Zur Potentialtheorie

von

Leon Lichtenstein.

In einem vor kurzem veröffentlichten Aufsatz, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I [1]), habe ich eine Anzahl neuer Sätze aus der Theorie des Potentials einfacher und doppelter Belegungen, die bei verschiedenen höheren Randwertproblemen, so z. B. bei gewissen Existenzbeweisen der Hydrodynamik zur Verwendung kommen, bewiesen. Die vorgenannten Potentiale werden dabei als Funktionale der Randkurven oder Randflächen aufgefaßt. Diese Untersuchungen werden auf den folgenden Seiten fortgesetzt, wobei sich verschiedene neue Sätze ergeben. Bei der Abfassung der vorliegenden Abhandlung ist sorgfältig darauf geachtet worden, daß sie, auch ohne Kenntnis der vorhin zitierten Arbeit, verstanden werden kann. Einzelne Wiederholungen ließen sich aus diesem Grunde nicht gut vermeiden.

Es sei T irgendein beschränktes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Begrenzung S aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktfreier Flächen mit stetiger Normale, die einander weder schneiden noch berühren, besteht. Bekanntlich läßt sich S in eine endliche Anzahl Stücke $\Sigma^{(1)}, \ldots, \Sigma^{(n)}$ zerlegen, so daß in jedem einzelnen dieser Stücke entweder z eine (eindeutige) stetige Funktion von x und y ist, die stetige Ableitungen erster Ordnung hat, oder y eine ebensolche Funktion von x und z, oder schießlich z eine gleich geartete Funktion von x und y darstellt. Es können natürlich auch alle drei Möglichkeiten zugleich bestehen. Man kann sich auch so einrichten, und wir wollen dies

[1]) Mathematische Zeitschrift, Band 23 (1925), S. 72—88.

im folgenden voraussetzen, daß die einzelnen Bereiche $\Sigma^{(k)}$ die Fläche S „dachziegelartig“ überdecken. Es sei etwa in $\Sigma^{(1)}$

$$z = f^{(1)}(x, y).$$

Die Funktion $f^{(1)}$ ist im Innern und auf dem Rande eines von einer Jordanschen Kurve $\mathfrak{S}^{(1)}$ mit stetiger Tangente begrenzten ebenen Gebietes, kürzer in einem Bereiche $\mathfrak{T}^{(1)}$ (in $\mathfrak{T}^{(1)} + \mathfrak{S}^{(1)}$), erklärt und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Wir setzen darüber hinaus fest, daß, unter (x_1, y_1), (x_2, y_2) zwei Punkte in $\mathfrak{T}^{(1)} + \mathfrak{S}^{(1)}$, unter $\mathfrak{r}_{12}$ ihren Abstand verstanden,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f^{(1)}(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial x} f^{(1)}(x_2, y_2) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial y} f^{(1)}(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial y} f^{(1)}(x_2, y_2) \right| \leqq \overline{M} \mathfrak{r}_{12}^{\lambda}$$

gilt. Beziehungen dieser Art bestehen für jedes Flächenstück $\Sigma^{(k)}$. Sie besagen, daß die Richtungskosinus der Flächennormale von S einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ genügen:

$$(1) \qquad |\alpha_1 - \alpha_2|, \ |\beta_1 - \beta_2|, \ |\gamma_1 - \gamma_2| \leqq M_0 \delta_{12}^{\lambda} \ (0 < \lambda < 1).$$

In (1) bezeichnen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungskosinus in den Punkten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ auf S; δ_{12} ist ihr Abstand:

$$\delta_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Es mögen nunmehr

$$(2) \qquad \bar{\xi}(x, y, z), \quad \bar{\eta}(x, y, z), \quad \bar{\zeta}(x, y, z)$$

drei im Innern oder auf dem Rande des Gebietes T, kürzer im Bereiche T oder noch einfacher in $T + S$ erklärte stetige Funktionen bezeichnen, die daselbst stetige Ableitungen erster Ordnung haben und den Ungleichheiten

$$(3) \qquad \begin{gathered} |\bar{\xi}|, \ |\bar{\eta}|, \ |\bar{\zeta}| \leqq 2\Omega_0; \qquad \left|\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq 2\Omega_0; \\ \left| \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x}\right)_2 \right| \leqq 2\Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \ldots \end{gathered}$$

genügen. In (3) bezeichnen $\left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x}\right)_1$ und $\left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x}\right)_2$ die Werte der eingeklammerten Größe in den Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) in $T + S$; d_{12} ist ihr Abstand,

$$d_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Durch die Gleichungen

$$\bar{x} = x + \bar{\xi}, \quad \bar{y} = y + \bar{\eta}, \quad \bar{z} = z + \bar{\zeta} \tag{4}$$

ist, wenn, wie vorausgesetzt werden soll, Ω_0 hinreichend klein ist, eine topologische Abbildung des Bereiches T auf einem Bereich $\bar{T}$ erklärt, dessen Begrenzung $\bar{S}$ sich ganz wie S verhält. Die einzelnen Randkomponenten von $\bar{S}$, Bilder der Randkomponenten von S, sind geschlossene, doppelpunktfreie Flächen mit stetiger Normale, die Richtungskosinus ihrer Normale erfüllen gewisse Ungleichheiten, die zu (1) analog sind.

Es sei jetzt $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ irgendein System nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetiger Ortsfunktionen in $T + S$, die den Ungleichheiten

$$\begin{gathered} |\dot{\xi}|, \ |\dot{\eta}|, \ |\dot{\zeta}| \leqq \Omega_0; \qquad \left|\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right|, \ \left|\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega_0; \\ \left|\left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \end{gathered} \tag{5}$$

genügen. Es sei weiter $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ ein anderes System von Funktionen, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T + S$ stetig sind und die Ungleichheiten

$$\begin{gathered} |\hat{\xi}|, \ |\hat{\eta}|, \ |\hat{\zeta}| \leqq \Omega_0; \qquad \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right|, \ \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega_0; \\ \left|\left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} |\hat{\xi} - \dot{\xi}|, \ldots, |\hat{\zeta} - \dot{\zeta}|; \ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\zeta} - \dot{\zeta})\right| \leqq \Omega \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0, \\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right)_2\right| \leqq \Omega \, d_{12}^{\lambda}, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \end{gathered} \tag{7}$$

erfüllen. Auch hier bezeichnet beispielsweise $\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right)_1$ den Wert der eingeklammerten Größe im Punkte (x_1, y_1, z_1).

Augenscheinlich gehören die durch die topologischen Abbildungen

$$\hat{x} = x + \hat{\xi}, \ldots, \quad \hat{z} = z + \hat{\zeta}; \quad \dot{x} = x + \dot{\xi}, \ldots, \quad \dot{z} = z + \dot{\zeta}$$

aus $T + S$ gewonnenen Bilder $\hat{T} + \hat{S}$ und $\dot{T} + \dot{S}$ zu der vorhin mit $\overline{T} + \overline{S}$ bezeichneten Klasse von Bereichen.

Es sei χ eine auf S erklärte stetige Funktion, die stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung hat. Sind ω und ν die Gaußschen Parameter der Fläche S in der Umgebung eines ihrer Punkte, so kann man χ als Funktion von ω und ν auffassen. Es gelten dann die Ungleichheiten

$$(9) \qquad |\chi|; \quad \left|\frac{\partial \chi}{\partial \omega}\right|, \left|\frac{\partial \chi}{\partial \nu}\right| \leqq N_3; \qquad \left|\left(\frac{\partial \chi}{\partial \omega}\right)_1 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial \omega}\right)_2\right| \leqq N_4 \delta_{12}^{\lambda}, \ldots$$

Wir setzen

$$(10) \qquad \chi(x, y, z) = \dot{\chi}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \hat{\chi}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

und bezeichnen mit $\dot{\theta}$ den von dem Vektor $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') \to (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ mit der Innennormale von $\dot{S}$ in $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$ eingeschlossenen Winkel.

Betrachten wir jetzt die Potentiale der Doppelbelegungen

$$(11) \quad \dot{W}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \int_{\dot{S}} \dot{\chi}' \frac{1}{\dot{r}^2} \cos \dot{\theta}' \, d\dot{\sigma}', \qquad \hat{W}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \int_{\hat{S}} \hat{\chi}' \frac{1}{\hat{r}^2} \cos \hat{\theta}' \, d\hat{\sigma}',$$

unter $d\dot{\sigma}'$ und $d\hat{\sigma}'$ Flächenelemente in den zusammengehörigen Punkten $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$; $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ auf $\dot{S}'$ und $\hat{S}'$, unter $\dot{r}$ und $\hat{r}$ die Entfernung der Punktepaare $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$; $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ verstanden. In meiner vorhin genannten Arbeit ist gezeigt worden, *daß für alle* (x, y, z) *in* $T + S$, *darum alle* $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ *in* $\hat{T} + \hat{S}$ *und* $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ *in* $\dot{T} + \dot{S}$ *und alle den Beziehungen* (5), (6), (7) *genügenden* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *gleichmäßig die folgenden Ungleichheiten gelten:*

$$(12) \quad |\hat{W} - \dot{W}| \leqq c_9 \Omega; \quad \left|\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}\right| \leqq c_9 \Omega, \ldots \quad \left|\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}\right)_2\right| \leqq c_9 \Omega d_{12}^{\lambda}, \ldots$$

Für den Beweis dieser und der hierzu analogen Beziehungen bei Potentialen einfacher Flächenbelegungen sowie der Volumladungen sind a. a. O. zwei verschiedene Wege skizziert worden. Beide Male wird eine Schar topologischer Abbildungen des Bereiches $T + S$ auf Bereiche $T_\varepsilon + S_\varepsilon$ eingeführt, bei der dem Punkte (x, y, z) der Punkt

$$x_\varepsilon = \dot{x} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\xi} - \dot{\xi}), \quad y_\varepsilon = \dot{y} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\eta} - \dot{\eta}), \quad z_\varepsilon = \dot{z} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\zeta} - \dot{\zeta}) \tag{13}$$

zugeordnet wird. Dem Werte $\varepsilon = 0$ entspricht der Bereich $\dot{T} + \dot{S}$, dem Werte $\varepsilon = \Omega$ der Bereich $\hat{T} + \hat{S}$. Offenbar erfüllen $T_\varepsilon + S_\varepsilon$ *für alle reellen oder komplexen* ε, so daß $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ gilt, die vorhin den Bereichen $\overline{T} + \overline{S}$ auferlegten Ungleichheitsbeziehungen (3)[1]). Mit Rücksicht auf die weiteren Entwicklungen dieser Arbeit wollen wir in dem folgenden noch einmal mit einigen Einzelheiten auf die früheren Betrachtungen eingehen[2]).

Wir setzen

$$\chi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \chi(x, y, z) \tag{14}$$

und betrachten das Potential der Doppelbelegung

$$W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \int\limits_{S_\varepsilon} \chi'_\varepsilon \frac{1}{r_\varepsilon^2} \cos\theta'_\varepsilon \, d\sigma'_\varepsilon, \tag{15}$$

oder, was derselbe ist,

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \int\limits_S \chi' \Bigg\{ & \frac{x_\varepsilon - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')} + \frac{y_\varepsilon - y'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')} + \\ & + \frac{z_\varepsilon - z'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')} \Bigg\} d\omega' \, dv', \end{aligned} \tag{16}$$

$$r_\varepsilon^2 = (x_\varepsilon - x'_\varepsilon)^2 + (y_\varepsilon - y'_\varepsilon)^2 + (z_\varepsilon - z'_\varepsilon)^2 \; {}^{3)}.$$

---

[1]) Für komplexe ε bildet die Gesamtheit der komplexen Punkte x_ε, y_ε, z_ε natürlich keinen Bereich mehr. Wenn wir dennoch gelegentlich sagen werden, $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ liege in $T_\varepsilon + S_\varepsilon$, so soll damit jedesmal nur ausgesagt werden, daß (x, y, z) in $T + S$ liegt.

[2]) An jener Stelle handelte es sich in erster Linie um die analogen Betrachtungen in der Theorie des Potentials einer einfachen Belegung.

[3]) In (15) bezeichnet, (für reelle ε) $d\sigma'_\varepsilon$ das Flächenelement im Punkte $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$ auf S_ε; θ'_ε ist der vom Vektor $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon) \longrightarrow (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ mit der Innennormale von S_ε in $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$ eingeschlossene Winkel, r_ε der Abstand der Punkte $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$, $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$; ω und v sind die zur Darstellung von S ge-

Der Ausdruck (16) hat offenbar auch für komplexe ε einen Sinn [1]). Es ist nicht schwer zu zeigen, das *$W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ eine für alle (x, y, z) in $T + S$ und alle ε in der Kreisfläche $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ analytische und reguläre Funktion von ε darstellt.*

Es möge (x_1, y_1, z_1) irgendein Punkt auf S sein. Wir bezeichnen den korrespondierenden Punkt auf S_ε mit $(x_{1\varepsilon}, y_{1\varepsilon}, z_{1\varepsilon})$, den Wert von χ in (x_1, y_1, z_1) mit χ_1. Nach bekannten Sätzen ist für alle (x, y, z) im Innern von T und alle reellen ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$

$$(17)\quad \int_S \left\{ \frac{x_\varepsilon - x'_\varepsilon}{r^3_\varepsilon} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{y_\varepsilon - y'_\varepsilon}{r^3_\varepsilon} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{z_\varepsilon - z'_\varepsilon}{r^3_\varepsilon} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} \right\} d\omega' d\nu' = 4\pi,$$

sowie für alle (x_1, y_1, z_1) auf S

$$(18)\quad \int_S \left\{ \frac{x_{1\varepsilon} - x'_\varepsilon}{r^3_{1\varepsilon}} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{y_{1\varepsilon} - y'_\varepsilon}{r^3_{1\varepsilon}} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{z_{1\varepsilon} - z'_\varepsilon}{r^3_{1\varepsilon}} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} \right\} d\omega' d\nu' = 2\pi,$$

$$r^2_{1\varepsilon} = (x_{1\varepsilon} - x'_\varepsilon)^2 + (y_{1\varepsilon} - y'_\varepsilon)^2 + (z_{1\varepsilon} - z'_\varepsilon)^2.$$

Die beiden Formeln gelten, da die linke Seite, wie man leicht sieht, in bezug auf ε analytisch und regulär ist [2]), auch für komplexe ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$. Es ist also, zunächst für alle (x, y, z) im Innern von T und alle reellen oder komplexen $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$,

---

brauchten Gaußschen Parameter. Den Ausführungen zu Beginn dieser Arbeit gemäß können für ω und ν gewiß entweder x und y, oder y und z oder schließlich x und z gewählt werden.

[1]) Wir wählen Ω_0 so klein, daß für alle komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$, alle zulässigen reellen oder komplexen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ und alle (x, y, z), (x', y', z') in $T + S$ gewiß $\left|\frac{r_\varepsilon}{r}\right| \geqq q > 0$ gilt.

[2]) Bei dem Beweise kommt die Festsetzung $\left|\frac{r_\varepsilon}{r}\right| \geqq q > 0$ (vgl. die Fußnote 1) zur Verwendung. Die Behauptung des Textes ist, soweit es sich um die Formel (17) handelt, selbstverständlich. Um sie für den Integralausdruck (18) zu beweisen, genügt es, eine kleine Kugel vom Radius d um $(x_{1\varepsilon}, y_{1\varepsilon}, z_{1\varepsilon})$ zu beschreiben und die Beziehung $\int_S = \lim \int_{\bar{S}}$ für $d \to 0$ zu beachten, unter $\bar{S}$ den außerhalb der Kugel gelegenen Teil von S verstehend. Offenbar ist $\int_{\bar{S}}$ für alle hinreichend kleinen $d > 0$ eine für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega_0 + \delta$ (δ hinreichend klein) analytische und reguläre Funktion von ε, $\int_{\bar{S}}$ konvergiert für alle diese ε gegen seinen Grenzwert für $d \to 0$ gleichmäßig, also ist $\int_S$ für alle $|\varepsilon| < \Omega_0 + \delta$, mithin ge-

$$
(19)\quad \begin{aligned} W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = 4\pi\chi_1 + \int\limits_S (\chi' - \chi_1)\Big\{ &\frac{x_\varepsilon - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \\ + \frac{y_\varepsilon - y'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + &\frac{z_\varepsilon - z'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} \Big\} d\omega' d\nu'. \end{aligned}
$$

Diese Formel gibt, wie man sich ohne Mühe überzeugt, den Wert von $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ für alle diejenigen (x, y, z) in $T + S$, die sich in Innern und auf dem Gesamtrande (mit Einschluß der Spitze) eines beliebigen geraden Kreiskegels mit der Spitze in (x_1, y_1, z_1) um die Normale zu S in (x_1, y_1, z_1) als Achse und einem Oeffnungswinkel $< \pi$ befinden[1]). Wegen (18) ist insbesondere

$$
(20)\quad \begin{aligned} W_\varepsilon(x_{1\varepsilon}, y_{1\varepsilon}, z_{1\varepsilon}) = 2\pi\chi_1 + \int\limits_S \chi' \Big\{ &\frac{x_{1\varepsilon} - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \\ + \frac{y_{1\varepsilon} - y'_\varepsilon}{r_{1\varepsilon}^3} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + &\frac{z_{1\varepsilon} - z'_\varepsilon}{r_{1\varepsilon}^3} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} \Big\} d\omega' d\nu'. \end{aligned}
$$

Von der Formeln (19) und (20) ausgehend, läßt sich ähnlich wie für reelle ε schließen, daß W_ε eine für alle reellen oder komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ und alle (x, y, z) in $T + S$ nebst ihren partiellen Abteilungen $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}$, $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial y}$, $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial z}$ stetige Funktion ihrer vier Argumente darstellt. Diese partiellen Abteilungen genügen einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ.

Wir setzen

$$
(21)\quad \begin{gathered} |W_\varepsilon|;\ \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial z}\right| \leqq c^{(1)}, \\ \left|\left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right)_2\right| \ldots \leqq c^{(1)} d_{12}^\lambda, \end{gathered}
$$

unter $c^{(1)}$ eine Konstante verstanden, wie später unter $c^{(2)}, c^{(3)}, \ldots$

---

wiß in der Kreisfläche $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ analytisch und regulär. (Man beachte, daß eine Beziehung $\left|\frac{r_\varepsilon}{r}\right| \geqq q_0 > 0$ auch noch für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega_0 + \delta$ gilt. Das gleiche ist bezüglich der Abbildung durch Vermittelung der Funktionen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ zu sagen).

[1]) Wir fassen hier, wie gelegentlich später, $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ als Ortsfunktion in $T + S$ auf. Wir denken uns dabei in der üblichen Weise die Funktion $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$, die zunächst nur im Innern des Bereiches T erklärt ist, stetig über das ganze $T + S$ fortgesetzt.

Aus (19) folgt unmittelbar, daß $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ für alle (x, y, z) im Innern und auf dem Rande des vorhin betrachteten Kegels und alle $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ sich in bezug auf ε analytisch und regulär verhält[1]). Da dies für alle Kegel gilt, so ist W_ε überhaupt für alle (x, y, z) in $T + S$ und alle ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ in bezug auf die Gesamtheit seiner vier Argumente stetig und in bezug auf ε analytisch und regulär.

Es sei jetzt Γ_0 der Kreis vom Radius Ω_0 um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt in der Ebene der Variablen ε. Für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$ ist gewiß

$$(22) \qquad W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{W_\delta d\delta}{\delta - \varepsilon}, \quad \delta = \Omega_0{}^{i\psi}.$$

In (22) bezeichnet W_δ denjenigen Wert, den das Potential $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ erhält, wenn mann dem Parameter ε den Wert $\delta = \Omega_0 e^{i\psi}$ erteilt.

Aus der Formel (22) sind in der eingangs genannten Arbeit zunächst die folgenden Schlußfolgerungen gezogen worden[2]).

Offenbar ist für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega$ und alle (x, y, z) in $T + S$

$$(23) \qquad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{W_\delta d\delta}{(\delta - \varepsilon)^2}.$$

Augenscheinlich hat $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon}$ für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega$ stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf x, y und z. Denn W_ε hat für alle ε auf Γ_0 diese Eigenschaft. Wir schreiben

$$(24) \qquad \begin{gathered} \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial y \partial \varepsilon}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial z \partial \varepsilon}\right| \leqq c^{(2)}; \\ \left|\left(\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon}\right)_2\right|, \cdots \leqq c^{(2)} d_{12}^\lambda. \end{gathered}$$

Beachtet man (24) und die Beziehung

---

[1]) Der Beweis wäre ganz ähnlich wie in der Fußnote 2) S. 39 zu führen.

[2]) Vgl. die Fußnote 2) S. 38.

$$(25)\qquad \hat{W} - \dot{W} = \int_0^{\Omega} \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\varepsilon,$$

so findet man die bereits auf S. 37 angegebenen Ungleichheiten

$$(26)\qquad \begin{gathered} |\hat{W} - \dot{W}| \leqq c_9 \Omega; \quad \left| \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}} \right| \leqq c_9 \Omega, \ldots \\ \left| \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}} \right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}} \right)_2 \right| \leqq c_9 \Omega d_{12}^{\lambda} \text{ [1]}, \end{gathered}$$

. . . .

Aus der Beziehung (22) wollen wir jetzt einige weitergehende Folgerungen ziehen. Es gilt die Entwicklung

$$(27)\qquad W_\varepsilon = \overline{W}^{(0)} + \varepsilon \overline{W}^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \overline{W}^{(2)} + \ldots$$

Die Reihe rechterhand konvergiert für alle den Ungleichheiten (5), (6), (7) genügenden reellen oder komplexen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ und alle $|\varepsilon| \leqq \Omega$ unbedingt und gleichmäßig. Dabei ist

$$(28)\qquad \overline{W}^{(n)} = \left[\frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} W_\varepsilon \right]_{\varepsilon=0} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{W_\delta}{\delta^{n+1}} d\delta.$$

Die Funktion $\overline{W}^{(n)}$ hat für alle (x, y, z) in $T + S$ stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung. Es gilt

---

[1]) In (26) bezeichnen $\hat{W}$ und $\dot{W}$ in ausführlicher Schreibweise die Ausdrücke $\hat{W}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ und $\dot{W}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Die zweite und die dritte Ungleichheit ergeben sich aus den Formeln

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}} = \int_0^{\Omega} \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon} d\varepsilon, \quad \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{(\delta - \varepsilon)^2} \frac{\partial W_\delta}{\partial \dot{x}} d\delta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{(\delta - \varepsilon)^2} \left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial W_\delta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W_\delta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \dot{x}} \right) d\delta$$

und den Ungleichheiten (21).

Der Übergang von $\frac{\partial \hat{W}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}$ zu $\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}$ bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten.

$$
(29)\qquad \left|\overline{W}^{(n)}\right|, \left|\frac{\partial \overline{W}^{(n)}}{\partial x}\right|, \ldots \leqq c^{(3)}, \qquad \left|\left(\frac{\partial \overline{W}^{(n)}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \overline{W}^{(n)}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq c^{(3)} d_{12}^{\lambda}, \ldots
$$

Für $\overline{W}^{(n)}$ ergibt sich aus (19), da χ_1, wie übrigens auch $\chi' - \chi_1$, von ε unabhängig ist, der folgende Ausdruck:

$$
(30)\qquad \overline{W}^{(n)} = \int\limits_S (\chi' - \chi_1) \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} \left\{ \frac{x_\varepsilon - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{y_\varepsilon - y'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{z_\varepsilon - z'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} \right\}_{\varepsilon=0} d\omega' d\nu' \; ^{1})
$$

Offenbar ist $\overline{W}^{(0)} = \dot{W}$. Setzt man in (27) $\varepsilon = \Omega$ ein, so findet man, da jetzt $W_\varepsilon = \hat{W}$ wird,

$$
(31)\qquad \hat{W} = \dot{W} + \Omega \overline{W}^{(1)} + \frac{1}{2!} \Omega^2 \overline{W}^{(2)} + \ldots
$$

Man überzeugt sich leicht, daß in $\overline{W}^{(n)}$ die zu integrierende Funktion ein homogenes Polynom n-ten Grades inbezug auf

$$
\frac{1}{\Omega}(\hat{\xi} - \dot{\xi}), \frac{1}{\Omega}(\hat{\eta} - \dot{\eta}), \frac{1}{\Omega}(\hat{\zeta} - \dot{\zeta}), \frac{1}{\Omega}(\hat{\xi}' - \dot{\xi}'), \frac{1}{\Omega}(\hat{\eta}' - \dot{\eta}'), \frac{1}{\Omega}(\hat{\zeta}' - \dot{\zeta}')
$$

und die partiellen Ableitungen erster Ordnung der drei zuletzt hingeschriebenen Differenzen inbezug auf ω' und ν' darstellt. Setzt man darum zur Vereinfachung $\Omega^n \overline{W}^{(n)} = W^{(n)}$, so findet man

$$
(32)\qquad \hat{W} = \dot{W} + \frac{1}{1!} W^{(1)} + \frac{1}{2!} W^{(2)} + \ldots + \frac{1}{n!} W^{(n)} + \ldots
$$

In $W^{(n)}$ ist die zu integrierende Funktion ein homogenes Polynom n-ten Grades in $\hat{\xi} - \dot{\xi}$, $\hat{\eta} - \dot{\eta}$, $\hat{\zeta} - \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}' - \dot{\xi}'$, $\hat{\eta}' - \dot{\eta}'$, $\hat{\zeta}' - \dot{\zeta}'$ und den partiellen Ableitungen erster Ordnung der drei zuletzt hingeschriebenen Differenzen inbezug auf ω' und ν'. Die Entwicklung

---

[1]) Der Beweis der Formel (30) bietet, da ja die Existenz von $\overline{W}^{(n)}$ feststeht, keine ernstlichen Schwierigkeiten dar. Man beachte vor allen, daß die zu integrierende Funktion für $r \longrightarrow 0$, mithin $r_\varepsilon \longrightarrow 0$, von derselben Ordnung unendlich groß wird wie die zu integrierende Funktion in (19), nämlich von der Ordnung $2 - \lambda$.

konvergiert unbedingt und gleichmäßig für alle reellen oder komplexen $\dot{\xi}, \dot{\eta}\ \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$, *die den Ungleichheiten* (5), (6), (7) *genügen*[1])[2]).

Es gilt weiter:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{W}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial x} + \frac{1}{1!}\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{2!}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} + \cdots, \\
(33)\qquad &\frac{\partial \hat{W}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial y} + \frac{1}{1!}\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{2!}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial y} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

und auch diese drei Reihen konvergieren für alle (x, y, z) *in* $T + S$ *und alle zulässigen* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *unbedingt und gleichmäßig.*

Schließlich gelten die folgenden Beziehungen

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}\right)_2\right] = \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial x}\right)_2\right] + \\
(34)\qquad &+ \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right)_2\right] + \cdots,
\end{aligned}
$$

und die einzelnen Glieder rechts sind für alle (x, y, z) *in* $T + S$ *und alle* (5), (6), (7) *genügenden* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *absolut genommen kleiner als die Glieder einer konvergenten numerischen Reihe.*

In der Tat ist nach (22) z. B. zunächst

$$
(35)\qquad \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right)_2\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\,\frac{d\delta}{\delta - \varepsilon}\left[\left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x}\right)_2\right].
$$

---

[1]) Präziser, die Reihe

$$
|\dot{W}| + \frac{1}{1!}|W^{(1)}| + \frac{1}{2!}|W^{(2)}| + \cdots
$$

konvergiert für alle (x, y, z) in $T + S$ und alle (5), (6), (7) genügenden reellen oder komplexen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ gleichmäßig.

[2]) Man könnte den Ausdruck $W^{(n)}$, der bei festgehaltenen x, y, z ein Funktional in dem durch (5), (6), (7) erklärten Funktionsfelde ist, im Anschluß an die Klassifikation von Herrn Frechet als ganzes Funktional n-ten Grades bezeichnen. Ersetzt man $\hat{\xi} - \dot{\xi},\ \hat{\eta} - \dot{\eta},\ \hat{\zeta} - \dot{\zeta}$ entsprechend durch $\mu_1\tilde{\xi} + \mu_2\underset{\sim}{\xi}$; $\mu_1\tilde{\eta} + \mu_2\underset{\sim}{\eta}$; $\mu_1\tilde{\zeta} + \mu_2\underset{\sim}{\zeta}$, unter $\tilde{\xi}, \underset{\sim}{\xi};\ \tilde{\eta}, \underset{\sim}{\eta},\ \tilde{\zeta}, \underset{\sim}{\zeta}$ nebst ihren Ableitungen stetige Funktionen verstehend, die den Ungleichheiten (7) genügen ($\mu_1 \leqq \frac{1}{2}$, $\mu_2 \leqq \frac{1}{2}$ konstant), so geht $W^{(n)}$ in ein homogenes Polynom n-ten Grades von μ_1 und μ_2 über.

Aus (35) finden wir für $\varepsilon = \Omega$ in bekannter Weise

$$(36)\quad \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}\right)_2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Omega^n}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{d_{12}^{\lambda}} \frac{d\delta}{\delta^{n+1}} \left[\left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x}\right)_2\right].$$

Wegen (21) ist der absolute Betrag des Koeffizienten von Ω^n höchstens gleich

$$\frac{1}{2\pi} c_1 \cdot 2\pi \frac{1}{\Omega_0^n}.$$

Hieraus und aus der Ungleichheit $\Omega \leqq \frac{\Omega_0}{2}$ folgt aber unsere Behauptung. Natürlich kann man sich in den Ausdrücken $W^{(n)}$ die Integration über die Fläche S erstreckt denken. Auch kann man in (35) und (34) die Differentialquotientien nach x, y, z durch diejenigen inbezug auf $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ersetzen.

Wir wollen jetzt die Funktionen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ und damit den Bereich $\dot{T}$ als vorgegeben betrachten und lediglich $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ als den Beziehungen (6), (7) gemäß variabel ansehen. Das Potential der Doppelbelegung $\hat{W}$ ist bei festgehaltenem (x, y, z) ein Funktional in dem durch (6), (7) präzisierten Funktionenfelde. *In der Formel* (32) *haben wir eine Entwicklung des Funktionals* $\hat{W}$ *nach ganzen Funktionalen n-ten Grades* ($n = 0, 1, 2,...$) *vor uns.*

§ 3.

Wir haben vorhin (vgl. die Formel (26)) Abschätzungen für die Differenz $\hat{W} - \dot{W}$ sowie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung gefunden. Für manche Zwecke sind Abschätzungen für den Ausdruck

$$(37)\quad \hat{W} - \dot{W} - W^{(1)} = \hat{W} - \dot{W} - \Omega \overline{W}^{(1)}$$

und seine partiellen Ableitungen erster Ordnung erwünscht.

Wegen (28) ist mit Rücksicht auf $\Omega \overline{W}^{(1)} = W^{(1)}$

$$(38)\quad \begin{aligned} \int_0^{\Omega} d\varepsilon \int_0^{\varepsilon} \frac{\partial^2 W_{\bar{\varepsilon}}}{\partial \bar{\varepsilon}^2} d\bar{\varepsilon} &= \int_0^{\Omega} d\varepsilon \left[\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon} - \left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right] = (W_\varepsilon)_{\varepsilon=\Omega} - \\ &- (W_\varepsilon)_{\varepsilon=0} - \Omega \left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \hat{W} - \dot{W} - W^{(1)}. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach (22)

$$\frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial\bar\varepsilon^2}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{T_0}\frac{W_\delta d\delta}{(\delta-\bar\varepsilon)^3}, \tag{39}$$

also für alle $\bar\varepsilon \leqq \varepsilon \leqq \Omega \leqq \frac{\Omega_0}{2}$ wegen

$$\delta-\varepsilon \geqq \frac{\Omega_0}{2}, \quad \frac{1}{\delta-\bar\varepsilon}\leqq\frac{2}{\Omega_0}$$

$$\left|\frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial\bar\varepsilon^2}\right| \leqq \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi\Omega_0\,\frac{8}{\Omega_0^3}=\frac{16}{\Omega_0^2}, \tag{40}$$

$$\left|\int\limits_0^\varepsilon \frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial\bar\varepsilon^2}\,d\bar\varepsilon\right| \leqq \frac{16}{\Omega_0^2}\,\Omega$$

und

$$\left|\int\limits_0^\Omega d\varepsilon\int\limits_0^\varepsilon \frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial\bar\varepsilon^2}\,d\bar\varepsilon\right| \leqq \frac{16}{\Omega_0^2}\,\Omega^2 = c^{(4)}\Omega^2. \tag{41}$$

Wir finden also endgültig für alle (x, y, z) *in* $T+S$ *und alle den Beziehungen* (5), (6), (7) *genügenden* $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta;\ \hat\xi, \hat\eta, \hat\zeta$ *gleichmäßig*

$$|\hat W-\dot W-W^{(1)}| \leqq c^{(4)}\Omega^2. \tag{42}$$

Ebenso findet man die weiteren Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat W-\dot W-W^{(1)})\right| \leqq c^{(4)}\Omega^2, \ldots \tag{43}$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat W-\dot W-W^{(1)})\right)_1-\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat W-\dot W-W^{(1)})\right)_2\right| \leqq c^{(4)}\Omega^2 d_{12}^\lambda,$$

. . . .

Man kann so weiter gehen. Man findet bsp.

$$|\hat W-\dot W-W^{(1)}-\tfrac{1}{2}W^{(2)}| \leqq c^{(5)}\Omega^3, \ldots \tag{44}$$

Für manche Zwecke erweist sich eine andere Abschätzung, zu deren Ableitung wird jetzt ubergehen, als wichtig.

Wir nehmen jetzt, unter Ω_1 einen beliebigen Wert $\leqq \frac{1}{2}\Omega_0$ verstanden, an, daß $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta;\ \hat\xi, \hat\eta, \hat\zeta$ den folgenden Ungleichheiten genügen

$$|\dot{\xi}|,\ \left|\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right|,\dots \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1 \leqq \tfrac{1}{4}\Omega_0;\ \left|\left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1 d_{12}^{\lambda},\dots$$

$$(45)\qquad |\hat{\xi}|;\ \left(\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right),\dots \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1;\ \left|\left(\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1 d_{12}^{\lambda},\dots$$

$$|\hat{\xi}-\dot{\xi}|;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right|,\dots \leqq \Omega \leqq \tfrac{1}{4}\Omega_1;\dots\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_2\right| \leqq \Omega d_{12}^{\lambda},\dots$$

Für alle reellen oder komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2}\Omega_1$ ist alsdann bsp.

$$(46)\qquad \left|\dot{\xi}+\frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right| \leqq |\dot{\xi}| + |\varepsilon| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 = \Omega_1 \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0.$$

Wir setzen

$$(47)\qquad \dot{W} - W - \dot{W}^{(1)} = \dot{I} = \frac{1}{2!}\dot{W}^{(2)} + \frac{1}{3!}\dot{W}^{(3)} + \dots,$$

$$(48)\qquad \hat{W} - W - \hat{W}^{(1)} = \hat{I} = \frac{1}{2!}\hat{W}^{(2)} + \frac{1}{3!}\hat{W}^{(3)} + \dots,$$

und allgemein für alle reellen oder komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2}\Omega_1$

$$(49)\qquad W_\varepsilon - W - W_\varepsilon^{(1)} = I_\varepsilon = \frac{1}{2!}W_\varepsilon^{(2)} + \frac{1}{3!}W_\varepsilon^{(3)} + \dots$$

Den zuletzt gewonnenen Ergebnissen zufolge ist

$$(50)\qquad |I_\varepsilon| \leqq c^{(4)}\Omega_1^2.$$

Bei der Anwendung der Ungleichheit (42) hat man dabei für $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ entsprechend 0, 0, 0; $\dot{\xi}+\varepsilon(\hat{\xi}-\dot{\xi})$, $\dot{\eta}+\varepsilon(\hat{\eta}-\dot{\eta})$, $\dot{\zeta}+\varepsilon(\hat{\zeta}-\dot{\zeta})$ zu setzen. Für $\hat{\xi}-\dot{\xi},\dots$ tritt jetzt also $\dot{\xi}+\varepsilon(\hat{\xi}-\dot{\xi}),\dots$ ein. Wegen (46) hat jetzt Ω_1 offenbar die Bedeutung der Grösse, die in (42) mit Ω bezeichnet wurde. Wir finden also in der Tat die Beziehung (50). Es sei jetzt Γ_1 eine Kreislinie vom Radius $\frac{1}{2}\Omega_1$ um den Koordinatenursprung in der komplexen Ebene ε. Für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{4}\Omega_1$ ist gewiß

$$(51)\qquad I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{I_\delta}{\delta-\varepsilon}d\delta, \quad \delta = \tfrac{1}{2}\Omega_1 e^{i\psi}$$

und

$$(52)\qquad \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{I_\delta}{(\delta-\varepsilon)^2}d\delta,$$

darum wegen

$$(53)\qquad |\delta - \varepsilon| \geqq \tfrac{1}{4}\,\Omega_1, \quad \frac{1}{|\delta - \varepsilon|} \leqq \frac{4}{\Omega_1}$$

offenbar

$$(54)\qquad \left|\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \pi\Omega_1 \cdot \frac{16}{\Omega_1^2} \cdot c^{(4)}\Omega_1^2 = c^{(5)}\Omega_1$$

und

$$(55)\qquad |\hat{I} - \dot{I}| = \left|\int\limits_0^\Omega \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon\right| \leqq c^{(5)}\Omega_1\Omega.$$

Wir finden also:

Für alle (x, y, z) in $T + S$ und alle den Beziehungen (45) genügenden $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ gleichmäßig gelten die Ungleichheiten

$$(56)\qquad |\hat{I} - \dot{I}| = |(\hat{W} - W - \hat{W}^{(1)}) - (\dot{W} - W - \dot{W}^{(1)})| \leqq c^{(5)}\Omega_1\Omega$$

und analog

$$(57)\qquad \left|\frac{\partial \hat{I}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{I}}{\partial \dot{x}}\right|, \ldots \leqq c^{(6)}\Omega_1\Omega; \quad \left|\left(\frac{\partial \hat{I}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{I}}{\partial \dot{x}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{I}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{I}}{\partial \dot{x}}\right)_2\right| \leqq c^{(6)}\Omega_1\Omega d_{12}^\lambda, \ldots$$ [1]

Der Schwerpunkt des soeben bewiesenen Satzes, der bei manchen höheren Randwertaufgaben zur Verwendung kommt, liegt in den Ungleichheiten (57).

In analoger Weise lässt sich zeigen, dass, wenn

$$(58)\qquad \hat{I}_n = \hat{W} - W - \hat{W}^{(1)} - \ldots - \frac{1}{n!}\hat{W}^{(n)}, \quad \dot{I}_n = \dot{W} - W - \dot{W}^{(1)} - \ldots - \frac{1}{n!}\dot{W}^{(n)}$$

gesetzt wird,

$$(59)\qquad \begin{aligned} &|\hat{I}_n - \dot{I}_n|; \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{I}_n - \dot{I}_n)\right|, \ldots \leqq c^{(7)}\Omega_1^n\Omega; \quad \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{I}_n - \dot{I}_n)\right)_1 - \right.\\ &\left. - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{I}_n - \dot{I}_n)\right)_2\right| \leqq c^{(7)}\Omega_1^n\Omega d_{12}^\lambda, \ldots \end{aligned}$$

gilt.

Macht man bezüglich des Charakters der Randflächen und der Beschaffenheit der Belegungsfunktion geeignete weitergehende Voraussetzungen, so lassen sich die vorstehenden Sätze dahin erweitern, daß auch für partielle Ableitungen höherer Ordnung der

---

[1]) Man kommt von (52) zu (57) ähnlich wie von (23) zu (26).

Potentiale $\hat{W}$ und $\dot{W}$ in Bezug auf die Ortsvariablen analoge Beziehungen gelten.

Haben z. B. die Funktionen $\chi; \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}; \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *stetige Ableitungen bis zur Ordnung* m $(m \geqq 2)$ *einschließlich, und erfüllen sie die Ungleichheiten*

(60)
$$|\dot{\xi}|,\ |\dot{\eta}|,\ |\dot{\zeta}|;\ \left|\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right|,\dots,\ \left|\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial z}\right|;\dots;\ \left|\frac{\partial^m\dot{\xi}}{\partial x^m}\right|,\dots,\ \left|\frac{\partial^m\dot{\zeta}}{\partial z^m}\right| \leqq \Omega_0;$$
$$\left|\left(\frac{\partial^m\dot{\xi}}{\partial x^m}\right)_1-\left(\frac{\partial^m\dot{\xi}}{\partial x^m}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda},\dots$$

(61)
$$|\hat{\xi}|,\ |\hat{\eta}|,\ |\hat{\zeta}|;\ \left|\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right|,\dots\ \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial z}\right|;\dots;\ \left|\frac{\partial^m\hat{\xi}}{\partial x^m}\right|,\dots,\ \left|\frac{\partial^m\hat{\zeta}}{\partial z^m}\right| \leqq \Omega_0;$$
$$\left|\left(\frac{\partial^m\hat{\xi}}{\partial x^m}\right)_1-\left(\frac{\partial^m\hat{\xi}}{\partial z^m}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda},\dots$$

(62)
$$|\hat{\xi}-\dot{\xi}|,\dots;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right|,\dots,\ \left|\frac{\partial^m}{\partial z^m}(\hat{\zeta}-\dot{\zeta})\right| \leqq \Omega \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0,$$
$$\left|\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_1-\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_2\right| \leqq \Omega d_{12}^{\lambda},\dots$$
$$\left|\left(\frac{\partial^m\chi}{\partial\omega^m}\right)_1-\left(\frac{\partial^m\chi}{\partial\omega^m}\right)_2\right| \leqq N_5\delta_{12}^{\lambda},\dots,$$

so gelten die zu (26) analogen Ungleichheiten:

(63)
$$|\hat{W}-\dot{W}|;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{W}-\dot{W})\right|,\dots,\ \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{W}-\dot{W})\right|;\dots \leqq c^{(8)}\Omega;$$
$$\left|\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{W}-\dot{W})\right)_1-\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{W}-\dot{W})\right)_2\right| \leqq c^{(8)}\Omega d_{12}^{\lambda},.$$

. . . .

Desgleichen ist

(64)
$$|\hat{I}-\dot{I}|;\ \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}(\hat{I}-\dot{I})\right| \leqq c^{(9)}\Omega_1\Omega;\dots\ (p=1,\dots m)$$
$$\left|\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{I}-\dot{I})\right)_1-\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{I}-\dot{I})\right)_2\right| \leqq c^{(9)}\Omega_1\Omega d_{12}^{\lambda},\dots,$$

allgemeiner

(65)
$$|\hat{I}_n-\dot{I}_n|;\ \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}(\hat{I}_n-\dot{I}_n)\right| \leqq c^{(10)}\Omega_1^n\Omega;\dots\ (p=1,\dots m)$$
$$\left|\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{I}_n-\dot{I}_n)\right)_1-\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{I}_n-\dot{I}_n)\right)_2\right| \leqq c^{(10)}\Omega_1^n\Omega d_{12}^{\lambda},\dots[1])$$

[1]) Den Beziehungen (64) und (65) liegen Voraussetzngen zugrunde, die

Aehnliche Sätze gelten für das Potential einer einfachen Belegung sowie für das Potential einer Volumladung, ferner für alle drei Potentialarten in der Ebene (logarithmisches Potential). In allen Fällen gelten u. a. Reihenentwickelungen, die zu (32), (33), (34) analog sind.

Bei den vorstehenden Betrachtungen sind wir vor einer topologischen, den Beziehungen (5), (6), (7) genügenden Abbildung des Bereiches $T+S$ auf die Bereiche $\dot{T}+\dot{S}$ und $\hat{T}+\hat{S}$ ausgegangen. Es mögen nunmehr $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ lediglich für auf S gelegene (x, y, z), d. h. als Funktionen von ω und ν erklärt sein und Ungleichheiten erfüllen, die zu (5), (6), (7) analog sind. Jetzt liegt augenscheinlich lediglich eine topologische Abbildung der Fläche S auf $\dot{S}$ bzw. $\hat{S}$ vor. Alle bisherigen Entwicklungen lassen sich sinngemäß auch auf diesen Fall anwenden, nur gelten die von uns gewonnenen Ungleichheiten und Reihen natürlich nur noch für alle (x, y, z) auf S. In den Reihenentwicklungen (33) und (34) ist die Differentiation nach x, y, z durch diejenige nach ω und ν zu ersetzen.

Wir nehmen jetzt an, das die Fläche S stetig gekrümmt ist und ihre Hauptkrümmungsradien, als Funktionen von ω und ν aufgefaßt, einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen. Die soeben betrachtete topologische Abbildung der Fläche S auf $\dot{S}$ und $\hat{S}$ kann nunmehr wie folgt anders definiert werden. Es sei $P(x, y, z)$ ein Punkt auf S, und es mögen α, β, γ die Richtungskosinus der nach innen gerichteten Normale in P bezeichnen. Ist Ω_0 hinreichend klein, so trifft diese Normale $\dot{S}$ und $\hat{S}$ allemal nur in einem Punkte $\dot{P}$ bzw. $\hat{P}$. Die Abstände $P\dot{P}$, $P\hat{P}$, positiv nach Innen gemessen, heißen $\dot{p}$, $\hat{p}$. Augenscheinlich kann man $\dot{S}$ und $\dot{S}$ durch Vorgabe von $\dot{p}$ und $\hat{p}$ als Funktionen von ω und ν bestimmen; sie erscheinen dann auf das System der krummlinigen Koordinaten $\omega, \nu, \dot{p}$ bzw. $\omega, \nu\ \hat{p}$ bezogen. Setzt man im Sinne dieser Auffassung

$$(66) \qquad \dot{\xi} = \alpha\dot{p},\ \dot{\eta} = \beta\dot{p},\ \dot{\zeta} = \gamma\dot{p};\quad \hat{\xi} = \alpha\hat{p},\ \hat{\eta} = \beta\hat{p},\ \hat{\zeta} = \gamma\hat{p},$$

---

eine Verallgemeinerung der Ungleichheiten (45) darstellen. Man erhält sie, wenn man in (60) und (61) Ω_0 durch $\frac{1}{2}\Omega_1$, in (62) aber $\Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$ durch $\Omega \leqq \frac{1}{4}\Omega_1$ ersetzt.

so wird S auf $\dot{S}$ bzw. $\hat{S}$ topologisch abgebildet, wobei dem Punkt P allemal die auf derselben Normale zu S gelegenen Punkte $\dot{P}$ und $\hat{P}$ entsprechen. Da wir diesmal S als stetig gekrümmt und ihre Hauptkrümmungsradien als der H-Bedingungen genügend angenommen haben, so haben $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}; \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$, sofern $\frac{\partial \dot{p}}{\partial \omega}, \ldots, \frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}$ existieren und der H-Bedingung genügen, die zu Beginn dieser Arbeit eingeführten Stetigkeitseigenschaften. Machen wir noch die weiteren Voraussetzungen:

$$
(67) \quad
\begin{gathered}
|\dot{p}|, |\hat{p}| \leqq \overline{\Omega}_0; \quad \left|\frac{\partial \dot{p}}{\partial \omega}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\right| \leqq \overline{\Omega}_0; \quad \left|\left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial \omega}\right)_1 - \left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial \omega}\right)_2\right|, \ldots, \\
\left|\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\right)_2\right| \leqq \overline{\Omega}_0 \delta_{12}^{\lambda}; \\
|\hat{p} - \dot{p}| \leqq \overline{\Omega}; \quad \left|\frac{\partial}{\partial \omega}(\hat{p} - \dot{p})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \nu}(\hat{p} - \dot{p})\right| \leqq \overline{\Omega}; \\
\left|\left(\frac{\partial}{\partial \omega}(\hat{p} - \dot{p})\right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial \omega}(\hat{p} - \dot{p})\right)_2\right| \leqq \overline{\Omega} \delta_{12}^{\lambda}, \ldots
\end{gathered}
$$

so sind für alle (x, y, z) auf S, wenn $\overline{\Omega}_0$ und $\overline{\Omega}$ hinreichend klein sind, auch die Ungleichheiten (5), (6), (7) erfüllt.

Betrachten wir für einen Augenblick die Entwicklung (32). Ihre Glieder erscheinen jetzt als ganze Funktionale einer einzigen Funktion, nämlich der Ortsfunktion $\hat{p} - \dot{p}$ auf $\dot{S}$, während in der ursprünglichen Darstellung sie von drei verschiedenen Funktionen $\hat{\xi} - \dot{\xi}$, $\hat{\eta} - \dot{\eta}$, $\hat{\zeta} - \dot{\zeta}$ abhingen.
