

NOTA III

« Rend. Acc. Lincei », s. 5^a, vol. X, (1^o sem. 1901),
pp. 461-466 (*).

8. - Studio delle soluzioni, per cui si annulla il determinante Δ .

Alla prima delle (12) si può sostituire $\Delta = 0$, onde abbiamo il sistema

$$(12_b) \quad \begin{cases} \gamma_1 p + \gamma_2 q = \frac{s}{2v} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2), \\ -\gamma_2 p + \gamma_1 q = vs\gamma_2, \end{cases}$$

a mezzo del quale e della (11), conviene ridurre le (K). Si raggiunge lo scopo nel modo più comodo ricorrendo alle variabili ϑ , f , φ e sostituendo prima di tutto, nelle (12_b) e (11), a γ_1 , γ_2 , γ_3 i loro valori, con che si ha

$$(12'_b) \quad \begin{cases} p \cos f + q \sin f = \frac{s}{2v} \sin \vartheta, \\ -p \sin f + q \cos f = vs \sin f, \end{cases}$$

$$(11') \quad vr = s \cos \vartheta.$$

Tenendo conto di queste equazioni, le note formule

$$\begin{aligned} p &= \sin f \frac{d\vartheta}{dt} + \sin \vartheta \cos f \frac{d\varphi}{dt}, \\ q &= -\cos f \frac{d\vartheta}{dt} + \sin \vartheta \sin f \frac{d\varphi}{dt}, \\ r &= \cos \vartheta \frac{d\varphi}{dt} - \frac{df}{dt}. \end{aligned}$$

(*) Presentata dal Corrispondente G. Ricci nella seduta del 16 giugno 1901.

(le quali non soltanto equivalgono alle tre ultime (K), ma servono altresì a definire l'angolo di precessione φ) danno

$$(14) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{s}{2\nu},$$

$$(K_b) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\nu s \operatorname{sen} f, \quad \frac{df}{dt} = -\frac{s}{2\nu} \cos \vartheta.$$

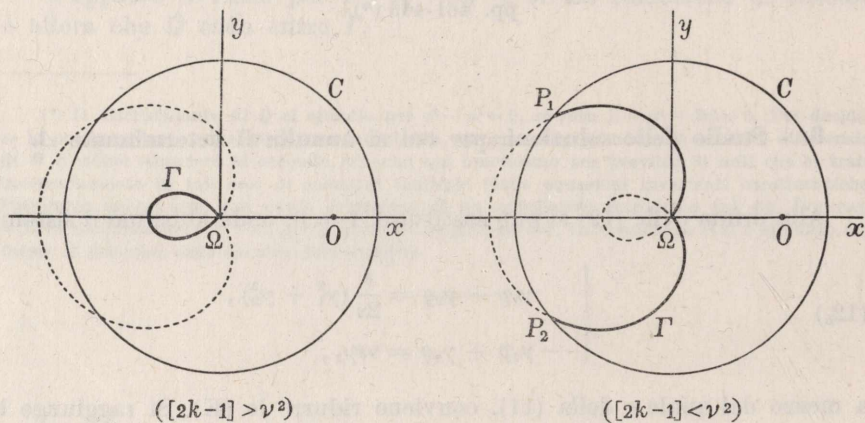


Fig. 3. ($|k| < \nu^2$)

La (14) ci dice intanto che l'angolo di precessione φ varia proporzionalmente al tempo; le (K_b) ammettono poi l'integrale

$$(15) \quad \operatorname{sen} \vartheta + 2\nu^2 \cos f = 2k$$

(k designando una costante), donde subito risulta che le funzioni trigonometriche di ϑ e di f sono funzioni ellittiche del tempo.

Anche ora possiamo assegnare il luogo delle direzioni occupate dalla verticale rispetto al corpo. In coordinate ϑ ed f l'insieme di queste direzioni rimane definito dalla (15). Ciò è quanto dire che il cono V , descritto dalla verticale, si ottiene proiettando da Ω la curva sferica (15). Consideriamo la proiezione ortogonale di questa curva sul piano equatoriale. Essa ha evidentemente per equazione polare ciò che diventa la (15), ponendovi $\varrho = \operatorname{sen} \vartheta$, ossia

$$(16) \quad \varrho + 2\nu^2 \cos f = 2k,$$

la quale rappresenta una *lumaca di Pascal* (quartica bicircolare). Come è

ben noto, possiamo generarla portando sopra ogni raggio vettore, da una parte e dall'altra delle sue intersezioni colla circonferenza

$$(x + v^2)^2 + y^2 = v^4,$$

un segmento di lunghezza costante $2|k|$.

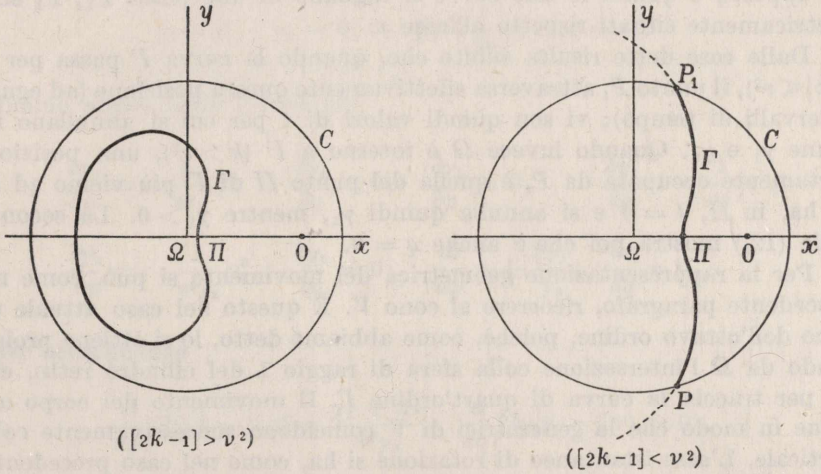


Fig. 4. ($k > v^2$).

Per $|k| < v^2$ (fig. 3), la lumaca consta di due cappi, intrecciantisi nell'origine Ω . Sopra uno soltanto di questi cappi, che dirò Γ , è effettivamente verificata la (16), mentre per l'altro si ha

$$\rho + 2v^2 \cos f = -2k.$$

Se è $|k| > v^2$ (fig. 4) (nel qual caso si può addirittura supporre $k > v^2$, dacchè la (16) deve rappresentare una curva reale) la lumaca consta di un'unica linea chiusa Γ comprendente nel suo interno l'origine Ω . Per $k = v^2$ si ha la cardioide, linea chiusa con cuspidi in Ω .

I coseni direttori γ_1 e γ_2 della verticale sono rappresentati, in un generico istante t , dalle coordinate cartesiane x, y di un punto P_t di Γ (interno evidentemente al cerchio C di raggio 1); così le coordinate polari dello stesso P_t sono $\text{sen } \vartheta$ ed f .

Possiamo facilmente acquistare un'idea del modo con cui P_t descrive Γ . In primo luogo la seconda delle (K_b) mostra che df/dt si annulla soltanto per $\cos \vartheta = 0$. Ne viene che il moto di P_t seguita sempre nello stesso senso, a meno che non si annulli $\cos \vartheta$, a meno cioè che non si tratti di un punto di intersezione di Γ con C . Ciò posto, il punto P_t descriverà l'intera curva Γ di moto progressivo periodico, se Γ è tutta

interna a C ; ne descriverà invece con moto oscillatorio l'arco compreso entro C , se Γ e C si tagliano.

La discriminante di questi due casi si ha subito dalla (16), ponendovi $\varrho = 1$. Se $|2k - 1| > 2\nu^2$ non esistono soluzioni reali, ossia Γ non incontra C ; se invece $|2k - 1| < 2\nu^2$, si hanno per f due valori reali, eguali ed opposti, e quindi le due curve si tagliano in due punti P_1, P_2 simmetricamente situati rispetto all'asse x .

Dalle cose dette risulta subito che, quando la curva Γ passa per Ω ($|k| \leq \nu^2$), il punto P_i attraversa effettivamente questa posizione (ad eguali intervalli di tempo); vi son quindi valori di t per cui si annullano insieme γ_1 e γ_2 . Quando invece Ω è interno a Γ ($k > \nu^2$), una posizione certamente occupata da P_i è quella del punto Π di Γ più vicino ad Ω . Si ha, in Π , $f = 0$ e si annulla quindi γ_2 , mentre $\gamma_1 > 0$. La seconda delle (12_b) mostra poi che è anche $q = 0$.

Per la rappresentazione geometrica del movimento si può, come nel precedente paragrafo, ricorrere al cono V . È questo nel caso attuale un cono dell'ottavo ordine, poichè, come abbiamo detto, lo si ottiene proiettando da Ω l'intersezione colla sfera di raggio 1 del cilindro retto, che ha per traccia la curva di quart'ordine Γ . Il movimento del corpo avviene in modo che le generatrici di V coincidono successivamente colla verticale. L'asse istantaneo di rotazione si ha, come nel caso precedente, intersecando il cono di polodia col piano normale a V , condotto per la generatrice verticale. Però il cono di polodia non si riduce qui ad un piano, ma è di sedicesimo ordine, come facilmente si ricava dalle (12'_b) e (11'), tenendo conto della (15).

Condizioni di stabilità. — Supponendo dapprima $|k| \leq \nu^2$, potremo riferirci ai valori $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, cioè $\sin \vartheta = 0$, $\gamma_3 = \pm 1$, cui corrisponde, per la (15), $\cos f = k/\nu^2$ e, per le (12'_b), $p = -\nu s \sin^2 f$, $q = \nu s \sin f \cos f$. Le (7) e (8) danno per questi valori

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial p} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial q} = 0; \quad \frac{dr}{dp} = \frac{4}{s^2 \gamma_3} (p^2 + q^2), \quad \frac{dr}{dq} = 0,$$

con che la derivazione delle (9) porge

$$a_{11} = \frac{d^2 H}{dp^2} = 4 + \frac{16}{s^4} (p^2 + q^2)^2 + \frac{2r}{s^2 \gamma_3} \left\{ 6\gamma_3 p + \frac{2r}{s^2} (p^2 + q^2) \right\} = \\ = 4 \{ 1 + (4\nu^4 - 2) \sin^2 f \},$$

$$a_{12} = \frac{d^2 H}{dp dq} = \frac{4qr}{s^2 \gamma_3} = \pm 4 \sin f \cos f = \pm 4 \sqrt{1 - \frac{k^2}{\nu^4}} \cdot \frac{k}{\nu^2},$$

$$a_{22} = \frac{d^2 H}{dq^2} = \frac{2r}{s^2 \gamma_3} \left\{ 2\gamma_3 p + \frac{2r}{s^2} (p^2 + q^2) \right\} = 0.$$

L'annullarsi di a_{22} , senza che in generale ⁽¹⁰⁾ si annulli il discriminante $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -16(1 - k^2/\nu^4)k^2/\nu^4$, mette in evidenza l'instabilità di questa classe di movimenti.

Per l'altro caso, $k > \nu^2$, ci riferiremo ai valori che corrispondono al punto II, cioè

$$\gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 = 0; \quad p = \frac{s}{2\nu} \gamma_1, \quad q = 0.$$

Abbiamo allora dalle (7) ed (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} &= -\frac{1}{\nu s} \gamma_1, & \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} &= 0; & \frac{\partial \gamma_2}{\partial p} &= 0, & \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} &= -\frac{1}{\nu s} \gamma_1; \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial p} &= \frac{1}{\nu s \gamma_3} \gamma_1^2, & \frac{\partial \gamma_3}{\partial q} &= 0; & \frac{dr}{dp} &= -\frac{2\gamma_1}{\gamma_3}, & \frac{dr}{dq} &= 0, \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$\frac{d}{dp} (2\gamma_3 p - \gamma_1 r) = \frac{\gamma_1 + 2\nu^2}{\nu^2 \gamma_3}, \quad \frac{d}{dq} (2\gamma_3 p - \gamma_1 r) = 0.$$

La espressione (7) di dH/dp (prescindendo dai termini in $\gamma_2 q, q^2$, che, anche derivati, hanno valore zero) si può porre sotto la forma

$$\frac{2}{s^2 \gamma_3^2} (rp + s^2 \gamma_3) (2\gamma_3 p - \gamma_1 r).$$

Per i valori, cui ci riferiamo, l'ultimo fattore si annulla. Avremo pertanto

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{2}{s^2 \gamma_3^2} (rp + s^2 \gamma_3) \frac{d}{dp} (2\gamma_3 p - \gamma_1 r) = \frac{(\gamma_1 + 2\nu^2)^2}{\nu^4 \gamma_3^2}, \\ a_{12} &= \frac{2}{s^2 \gamma_3^2} (rp + s^2 \gamma_3) \frac{d}{dq} (2\gamma_3 p - \gamma_1 r) = 0. \end{aligned}$$

Essendo ancora, per la (7),

$$\frac{dH}{dq} = \frac{2r}{s^2 \gamma_3^2} \left\{ -s^2 \gamma_2 \gamma_3 + r(\gamma_1 q - \gamma_2 p) \right\}$$

⁽¹⁰⁾ Rimangono esclusi i due casi $k = 0$ (cerchio) e $k = \nu^2$ (cardioide), per i quali sarebbe d'uopo ricorrere ai differenziali d'ordine superiore.

ed annullandosi γ_2 e q , potremo ritenere

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{dq dp} = \frac{2r}{s^2\gamma_3^2} \left\{ -s^2\gamma_3 \frac{\partial\gamma_2}{\partial p} - rp \frac{\partial\gamma_2}{\partial p} \right\}$$

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{dq^2} = \frac{2r}{s^2\gamma_3^2} \left\{ -s^2\gamma_3 \frac{\partial\gamma_2}{\partial q} + r \left(\gamma_1 - p \frac{\partial\gamma_2}{\partial q} \right) \right\},$$

la prima delle quali torna evidentemente a dirci che a_{12} è zero e la seconda porge

$$a_{22} = \frac{\gamma_1}{v^4} (\gamma_1 + 2v^2).$$

Tanto a_{11} che a_{22} risultano positivi (dacchè $\gamma_1 > 0$). Le soluzioni di questo tipo sono dunque stabili.

9. - Riassunto.

I movimenti stazionari, che competono ad un corpo rigido pesante, fissato per un suo punto Ω , nel caso della KOWALEVSKY, sono:

1) Rotazioni attorno alla verticale diretta nel corpo

a) secondo l'asse baricentrico ΩO . La condizione di stabilità è che il baricentro O cada al disotto del punto di sospensione Ω ;

b) secondo un'altra retta del piano meridiano baricentrico (piano che contiene O e l'asse di simmetria dell'ellissoide di inerzia). Queste rotazioni sono essenzialmente instabili.

2) Rotazioni attorno ad un asse orizzontale, coincidente nel corpo coll'asse y (asse equatoriale perpendicolare al baricentrico). Il movimento avviene come se l'asse y fosse tenuto fisso, cioè colle leggi del pendolo composto, e può quindi essere rotatorio progressivo od oscillatorio. Vi ha stabilità solo in quest'ultimo caso, purchè inoltre la deviazione massima dalla verticale dell'asse baricentrico non superi i 90° .

3) Movimenti, nei quali il luogo delle posizioni occupate (rispetto al corpo) da un punto qualunque della verticale, si proietta sul piano equatoriale

a) secondo un cerchio col centro sul prolungamento dell'asse baricentrico ΩO . Considerando in particolare quel punto della verticale, che è situato alla distanza 1 da Ω , dicasi μ^2 il raggio del cerchio corrispondente, v^2 la distanza del centro da Ω ; la condizione di stabilità è

$$(v^2 - \mu^2)(1 - \mu^4 - 3v^4) > 0;$$

b) secondo una lumaca di PASCAL col polo in Ω ; si ha stabilità allora e allora soltanto che la curva non passa per Ω (quando cioè Ω è, rispetto alla curva, un punto coniugato, e non un punto doppio reale).