u}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} \right\} = 0\,,\\
&\sum_1^4{}_i \left\{ \frac{\partial u}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x'} - \frac{\partial v}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y'} \right\} = 0\,,\\
&\sum_1^4{}_i \left\{ \frac{\partial u}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x'} \right\} = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè queste quattro equazioni si possano risolvere rispetto alle quattro derivate

$$
\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial \varrho_1}\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial \varrho_2}\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial \varrho_2}
$$

è che il determinante dei loro coefficienti, cioè il determinante

$$
D = \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial x} & -\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial x} & -\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial y}\\[2ex]
\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial x}\\[2ex]
\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial x'} & -\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial y'} & \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial x'} & -\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial y'}\\[2ex]
\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial y'} & \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial x'} & \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial y'} & \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial x'}
\end{vmatrix}
$$

sia diverso da zero.

Supponiamo questa condizione soddisfatta nell'intorno di un punto generico di Σ_2.

Il sistema (1′) si può allora presentare sotto l'aspetto

$$
(1^6)\qquad \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = H_1\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial \varrho_1} = K_1\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial \varrho_2} = H_2\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial \varrho_2} = K_2\,,
$$

dove H_1, K_1, H_2, K_2 sono funzioni lineari ed omogenee delle quattro derivate di u, v rapporto a ϱ_3, ϱ_4, i coefficienti dipendendo (in modo analitico e regolare) dalle ϱ (in generale da tutte quattro).

Sarebbe assai facile, modificando opportunamente la dimostrazione del n. 1, riconoscere per via diretta l'univoca esistenza di integrali delle (1″), riducentisi sopra Σ_2 a due assegnate funzioni regolari p, q (delle variabili ϱ_3, ϱ_4). Ma è anche più comodo riportarsi senz'altro ai risultati generali del sig. RIQUIER, che stabiliscono il teorema di esistenza per qualsiasi sistema ortonomo passivo: il sistema (1″) vi rientra infatti come caso particolarissimo ([1]).

Una funzione $w(z, z')$ rimane pertanto univocamente determinata dai valori $p + iq$, presi sopra una qualunque superficie Σ_2, per cui *non* sia $D = 0$.

3. - Superficie caratteristiche.

Chiameremo, come è naturale, *caratteristiche* quelle eccezionali varietà (reali) a due dimensioni, per le quali il determinante D si annulla.

Cerchiamo di interpretare questa condizione differenziale.

Giova all'uopo renderla più semplice, immaginando di sostituire alle equazioni (3), da cui si prende le mosse per formare D, due equazioni equivalenti in forma risoluta. Senza ledere la generalità è lecito assumerle sotto la forma

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x' - \varphi(x, y) = 0 , \\
& y' - \psi(x, y) = 0 .
\end{aligned}
\right.
\tag{4}
$$

Infatti, le (3) sono certo atte a definire due delle quattro variabili x, y, x', y' in funzione delle altre due.

Se la coppia definita non è (x', y'), sarà

$$(x, y) ;$$

ovvero

$$(x, x') , \quad (y, y') , \quad (x, y') , \quad (y, x') .$$

Il primo caso si riconduce subito alla forma (4) scambiando fra loro le due variabili z, z'.

Degli altri quattro basta considerare il primo, poichè i successivi si

---

([1]) Veggasi CH. RIQUIER, *Sur une question fondamentale de calcul intégral*, « Acta Mathematica », t. 23, 1900.

Nel nostro caso basta per es. attribuire alle funzioni e alle variabili le quote seguenti:

	u	v	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4
Prima quota	0	0	0	0	0	0
Seconda quota	0	0	1	1	0	0

riducono ad esso immaginando di cambiarvi ordinatamente z, z' in: iz, iz'; z, iz'; iz, z'. In questo caso, esclusa che sia la risolubilità tanto rispetto ad x', y', quanto rispetto ad x, y, le equazioni definienti x, x' non possono essere se non del tipo

$$\tag{5} \begin{cases} x - Y = 0 \,, \\ x' - Y' = 0 \,, \end{cases}$$

con Y funzione della sola y, Y' funzione della sola y'. Ma allora, posto

$$\varrho_1 = x - Y \,, \qquad \varrho_2 = x' - Y' \,,$$

risulta

$$D = \left[1 + \left(\frac{dY}{dy}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{dY'}{dy'}\right)^2\right] ,$$

quantità essenzialmente positiva.

Nessuna superficie (5) può dunque essere caratteristica, ed è perciò giustificato di attenersi esclusivamente alla (4).

Prendendo poi

$$\varrho_1 = x' - (x, y) \,,$$
$$\varrho_2 = y' - \psi(x, y) \,,$$

si ha

$$D = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & -\dfrac{\partial\psi}{\partial y} & -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Aggiungendo alla prima colonna la quarta, e alla seconda la terza cambiata di segno, il determinante D si riduce al prodotto dell'unità per

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$

e può quindi annullarsi (nel campo reale) allora e solo allora che si abbia ad un tempo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,.$$

Queste equazioni esprimono che $\varphi+i\psi$ è funzione della variabile complessa z. Designandola con $f(z)$, le (4) si possono compendiare in

$$z'=f(z)\,,$$

che porge così, risguardandovi f come arbitraria e z scambiabile con z' (ciò, che del resto dà in più solo i piani $z=\text{cost.}$) la rappresentazione in termini finiti delle superficie caratteristiche.

È facile precisare il comportamento di una superficie caratteristica di fronte alle condizioni di esistenza di una $w(z, z')$.

Anzitutto, immaginando preventivamente effettuato un cambiamento delle due variabili (complesse) indipendenti z, z' (in z, $z'-f(z)$), è sempre lecito supporre che la caratteristica in questione sia il piano $z'=0$. I valori

$$w(z, 0)=p+iq\,,$$

che vi prende una generica funzione $w(z, z')$, non sono arbitrari (come — a prescindere dalle condizioni di analiticità e regolarità — accade per le altre superficie), ma vincolati dalla condizione che $p+iq$ risulti una funzione Z della variabile complessa z.

Soddisfatta questa condizione, esistono infinite funzioni w, che si riducono a Z per $z'=0$. È ciò che apparisce dalla formula

$$w=Z+z'\cdot w_1\,,$$

dove si può intendere per w_1 una funzione arbitraria delle due variabili z, z' (regolare nel campo che si considera).

La univoca determinazione di w è così ricondotta a quella di w_1, ecc.

4. - Funzioni di n variabili.

Per una funzione $w=u+iv$ delle n variabili complesse

$$z_1=x_1+iy_1\,,\quad z_2=x_2+iy_2\,,\quad \dots,\quad z_n=x_n+iy_n\,,$$

si hanno le $2n$ relazioni di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu}=\frac{\partial v}{\partial y_\nu}\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial x_\nu}=-\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\qquad (\nu=1, 2, \dots, n),$$

ed è subito visto (procedendo come a n. 2) che si possono dare ad arbitrio valori (regolari) p, q di u, v sopra una varietà analitica ad n dimensioni Σ_n (dello spazio reale a $2n$ dimensioni $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$), purchè soltanto, nei punti di essa Σ_n, non sia nullo un certo determinante D_n d'ordine $2n$: la w rimane con ciò univocamente determinata.

Se si suppone che le equazioni di Σ_n sieno

$$(6)\qquad \begin{cases} \varrho_1(x_1, y_1, \ldots, y_n) = 0\,, \\ \varrho_2(x_1, y_1, \ldots, y_n) = 0\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varrho_n(x_1, y_1, \ldots, y_n) = 0\,, \end{cases}$$

il determinante D_n ha per elementi

$$\left.\begin{aligned} a_{2h-1,2k-1} &= \quad a_{2h,2k} = \frac{\partial \varrho_h}{\partial x_k}\,, \\ a_{2h,2k-1} &= -\,a_{2h-1,2k} = \frac{\partial \varrho_h}{\partial y_k}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Le relazioni $a_{2h-1,2k-1} = a_{2h,2k}$, $a_{2h,2k-1} = -\,a_{2h-1,2k}$ mostrano che si tratta di *un determinante di* VOIGT, il quale si presenta sempre come somma di due quadrati.

L'equazione

$$D_n = 0$$

si scinde dunque (circostanza già direttamente constatata per $n = 2$) in due distinte equazioni

$$(7)\qquad A_n = 0\,, \qquad A'_n = 0\,,$$

A_n e A'_n essendo polinomi omogenei di grado n nelle derivate delle ϱ (²).

Nel caso di $n = 2$, le condizioni differenziali (7) equivalgono, come si è visto, all'esistenza di un legame analitico fra z e z'.

In generale l'integrazione delle (7) non sembra agevole; almeno non dà luogo ad una interpretazione così semplice e comoda come per $n = 2$.

Si può convincersene prendendo qualche esempio particolare, relativo al caso di tre variabili.

(²) Le espressioni esplicite di A_n, A'_n in termini degli elementi di D_n sono state assegnate dal DRUDE (*Ein Satz aus der Determinantentheorie*, « Göttinger Nachrichten », 1887).

5. - Osservazione.

Nella teoria delle funzioni di una variabile complessa le questioni di esistenza si possono porre sotto due diversi punti di vista; quello di CAUCHY e quello pur classico di RIEMANN-DIRICHLET, secondo cui, fissato a priori un campo C, si tratta di individuare una $w(z)$, *regolare* entro C, mediante condizioni relative al contorno γ di C.

Se si cerca di estendere il punto di vista di RIEMANN-DIRICHLET alle funzioni di più variabili — diciamo di due per fissare le idee — si è condotti all'enunciato seguente:

Dato un campo C di S_4, riconoscere se e quali dati, relativi al contorno (a tre dimensioni) γ, o a porzioni di questo contorno, sono atti a definire una e una sola funzione $w(z, z')$, *regolare* entro C.

Rispetto a questi dati di contorno va notato che non può soccorrere l'analogia con quanto accade per le funzioni di una sola variabile.

Sarebbe infatti esuberante il supporre assegnata la parte reale u (o la immaginaria v) in tutti i punti di γ, poichè non esisterebbe in generale alcuna corrispondente w [3]; sarebbe ancora esuberante (l'ho verificato su casi particolari) il darsi u in tutti i punti di una superficie chiusa situata in γ. Sarebbe invece troppo poco il darsi u solo sopra una linea, perchè rimane allora molta indeterminazione.

Si intravede di qua la difficoltà della questione, e si resta anzi dubbiosi se sia ragionevole il porla.

Nulla infatti assicura che debba necessariamente esistere, per un assegnato campo C, una qualche porzione di contorno *indipendente da* w, capace di essere luogo di convenienti condizioni determinative.

---

[3] Cfr. H. POINCARÉ, *Sur les fonctions de deux variables*, « Acta Mathematica », t. 2, 1883.