# XVII.

# SUR LA SINGULARITÉ DONT SONT AFFECTÉES, POUR UNE VITESSE NULLE, LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL FROTTANT SUR UNE SURFACE

« Archiv der Math. und Physik », III R., V Bd. (1903), pp. 28-37.

## 1. - Remarques préliminaires. Lacune que la rigueur mathématique impose de combler.

Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface $S$ (que je suppose fixe pour simplifier) sur laquelle est assujetti à rester un point matériel $P$ sollicité par une force donnée $(F)$.

Soient:

$X$, $Y$, $Z$ les composantes de $(F)$ suivant les axes coordonnés;

$F_T$ et $F_n$ les valeurs absolues de ses composantes tangentielle et normale dans un point quelconque de la surface $S$;

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de la normale à $S$, ayant choisi comme direction positive celle pour laquelle

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = F_n\,.$$

Prenons comme unité de masse la masse de $P$: dès qu'on suppose sa vitesse différente de zéro, les équations du mouvement seront

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= X + N\alpha - f|N|\frac{x'}{v}\,, \\ y'' &= Y + N\beta - f|N|\frac{y'}{v}\,, \\ z'' &= Z + N\gamma - f|N|\frac{z'}{v}\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Il est à peine nécessaire de dire que $f$ désigne le coefficient de frottement et $N$ la réaction normale (inconnue auxiliaire, que le système (1), (2) lui-même sert à déterminer).

Si l'on a $v = 0$, la loi empirique du frottement au repos apprend à distinguer deux cas: ou bien, dans la position envisagée $M$, la composante tangentielle $F_T$ de la force active ne dépasse pas $fF_n$; ou bien

$$F_T > fF_n .$$

Dans le premier cas le point matériel reste en équilibre, et il s'ensuit la définition du frottement comme une force exactement opposée à la composante tangentielle de la force active ($F$).

Dans le second cas le point commence à glisser. Après un temps infiniment petit $dt$ sa vitesse n'est plus nulle et les équations (2) s'appliquent.

L'expérience nous fait ainsi prévoir ce fait analytique:

Il existe, sous la condition

$$F_T > fF_n ,$$

une solution du système différentiel (1), (2) déterminée par la condition initiale que le mobile sort d'un point donné de la surface avec une vitesse nulle.

Voilà une question d'existence, dont il ne semble pas qu'on se soit préoccupé jusqu'ici au point de vue mathématique. Il s'agit, bien entendu, d'un cas, qui ne rentre pas dans le théorème général de Briot et Bouquet, puisque le système (2) ne se comporte pas régulièrement pour $v = 0$.

Il faut donc examiner la chose de plus près.

C'est ce que je vais faire en transformant d'abord le système différentiel (1), (2). Après cela un petit artifice me permettra de démontrer très simplement, par la méthode classique des limites, l'existence des intégrales dans les dites conditions initiales.

Je n'ai pas profité des résultats récemment acquis dans l'étude des singularités des équations différentielles [1], parce que, une fois transformé le système (1), (2), la démonstration directe est presque immédiate. On pourrait s'en passer en appliquant au système (III) (auquel on sera enfin conduit) une remarque de M. Picard [2].

## 2. - Transformation des équations du mouvement.

Je suppose (ce qui est essentiel pour la démonstration du numéro suivant) que la surface $S$ et la loi de la force active soient analytiques.

---

[1] Voir notamment E. Picard, *Traité d'Analyse* [Gauthier-Villars, Paris, 1901], t. III, chap. I, II.

[2] L.c.; pag. 22, remarque finale.

Je suppose en outre (pour plus de netteté) que la force $(F)$ ne dépende pas de la vitesse du mobile.

Soit $M$ un point régulier pour $S$ et pour le champ de force. La composante tangentielle de $(F)$ enveloppe sur $S$ une congruence de lignes (régulières au voisinage de $M$), que j'appellerai lignes 1.

Désignons par $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ les cosinus des angles que les tangentes à ces lignes (dans la direction de la force) forment avec les axes coordonnés; par $s_1$ l'arc (compté dans le même sens); par $r_1$ le rayon (absolu) de courbure.

Envisageons encore, sur la surface $S$, les trajectoires orthogonales 2 des lignes 1 et appelons $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$; $s_2$; $r_2$ les éléments qui correspondent à $\alpha_1, \ldots, r_1$ (la direction positive étant d'ailleurs fixée arbitrairement).

Comme les cosinus directeurs de la normale principale à 1 sont

$$r_1 \frac{d\alpha_1}{ds_1}, \qquad r_1 \frac{d\beta_1}{ds_1}, \qquad r_1 \frac{d\gamma_1}{ds_1},$$

on voit que la courbure géodésique $g_1$ de 1 (projection sur la ligne 2 de la courbure absolue $1/r_1$, dirigée suivant la normale principale) est donnée par la somme

$$\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds_1} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds_1};$$

d'une façon plus concise

$$g_1 = \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1}, \tag{3}$$

le symbole $\sum$ indiquant une somme de termes semblables en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

De même

$$g_2 = \sum \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds_2} \tag{4}$$

représente la courbure géodésique des lignes 2.

Ceci posé, reprenons les équations (2). Pour toute solution régulière (réelle), les coordonnées $x$, $y$, $z$ pourront être censées fonctions de $t$ par l'intermédiaire de l'arc $s$ de la trajectoire. En convenant de prendre pour direction positive de $s$ celle du mouvement, on aura

$$\frac{ds}{dt} = v \geqslant 0 .$$

Soit $\vartheta$ l'angle (compté sur le plan tangent à $S$ dans le sens 1, 2) que la direction $s$ forme avec 1.

On a

$$\cos(\widehat{1s}) = \cos\vartheta\,, \qquad \cos(\widehat{2s}) = \sin\vartheta\,,$$

et en outre, pour toute fonction des points de $S$,

$$\frac{d}{ds} = \cos\vartheta\,\frac{d}{ds_1} + \sin\vartheta\,\frac{d}{ds_2}\,. \tag{5}$$

En appliquant cette identité, on obtient

$$\frac{dx}{ds} = \cos\vartheta\,\frac{dx}{ds_1} + \sin\vartheta\,\frac{dx}{ds_2} = \alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta\,,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = (-\alpha_1\sin\vartheta + \alpha_2\cos\vartheta)\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{d\alpha_1}{ds}\cos\vartheta + \frac{d\alpha_2}{ds}\sin\vartheta\,,$$

avec des formules analogues pour $y$ et $z$.

Comme

$$x' = v\frac{dx}{ds}\,, \qquad x'' = \frac{d}{dt}\left(v\,\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{ds} + v^2\,\frac{d^2x}{ds^2}\,, \text{ etc.,}$$

les équations (2) deviennent

$$\tag{2'} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt}(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta) \\ \qquad + v^2\left\{(-\alpha_1\sin\vartheta + \alpha_2\cos\vartheta)\dfrac{d\vartheta}{ds} + \dfrac{d\alpha_1}{ds}\cos\vartheta + \dfrac{d\alpha_2}{ds}\sin\vartheta\right\} \\ \qquad = X + N\alpha - f|N|(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Multiplions ces équations par les cosinus directeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de la normale et ajoutons. En tenant compte de ce que

$$\sum\alpha\alpha_1 = \sum\alpha\alpha_2 = 0\;; \quad \sum\alpha^2 = 1\,,$$

il reste simplement

$$N = -F_n + v^2\,\mathrm{P}\,, \tag{6}$$

ayant posé, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \cos\vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds} + \sin\vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_2}{ds} \, .$$

D'après (5) et en profitant de l'identité

$$\sum \alpha \frac{d\alpha_2}{ds_1} = \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds_2} \, ,$$

on peut écrire

$$\mathrm{P} = \cos^2\vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \sin^2\vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_2}{ds_2} + 2\cos\vartheta \sin\vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds_2} \, , \tag{7}$$

où chacune des trois sommes possède une interprétation géométrique bien simple (courbure normale de la ligne 1, courbure normale de la ligne 2, valeur commune, au signe près, de la torsion géodésique). Mais cela n'a pas d'importance pour notre but.

Achevons la transformation des (2′) en les multipliant une première fois par

$$\alpha_1 \cos\vartheta + \alpha_2 \sin\vartheta \, , \quad \beta_1 \cos\vartheta + \beta_2 \sin\vartheta \, , \quad \gamma_1 \cos\vartheta + \gamma_2 \sin\vartheta \, ,$$

une seconde fois par

$$-\alpha_1 \sin\vartheta + \alpha_2 \cos\vartheta \, , \quad -\beta_1 \sin\vartheta + \beta_2 \cos\vartheta \, , \quad -\gamma_1 \sin\vartheta + \gamma_2 \cos\vartheta \, ,$$

et en les ajoutant chaque fois.

Si l'on a égard aux relations

$$\sum \alpha_1^2 = 1 \, , \qquad \sum \alpha_2^2 = 1 \, , \qquad \sum \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

et à leurs conséquences

$$\sum \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{ds} = 0 \, , \qquad \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{ds} = 0 \, , \qquad \sum \left( \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds} + \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} \right) = 0 \, ,$$

on trouve de suite

$$\frac{dv}{dt} = F_r \cos\vartheta - f F_n \, , \qquad v^2 \left( \frac{d\vartheta}{ds} + \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} \right) = - F_r \sin\vartheta .$$

Or

$$v \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{dt} \, ,$$

tandis que, d'après (5),

$$\sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} = \cos\vartheta \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \sin\vartheta \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_2},$$

ou, en remarquant que

$$\sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} = g_1, \qquad \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_2} = -\sum \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds_2} = -g_2,$$

$$\sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} = g_1 \cos\vartheta - g_2 \sin\vartheta.$$

Il résulte ainsi

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = F_\tau \cos\vartheta - f|N|, \\ &v\,\frac{d\vartheta}{dt} = -v^2(g_1\cos\vartheta - g_2\sin\vartheta) - F_\tau \sin\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Pour aller plus loin, imaginons de rapporter la surface $S$ à un système de coordonnées curvilignes $q_1$, $q_2$, ayant les 1, 2 pour lignes coordonnées (et croissant, sur ces lignes, dans le sens positif).

L'expression du carré de l'élément linéaire sera de la forme

$$H_1^2\,dq_1^2 + H_2^2\,dq_2^2,$$

$H_1$ et $H_2$ étant des fonctions de $q_1$, $q_2$, positives et régulières en tout point régulier $M$ de la surface.

Il en est de même, quant à la régularité, pour les coefficients $b_{rs}$ de la seconde forme fondamentale

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, b_{rs}\, dq_r\, dq_s,$$

qui n'est autre que la forme

$$\alpha\, d^2x + \beta\, d^2y + \gamma\, d^2z,$$

exprimée par les $q$.

On a évidemment

$$ds_1 = H_1\,dq_1, \qquad ds_2 = H_2\,dq_2;$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{H_1}\frac{dx}{dq_1}, \qquad \beta_1 = \frac{1}{H_1}\frac{dy}{dq_1}, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{H_1}\frac{dz}{dq_1};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{H_2}\frac{dx}{dq_2}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{H_2}\frac{dy}{dq_2}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{H_2}\frac{dz}{dq_2};$$

et l'on vérifie sans peine, d'après (3), (4) et (7) (en tenant compte des expressions bien connues des coefficients des deux formes fondamentales) que

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{dH_1}{dq_2}, \qquad g_2 = -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{dH_2}{dq_1}, \\ \mathrm{P} &= \frac{b_{11}\cos^2\vartheta}{H_1^2} + \frac{b_{22}\sin^2\vartheta}{H_2^2} + \frac{2b_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta}{H_1 H_2}. \end{aligned}\right.$$

Je signale en passant ces formules, auxquelles il faudrait avoir recours dans les applications concrètes. Ce qu'il nous faut retenir ici, c'est que $g_1$, $g_2$, les $b$, ainsi que $F_T$, $F_n$, $f$ sont des fonctions holomorphes de $q_1$, $q_2$ en tout point régulier $M(q_1^0, q_2^0)$.

Pour $v = 0$, l'équation (6) donne

$$N = -F_n.$$

$F_n$ étant positif, on voit que, pour $v$ assez petit, l'on a

$$|N| = F_n - v^2\,\mathrm{P}.$$

La forme définitive des équations du mouvement s'obtient en associant aux (8) celles qui définissent les dérivées de $q_1$ et $q_2$.

Or on a

$$\frac{dq_1}{dt} = v\,\frac{dq_1}{ds},$$

et par suite, d'après (5),

$$\frac{dq_1}{dt} = v\left(\cos\vartheta\,\frac{dq_1}{ds_1} + \sin\vartheta\,\frac{dq_1}{ds_2}\right) = v\,\frac{\cos\vartheta}{H_1}.$$

D'une façon analogue

$$\frac{dq_2}{dt} = v\,\frac{\sin\vartheta}{H_2}.$$

On est ainsi conduit au système du quatrième ordre

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dq_1}{dt} = v\,\frac{\cos\vartheta}{H_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = v\,\frac{\sin\vartheta}{H_2}, \\ &\frac{dv}{dt} = F_T\cos\vartheta - f(F_n - v^2\,\mathrm{P}), \\ &v\,\frac{d\vartheta}{dt} = -v^2(g_1\cos\vartheta - g_2\sin\vartheta) - F_T\sin\vartheta, \end{aligned}\right.$$

les fonctions inconnues étant $q_1$, $q_2$, $v$ et $\vartheta$.

Au voisinage des valeurs $q_1^0$, $q_2^0$ (quels que soient d'ailleurs $v$ et $\vartheta$) tout est régulier dans les seconds membres. $F_T$, $F_T - fF_n$ sont essentiellement positifs.

### 3. - Existence d'une solution holomorphe correspondante aux valeurs initiales $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0$, $v = 0$.

En prenant les équations du mouvement sous la forme (I), notre tâche revient évidemment à démontrer l'existence d'une solution holomorphe correspondante aux valeurs initiales $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0$, $v = 0$, celle de $\vartheta$ n'étant pas donnée à priori.

La dernière des équations (I) montre d'abord que, si une telle solution existe, la valeur initiale de $\vartheta$ doit annuler $\sin\vartheta$; d'où $\vartheta = 0$, ou $\vartheta = \pi$.

La seconde hypothèse est à rejeter, puisqu'elle donnerait, pour l'instant initial,

$$\frac{dv}{dt} = -F_T - fF_n\,;$$

$v$ irait donc en décroissant, ce qui est impossible, parce que sa valeur initiale est nulle.

On a donc initialement $\vartheta = 0$, ce qui était à prévoir, le mouvement devant bien commencer dans la direction de la force.

En éliminant $dt$ et en posant, pour abréger,

$$D = F_T \cos\vartheta - f(F_n - v^2\,\mathrm{P})\,,$$

on tire de (I)

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dv} = v\,\dfrac{\cos\vartheta}{H_1 D}\,, \qquad \dfrac{dq_2}{dv} = v\,\dfrac{\sin\vartheta}{H_2 D}\,, \\[2ex] v\,\dfrac{d\vartheta}{dv} = -v^2\,\dfrac{g_1\cos\vartheta - g_2\sin\vartheta}{D} - \dfrac{F_T}{D}\sin\vartheta\,. \end{cases}$$

On remarquera que les seconds membres sont des fonctions holomorphes des arguments $q_1$, $q_2$, $\vartheta$, $v$ au voisinage des valeurs $q_1^0$, $q_2^0$, 0, 0, puisque $D$ ne s'annule par pour ce système de valeurs ($D = F_T - fF_n$).

Il est bien clair après cela qu'on peut se borner à démontrer l'existence de trois intégrales holomorphes $q_1$, $q_2$, $\vartheta$ de (II), se réduisant respectivement à $q_1^0$, $q_2^0$, 0 pour $v = 0$.

En développant $-F_T \sin\vartheta/D$ suivant les puissances de $q_1 - q_1^0$, $q_2 - q_2^0$, $\vartheta$ et en appelant $c$ la valeur essentiellement positive du rapport

$$\frac{F_T}{F_T - fF_n}$$

au point $M(q_1^0, q_2^0)$, on peut écrire

$$-\frac{F_T}{D}\sin\vartheta = -c\vartheta + \dots,$$

les termes omis étant du second ordre au moins.

Posons maintenant

$$(10) \qquad q_1 = q_1^0 + v\tau_1\,, \qquad q_2 = q_2^0 + v\tau_2\,, \qquad \vartheta = v\tau$$

et remarquons que les seconds membres de (II), qui sont des fonctions régulières de $q_1$, $q_2$, $\vartheta$, $v$ dans le domaine des valeurs $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0$, $\vartheta = 0$, $v = 0$, deviennent, d'après la substitution (10), des fonctions régulières de $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau$, $v$ pour la valeur zéro de tous ces arguments. Les termes du second ordre, par rapport aux arguments primitifs, obtiennent le facteur $v^2$ lorsqu'on les exprime par les nouvelles variables.

Après cela on reconnaît sans peine que la substitution (10) permet de présenter le système (II) sous la forme

$$(\mathrm{III}) \qquad v\frac{d\tau_1}{dv} + \tau_1 = v\mathfrak{P}_1\,, \qquad v\frac{d\tau_2}{dv} + \tau_2 = v\mathfrak{P}_2\,, \qquad v\frac{d\tau}{dv} + (c+1)\tau = v\mathfrak{P}\,,$$

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ désignant des fonctions de $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau$, $v$ régulières pour des valeurs assez petites de ces variables.

Démontrer l'existence des intégrales holomorphes de (II), qui se réduisent à $q_1^0$, $q_2^0$, 0 pour $v = 0$, équivaut évidemment à démontrer l'existence d'un système d'intégrales de (III) holomorphe pour $v = 0$.

Les valeurs initiales de $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau$, qui ne restent pas déterminées par la transformation (10), le sont par les équations (III) elles-mêmes, qui donnent, pour $v = 0$,

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0\,.$$

En les dérivant, par rapport à $v$, $n$ fois et en posant ensuite $v = 0$, on obtient

$$(11) \qquad (n+1)\frac{d^n\tau_1}{dv^n} = \dots, \qquad (n+1)\frac{d^n\tau_2}{dv^n} = \dots, \qquad (n+1+c)\frac{d^n\tau}{dv^n} = \dots,$$

les seconds membres ne dépendant que de $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ au plus.

Le système détermine donc les valeurs des fonctions inconnues (supposées holomorphes) et de toutes leurs dérivées, pour $v=0$.

Tout se réduit désormais à vérifier la convergence des séries de Taylor construites avec ces valeurs.

Appliquons le calcul des limites et comparons notre système (III) avec le système

$$\text{(IV)} \qquad v\frac{d\tau_1}{dv}+\tau_1=v\mathfrak{M}_1, \quad v\frac{d\tau_2}{dv}+\tau_2=v\mathfrak{M}_2, \quad v\frac{d\tau}{dv}+(c+1)\tau=v\mathfrak{M},$$

qui en résulte en remplaçant dans les seconds membres $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ par des *fonctions majorantes* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}$.

Les dérivées successives des intégrales de (IV) (supposées holomorphes et nulles pour $v=0$) sont déterminées par des systèmes

$$(12) \qquad (n+1)\frac{d^n\tau_1}{dv^n}=\ldots, \quad (n+1)\frac{d^n\tau_2}{dv^n}=\ldots, \quad (n+1+c)\frac{d^n\tau}{dv^n}=\ldots,$$

de même forme que (11), les seconds membres étant toutefois remplacés par des expressions majorantes.

Les dérivées successives, calculées ainsi, sont donc essentiellement positives et supérieures en valeur absolue à celles qui s'obtiennent de (11) pour le système proposé.

La constante $c$ étant positive, on augmente encore cette valeur si, pour $n>0$, on remplace les premiers membres de (12) par

$$n\frac{d^n\tau_1}{d^nv}, \quad n\frac{d^n\tau_2}{dv^n}, \quad n\frac{d^n\tau}{dv^n},$$

en gardant, pour $n=0$, les conditions $\tau_1=\tau_2=\tau=0$.

Les valeurs, ainsi modifiées, correspondent au système

$$v\frac{d\tau_1}{dv}=v\mathfrak{M}_1, \qquad v\frac{d\tau_2}{dv}=v\mathfrak{M}_2, \qquad v\frac{d\tau}{dv}=v\mathfrak{M},$$

c'est-à-dire au système

$$\text{(V)} \qquad \frac{d\tau_1}{dv}=\mathfrak{M}_1, \quad \frac{d\tau_2}{dv}=\mathfrak{M}_2, \quad \frac{d\tau}{dv}=\mathfrak{M},$$

qui n'a plus de singularités pour $v=0$.

Or le théorème classique de BRIOT et BOUQUET nous assure de la convergence des séries intégrales de (V), sous les conditions initiales

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$$

pour $v = 0$.

On peut donc affirmer la convergence (pour $v$ assez petit) des séries de TAYLOR donnant les intégrales du système (III).

L'existence des intégrales holomorphes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du système primitif (1), (2) (sous la condition que le mobile sorte initialement d'une position régulière $M$ avec une vitesse nulle) est ainsi démontrée. Évidemment ce système intégral holomorphe est unique.

*Remarque.* - La démonstration s'étend d'elle-même au cas où la force $(F)$ dépendrait de la vitesse (ses composantes restant holomorphes pour $v = 0$).

En effet, on est encore conduit à un système de la forme (III).

Si la surface $S$ varie avec le temps, il faut modifier la mise en équation, et en outre on ne peut plus éliminer $t$ (ce qui arrive aussi lorsque la force dépend de $t$).

Il suffit toutefois de considérer comme variable indépendante la vitesse relative du point par rapport aux élément matériels de la surface $S$ pour que la démonstration puisse être achevée, substantiellement, comme ci-dessus.

*Padoue, le 5 Septembre 1902.*