XXIV.

SULLA RICERCA DI SOLUZIONI PARTICOLARI DEI SISTEMI DIFFERENZIALI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIV (1º sem. 1905), pp. 203-209 (*).

Alcuni anni or sono ebbi ad indicare (¹) una regola costruttiva di soluzioni particolari dei sistemi canonici, in base alla conoscenza di loro integrali o relazioni invarianti.

Mi propongo ora di far vedere, generalizzando e semplificando insieme, che risultati analoghi sussistono per i sistemi differenziali di forma qualunque.

All'uopo mi basterà precisare analiticamente quest'unica osservazione, quasi immediata dal punto di vista geometrico:

Nello spazio rappresentativo delle curve integrali di un generico sistema differenziale si prenda a considerare una qualunque varietà V invariante, cioè formata da curve integrali.

La sottovarietà W, luogo dei punti doppi di V, risulta — ecco l'osservazione — invariante essa pure.

Nota V, si ha senz'altro W, e la conoscenza di una tale varietà più ristretta facilita ovviamente la determinazione di quelle soluzioni particolari (curve integrali), che ne sono le generatrici.

Per il caso speciale dei sistemi canonici, si viene così ad aggiungere qualche cosa alla regola ricordata da principio; tra altro se ne abbraccia una estensione, già ottenuta dal prof. BURGATTI (²) per via interamente diversa.

1. – Sia un generico sistema differenziale

$$\text{(S)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(*) Presentata dal Socio V. VOLTERRA nella seduta del 19 febbraio 1905.

(¹) In questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. X, 6 gennaio 1901 [in questo vol.: II, pp. 87-93].

(²) In questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. XI, 20 aprile 1902.

colle X_i — quasi è superfluo avvertirlo — funzioni uniformi e regolari dei loro argomenti nel campo, che si considera.

Conveniamo di designare con δx_i degli incrementi infinitesimi delle x_i, compatibili colle equazioni differenziali (S), atti cioè a far passare da una soluzione delle (S) ad altra soluzione infinitamente vicina.

Questi δx_i, che chiameremo per brevità *spostamenti virtuali*, sono per loro definizione, integrali delle così dette equazioni alle variazioni ([3])

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \delta X_i = \sum_1^n{}_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\delta x_j , \tag{1}$$

in cui naturalmente le x sono a ritenersi definite dalle (S). Essi godono della proprietà caratteristica di essere invertibili colla operazione d/dt. Le (1) esprimono infatti che $d\delta x_i/dt = \delta(dx_i/dt)$. Ne viene più generalmente, per qualsiasi funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$,

$$\frac{d}{dt}\delta f = \delta\frac{df}{dt},$$

la derivazione rispetto a t dovendo essere fatta in base alle (S), (1). Così in particolare df/dt sta per

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n{}_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Ad ogni soluzione $x_i(t)$ delle (S) fa riscontro un sistema ∞^n di spostamenti virtuali, potendosi risguardare arbitrari quelli che si riferiscono ad un (particolare, ma del resto qualunque) valore di t: è ciò che risulta dall'essere le δx_i integrali delle (1).

2. – Ciò premesso, sia

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \tag{A}$$

una relazione invariante di fronte al sistema (S), o addirittura un integrale, immaginando in questo caso la costante inclusa in H. Si suppone bene inteso che H sia uniforme e regolare, e la (A) risolubile univocamente rispetto ad una (almeno) delle x.

Mi propongo di stabilire il seguente teorema:

a) Si aggiungano alla (A) *le equazioni in termini finiti derivanti dal porre*

$$\delta H = 0 \tag{B}$$

([3]) Cfr. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I, nn. 53-54.

per tutti gli spostamenti virtuali, cioè le

$$(\mathrm{B}_1) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Se le (A), (B_1) *sono compatibili* (se cioè — per un valore *qualunque* di t — esistono delle x, atte a renderle soddisfatte), *esse costituiscono necessariamente un sistema invariante di fronte ad* (S).

Dimostrazione. - In primo luogo la ipotesi che (A) sia invariante si traduce in formule mediante una identità del tipo

$$(2) \qquad \frac{dH}{dt} = \mu H,$$

con μ funzione regolare [4].

Si ha d'altra parte, pure per identità (rispetto a tutte le lettere t, x_i, δx_i)

$$\frac{d}{dt}\delta H = \delta \frac{dH}{dt}.$$

Sostituiamovi, al posto di δH, la sua espressione esplicita $\sum_1^n{}_i (\partial H/\partial x_i)\delta x_i$, al posto di dH/dt, il valore (2). Otterremo

$$(3) \qquad \sum_1^n{}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i}\cdot \delta x_i = -\sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{d\delta x_i}{dt} + H\,\delta\mu + \mu \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i}\delta x_i.$$

Quando si tien conto delle (A), (B_1) [5], il secondo membro si annulla e resta

$$\sum_1^n{}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i}\cdot \delta x_i = 0,$$

---

[4] Si tratta infatti d'esprimere che dH/dt si annulla, se non identicamente, almeno in virtù di $H = 0$. Ora basta immaginare assunta H come variabile al posto di una delle x, e pensare allo sviluppo della dH/dt in serie di potenze della H, per concludere che deve mancarvi il termine indipendente da H, il che equivale appunto al sussistere della (2). Va notato tuttavia che poggiando il ragionamento sulla sostituzione della H ad una delle x, rimangono esclusi quei valori, in cui ogni $\partial H/\partial x_i$ si annulla, valori che a noi particolarmente interessano. Effettivamente non si può senz'altro asserire (come logica conseguenza della supposta invarianza) che la μ debba, anche per essi, comportarsi in modo regolare. Ma noi, per semplicità, converremo di limitarci a questo caso.

[5] Tener conto delle (A), (B_1) significa in sostanza riferirsi a valori delle x_i, i quali rendano simultaneamente soddisfatte le (A), (B_1), per un generico valore di t. Ecco come interviene la condizione di compatibilità, espressa nell'enunciato del teorema.

la quale, dovendo sussistere per tutti gli spostamenti virtuali, si scinde nelle

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Le derivate dei primi membri delle (B_1) vanno dunque a zero, in virtù della (A) e delle (B_1) stesse. *c. d. d.*

Importa aggiungere che:

a') Se la (A) *è un vero integrale, dH/dt è identicamente nulla, e le equazioni* (B_1) *costituiscono un sistema invariante di per sè sole.*

Lo si desume dalla (3), tenendo conto che si ha in questo caso $\mu = 0$.

Osservazione. - Le equazioni (A), (B_1) sono in numero di $n + 1$, mentre le x_i sono appena n. La loro compatibilità appare così come una circostanza puramente eccezionale. Non però nel caso *a'*). Allora basta evidentemente occuparsi delle (B_1), il cui numero non supera quello delle x_i; la (A) risulta di necessità soddisfatta per opportuna determinazione della costante arbitraria.

3. – Consideriamo più generalmente un sistema

$$\text{(I)} \qquad H = 0\,, \quad F_1 = 0\,, \quad F_2 = 0\,, \quad ...\,, \quad F_m = 0$$

di $m + 1$ equazioni complessivamente invarianti di fronte ad (S); H, F_1, F_2, ..., F_m essendo uniformi, regolari ed indipendenti. Lo sono allora in particolare le F, sicchè potremo, senza pregiudizio della generalità, immaginarle sostituite ad altrettante x; ad $x_1, x_2, ..., x_m$ per es.

Il sistema (S), nelle variabili

$$F_1\,, \quad F_2\,, \quad ...\,, \quad F_m\,, \quad x_{m+1}\,, \quad ...\,, \quad x_n\,,$$

assumerà l'aspetto

$$\text{(S')} \qquad \begin{cases} \dfrac{dF_r}{dt} = \Xi_r & (r = 1, 2, ..., m), \\[2ex] \dfrac{dx_j}{dt} = \Xi_j & (j = m + 1, ..., n), \end{cases}$$

le Ξ comportandosi rispetto alle nuove variabili come le X rispetto alle primitive.

L'ipotesi che le (I) costituiscono un sistema invariante implica che dH/dt, dF_1/dt, dF_2/dt, ..., dF_m/dt si annullino in virtù delle (I) stesse, cioè che sussistano identità della forma

$$\frac{dH}{dt} = MH + \sum_1^m {}_r M_r F_r \,, \tag{4}$$

$$\frac{dF_r}{dt} = N_r H + \sum_1^m {}_s N_{rs} F_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

colle M ed N funzioni regolari ([6]).

Ciò posto, designiamo con $\bar{f}$ ciò che diventa una generica funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$ quando la si riduce a mezzo delle

$$F_1 = 0 \,, \quad F_2 = 0 \,, \quad \ldots \,, \quad F_m = 0 \,,$$

quando cioè, se f si risguarda espressa nelle variabili trasformate, si pongono le prime m eguali a zero.

La (4) permette di asserire che

$$\bar{H} = 0$$

è una relazione invariante di fronte al sistema ridotto

$$\frac{dx_j}{dt} = \bar{\Xi}_j \qquad (j = m+1, \ldots, n). \tag{$\bar{\mathrm{S}}$}$$

Partiamoci infatti dalla espressione di dH/dt, valutata in base ad (S), o, ciò che è lo stesso, in base ad (S′). Essa è

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_1^m {}_r \frac{\partial H}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \sum_{m+1}^n {}_j \frac{\partial H}{\partial x_j} \Xi_j \,.$$

Ponendovi $F_r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ e tenendo conto delle (4), (5), si ricava

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \sum_{m+1}^n {}_j \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \bar{\Xi}_j = \bar{H} \left\{ \bar{M} - \sum_1^m {}_r \overline{\frac{\partial H}{\partial F_r}} \, \bar{N}_r \right\}.$$

Il primo membro non è che la derivata di $\bar{H}$ rispetto a t, calcolata in base alle $(\bar{S})$; nel secondo c'è $\bar{H}$ a fattore.

L'asserto è così dimostrato.

([6]) Per giustificarlo, non c'è che da riportarsi alla nota ([1]) estendendo quelle osservazioni in modo ovvio.

Per il teorema *a*), il sistema costituito da

$$\overline{H} = 0 , \qquad \delta\overline{H} = 0 ,$$

cioè, esplicitando, da

$$\overline{H} = 0 , \qquad \frac{\partial\overline{H}}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = m+1, \ldots, n),$$

è invariante di fronte ad $(\overline{S})$.

Questa conclusione si può anche interpretare, dicendo:

b) *È invariante di fronte ad* (S) (purchè, si intende, vi sia compatibilità) *il sistema costituito dalle* (I) *e dalle equazioni in termini finiti esprimenti che*

$$\text{(C)} \qquad \delta H = 0 ,$$

per tutti gli spostamenti conciliabili con $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots, F_m = 0$.

Dimostrazione. - Immaginando sempre di adottare come variabili $F_1, F_2, \ldots, F_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$, è chiaro intanto che le equazioni

$$\text{(C}_1\text{)} \qquad \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = m+1, \ldots, n),$$

provenienti dall'annullarsi condizionato di δH, coincidono, per $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0$, colle

$$\frac{\partial\overline{H}}{\partial x_j} = 0 .$$

Posto, per brevità di scrittura,

$$H_j = \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

(con che $\overline{H}_j = \partial\overline{H}/\partial x_j$), avremo le identità

$$\frac{dH_j}{dt} = \sum_1^m{}_r \frac{\partial H_j}{\partial F_r}\frac{dF_r}{dt} + \left\{\frac{\partial H_j}{\partial t} + \sum_{m+1}^n{}_l \frac{\partial H_j}{\partial x_l}\,\Xi_l\right\},$$

dove d/dt è calcolato in base ad (S′) e può quindi anche intendersi riferito al sistema equivalente (S).

Per

$$F_1 = 0 , \quad F_2 = 0 \quad \ldots , \quad F_m = 0 ,$$

la quantità in parentesi si presenta come la derivata $d\overline{H}_j/dt$ di $\overline{H}_j$, calcolata con referenza ad $(\overline{\mathrm{S}})$. Ora, se si tien conto anche di

$$H = 0\,, \qquad H_j = 0 \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

(il che è quanto dire, sussistendo già le $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0$, delle $\overline{H} = 0$, $\overline{H}_j = 0$), $d\overline{H}_j/dt$ si annulla, perchè, come abbiamo osservato, le equazioni $\overline{H} = 0$, $\overline{H}_j = 0$ sono invarianti di fronte ad $(\overline{\mathrm{S}})$.

D'altra parte il primo sommatorio

$$\sum_1^m {}_r \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt}$$

va pure a zero in virtù delle (5), tostochè siano soddisfatte le (I).

In definitiva dunque ogni dH_j/dt si annulla, quando si tenga conto delle (I), (C_1). *c. d. d.*

Come al numero precedente, se ne trae un corollario:

b') *Se alcune delle* (I) — *in numero di* k, *diciamo* — *sono veri integrali, è di per sè invariante il sistema costituito dalla equazione* $\delta H = 0$ (condizionata come sopra) *e dalle* $m + 1 - k$ *rimanenti* (I).

Le equazioni, che debbono essere compatibili, sono allora in numero di $n + 1 - k$, cioè le dette $m + 1 - k$, più le $n - m$, che provengono da $\delta H = 0$.

4. - *Soluzioni particolari* (stazionarie). Riferiamoci all'enunciato *b'*) in cui possono ritenersi compresi il teorema *b*) $(k = 0)$, il teorema *a*) $(m = 0,\ k = 0)$, e il suo corollario *a'*) $(m = 0,\ k = 1)$.

Le $n + 1 - k$ equazioni, per ipotesi compatibili, equivarranno a $n + 1 - k - k'$ distinte $(k' \geqslant 0)$. Si potranno supporre risolute rispetto ad altrettante x, e, riducendo in conformità il sistema (S), si avrà, per definire le rimanenti, un sistema di ordine $k + k' - 1$. Di questo però si conoscono già k integrali [provenienti coll'accennata riduzione da quelli, che, per ipotesi, figurano tra le (I)]. In definitiva resterà così da integrare un sistema d'ordine $k' - 1$; integrato che sia, esso fornisce $\infty^{k+k'-1}$ soluzioni del sistema (S) proposto.

È ben giustificato chiamarle stazionarie, rispetto alla funzione H, che interviene nella loro definizione, in quanto, per tali soluzioni, si ha (colla debita relatività) $\delta H = 0 : H$ assume dunque un valore massimo, o minimo, o più esattamente stazionario, in paragone di quelli che (per uno stesso valore di t) gli competono sopra un'altra qualsiasi soluzione infinitamente vicina, appartenente anch'essa alla varietà $F_1 = F_2 =$ $= \ldots = F_m = 0$.

5. – *Caso dei sistemi canonici.* Se si suppone che il sistema (S) abbia forma canonica, che le funzioni F sieno in involuzione e indipendenti da t, e che H, pure indipendente da t, coincida, a meno di una costante additiva arbitraria, colla funzione caratteristica del sistema canonico, si è ricondotti alla proposizione, che ho avuto l'onore di comunicare all'Accademia nel 1901.

Se poi nelle enunciate condizioni addizionali, si scambia H con una delle F e t con una delle variabili canoniche, si ritrova il risultato del prof. BURGATTI.

Questi casi presentano però particolare interesse, non solo per le applicazioni meccaniche, che ne conseguono, ma anche per il grado di generalità delle soluzioni corrispondenti. Si dimostra infatti in entrambi i casi che k' è di necessità $\geqslant m$; mentre, per un (S) qualunque, non si hanno analoghe limitazioni.