

9
16

P.167
TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
WYDZIAŁU III
NAUK
MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH

ROK XXXIX

1946



EGZEMPLARZ RECENZYJNY

WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU PREZYDIUM RADY MINISTRÓW I MINISTERSTWA OŚWIATY

1947

<http://rcin.org.pl>

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA CLASSE III
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET PHYSIQUES

ANNÉE XXXIX

1946

VARSOVIE
LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES
1947

<http://rcin.org.pl>

Posiedzenie

z dn. 15 marca 1946 r.

Halina Milicer Gružewska.

O współczynniku korelacji a posteriori zmiennych ekwiwalentnych.

Przedstawił czł. W. Sierpiński dn. 15 marca 1946 r.

Streszczenie

Okazuję w niniejszej pracy, iż jeśli zmienne równoważne (ekwiwalentne) spełniają następujące warunki:

I. Zmienne ewentualne równoważne x_1, x_2, \dots posiadają momenty dowolnego rzędu, $f(x)$ jest funkcją mierzalną, oraz jeśli $E(x)$ oznacza nadzieję matematyczną zmiennej x , zaś $w = x - E(x) + y - E(y)$ określamy dla dwu dowolnych zmiennych ciągu x_1, x_2, \dots , to następujące całki są małe, a mianowicie:

$$\int \int_{|w| > \varepsilon \sqrt{n}} |x|^k \cdot |y|^l \omega(x, y) dx dy = O(n^{-2}), \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, \varepsilon > 0$$

$$\int \int_{|w| > \varepsilon \sqrt{n}} |f(x)|^k \cdot |f(y)|^l |x|^{k_1} \cdot |y|^{l_1} \omega(x, y) dx dy = O(n^{-2}),$$
$$k+l \leq 2, k_1+l_1 \leq 3$$

$\omega(x, y)$ oznacza tu elementarne prawo prawdopodobieństwa zmiennych x i y ciągu: x_1, x_2, \dots

II. Prawo prawdopodobieństwa elementarne sumy

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S_n$$

spełnia twierdzenie Cramer'a. Nazywamy je Ω_n ; mamy jednoznacznie dla $-\infty < z < +\infty$

$$\Omega_n(A + z\sqrt{B}) = \frac{1}{\sqrt{B}} \psi(z) \{1 + CB^{-1/2}H_3(z) + DB^{-2}H_4(z) - C^2B^{-5}H_6(z)\} + O(n^{-2}),$$

gdzie

$$S_n = A + z\sqrt{B}; A = E\left(\sum_1^n x_i\right) = nE(x_i) = n\alpha; \beta = E(x_i - \alpha)^2$$

$$B = E\left[\sum_1^n x_i - E(x_i)\right]^2 = n\beta[1 + (n-1)R_x],$$

$H_3(z)$, $H_4(z)$, $H_6(z)$ oznaczają wielomiany Hermite'a, zaś C i D są sumami n stałych niewiększych od β co do wartości bezwzględnej, zaś

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2}$$

III. Przyпускаjemy, że liczba

$$q = \frac{a - n\alpha}{\sqrt{B}}$$

jest ograniczona ze względu na n .

Oznaczamy przez $X^{(a)}(x, y)$ elementarne prawo prawdopodobieństwa a posteriori dowolnych dwu zmiennych z ciągu x_1, x_2, \dots, x_n przy założeniu

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (\text{stałe})$$

$$E^{(a)} = \iint f(x) X^{(a)}(x, y) dx dy$$

$$R_f^{(a)} = \frac{1}{D^{(a)}} \iint (f(x) - E^{(a)})(f(y) - E^{(a)}) X^{(a)}(x, y) dx dy$$

$$D^{(a)} = \iint [f(x) - E^{(a)}]^2 X^{(a)}(x, y) dx dy$$

$R_f^{(a)} = R_x^{(a)}$, jeśli $f(x) = x$, R_f i R_x oznaczają współczynniki korelacji a priori w odniesieniu do funkcji f oraz zmiennej x .

Twierdzenie I. *Jeśli zmienne równoważne spełniają założenia I, II i III, to albo nie są skorelowane, albo założenie a posteriori (1) jest niemożliwe.*

Twierdzenie II. *Jeśli zmienne równoważne spełniają założenia I, II i III, zaś $\mu_{i,s}$ oznaczają momenty rzędu i oraz s , to muszą być spełnione zależności:*

$$\mu_{2,1} = 0 = \mu_{1,2}; \quad \mu_{3,1} + \mu_{2,2} = \mu_{2,0}^2.$$

Twierdzenie III. *Jeśli zmienne równoważne spełniają założenia I, II i III, to współczynnik korelacji a posteriori funkcji mierzalnej zmiennych równoważnych dąży do takiego współczynnika a priori. Rząd dążenia jest $O(n^{-1/2})$. Oszacowanie błędu jest z dokładnością $O(n^{-1/2})$, praktycznie zaś biorąc $O(n^{-1})$.*

Wynik pokrywa się ze specjalnym wypadkiem z pracy Khinchine'a o zmiennych niezależnych: „*Sur un cas de correlation*” Matemat. Sbornik 1943 t. 12 (54): 2.

Halina Milicer Gruzewska.

The coefficient of correlation a posteriori of equivalent variables.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński à la séance du 15 mars 1946.

Introduction. The elementary laws of probability of equivalent variables x_1, x_2, \dots are $\omega(x)$ and $\omega(x, y)$. An additional condition is given:

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = a = \text{const}$$

where a is not a random variable, but $x_i, i = 1, 2, \dots$ are.

We ask what is the influence of (1) on the coefficients of correlation of the variables x_1, x_2, \dots or of their measurable function $f(x_1), f(x_2), \dots$

Let the coefficient of correlation a priori be:

$$R[f(x_i), f(x_k)] = R_{i,k}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots$$

and that a posteriori

$$R^{(a)}[f(x_i), f(x_k)] = R_{i,k}^{(a)}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

where we suppose that (1) takes place.

Khinchine¹⁾ has proved for the independent variables that

$$R^{(a)}[f_i(x_i), f_k(x_k)] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

¹⁾ Khinchine „*Sur un cas de correlation*” Matematicheskij Sbornik, 1943, v. 12 (54): 2. He even calculated this expression with the precision of $O(n^{-2/3})$.

Our task is to prove that, certain conditions given, for the equivalent variables, and for $f_i(x) = f(x)$, we have

$$R_f^{(a)} - R_f = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^1$$

and then we shall calculate this expression with the precision of $O(n^{-2/2})$ theoretically, but practically with the precision of $O(n^{-1})$.

We mention (§ 2) that, if $f(x)$ is an additive function, the immediate corollary of (1) is that

$$(2) \quad R_f^{(a)} = \frac{1}{n-1}.$$

§ 1. The suppositions and notations.

I. Suppose that the moments of the variables x_1, x_2, \dots exist, $f(x)$ is a measurable function, and that if $E(x)$ is the mathematical expectation of the variable x , and

$$(3) \quad w = x - E(x) + y - E(y),$$

for any two variables of the sequence x_1, x_2, \dots , the following integrals are small, when $\omega(x, y)$ means the elementary probability law for x and y , i. e.:

$$\iint_{|w| > \varepsilon \sqrt{n}} |x|^k |y|^l \omega(x, y) dx dy = O(n^{-2}), k, l = 0, 1, 2, \dots, \varepsilon > 0$$

$$\iint_{|w| > \varepsilon \sqrt{n}} |f(x)|^k |f(y)|^l |x|^{k_1} |y|^{l_1} \omega(x, y) dx dy = O(n^{-2}),$$

$$k+l \leq 2, k_1+l_1 \leq 3.$$

II. Suppose that the elementary probability law of the sum $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S_n$ accomplishes Cramer's theorem. We name it Ω_n and so we have uniformly with respect to z in $-\infty < z < +\infty$:

$$(4) \quad \Omega_n(A + z\sqrt{B}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{B}} \psi(z) \{1 + CB^{-3/2} H_3(z) + DB^{-2} H_4(z) - C^2 B^{-3} H_6(z)\} + O(n^{-2})^2$$

where

¹⁾ § 6, 31.

²⁾ v. Khinchine loc. cit.

$$S_n = A + z\sqrt{B}, A = E \left(\sum_1^n x_i \right) = n E(x_i) = n\alpha; \beta = E(x_i - \alpha)^2$$

$$B = E \left\{ \sum_1^n [x_i - E(x_i)] \right\}^2 = n\beta [1 + (n-1)R_x]$$

$H_3(z), H_4(z), H_6(z)$ mean the Hermitian polynomials, C and D — sums of n constants, independent of n , and not greater than β in absolute value, and

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2 z^2}.$$

III. Suppose that

$$q = \frac{a - n\alpha}{\sqrt{B}}$$

is bounded in resp. to n .

I denote the elementary a posteriori probability law of the variables $x_i, x_k, i \neq k, i, k = 1, 2, \dots, n$:

$$X^{(a)}(x_i, x_k) = X^{(a)}(x, y)$$

since the variables are equivalent and so we have

$$X^{(a)}(x, y) \Omega^n(a) = \omega(x, y) \Omega_{n-2}(a - x - y)$$

$$(5) \quad X^{(a)}(x, y) = \omega(x, y) \cdot \frac{\Omega_{n-2}(a - x - y)}{\Omega_n(a)}$$

$$(6') \quad E^{(a)} = \int \int f(x) X^{(a)}(x, y) dx dy$$

$$(6) \quad R_f^{(a)} = \frac{1}{D^{(a)}} \int \int |f(x) - E^{(a)}| |f(y) - E^{(a)}| X^{(a)}(x, y) dx dy$$

$$(7) \quad D^{(a)} = \int \int [f(x) - E^{(a)}]^2 X^{(a)}(x, y) dx dy.$$

§ 2. Lemma 1 and Corollary 1.

Lemma 1. *If the equivalent variables x_1, x_2, \dots accomplish the supposition (1) of the Introduction and*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{x'}^{(a)} = R_x, x' = x_1, x_2, \dots, x_n, x = x_1, x_2, \dots$$

then these variables are uncorrelated.

Proof of Lemma 1.

We have according to the notations of § 1 and supposition (1) of the Introduction:

$$E^{(a)}(S_n) = a; \quad E^{(a)}(S_n - a)^2 = 0,$$

but

$$E^{(a)}(a) = n E^{(a)}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} E^{(a)}(S_n - a)^2 &= E^{(a)} \left\{ \sum_i^n [x_i - E^{(a)}(x_i)] \right\}^2 = \\ &= \sum_1^n E^{(a)} [x_i - E^{(a)}(x_i)]^2 + 2 \sum_{n=1}^n \sum_{j=i+1}^n E^{(a)} [x_i - E^{(a)}(x_i)] [x_j - E^{(a)}(x_j)] = \\ &= n E^{(a)} [x - E^{(a)}(x)]^2 \{ 1 + (n-1) R_{x'}^{(a)} \} = 0, \end{aligned}$$

then

$$(8) \quad R_{x'}^{(a)} = -\frac{1}{n-1}, \quad x' = x_1, x_2, \dots, x_n,$$

and if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{x'}^{(a)} = R_x, \quad x = x_1, x_2, \dots,$$

then

$$R_x = 0$$

i. e. the variables x_1, x_2, \dots are not correlated.

But the values of a function of equivalent variables are equivalent variables. Thus we have:

Corollary 1. *If the equivalent variables accomplish condition (1) of the Introduction, $f(x)$ is an additive measurable function and*

$$R_f^{(a)} \rightarrow R_f, \quad n \rightarrow \infty,$$

then the values of this function corresponding to these variables are uncorrelated.

§ 3. Lemmas 2 and 3.

Lemma 2. According to the suppositions II, III § 1 there exists a constant K such that:

$$(9) \quad \frac{\Omega_{n-2}(a-x-y)}{\Omega_n(a)} < K.$$

Proof of Lemma 2.

It results from II § 1 that we have:

$$(9') \quad \Omega_{n-2}(a-x-y) = \\ = \frac{1}{\sqrt{B'}} \psi(q') \{1 + C'B'^{-1/2}H_3(q') + D'B'^{-2}H_4(q') - C'^2B'^{-3}H_6(q')\} + O(n^{-2})$$

$$(9'') \quad A' = (n-2)\alpha; \quad B' = (n-2)\beta [1 + (n-3)R_x], \\ B' = B - 2\beta [1 + (2n-3)R_x] \\ B = n\beta [1 + (n-1)R_x],$$

but $B \geq 0$, then

$$(10) \quad R_x \geq -\frac{1}{n-1}.$$

We see that

$$\sqrt{B}:n \sim \beta R_x; \quad \frac{n}{\sqrt{B}} \sim \frac{1}{\beta R_x}.$$

The inequality (10) means that the a priori coefficient of correlation of equivalent variables is positive or zero, according to

$$(11) \quad \text{whether } \sqrt{B} = 0 \quad (n) = \sqrt{B'} \quad (R_x > 0)$$

$$\text{or } \sqrt{B} = 0 \quad (n^{1/2}) = \sqrt{B'} \quad (R_x = 0).$$

In any case

$$(12) \quad \sqrt{\frac{B}{B'}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2[1 + (2n-3)R_x]}{n[1 + (n-1)R_x]}}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

But the expressions $\psi(x)H_i(x)$ are bounded in resp. to x , then:

$$\text{or } \Omega_{n-2}(a-x-y) < O(n^{-1/2}),$$

or

$$\Omega_{n-2}(a-x-y) < O(n^{-1}),$$

and

$$\Omega_n(a) > C O(n^{-1/2}), \quad \text{or } \Omega_n(a) > C O(n^{-1})$$

according to III § 1, then

$$\frac{\Omega_{n-2}(a-x-y)}{\Omega_n(a)} < K$$

uniformly in. resp. to x and y .

Lemma 3. According to the suppositions II and III § 1 we have

$$(13) \quad \frac{\Omega_{n-2}(a-x-y)}{\Omega_n(a)} = 1 + 0(1)$$

uniformly in respect to x and y if:

$$(14) \quad w = x + y - 2\alpha = 0(\sqrt{n}).$$

Proof of Lemma 3.

$$q' = \frac{a-x-y-(n-2)\alpha}{\sqrt{B'}}$$

$$q' = \frac{a-n\alpha-w}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{\frac{B}{B'}}$$

$$q' = q - \frac{w}{\sqrt{B'}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(15) \quad q' - q = -\frac{w}{\sqrt{B'}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

or

$$(15') \quad q' - q = -\frac{w}{\sqrt{B}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$(16') \quad q' - q = -\frac{w}{\sqrt{B}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

according to (14).

We have for the polynomials $H_i(q')$

$$H_i(q') = H_i(q) + \theta(q - q') H_i'[q + \theta(q - q')], \quad 0 < \theta < 1, \quad i = 3, 4, 6,$$

$$(17) \quad H_i(q') = H_i(q) + \theta H_i'[q + \theta(q - q')] \cdot \left\{ -\frac{w}{\sqrt{B}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\},$$

where

$$0 < \theta < 1, \quad i = 3, 4, 6,$$

$$H_i(q') = H_i(q) + H_i' \cdot 0(1).$$

Further:

$$\sqrt{2n} \psi(q') = e^{-1/2 q'^2}$$

$$q'^2 = \left[q - \frac{w}{\sqrt{B}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]^2 = q^2 + \frac{w^2}{B} - \frac{2qw}{\sqrt{B}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$e^{-1/2 q'^2} : e^{-1/2 q^2} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{w^2}{B} - \frac{2qw}{\sqrt{B}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\}$$

$$(18) \quad \psi(q') = \psi(q) (1 + o(1)),$$

according to (14) § 3 and III § 1.

Now

$$\frac{\Omega_{n-2}(a-x-y)}{\Omega_n(a)} = \frac{\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (1 + o(1)) \{1 + O(B'^{-1/2})\}}{1 + O(B'^{-1/2})} = 1 + o(1)$$

uniformly in respect to x and y , if we have (14) § 3.

§ 4. Theorem 1 and Corollary (2).

Theorem 1. *If the equivalent variables accomplish the suppositions I, II and III of § 1, then they are not correlated, if we suppose (1) of the Introduction.*

The proof of this theorem is immediate from Lemma 1 § 2 and the following Lemma 4.

Lemma 4. *If the equivalent variables accomplish the suppositions I, II, III § 1, then*

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_{x'}^{(a)} = R_x.$$

Proof of the Lemma 4.

As we know

$$(20) \quad R_{x'}^{(a)} = \frac{1}{D^{(a)}} \int \int (x-a)(y-a) X^{(a)}(x, y) dx dy - \frac{(E^{(a)}-a)^2}{D^{(a)}},$$

where

$$E^{(a)} = \int \int x X^{(a)}(x, y) dx dy$$

$$D^{(a)} = \int \int (x - E^{(a)})^2 X^{(a)}(x, y) dx dy$$

$$E^{(a)} = \int \int_{|w| < 0(\sqrt{n})} x \omega(x, y) \frac{\Omega_{n-2}(a-x-y)}{\Omega_n(a)} dx dy +$$

$$+ \int \int_{|w| > 0(\sqrt{n})} x \omega(x, y) \frac{\Omega_{n-2}(a-x-y)}{\Omega_n(a)} dx dy.$$

But the second integral, according to (9) § 3 and I § 1 approaches zero if $0(\sqrt{n}) \rightarrow \infty$. As we have (13) § 1, the difference between the first integral and the expression

$$\int\int_{|w| < 0(\sqrt{n})} x \omega(x, y) dx dy$$

and hence also the expression

$$\int\int x \omega(x, y) dx dy = \alpha$$

is as small as we please, if only the integer n is great enough. Then:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^{(a)} = \alpha,$$

$$(21) \quad E^{(a)} = \alpha + 0(1).$$

We can also write

$$D^{(a)} = \int\int (x - \alpha)^2 X^{(a)}(x, y) dx dy - (E^{(a)} - \alpha)^2,$$

but it can be proved, in the same way as before, that

$$(22) \quad D^{(a)} = \beta + 0(1), \quad \text{or}$$

$$(22') \quad \beta : D^{(a)} = 1 + 0(1).$$

Using the same arguments we may write:

$$(23) \quad D^{(a)} \cdot R_{x'}^{(a)} = \int\int (x - \alpha)(y - \alpha) X^{(a)}(x, y) dx dy + 0(1) =$$

$$= \int\int (x - \alpha)(y - \alpha) \omega(x, y) dx dy + 0(1),$$

and

$$(23') \quad R_{x'}^{(a)} = R_x + 0(1).$$

The formula (19) follows from (20), (21), (22') and (23'). This proves the Lemma 4 and the Theorem I.

Corollary 2. *If the equivalent variables x_1, x_2, \dots accomplish the suppositions I, II, III, § 1 and (1) of the Introduction then the a priori standard deviation of the sum $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ is the following:*

$$B = n \beta.$$

The formulae (9'') of the § 3 are now

$$(25) \quad B' = (n - 2) \beta,$$

$$(25') \quad \sqrt{\frac{B}{B'}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{n}}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Omega_{n-2}(a - x - y) < O(n^{-1/2}); \quad \Omega_n(a) > CO(n^{-1/2}).$$

§ 5. The expression $\frac{\Omega_n(a - x - y)}{\Omega_n(a)}$.

We shall calculate the expression $\Omega_n(a - x - y)$.

Let us write:

$$(26) \quad H_3(q') = H_3(q) + (q' - q)H_3'(q) + O\{(q' - q)^2\}^1 = \\ = H_3(q) - 3(1 - q^2) \frac{w}{\sqrt{B'}} + O\left(\frac{1 + w^2}{n}\right),$$

and instead of (18) write now

$$\psi(q') = \psi(q) \cdot e^{-q^2 \frac{B - B'}{2B'} + \frac{wq\sqrt{B}}{B'} - \frac{w^2}{2B'}} = \\ = \psi(q) \left\{ 1 - \frac{1}{2} q^2 \frac{B - B'}{B} + \frac{wq}{\sqrt{B}} - \frac{(1 - q^2)w^2}{2B} + O\left(\frac{1 + |w|^3}{n^{3/2}}\right) \right\}.$$

According to (17) § 4 for $i = 4, 6$, (26) § 5, (18') § 5 and (9') § 3:

$$\Omega_{n-2}(a - x - y) = \frac{\psi(q)}{\sqrt{B'}} \left\{ 1 + C' B'^{-3/2} \left[H_3(q) - 3(1 - q^2) \frac{w}{\sqrt{B'}} + \right. \right. \\ \left. \left. + O\left(\frac{1 + w^2}{n}\right) \right] + D' B'^{-2} H_4(q) + C'' B'^{-3} H_6(q) + O\left(\frac{1 + w^2}{n^{3/2}}\right) \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} q^2 \frac{B - B'}{B} + \frac{qw}{\sqrt{B}} - \frac{(1 - q^2)w^2}{2B} + O\left(\frac{1 + |w|^3}{n^{3/2}}\right) \right\} + O(n^{-2}) \\ \Omega_{n-2}(a - x - y) = \\ \frac{\psi(q)}{\sqrt{B'}} \left\{ 1 + C' B'^{-3/2} H_3(q) + D' B'^{-2} H_4(q) - C'' B'^{-3} H_6(q) - \frac{1}{2} q^2 \frac{B - B'}{B} \right. \\ \left. + w [q B^{-1/2} - 3 C' (1 - q^2) B'^{-2} + C' q H_3(q) B^{-1/2} B'^{-3/2}] - \right. \\ \left. - \frac{w^2 (1 - q^2)}{2} B^{-1} + O\left(\frac{1 + |w|^3}{n^{3/2}}\right) \right\},$$

¹⁾ See Khinchine loc. cit. p. 191.

but by (9') § 3, and

$$\left(\frac{B}{B'}\right)^l = 1 + \frac{2l\beta}{B} + \frac{l(l+1)}{2} \cdot \left(\frac{2\theta\beta}{B}\right)^2 \left(1 - \frac{2\theta\beta}{B}\right)^{l-2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

we have

$$(27) \quad \frac{\Omega_{n-2}(a-x-y)}{\Omega_n(a)} = 1 + \beta(1-q^2)B^{-1} + \\ + w[qB^{-1/2} - 3C'(1-q^2)B^{-2} + C'qH_3(q)B^{-2}] - \\ - \frac{1}{2}w^2(1-q^2)B^{-1} + O\left(\frac{1+|w|^3}{n^{3/2}}\right).$$

§ 6. *The approximation formulae of the a posteriori coefficient of correlation of a measurable function of equivalent variables, accomplishing the suppositions I, II, III § 1 and (1) of the Introduction.*

Let us calculate the expressions $E^{(a)}$, $D^{(a)}$ and $R_f^{(a)}$ in resp. to (27) § 5. We denote as follows:

$$(27') \quad \int \int (f(x) - E) w \cdot \omega(x, y) dx dy = I_0,$$

$$\int \int (f(x) - E)(f(y) - E) w \cdot \omega(x, y) dx dy = I_1, \quad E = E|f(x)| \quad (27'')$$

$$\int \int (f(x) - E)(f(y) - E) w^2 \cdot \omega(x, y) dx dy = I_2, \quad D = E|f(x) - E|^2$$

$$\int \int (f(x) - E)^2 w \cdot \omega(x, y) dx dy = I_3, \quad w = (x - \alpha) + (y - \alpha)$$

$$\int \int (f(x) - E)^2 w^2 \cdot \omega(x, y) dx dy = I_4, \quad d = C'B^{-1}[-3(1-q^2) + qH_6(q)]$$

$$E^{(a)} = \int \int_{|w| < \varepsilon\sqrt{n}} f(x) \omega(x, y) \frac{\Omega_{n-2}(a-x-y)}{\Omega_n(a)} dx dy + O(n^{-2}) = \\ = \int \int (f(x) - E) \omega(x, y) \left\{ 1 + wqB^{-1/2} + O\left(\frac{1+|w|^3}{n}\right) \right\} dx dy + E = \\ = E + qB^{-1/2}I_0 + O(n^{-1}),$$

then

$$(28) \quad (E^{(a)} - E)^2 = \frac{q^2\beta D}{B} [R(f(x), x) + R(f(x), y)]^2 + O(n^{-1/2}).$$

When $f(x) = x$, $R(x, x) = 1$, $R(x, y) = R_x = 0$, and $E^{(a)} = \alpha^{(a)}$

$$(28') \quad (\alpha^{(a)} - \alpha)^2 = \frac{\beta q^2}{n} + O(n^{-3/2})$$

as it ought to be according to (1) of the Introduction and (21) § 1.

We obtain from (20) § 4

$$D^{(a)} = \iint (f(x) - E)^2 X^{(a)}(x, y) dx dy - (E^{(a)} - E)^2,$$

and

$$D^{(a)} + (E^{(a)} - E)^2 =$$

$$= \iint_{|w| < \varepsilon \sqrt{n}} (f(x) - E)^2 \omega(x, y) \left\{ 1 + \beta(1 - q^2)B^{-1} + w(qB^{-1/2} + dB^{-1}) - \frac{1}{2}w^2(1 - q^2)B^{-1} + O\left(\frac{1 + |w|^3}{n^{3/2}}\right) \right\} dx dy + O(n^{-2}) =$$

$$= D[1 + \beta(1 - q^2) \cdot B^{-1}] + I_3(qB^{-1/2} + dB^{-1}) - \frac{1 - q^2}{2} I_4 B^{-1} + O(n^{-3/2}),$$

according to the suppositions I, II, III § 1 and (27'), (27'') § 6.

In respect to (28) § 6 it may be written:

$$D^{(a)} = D + qI_3 B^{-1/2} + D\beta B^{-1} \left\{ -q^2 \beta^{-1} D^{-1} I_0^2 + \right. \\ \left. + \frac{1 - q^2}{2} (2 - I_4 D^{-1} \beta^{-1}) + dI_3 D^{-1} \beta^{-1} \right\} + O(n^{-3/2})$$

and

$$(29) \quad \frac{D}{D^{(a)}} = 1 - qI_3 D^{-1} B^{-1/2} - \beta B^{-1} \left\{ -q^2 \beta^{-1} D^{-1} I_0^2 + \right. \\ \left. + \frac{1 - q^2}{2} (2 - I_4 D^{-1} \beta^{-1}) + dI_3 D^{-1} \beta^{-1} - q^2 \beta^{-1} D^{-2} I_3^2 \right\} + O(n^{-3/2}).$$

If $f(x) = x$, we find in the well known notations:

$$\frac{\beta}{D^{(a)}} = 1 - q\beta^{-1} B^{-1/2} (\mu_{3,0} + \mu_{2,1}) - \beta B^{-1} \left\{ -q^2 + \right. \\ \left. + \frac{1 - q^2}{2} [2 - \beta^{-2} (\mu_{4,0} + \mu_{2,2} + 2\mu_{3,1})] + d\beta^{-2} (\mu_{3,0} + \mu_{2,1}) - \right. \\ \left. - q^2 \beta^{-3} (\mu_{3,0} + \mu_{2,1})^2 \right\} + O(n^{-3/2})$$

as it ought to be according to (1) of the Introduction and (22') § 4.

We find at last:

$$\begin{aligned} D^{(a)}R_f^{(a)} &= \iint (f(x) - E)(f(y) - E) X^{(a)}(x, y) dx dy - (E^{(a)} - E)^2 = \\ &= \iint_{|x| < \varepsilon \sqrt{n}} (f(x) - E)(f(y) - E) \omega(x, y) \left\{ 1 + \beta(1 - q^2)B^{-1} + w(qB^{-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + dB^{-1}) - \frac{1}{2} w^2(1 - q^2)B^{-1} + O\left(\frac{1 + |w|^3}{n^{3/2}}\right) \right\} dx dy + (n^{-3/2}). \end{aligned}$$

But we have (29) § 6, then:

$$\begin{aligned} R_f^{(a)} &= \left\{ R_f + qD^{-1}B^{-1/2}I_1 + B^{-1} \left[-q^2D^{-1}I_0^2 + (1 - q^2)\beta R_f + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + dD^{-1}I_1 - \frac{1 - q^2}{2}D^{-1}I_2 \right] + O(n^{-3/2}) \right\} \cdot \left\{ 1 - qD^{-1}B^{-1/2}I_3 - \beta B^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[-q^2\beta^{-1}D^{-1}I_0^2 + \frac{1 - q^2}{2}(2 - I_4D^{-1}\beta^{-1}) + dI_3D^{-1}\beta^{-1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - q^2\beta^{-1}D^{-2}I_5^2 \right] + O(n^{-3/2}) \right\}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (30) \quad R_f^{(a)} - R_f &= qD^{-1}B^{-1/2}(I_1 - R_f \cdot I_3) + B^{-1} \left\{ -q^2D^{-1}I_0^2 + (1 - q^2)\beta R_f \right. \\ &\quad \left. + dD^{-1}I_1 - \frac{1 - q^2}{2}D^{-1}I_2 - q^2D^{-2}I_1I_3 + \beta R_f \left[q^2\beta^{-1}D^{-1}I_0^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1 - q^2}{2}(2 - I_4D^{-1}\beta^{-1}) - dI_3D^{-1}\beta^{-1} + q^2\beta^{-1}D^{-2}I_5^2 \right] \right\} + O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

We see that practically it is enough to write

$$(31) \quad R_f^{(a)} - R_f = qD^{-1} \cdot B^{-1/2}(I_1 - R_f \cdot I_3) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

For $f(x) = x$ we obtain from (30) and the Theorem I § 4, since:

$$I_0 = \mu_2, \quad I_1 = 2\mu_{2,1}, \quad I_2 = 2(\mu_{3,1} + \mu_{2,2}), \quad I_3 = \mu_{3,0} + \mu_{2,1}, \quad R_f = 0$$

$$\begin{aligned} (32) \quad R_x^{(a)} &= 2q\beta^{-1}\mu_{2,1}B^{-1/2} + B^{-1} \left\{ -q^2\beta + d\beta^{-1}\mu_{2,1} - \right. \\ &\quad \left. - (1 - q^2)\beta^{-1}(\mu_{3,1} + \mu_{2,2}) - 2q^2\beta^2\mu_{2,1}(\mu_{3,0} + \mu_{2,1}) \right\} + O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

But we have:

$$R_{x'}^{(a)} = -\frac{1}{n-1},$$

we obtain then

$$(33) \quad \vartheta_{2,1} = 0,$$

$$(33') \quad \vartheta_{3,1} + \vartheta_{2,2} = \vartheta_{2,0}^2 = \xi^2$$

and

$$(34) \quad R_{x'}^{(a)} = -\frac{1}{n} + O(n^{-3/2})$$

as it ought be.

Now we can formulate the Theorem II and III.

Theorem II. *If the equivalent variables accomplish the suppositions I, II, III of the § 1, then the supposition (1) of the Introduction implies that (1) the variables are not correlated, (2) $\vartheta_{2,1} = 0 = \vartheta_{1,2}$; $\vartheta_{3,1} + \vartheta_{2,2} = \vartheta_{2,0}^2$.*

Theorem III. *If the equivalent variables accomplish the suppositions I, II, III of the § 1, then the coefficient of correlation a posteriori, in respect to the supposition (1) of the Introduction, of the measurable function of these variables approaches the coefficient of correlation a priori of this function of the same variables.*

The difference is of order $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ for the dependent variables and $O\left(\frac{1}{n}\right)$ for the independent ones (as it has been proved by Khinchine).

When the variables are independent, the formula (50) is:

$$R_f^{(a)} - R_f = -\xi B^{-1} R^2 [f(x, x) + O(n^{-3/2})],$$

then

$$R_f^{(a)} = -\frac{1}{n} R^2 [f(x), x] + O(n^{-3/2}),$$

as Khinchine has already proved.

Kazimierz Zarankiewicz.

O liczbie punktów rozgałęzienia dendrytów i grafów.

Przedstawił czł. W. Sierpiński dn. 15 marca 1946 r.

Streszczenie

Oznaczając przez $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ rzędy ≥ 3 punktów rozgałęzienia, przez n liczbę punktów rozgałęzienia o rzędach ≥ 3 , przez e liczbę punktów zatrzymania dla dowolnego dendrytu skończonego lub grafu skończonego, zaś przez k liczbę cykli grafu, zachodzą:

Twierdzenie 1. *Dla dendrytu skończonego jest:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 2(n-1) + e.$$

Twierdzenie 2. *Dla grafu skończonego jest:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 2(n+k-1) + e.$$

Casimir Zarankiewicz.

Sur le nombre des points de ramification dans des dendrites et dans des graphes.

Communication présentée par M. W. Sierpiński à la séance du 15 mars 1946.

1. **Notations et préliminaires.** *L'arc simple* est l'image biunivoque et bicontinue d'un segment rectiligne; l'image d'une extrémité du segment est dite *extrémité de l'arc simple*; tout autre point de l'arc simple est dit son point *intérieur*. *Une courbe simple fermée* est l'image biunivoque et bicontinue d'une circonférence. Un *continu Peanien* est l'image univoque et continue d'un segment rectiligne. *Une dendrite* est un continu Peanien qui ne renferme aucune courbe simple fermée. On démontre sans peine, que toute dendrite est la somme d'arcs simples (et de leurs points d'accumulation) dont chaque couple se compose d'arcs qui sont ou bien disjoints, ou bien ont tout au plus un point commun.

Le nombre de ces arcs simples peut être fini ou infini (tout au plus dénombrable); dans le premier cas la dendrite est dite *finie*. Dans la suite nous ne considérons que les dendrites finies et bornées. Un ensemble connexe de points qui est la somme d'un nombre fini d'arcs simples et qui ne contient qu'un nombre fini de courbes simples fermées est dit un *graphe fini*.

La théorie des dendrites au sens de la théorie d'ensembles a été développée par les auteurs américains Moore, Whyburn, Ayres, Wilder etc. et par les auteurs polonais Mazurkiewicz, Sierpiński, Ważewski, Kuratowski et moi — même. Les recherches au sens de topologie combinatoire sont exposées dans le livre de König¹⁾.

Le point p , situé sur la dendrite ou graphe D , est dit *point de ramification d'ordre n* lorsqu'il existe exactement n arcs simples, contenus dans D , ayant le point p comme l'une de leurs extrémités et n'ayant aucun autre point commun.

En particulier, lorsque $n=1$, le point p est dit *point d'arrêt*. Tout point d'ordre $n=2$ s'appelle point *ordinaire*; tous les autres points (c'est-à-dire les points de ramification d'ordre $n=1$ ou bien d'ordre $n \geq 3$) sont dits points *singuliers* de D . Toute dendrite finie étant la somme d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun qu'un point au plus, contient un nombre fini de points singuliers.

Soit P un ensemble des points, composé d'un nombre fini n des points $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, et D — une dendrite finie contenant P et telle que tout point singulier de D est contenu dans P . Un arc simple L contenu dans D , est dit „*libre*” par rapport à l'ensemble P lorsque les deux extrémités de l'arc L sont contenues dans P , mais aucun autre point de L ne l'est pas.

2. Relation entre les nombres des points singuliers d'une dendrite. Dans la théorie classique des dendrites et des graphes on considère les points singuliers sans faire aucune distinction entre les points d'arrêt et les points de ramification d'ordre ≥ 3 . Il me paraît avantageux de faire cette distinction. Le but de cette note est d'établir la relation qui subsiste entre le nombre des points d'arrêt, le nombre des points de ramification d'ordre ≥ 3 et entre les ordres de ces points dans des dendrites et des graphes.

¹⁾ D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936, p. 47.

Lemme. Prémisses: Soit P l'ensemble composé d'un nombre fini n des points et D une dendrite finie contenant P et dont tous les points singuliers sont contenus dans P .

Thèse: La dendrite D est la somme de exactement $n - 1$ arcs simples libres par rapport à P .

Démonstration. Appliquons le raisonnement par induction finie. Notre lemme est vrai pour le nombre $n = 2$, car les dendrites qui n'ont que 2 points singuliers sont exclusivement des arcs simples ayant ces points comme extrémités. Supposons que le lemme soit vrai pour le nombre n des points; nous démontrerons qu'il reste vrai pour le nombre $n + 1$ des points. Soit donc P composé de $n + 1$ points: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n+1}$ et D une dendrite finie dont tous les points singuliers sont contenus dans P . En vertu d'un théorème de S. Mazurkiewicz¹⁾ la dendrite D contient au moins deux points dont aucun ne coupe D ; il est évident que ces points sont des points d'arrêt pour D — donc ils sont contenus dans P . Supposons que ces points soient les points p_1 , et p_2 . Considérons l'arc simple L contenu dans D et ayant ces points pour extrémités²⁾. Soit M un sous-arc simple de L qui contient comme le premier de ces points le point p_1 , et comme le dernier — le premier parmi les points de l'ensemble P (nous le désignons par p_m) qu'on rencontre en suivant l'arc L à partir du point p_1 . La dendrite D peut être représentée par la somme:

$$D = M + (D - M + p_m) \dots \dots \dots (1)$$

où $D - M + p_m$ est évidemment une dendrite et les deux sommandes n'ont en commun que le point p_m . La dendrite $D - M + p_m$ ne contient que n points de l'ensemble P , car certainement il ne contient pas le point p_1 (qui est le premier point de M). D'autre part tout point singulier de $D - M + p_m$ est contenu dans l'ensemble $P - p_1$. Les prémisses du lemme sont satisfaites et nous pouvons affirmer que la dendrite $D - M + p_m$ est

¹⁾ S. Mazurkiewicz. *Un théorème sur les lignes de Jordan*. Fund. Math. t. II, p. 119.

²⁾ Un tel arc simple existe toujours d'après un théorème établi par S. Mazurkiewicz. Voir: *Sur les lignes de Jordan*. Fund. Math. t. I, p. 201.

la somme de exactement $n-1$ d'arcs simples libres par rapport à l'ensemble $P-p_1$. Or, l'arc simple M étant d'après sa définition un arc libre par rapport à P , la formule (1) montre que D est la somme de exactement $n-1+1=n$ arcs simples libres par rapport à P . La supposition que le lemme soit vrai pour le nombre n implique le lemme pour le nombre $n+1$. L'induction assure la vérité du lemme pour tout nombre fini n .

Théorème 1. *En désignant, pour une dendrite finie D , par $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ les ordres ≥ 3 des points de ramification de D , par n le nombre de tous les points de ramification d'ordre ≥ 3 de D , par e — le nombre des points d'arrêt de D , on a la relation:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 2(n-1) + e.$$

Démonstration. Soient: D une dendrite finie donnée, et $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ses points de ramification ayant les ordres $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ respectivement. Désignons par $a_i a_k$ l'arc simple contenu dans D et ayant les points a_i et a_k comme extrémités et posons:

$$D' = \sum_{i=1}^{i=n} a_i a_i.$$

L'ensemble D' est évidemment connexe et comme sous-ensemble d'une dendrite, il est également un dendrite. Tout point singulier de D' est contenu dans l'ensemble $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, mais l'affirmation réciproque peut être fautive. En effet, x étant un point d'arrêt de D il ne peut pas être un point intérieur pour aucun des arcs $a_i a_i$; donc x ne peut être qu'un point extrême pour ces arcs; c'est donc un des points $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$. Le point x étant un point de ramification d'ordre ≥ 3 pour D' , il est de même un point de ramification pour D (car D contient D') — c'est donc un des points $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$. Nous pouvons ainsi appliquer notre lemme à la dendrite D' et à l'ensemble $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$; or, la dendrite D' est la somme de exactement $n-1$ arcs simples libres par rapport à l'ensemble $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

Soient b_i et c_i deux points intérieurs arbitraires d'un arc simple libre L_i de D' ; l'arc $b_i c_i$ ne contient aucun des points

a_i et se compose exclusivement de points ordinaires pour D' et à plus forte raison, de points ordinaires de D . Négligeons maintenant tous les points intérieurs de tous les arcs b_i, c_i situés sur tous les arcs libres dont se compose D' . L'ensemble F qui restera (et qui ne sera plus connexe) gagne de nouveaux points d'arrêt, à savoir les points b_i et c_i pour $i=1, 2, 3, \dots, n-1$, au nombre de $2(n-1)$. Tout point d'arrêt pour D restera point d'arrêt pour F , car nous avons négligé seulement les points ordinaires des arcs simples joignant les points a_i . La dendrite D ayant e points d'arrêt, l'ensemble F présente $2(n-1)+e$ points d'arrêt.

D'autre part, après nos omissions la dendrite D reste décomposée en exactement n parties connexes dont chacune se compose d'un point a_i duquel sortent exactement p_i arcs simples ayant le point a_i en commun (étoiles avec les centres a_i), car chacun des arcs libres joignant les points a_i est découpé. Chacune des étoiles aura au tant de points d'arrêt qu'il y a d'arcs sortant du point de ramification a_i c'est-à-dire qu'elle a l'ordre du point a_i . Cet ordre étant p_i nous concluons que toute étoile aura exactement p_i points d'arrêt; donc l'ensemble F aura $\sum_{i=1}^{i=n} p_i$ points d'arrêt.

En comparant les deux résultats que nous avons obtenus il suit:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 2(n-1) + e. \quad \text{c. q. f. d.}$$

3. Relation entre les nombres de points singuliers dans les graphes. Soit G un graphe fini, K une courbe simple fermée contenue dans G , et L un arc simple contenu dans K et tel que tout point de L est un point ordinaire par rapport à G . Négligeons dans G tous les points intérieurs d'arc L . L'ensemble G^* , obtenu de telle manière de G , est évidemment un graphe fini qui ne contient plus la courbe simple fermée K . L'opération qui conduit à obtenir le graphe G^* de G est dite *coupure régulière*. Étant donné un graphe fini G , nous pouvons appliquer cette opération un nombre fini de fois pour obtenir enfin un graphe qui ne contient aucune courbe simple fermée — c'est-

à-dire une dendrite. Soit k le plus petit nombre de coupures régulières nécessaires pour qu'on obtienne une dendrite d'un graphe donné G . Appelons k le nombre des cycles d'un graphe G .

On démontre que k est le nombre des domaines connexes bornés en lesquelles est coupé le plan euclidien par le graphe G , lorsque G est situé entièrement dans ce plan.

Théorème 2. *Pour un graphe fini arbitraire désignons: par k le nombre des cycles, par e le nombre des points d'arrêt, par n le nombre des points de ramification d'ordre ≥ 3 , par $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ les ordres de ces points de ramification; on a alors la relation:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 2(n+k-1) + e.$$

Démonstration. En faisant k coupures régulières sur le graphe G nous obtiendrons une dendrite G^* . Tout point de ramification a_i d'ordre p_i de G restera un point de ramification du même ordre pour G^* , car nous n'avons négligé aucun arc simple contenant le point a_i . Pour la même raison tout point d'arrêt pour G restera point d'arrêt pour G^* . Mais la dendrite G^* gagne de nouveaux points d'arrêts — ce sont ceux qui se présentent chaque fois qu'une omission des arcs simples a lieu. Les coupures régulières étant effectuées k fois, $2k$ nouveaux points d'arrêt apparaîtront pour G^* ; donc la dendrite G^* aura $e + 2k$ points d'arrêt et n points de ramification d'ordres $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. En vertu du théorème 1 on a:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 2(n-1) + e + 2k, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarquons que le nombre $\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i + e \right)$ représente le

nombre d'arcs simples de G libres par rapport à l'ensemble S composé de tous les points singuliers de G à condition qu'on compte la courbe simple fermée contenant un seul point de ramification a_i comme un arc libre. En effet, soit a_i un point de S et considérons l'arc simple libre L qui commence au

point a_i ; en le suivant jusqu'à l'autre extrémité nous arrivons à un des points de S — nous le désignons par a_j . Si $a_i = a_j$, cet arc se ferme en une courbe simple fermée contenant un seul point de S , à savoir le point a_i . Dans ce cas, cet arc est

compté dans la somme $\sum_{i=1}^{i=n} p_i$ deux fois comme ordre du point a_i .

Si $a_i \neq a_j$ et a_j est un point de ramification d'ordre ≥ 3 , l'arc

L est compté dans la somme $\sum_{i=1}^{i=n} p_i$ deux fois comme un ordre:

une fois au point a_i , une autre fois au point a_j . Si $a_i \neq a_j$ et si a_j est un point d'arrêt, l'arc L est de même compté dans la

somme $\sum_{i=1}^{i=n} p_i + e$ deux fois, une fois comme l'ordre du point a_i une

autre fois dans e comme un point d'arrêt. Dans tous les cas on

compte doublement dans la somme $\sum_{i=1}^{i=n} p_i + e$ un arc simple libre

par rapport à S ; donc $\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i + e \right)$ représente le nombre d'arcs

simples libres par rapport à S à la seule condition qu'une courbe simple fermée contenant un seul point a_i soit comptée comme arc libre. En désignant par m le nombre des arcs libres (avec la condition mentionnée) de G , par l le nombre des points singuliers de G , on obtient en vertu du théorème 2, pour un graphe fini arbitraire G la relation: $m - l = k - 1$.

Posiedzenie

z dnia 22 maja 1946 r.

Sławomir Miklaszewski.

Nowe możliwości badania ruchów wody w typach gleb.

Gleba — ciało naturalne niejednolite — jest zespołem: piasku, gliny, próchnicy, wapna (węglanu wapnia), wody, powietrza i drobnoustrojów.

Nie jest to jednak, jakby się to, na pozór, zdawać mogło, jeno martwa, mechaniczna, mniej lub więcej chaotyczna — a już bezwarunkowo nie przypadkowa — przygodna mieszanina, związana całkiem luźno, lecz utwór zbudowany logicznie i harmonijnie, powiedzmy prawie „żywy“ (i żyjący tym swym życiem swoistym), którego wszystkie elementy (części składowe) zespala więź ścisłego związku wzajemnej zależności i korelacji. Duszą tego zespołu, szczególnie, jeśli chodzi o urodzajność gleby, jest woda (w niej zawarta) i sposób jej krążenia w glebie. To ona, w pierwszym rzędzie, kształtuje profil gleby, ową rzeźbę-syntezę, znak widomy i odbicie wszystkich procesów czynników fizycznych, chemicznych i biologicznych, kształtujących powierzchną warstwę skorupy ziemskiej. Profil gleby jest jakby „pisaną“ kroniką tych procesów i rejestrem wszystkich własności gleby badanej. Stąd „wyjaśnienie sposobu krążenia wody w glebie, jest to poznanie jej urodzajności“. Oto przyczyna niezmiernie licznych poszukiwań, badań, doświadczeń i studiów nad zachowaniem się wody w glebie, dokonywanych dawniej i obecnie przez cały szereg fizyków, chemików, geologów, melioratorów, agronomów i, oczywiście, gleboznawców. Wszyscy badacze natrafiali na nieprzewyciężone trud-

ności badania krążenia wody w całej jego rozciągłości. Konieczność pobierania próbek gleby (do oznaczania ilości wody), co zmienia ciśnienia w glebie, a więc ruchy w niej wody i ich ciągłość, stała temu na przeszkodzie, aż do roku 1939, t. j. do czasu ogłoszenia przez dr L e o n a (jun.) S t a n i e w i c z a, opracowanej przezeń metody (bezpośredniej) rezonansowo elektrycznej¹⁾.

Byłoby pewnego rodzaju tragedią dla badaczy, zwłaszcza tej miary, co L e b i e d i e w, wskutek niemożności poparcia ścisłymi liczbami swych głębokich wywodów i koncepcyj wyprowadzonych na podstawie obserwacji budowy profilu gleby²⁾.

Wszystkie dotychczasowe usiłowania stworzenia metody, pozwalającej na badanie ruchów wody w glebie w ich ciągłości, bez naruszania profilu gleby i jego struktury, a więc bez pobierania próbek, były daremne. —Metoda dr S t a n i e w i c z a, t. zw. rezonansowa, polega na zastosowaniu prądów elektrycznych wielkiej częstotliwości, „co daje możliwość“, przy badaniu monolitu glebowego, „rozpatrywania zjawiska ruchu wody, np. przesiąkającej, w glebach w ich stanie naturalnym, zachowujących budowę (naturalne ułożenie warstw) i posiadających nie zniszczoną wewnętrzną strukturę poszczególnych poziomów“. „Dla mierzenia pojemności elektrycznych kondensatorów ziemnych, która się zmienia ze wzrostem ilości wody, zastosowano układ pomiarowy złożony z trzech obwodów: 1) oscylacyjnego:

¹⁾ L e o n (jun.) S t a n i e w i c z: „Badanie na monolitach glebowych ruchu wody przesiąkającej, za pomocą metody rezonansowej“. [l'Etude dans les monolithes de sols du mouvement de l'eau filtrante à l'aide de la méthode de résonance“]. Warszawa 1939 Odbitka z czasopisma „Przegląd Melioracyjny“ NNr 3 i 4 r. 1939. Autor tej metody, mój asystent w ciągu lat 12, a obecnie docent Politechniki Warszawskiej, opracował tę metodę w ciągu r. 1937 i 1938, w moim Instytucie Gleboznawstwa, mieszczącym się w Politechnice Warszawskiej, doszczętnie zniszczonym w czasie wojny. Zniszczeniu uległ i przyrząd doc. dr L e o n a S t a n i e w i c z a.

²⁾ Nie mówię tu, oczywiście, o badaniach W o l l i n y'e go, klasycznych, lecz obecnie, wobec olbrzymich postępów rozwoju nauki o glebie, najzupełniej przestarzałych, oraz innych badaniach tego samego pokroju, dokonywanych na szczątkach „trupa“ gleby, pozbawionych przyrodzonej im struktury, lub na glebach(?)! sztucznych, a więc o badaniach ściśle mówiąc, nie należących do nauki o glebie, lecz wedle malowniczego wyrażenia L e b i e d i e w a będących „proszko-znawstwem“, nie mającym nic wspólnego z typem gleby.

2) rezonansowego i 3) detektorowego³⁾. Dotychczas autor badał jedynie ruchy wody przesiąkającej w monolitach typów gleb, nie wywołując żadnej zmiany w ich środowisku przez cały czas trwania badania, nie niszcząc ich uprzedniej natury i zachowując ich profil (charakter naturalny ich warstw horyzontów-pozymów). Szybkość przesiąkania wody w różnych warstwach-pozymach każdego monolitu zmienia się w zależności od natury warstwy. Najszybsze przenikanie wody w całej miąższości monolitu (100 cm) wyniosło:

dla piasku wydmowego z Celestynowa = $56 \times 10^{-3} \text{ cm sec}^{-1}$

dla bielic bardzo piaszcz. z Kościelca = $14 \times 10^{-3} \text{ cm sec}^{-1}$

dla bielicy piaszczystej z Długoleki Wielk. = $0,85 \times 10^{-3} \text{ cm sec}^{-1}$

dla bielicy pyłowej z Rakowca = $0,52 \times 10^{-3} \text{ cm sec}^{-1}$

Najmniejsza szybkość przenikania wody

w glinie mocnej Ciechanowskiej = $35 \times 10^{-6} \text{ cm sec}^{-1}$

Wartość największej średniej wsiąkania wody w glebę $4.7 \times 10^{-3} \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ (w piasku wydmowym z Celestynowa) jest 338 razy większa od najmniejszego średniego wsiąkania $13.9 \times 10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$, w ile mocnym Ciech. z Opinogóry Górnej. Maksymalna średnia wartość przesiąkania w piasku wydmowym z Celestynowa ($4.4 \times 10^{-3} \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$) jest 1466 razy większa od minimalnej średniej wartości przesiąkania w ile mocnym Ciechanowskim z Op. G. ($3.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$).

„Dane wsiąkania, przenikania i przesiąkania wody otrzymane dla miąższości 100-cmtrowej rozmaitych gleb dają możliwość obliczania czasu potrzebnego do odprowadzenia danej ilości wody z danych powierzchni.“ Dr S t a n i e w i c z słusznie mniema, „że metodę rezonansową mierzenia pojemności elektrycznej kondensatorów ziemnych“ da się „stosować przy badaniu zjawiska kapilarnego ruchu wody w glebach (w monolitach)“. Jestem najzupełniej przeświadczony o słuszności tego przekonania, jednakże, co podkreślam, to badanie będzie wymagało jeszcze większej znajomości charakteru profilów gleb badanych, jako znacznie trudniejsze i więcej skomplikowane, aniżeli studiowanie ruchów wody przesiąkającej. Bądź jak bądź, me-

³⁾ ob. l. c. fotogram przyrządu, na str. 14. Schemat przyrządu na str. 15, rys. 1. Krzywe (16) zmian wody przesiąkającej na rys. 2.... do 17 włącznie.

toda S t a n i e w i c z a niepomnie poszerza ramy naszych dociekań nad krążeniem wody w glebach. Z jej pomocą będziemy w stanie sprawdzić, ustalić i poprawić wiele wniosków wypracowanych i opartych na podstawie szczegółowego badania profilu gleby (to znaczy na umiejętności „czytania w profilu gleby“). To ostatnie daje nam jedynie możliwość wykrycia wyników działania ruchów wody w glebie, obecnie, być może, dana nam będzie możliwość śledzenia przebiegu samego tego działania. Zarazem da się ustalić zależność szybkości przenikania wody, przez poszczególne warstwy-poziomy rozmaitych typów gleb, od temperatury, co dotychczas było rzeczą niemożliwą, chociaż wiemy, że, w naturze, poszczególne warstwy gleby (nawet tej samej) różnią się znacznie stopniem swego ogrzania. Sztuka odczytywania właściwości gleby z budowy jej profilu zdołała sprostować niejedną fałszywy pogląd gleboznawczy. W metodzie rezonansowej zyskuje ona walnego pomocnika dającego w wielu przypadkach możliwość poparcia swych wniosków ścisłymi danymi liczbowymi. Kwestionowała ona ⁴⁾ wartość formuł i obliczeń stosowanych przez melioratorów. Wyniki, otrzymane przez S t a n i e w i c z a jego metodą, zdają się w zupełności potwierdzać słusność tego mniemania o ich niedokładności i niepewności. O ile chodzi o przesiąkanie, to tylko dane otrzymane z badań piasku wydmowego zbliżają się do formuł i obliczeń obecnie stosowanych, które dla innych typów gleb zdają się być bezwarunkowo błędne i nie do użycia. Badania bardziej liczne, przeprowadzone na wszystkich glebach typach-indywiduach, we wszystkich krajach za pomocą tej nowej metody, rozwiążą to ważne zagadnienie i dopomogą, bądź do sprostowania obliczeń i formuł dotychczas używanych, bądź też dadzą pewne podstawy do opracowań nowych: ścisłych i właściwych.

Wyniki otrzymane przez S t a n i e w i c z a nie były, dla autora niniejszego przyczynku, niczym niespodziewanym. Odgadywałem je na podstawie wieloletniej znajomości profilów gleb. W roku (1939) powstania metody rezonansowej upłynęło już lat 40 (obecnie 47) poświęconych studiowaniu profilów gleb, lecz, ku mej żywej radości, uzyskałem jeszcze raz, i na tej dro-

⁴⁾ Autor niniejszego dał temu wyraz, między innymi, w r. 1937, na posiedzeniach Sekcji Melioracyjnej Międzynarodowego Tow. Gleboznawczego, w Szwajcarii.

dze, potwierdzenie słuszności mej koncepcji typów-gleb-indywiduów⁵⁾. W jednakowych odmianach typów gleb, nawet niezupełnie identycznych, jak np. dwie bielice bardzo piaszczyste z Kościelca, zarówno z jednej jak i z drugiej wypływ wody, prześlakającej przez ich monolity długości 100 cm, rozpoczynał się ściśle po 117 minutach. W dwu innych bielicach mniej piaszczystych po 2005 minutach (Długoleka Wielka) i 2607 min. (Kościeliec). W bielicy pyłowej (z Rakowca) po 3200 min. W trzech ostatnich widzimy różnice, ale nie tak ogromne, jak w porównaniu z piaskiem wydmy (z Celestynowa), gdzie wypływ następuje po 29 min. 45 sek. bądź z gliną mocną ciechanowską (z Opinogóry Górnej) po 783 godzinach, t. j. 46980 minutach.

Uważam metodę rezonansową, którą zawdzięczamy dr S t a n i e w i c z o w i, za niezmiernie cenną dla badania krążenia wody w środowisku profilów typów gleb, jednak, wobec jej stanu obecnego, nieco surowego⁶⁾, wymaga ona jeszcze dalszego wypracowania jej wskazówek, co do posługiwania się nią, i ścisłego ustalenia warunków jej stosowania, aby, wyjaśniając badane zjawisko, mogła dawać liczby wierne i ściśle.

Pozwolę sobie uczynić w tym względzie parę uwag.

Najważniejszą rzeczą jest przygotowanie odpowiedniego do tych badań monolitu.

W chwili obecnej należy, narazie, prowadzić badania jedynie na typach-glebach-osobnikach dobrze ukształtowanych (tych najprawidłowszych), powiedzmy klasycznych, o warstwach-poziomach (horyzontach) możliwie jak najbardziej jednolitych w całej swej miąższości, chociaż różniących się pomiędzy sobą. Trzeba tedy unikać wszelakich obcych wkładek i wtrąceń (inkluzyj), zwłaszcza wielkich, a więc: gniazd żwiru,

⁵⁾ ob. S ł a w o m i r M i k l a s z e w s k i: 1) „Les types des sols et leur importance“. Comptes Rendus de la II-e Conférence Agrogéologique à Stockholm. 1910 r.; 2) „Les sols comme individus“. — „Mémoires sur la Nomenclature et Classification des sols“. Nr 16. Commission IV. Comité Internationale de Pédologie. Helsingfors. 1924 r. Confér. Inter. à Rome i w licznych publikacjach polskich np. St. M. „Gleby Ziemi Polskich“, r. 1912, wyd. II-e; „Gleby Polskie“, wyd. III. r. 1930; „Rozpoznanie gleb w polu“, wyd. III, r. 1935 i inne.

⁶⁾ Powstała ona przed samym wybuchem wojny, a zniszczenie doszczętne przyrzędu [w chwili robienia tej korekty (12.XII.1947) rekonstrukcja tego przyrzędu jest na ukończeniu w warsztatach Politechniki Warszawskiej] i nieistniejącego obecnie Zakładu Gleboznawstwa udaremniło chęć dalszego jej wypracowania.

piasku, rudawca (orsztynu), dużych kamieni i t. p. i t. p., słowem wszystkiego, co mogłoby zakłócić jednolitość warstwy-poziomu, wywierając wpływ na krążenie wody, aby, chcąc wypracować normy podstawowe, nie opierać się na danych wyjątkowych. Narazie musimy nieodzownie zdobyć dane z badań gleb o profilach modelowych, aby służyły jako oparcie i punkt wyjścia dla obliczeń. Następnie, przyjdzie czas na gleby o profilach mniej typowych i uszkodzonych. S t a n i e w i c z posługiwał się monolitami o wymiarach: 20 cm × 20 cm × 100 cm. Należałoby ustalić wymiary najbardziej odpowiednie. Niewątpliwie zależy to od typów osobniczych gleb, lecz dla jednolitości warunków badania należałoby ustalić, jakie wymiary wywoływałyby najmniejsze różnice w zastosowaniu do ogółu wszystkich typów gleb. Chodzi tu głównie o wymiary przekroju poziomego w monolicie. Co do długości monolitu to najracjonalniej byłoby zadowolić się przeciętną głębokości drenowania, która się waha od 1 m do 1 m. 25 cm, ponieważ dane byłyby wówczas miarodajne i zastosowalne dla melioratorów ⁷⁾). Pobieranie monolitów nie jest rzeczą łatwą i nastęrcza pewne trudności, wzrastające z ich wielkością, co jednocześnie utrudnia i zmniejsza przewożność monolitów, wobec czego należałoby ustalić rozmiary najmniejsze z tych, które pozwalałyby na osiągnięcie wyników dostatecznie ścisłych. Z punktu widzenia nauki o glebie długość monolitu, w którym badamy krążenie wody, powinna nieco przekraczać (warstwę) — linię ⁸⁾), t. zw. średnią roczną przesiąkania wody opadowej w glebie, spoczywającej na skale macierzystej lub podścielającej nieuszkodzonej.

⁷⁾ Przenikanie i przesiąkanie, a także wypływ wody zmienia się w monolitach tej samej gleby w zależności od ich długości. Woda przesiąkająca, w warunkach pracownianych jest u spodu monolitu pod ciśnieniem atmosferycznym, tak że w warstwie najniższej (kilkocentymetrowej) monolitu pewna część wody znajduje się pod postacią zawieszoną (t. zw. woda zawieszona). W stosunku do pojemności warstwy gleby tego poziomu względem wody jest ona w nadmiarze, jednak nie wypływa po przerwanu dopływu wody do monolitu. Podobnie rzecz się ma w glebach nad drenami.

⁸⁾ Mówi się zawsze linię, tymczasem w rzeczywistości jest to warstwa leżąca w zasięgu głębokości, (jako linii corocznie innych) przesiąkań opadów atmosferycznych. Ta warstwa-linia znajduje się na różnych głębokościach nie tylko w rozmaitych typach gleb, lecz i w tych samych typach. Zazwyczaj ta głębokość przekracza u nas głębokość jednego metra.

Monolity pobierane przeze mnie dla Muzeum Przemysłu i Rolnictwa w Warszawie, miały wymiary 10 cm × 20 cm × 100 cm, i ważyły wraz ze skrzynkami (± 7 kg z b. małymi wahaniami) od 37 kg do 50 kg (netto 30—43 kg) zależnie od typu gleby. Lössy były najlżejsze, najcięższe — grube piaski żwirowe i gleby kamieniste. Monolity użyte do badań ruchów wody, przez Stanięwicza, jako dwa razy większe, a przytem w skrzynkach znacznie grubszych, ważyły zapewne dwa razy więcej, t. j. od 75 kg do 100 kg.

Profil badanego monolitu winien być wyrysowany ściśle i detalicznie wraz ze wszystkimi jego warstwami-poziomami, wymierzonymi dokładnie, a ich granice oznaczone na desce skrzynki monolitowej dla ułatwienia rozmieszczenia kontaktów elektrycznych, które należy umieścić nietylko rzędem na linii pionowej co 5 lub 10 cm, lecz przede wszystkim na liniach stycznych, stanowiących granice przylegających do siebie warstw-poziomów⁹⁾. Są to linie, na których charakter przenikania wody przesiąkającej zdaje się zmieniać najsilniej. W profilu, na przykład, bielicy, należy umieścić kontakty elektryczne conajmniej: w środku warstwy ornej; w miejscu jej stykania się z warstwą eluwialną; na linii zetknięcia z iluwium; na granicy iluwium i skały macierzystej; na początku i na końcu warstwy-linii średniej rocznej przenikania opadów atmosferycznych. To są miejsca umieszczenia nieodzownych kontaktów elektrycznych. Wszystkie inne są pożądane, lecz mniejszej wagi dla znajomości ruchów wody w typowym profilu bielicy. W razie występowania jednej lub znaczniejszej liczby plam glejowych, należałoby umieścić konieczny kontakt elektryczny w środku plamy największej. W glebach o profilach mniej jednolitych z wtrąceniami [piasku, żwiru, gliny, wapna (węglanu wapnia)

⁹⁾ Nazwa poziom (a zwłaszcza międzynarodowa horyzont), oznaczająca warstwę jest nieściśła i niewłaściwa (ὄριζον = odgradzać). Zarówno poziom, jak i horyzont są to linie, a więc mają jeden (1) wymiar; jako warstwa w profilu mają dwa (2) wymiary: szerokość i wysokość; jako warstwa w glebie, istotnie trzy. Mimo to termin ten jest powszechnie zrozumiały i, o ile jest mowa o profilu, nie nastrocza nieporozumień. Mniej się nadaje do metody rezonansowej, każda bowiem warstwa — poziom - horyzont, jest ograniczona dwoma liniami poziomami - horyzontami, stykających się z nią warstw sąsiednich, gdzie należy umieszczać kontakty elektryczne.

rozsianego lub w konkrekcjach, gipsu, rudawca i t. p. i t. p.] należałoby, w nich lub przy nich, umieścić kontakty elektryczne. Taki sposób rozmieszczania kontaktów należy stosować i w profilach innych typów gleb.

Każdą zmianę składu lub struktury, każdej warstwy-poziomu, należy uważać za mogącą wpłynąć na sposób krążenia wody w profilu gleby, a więc należy ją zbadać, aby zdać sobie sprawę z wywoływanego przez nią zakłócenia. Dla szybkości wypływu wody przesiąkającej zakłócenia lokalne, spowodowane wtrąceniami obcymi, nie mają wielkiego znaczenia, bowiem wpływ ten jest regulowany prawie jedynie przez warstwę profilu najmniejprzepuszczalną, niezależnie od topograficznego jej w profilu położenia, lecz dla badania prądów wody wstępujących, normujących urodzajność gleby, mogą one, niekiedy, mieć znaczenie bardzo poważne.

Byłoby bardzo wskazane zastosowanie metody *Staniewicza* do badań lizymetrycznych, dostosowując wbudowanie przyrządu rezonansowego do warunków lokalnych, co zdaje mi się leżeć w granicach możliwości. Należałoby się, jednak, przy tym posługiwać nie ziemią sztuczną, nasypaną lub ułożoną, lecz wielkimi monolitami gleb naturalnych w postaci czworoprostokątnych przyzm (np. o wymiarach: 100 cm × 100 cm × 150 cm, lub 100 cm × 100 cm × 125 cm) wyciętych starannie zimową porą w stanie zmarzniętym¹⁰⁾ i przewiezionych saniami bez uszkodzenia ich budowy i struktury naturalnej. Wówczas dałoby się śledzić zmiany wywoływane przez czynniki atmosferyczne, kształtujące profil gleby, to jest, wpływ temperatury, opadów a może i wiatru, na sposób krążenia wody w danym typie gleby. Nowa metoda Staniewicza pozwala na bliższe i ściślejsze liczbowe zbadanie zjawiska migracji wilgoci z gruboziarnistych warstw gleby do bardziej drobnoziarnistych, dzie-

¹⁰⁾ Pobranie takich monolitów i ich instalacja, nie jest tak trudną, jak się nią być wydaje, trzebaby tylko aby wybrana gleba zupełnie nasycona wodą (można ją nasycić umyślnie) była dobrze zmarznięta, w stanie umożliwiającym jej ciosanie i uformowanie jednolitego bloku (nieco większego od pożądanego monolitu) zcementowanego przez lód. Można by mu nadać wielkość ostateczną, odpowiednio czelując po przetransportowaniu na miejsce instalacji lizymetrycznej, przy umieszczaniu tego monolitu w odpowiedniej skrzynce, opatrzonej w kontakty elektryczne, rozłożone zgodnie z wymogami charakteru profilu gleby.

ki ich bardziej wiążącej pojemności względem wody i większej (kapilarności) włoskowatości. Te dane liczbowe byłyby cenne dla rolnictwa, dając możność liczbowego ocenienia wartości uprawowej takich warstw drobnoziarnistych, gdyż, położone wewnątrz profilu gleby, magazynują wilgoć i zachowują ją (dla roślin) w glebie podczas suszy, przeciwstawiając się oddziaływaniu suszącemu warstw grubiej ziarnistych, natomiast leżąc na powierzchni, powodują głębokie wyschnięcie całego profilu zarówno, dzięki ich osobistemu wyschnięciu, jak i odebraniu przez nie wody podściełającym je warstwom grubiej ziarnistym. Zdarza się, że świeże młode gleby aluwialne na ogół dobre i urodzajne ¹¹⁾ podczas suszy zmieniają nieraz dotkliwie zasoby swej wilgotności i stają się mniej urodzajne. Rośliny na nich więdną, schną i giną z powodu budowy tych gleb. Poszczególne warstwy lub warstewki tych gleb, są nieraz bardzo liczne, każda równoziarnista, lecz o wymiarze cząsteczek w każdej różnym, (bądź pyłowa, bądź grubo lub drobnoziarnista). Gleby powyższe, nawet złożone z tych samych warstw (naniesionych przez tę samą rzekę i przez te same wylewy) mają różne wartości z punktu widzenia ich płodności i urodzajności, z racji sposobu krążenia w nich wody, spowodowanego nie tylko położeniem topograficznym warstw piaszczystych, lecz jeszcze i miąższością tych warstw, o ile znajdują się one wewnątrz profilu gleby ¹²⁾. Warstwy grubego piasku, leżąc pomiędzy warstwami drobnoziarnistymi, czasem nadzwyczajnie drobnoziarnistymi, bywają nieraz w czasie suszy pozbawione wilgoci przez ruchy włoskowate wody do tego stopnia, że stają się nieprzenikliwe dla korzeni roślin (dla swej zbytniej suchości).

Stopień tego wysuszenia zależy od grubości warstwy piasku oraz od wymiarów cząsteczek piasku i warstw drobno-

¹¹⁾ Aluwia — pozbawione profilu, w ścisłym gleboznawczym znaczeniu tego słowa, lub ze śladami zaczątku profilu genetycznego, zaczynającego się dopiero kształtować, — złożone z nawarstwowanych jedna na drugie osadów, których warstwy właściwie są raczej geologiczne a nie gleboznawcze, bowiem brak im przejścia od jednych do drugich, lecz ich ułożenie jest czysto przypadkowe, bez żadnego logicznego związku genetycznego.

¹²⁾ ob. S ł a w o m i r M i k l a s z e w s k i: „Głębokość orki“, Warszawa 1938 Gaz. Rolnicza Nr 1/2, 3 i 5 i tenże: „Détermination de la profondeur du labour“. Annales Agronomiques“. NrNr 3 et 4. Juillet—Octobre, 1939a. Paris-Versailles. Ministère de l'Agriculture.

ziarnistych pyłowych (z nim sąsiadujących z góry i z dołu) otoczenia. Zachodzi tu ścisła korelacja, którą da się ujawnić i wymierzyć tylko za pomocą metody rezonansowej Staniewicza.

Przed tą metodą otwiera się cała kopalnia tematów gleboznawczych i rolniczych pierwszorzędnej wagi, wśród których wybija się na pierwsze miejsce zbadanie i ujęcie liczbowe ruchów i krążenia wody w poszczególnych typach-indywiduach (osobnikach) glebowych. Ustalone i ustalane przez „umiejętność czytania w profilu“ gleby są one najwartościowszymi jednostkami klasyfikacyjnymi, jako podstawa klasyfikacji genetycznej, gwarantującej dalszy szybki rozwój zarówno czystej nauki o glebie, jak i jej zastosowań w rolnictwie teoretycznym i praktycznym. Oczywiście, metoda, umożliwiającą badanie i oświetlenie praw rządzących ruchami wody w glebie, bez pobierania próbek, to znaczy bez niszczenia budowy i struktury profilu gleby w ciągu całego trwania badań i doświadczeń, nie potrzebuje zaleceń.

Należy jeno stworzyć przyjazne warunki dla dalszego jej wypracowania w szczegółach i umożliwić jak najszersze jej użycie i rozpowszechnienie.

Sur les nouvelles possibilités de l'étude de la circulation de l'eau dans les types des sols.

Mémoire présenté à la séance du 22 mai 1946.

R é s u m é.

L'Au., après avoir mentionné, que parmi les composants du sol, tels que: sable, argile, carbonate de chaux, humus, l'eau, air et microorganismes, l'eau en est le plus essentiel — la contenance en eau et sa circulation influant et parfois réglant dans les sols leur dynamique et toujours leur fécondité et fertilité — constate que, en ce moment, les possibilités de l'étude des mouvements de cet élément dans le sol soient bien élargies avec l'invention, par le dr L e o n (jun.) S t a n i e w i c z, de la méthode de resonance électrique (en 1939) (voir le renvoi 1).

Elle est entièrement libre du défaut des toutes les méthodes employées auparavant et encore maintenant, défaut, hélas, inévitable et incurable: le prélèvement des échantillons pour en

mésurer les quantités d'eau, détruisant par ce procédé la structure du sol examiné et en y changeant la pression intérieure. La dite méthode de résonance, employant les courants électriques de hautes fréquences et appliquant l'installation de trois circuits: 1) circuit oscillant, 2) circuit de résonance et 3) circuit détecteur (renvoi 3), n'a point besoin du prélèvement des échantillons du monolithe examiné, conservant sa structure naturelle pendant toute la durée de l'expérience, en permettant sans altérer le profil, du sol, y étudier la circulation de l'eau en continuité — chose impossible travaillant avec les méthodes anciennes. Les méthodes en vogue donnent seulement la possibilité de mésurer uniquement un seul étape du mouvement de l'eau dans le profil de sol, cependant formé par sa circulation continue. Le profil du sol peut être considéré comme une chronique sculptée dans l'écorce terrestre par tous les processus (physiques, chimiques et biologiques) formant les sols et comme un registre des leurs propriétés. C'est la circulation de l'eau qui en est un agent-sculpteur le plus efficace. Voilà la cause de maintes investigations, études et expériences exécutées par les physiciens, chimistes, géologues, améliorateurs, agronomes et, comme de raison, pédologues. Faute du manque d'une méthode convénable beaucoup de calculs et formules établis par ces études ne sont pas à la hauteur désirable, étant très souvent inexactes, parfois injustes, ce que était tout-à-fait clair pour les pédologues-scientistes exerçant „le savoir lire dans les profils“ tout' histoire du développement du sol, mais ils ne pouvaient pas prouver ses opinions (quoique pour la plupart justes) par les données en nombres exactes.

On a donc établi, d'après une étude minutieuse du profil du sol, à l'aide de ce „l'art-savoir“, les types des sols [par exemple mes „sols-types-individus“ (voir le renvoi 5)], cette vraie synthèse des tous les processus des agents physiques, chimiques et biologiques formant la couche supérieure de l'écorce terrestre. La méthode de résonance devra vérifier notre connaissance de cette évolution, basée en ce moment presque uniquement sur l'étude visuelle de cette synthèse, la formuler et calculer.

Méthode de résonance, quoique tout à fait apte à l'usage, se trouve cependant en état un peu rude, elle n'a pas encore de tradition, [l'appareil ainsi que l'Institut où elle était travaillée n'existant plus à cause de la guerre, qui a mis Varsovie en rui-

nes] *) et exige encore une élaboration des détails et une précision des conditions dans lesquelles elle doit être exécutée. C'est pourquoi, je me permets y faire quelques remarques:

1) Pour établir les lois de la circulation de l'eau dans les sols, à l'aide de méthode de *S t a n i e w i c z*, il en faut avant tout les baser sur les résultats obtenus des études des sols-types-individus, pourvus, d'un profil-modél. Après il viendra le temps d'étudier les sols aux profils moins typiques ou altérés.

2) On doit préalablement préciser, quelles dimensions des monolithes, que nous venons d'étudier, nous donneront les résultats les plus convenables. Il y s'agit de la coupe- (section) — surface horizontale du profil et de la longueur du monolithe, qui pour les études scientifiques doit dépasser la profondeur de la pénétration moyenne annuelle des précipitations et pour les améliorateurs doit s'adapter à la profondeur du drainage, pour rendre les résultats applicables pour les améliorations. A cause des difficultés du prélèvement des grands monolithes uniformes ainsi que de leur transport, on y doit choisir dimensions les plus petites de ces offrant les données convenablement précises et exactes. Les normes y sont à élaborer par l'étude de la circulation de l'eau dans tous les sols-types dans leur monolithes de toutes les dimensions possibles.

3) La méthode de résonance était employée par *S t a n i e w i c z* seulement pour l'étude des courants de l'eau descendante (filtrante). On peut s'en servir aussi pour étudier les courants de l'eau ascendante (capillaire) ce que n'était pas encore exécuté. Je préviens que ce sera plus difficile surtout s'il s'agit à la disposition et placement des contacts électriques, qui devraient être placés non seulement sur les lignes où les couches horizons se touchent, mais dans tous les endroits du profil, où change sa structure, ainsi que dans le centre des inclusions (sable, gravier, alios, concrétions etc), ce que ne soit pas nécessaire pour étudier les mouvements de l'eau descendante.

4) Pour satisfaire les exigences, mentionnées dans le point 3, on est obligé mesurer et précisément dessiner en détails, les profils des sols étudiés, sur les planches de leurs caisses à monolithes pour faciliter le placement des contacts électriques dans les endroits voulus.

*) En moment d'imprimer cette communication on fini la reconstruction da dit appareil à l'Ecole Polytechnique de Varsovie (le 12.XII.1947).

5) La méthode de résonance nous permettra d'étudier l'échange de l'eau capillaire entre les couches voisines dont les dimensions, de leurs particules-composant, étant de la même dimension, diffèrent d'une manière appréciable. Les particules plus fines des couches poussiéreuses s'enrichissent en eau sur le compte de l'humidité des particules sableuses. Il existe une stricte corrélation entre les dimensions des particules des couches se touchant, l'épaisseur de la couche grossière et l'état de dessèchement provoqué par la couche plus fine. (Voir: renvoi 12). Parfois ce dessèchement des couches sableuses dans les alluvions modernes (on appelle les sols pareils, en Pologne „mada“) dévient à temps sec si grand que les racines ne puissent y pénétrer et les plantes périssent.

6) Il existe, comme il me semble, la possibilité d'appliquer la méthode de Staniewicz, pour étudier les mouvements de l'eau dans les lysimètres, mais on y devrait se servir au lieu de la terre artificielle, des monolithes naturels de grandes dimensions, coupés et taillés en état gelé (en hiver), transportés par les trains et installés dans les caisses pourvus des contacts électriques.

7) La température des différentes-couches-horizons de sols, n'étant pas égale, on pourrait étudier par la dite méthode son influence sur la vitesse de la circulation de l'eau dans les sols.

8) Les résultats obtenus par Staniewicz prouvent la justice des opinions disputant la valeur des calculs et formules employées par les améliorateurs, seulement dans le sable de dunes les nombres de l'écoulement de l'eau filtrante, obtenus par la dite méthode, s'approchant et ressemblant aux calculs des améliorateurs qui pour tous les autres sols-types sont inexacts ou même tout-à-fait faux.

9) Le caractère de la circulation de l'eau dans des mêmes sols-types paraît être en corrélation avec les sols-types-individus, ce que est à prouver par les études plus nombreuses.

Z. Macierewicz.

Studia w grupie dwucynamoilometanu.

**II. O produktach redukcji trzech izomerycznych
dwunitropochodnych.**

Przedstawił czł. W. Lampe dn. 22 maja 1946 r.

Etude sur le groupe de dicianamoylmethane.

II. Sur les produits de réduction de trois dinitroderivés.

Pierwsza część pracy ogłoszonej w końcu 1938 r.¹⁾ zawierała opis syntez nitro-dwucynamoilometanów — posłużyły one jako materiał pierwotny do otrzymania amino-pochodnych tej samej substancji macierzystej.

Zagadnienie redukcji grup nitrowych, związanych z produktem o podobnie nienasyconym charakterze, jakim jest dwucynamoilometan nastęrcza pewne trudności²⁾ — należało obrać metodę selekcyjną redukującą jedynie grupę nitrową, pozostawiającą natomiast bez zmiany dwa streptostatycznie ukształtowane chromofory $\text{CH}=\text{CH}-\text{C}=\text{O}$, znajdujące się w cząsteczce.

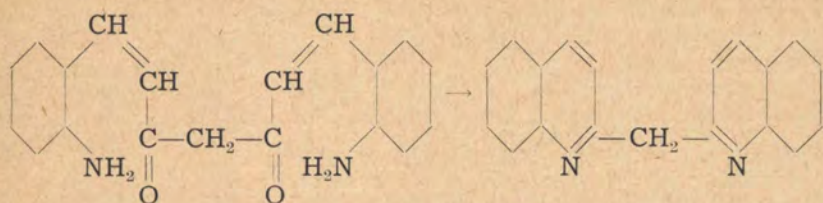
Wzorując się na pracy S. Gabrieli i M. Gerharda t, który zastosował do redukcji grupy nitrowej w chalko-

nie $\text{C}_6\text{H}_4-\text{CH}=\text{CH}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{C}_6\text{H}_5$ chlorek cynawy w eterowym roztworze, użyliśmy tego środka z powodzeniem w naszym przypadku.

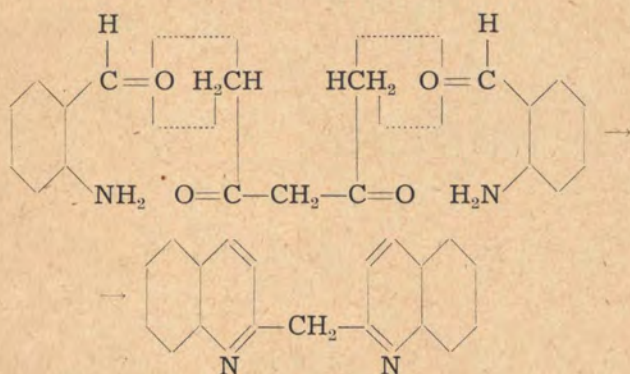
Orto-dwunitropochodna dwucynamoilometanu zachowała się pod wpływem działania chlorku cynawego inaczej niż dwa inne izomery, z powodu bliskości grupy nitrowej względem łańcucha chromoforowego odszczepiała się z pierwotnie wytworzonej dwuaminy woda, dzięki czemu powstawał $\alpha\alpha$ — dwuchinolilometan:

¹⁾ Roczn. Chem. 18, 668 (1938).

²⁾ Praca magisterska: H. Finkelkraut, I. Szadziewicz, M. Dusiński.



Produkt ten opisał po raz pierwszy G. Scheibe³⁾, dokonał on syntezy związku, kondensując dwie cząsteczki o-ami-noaldehydu benzoesowego z jedną cząsteczką acetylo-acetonu.



Meta-dwunitro — oraz para-dwunitro-dwucynamoilo-metan dały w wyniku redukcji odpowiednie aminopochodne. Wprowadzenie do chromogenu silnie zasadowej grupy aukso-chromowej, jaką jest ugrupowanie aminowe wpływa w sposób znamieny — szczególnie w porównaniu z odpowiednimi oksy-pochodnymi jak na wygląd zewnętrzny związku tak i jego reakcje.

Jak wynika z zestawienia powyższego nie tylko barwa związków aminopochodnych dwucynamoilometanu uległa pogłębieniu, lecz również i kolor niezaprawiony bawełny został wzmocniony, dało się zauważyć również wzmoczenie powinowactwa barwnika do włókna roślinnego.

Należy wyrazić przypuszczenie, że grupa aminowa w stopniu większym, niż hydroksyl ma wpływ na bezpośrednie zabarwienie zawłny.

³⁾ B. 55 str. 3157.

Pochodne dwucynamioilometanu	Barwa związku	Zabarwienie z kwasem siarkowym	Barwa niezaprawionej bawełny
m. m. dwuoksy ⁴⁾	jasno-żółta	kryształy ciemno czerwone, roztwór pomarańczowy	żółta
p. oksy ⁵⁾	słabo pomarańczowa	rozwór amarantowy, żółta fluorescencja	słabo cytrynowa
p. p. dwuoksy	słabo pomarańczowa	kryształy ciemno czerwone, roztwór amarantowy, żółta fluorescencja	kanarkowo żółta
m. amino	żółta (ochry)	kryształy czerwone, roztwór żółty, silna fluorescencja czerwono-żółta	silnie żółta z odcieniem zielonkawym
m. m. dwuamino	kanarkowo żółta	kryszt. amarantowe, roztwór żółty, silna fluorescencja matowo zielona	silnie żółta odcień kanarkowy
p. amino	ciemno czerwona	—	słabo pomarańczowa
p. p. dwuamino	karminowo czerwona	kryszt. czerw. odcień pomarańczowy, silna ciemno czerw. fluorescencja	karmazynowo czerwona

Pogląd ten ma ulec sprawdzeniu na obszerniejszym materiale doświadczalnym.

Warszawa, Zakład Chemii Organicznej Uniwersytetu Warszawskiego.

⁴⁾ W. L. i M. Kozłowska. Roczn. Chem. 9, 452 (1929).

⁵⁾ W. L. i M. Godlewska. Rozpr. Ak. Um. T. 57, Ser. A. str. 57.

T R E Ś Ć

	Str.
H. Milicer-Grużewska. O współczynniku korelacji a posteriori zmiennych ekwiwalentnych	3
K. Zarankiewicz. O liczbie punktów rozgałęzienia dendrytów i grafów	18
S. Miklaszewski. Nowe możliwości badania ruchów wody w typach gleb	25
Z. Macierewicz. Studia w grupie dwucynamioilometanu. II. O produktach redukcji trzech izomerycznych dwunitropochodnych	38

TABLE DE MATIÈRES

	Page
H. Milicer-Grużewska. The coefficient of correlation a posteriori of equivalent variables	5
K. Zarankiewicz. Sur le nombre des points de ramification dans des dendrites et graphes	18
S. Miklaszewski. Sur les nouvelles possibilité de l'étude de la circulation de l'eau dans les types des sols	34
Z. Macierewicz. Etude sur le groupe de dicinamoilmethane. II Sur les produits de réduction de trois dinitroderivés	38



Redaktor naczelny wydawnictw T. N. W.

WŁODZIMIERZ ANTONIEWICZ

Redaktor wydawnictw Wydziału III

WŁADYSŁAW NIKLIBORC

Nakład 1100 egz. Papier dziełowy ilustracyjny B₁, g 80. Luty 1948 r.

Drukarnia Naukowa TNW, W-wa, Krak. Przedmieście 26/28, pod zarządem T. Madrzejewskiego

B-13947.

