Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

1. Sei T irgendein von einer inkompressiblen homogenen oder heterogenen Flüssigkeit erfüllter Bereich, dessen Begrenzung S etwa aus einer endlichen Anzahl Stücke analytischer und regulärer Flächen besteht. Ein Teil der Oberfläche, S', sei von starren Wänden gebildet, der übrige Teil, S'', sei frei. Es möge ϱ die als abteilungsweise stetig vorausgesetzte Dichte, $d\tau$ das Volumen-, $d\sigma$ das Flächenelement bezeichnen. Die betrachtete Flüssigkeit möge sich unter der Wirkung der Volumkräfte $\varrho X d\tau$, $\varrho Y d\tau$, $\varrho Z d\tau$ sowie der Oberflächenkräfte $X_\sigma\, d\sigma$, $Y_\sigma\, d\sigma$, $Z_\sigma\, d\sigma$ im Gleichgewicht befinden. Die Einheitskräfte X, Y, Z werden als stetige Ortsfunktionen im Innern und auf dem Rande von T, kürzer in $T+S$, X_σ, Y_σ, Z_σ als ebensolche Ortsfunktionen auf S'' vorausgesetzt.

Es seien jetzt ξ, η, ζ irgendwelche in $T+S$ erklärte stetige Funktionen, die daselbst stetige oder doch abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben und der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0$$

genügen und überdies die Beziehung

$$(2) \qquad \xi \cos(n, x)+\eta \cos(n, y)+\zeta \cos(n, z)=0$$

erfüllen. In (2) bezeichnet (n) die Richtung der Innennormale. Diese Gleichung besagt, daß der Vektor ξ, η, ζ in die Tangentialebene der Fläche S' fällt. In etwaigen Kanten ist er tangential zu diesen gerichtet, in körperlichen Ecken gleich Null.

Sei ε ein reeller Parameter. Wir setzen $\delta x = \varepsilon\xi$, $\delta y = \varepsilon\eta$, $\delta z = \varepsilon\zeta$. Durch die Transformation

$$x^* = x + \delta x,\quad y^* = y + \delta y,\quad z^* = z + \delta z, \tag{3}$$

eine „virtuelle Verrückung", wird T für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$, wie sich leicht zeigen läßt, ein Bereich T^* umkehrbar eindeutig und stetig zugeordnet. Aus (1) und (2) folgen die Beziehungen

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

in T,

$$\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z) = 0 \tag{5}$$

auf S'.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen besagt nun, daß, sofern, wie vorausgesetzt wurde, die Volum- und Oberflächenkräfte das Gleichgewicht halten, ihre Arbeit für alle virtuellen Verrückungen verschwindet,

$$\int_T \varrho(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau + \int_{S''}(X_\sigma \delta x + Y_\sigma \delta y + Z_\sigma \delta z)\,d\sigma = 0. \tag{6}$$

Aus dieser Beziehung pflegt man mit Lagrange die Gleichgewichtsbedingungen abzuleiten, indem man, unter Hinweis auf die in der Mechanik der Massenpunktsysteme übliche Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren, unter λ eine in $T + S$ stetige Funktion verstehend, die daselbst abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, die Bedingungen dafür aufstellt, daß

$$\begin{aligned} &\int_T \left\{\varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \lambda\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)\right\} d\tau + \\ &\quad + \int_{S''}(X_\sigma \delta x + Y_\sigma \delta y + Z_\sigma \delta z)\,d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

gilt. Die teilweise Integration ergibt in bekannter Weise

$$\begin{aligned} &\int_T \left\{\left(\varrho X - \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)\delta x + \left(\varrho Y - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\delta y + \left(\varrho Z - \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\delta z\right\} d\tau + \\ &\quad + \int_{S''}\{(X_\sigma - \lambda\cos(n, x))\,\delta x + (Y_\sigma - \lambda\cos(n, y))\,\delta y + \\ &\qquad + (Z_\sigma - \lambda\cos(n, z))\,\delta z\} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

woraus dann die Gleichgewichtsbedingungen

$$\varrho X = \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \varrho Y = \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad \delta Z = \frac{\partial \lambda}{\partial z} \tag{9}$$

in T,

$$\lambda \cos(n, x) = X_\sigma, \quad \lambda \cos(n, y) = Y_\sigma, \quad \lambda \cos(n, z) = Z_\sigma \tag{10}$$

auf S'' folgen. Der Multiplikator λ hat die Bedeutung des Flüssigkeitsdruckes.

Eine direkte Begründung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode bietet gewisse Schwierigkeiten. Durch die vorstehenden Überlegungen wird, wenn man von den Gleichungen (9) und (10) zu den Formeln (7) und (6) aufsteigt, bewiesen, daß die Beziehungen (9) und (10) für das Verschwinden der virtuellen Arbeit (6) bei Erfülltsein der Bedingungsgleichungen (4) und (5) hinreichen, nicht aber auch, daß sie hierzu notwendig sind. Daß dies tatsächlich der Fall ist, mithin daß das System der Gleichungen (9) und (10) und die Aussage des Prinzips der virtuellen Verrückungen vollkommen äquivalent sind, läßt sich ohne Schwierigkeit zeigen, sobald vorausgesetzt wird, daß ϱX, ϱY, ϱZ stetige Ableitungen erster Ordnung haben. Etwas weniger nahe liegt der Beweis, wenn diese Voraussetzung fallen gelassen wird. Hier liefert ein Hilfssatz von Herrn Haar, für den am Schluß dieses Aufsatzes ein sehr einfacher Beweis gegeben wird, die erforderlichen Hilfsmittel.

2. Sei (x_0, y_0, z_0) irgendein Punkt in T, in dem $\varrho X, \varrho Y, \varrho Z$ sich stetig verhalten, und sei K ein Würfel, dessen Kanten die Länge $2h$ haben und zu den Koordinatenachsen parallel sind, um (x_0, y_0, z_0) als Mittelpunkt ganz im Innern von T; h wird dabei so klein gewählt, daß $\varrho X, \varrho Y, \varrho Z$ in K stetig sind. Wir nehmen jetzt die Funktionen δx, δy, δz, die, wie vorhin, in $T + S$ stetig sind, in T abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung haben und den Gleichungen (4) und (5) genügen, speziell in $T - K$ gleich Null an. Dann muß

$$\int_K \varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau = 0 \tag{11}$$

sein.

Sei nunmehr δx und δy irgendein Paar unendlich kleiner, in dem Quadrate Q,

$$x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h, \quad y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h, \tag{12}$$

nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetiger Funktionen, die den Bedingungen

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

genügen und auf seinem Umfange verschwinden. Wir behaupten, es ist für alle z in

$$z_0 - h \leqq z \leqq z_0 + h \tag{14}$$

$$\int\limits_Q \varrho\,(X\delta x + Y\delta y)\,dx dy = 0. \tag{15}$$

Es möge, im Gegensatz zu dieser Behauptung, für einen Wert z_1 in (14) und ein bestimmtes Paar den vorstehenden Bedingungen genügender Fuuktionen $\widetilde{\delta x}$, $\widetilde{\delta y}$ etwa

$$\int\limits_Q \varrho\,(X\widetilde{\delta x} + Y\widetilde{\delta y})\,dx dy > 0 \tag{16}$$

sein. Wir wählen dann in dem Intervalle

$$z_1 - \varepsilon \leqq z \leqq z_1 + \varepsilon \qquad (\varepsilon < h) \tag{17}$$

$$\delta x = \widetilde{\delta x}\left(1 - \frac{|z - z_1|}{\varepsilon}\right),\ \delta y = \widetilde{\delta y}\left(1 - \frac{|z - z_1|}{\varepsilon}\right), \tag{18}$$

für alle anderen z in (14) dagegen $\delta x = \delta y = 0$. Die vorstehenden Funktionen δx, δy sowie die Funktion $\delta z = 0$ bilden wegen (13) ein System virtueller Verrückungen. Für hinreichend kleine ε wird wegen (16)

$$\int\limits_K \varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau > 0, \tag{19}$$

was nicht möglich ist. Also gilt in der Tat die Beziehung (15).

Die Gleichung (13) ist offenbar die Bedingung dafür, daß es eine im Innern und auf dem Rande von Q nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion Θ gibt, so daß

$$\delta x = \frac{\partial \Theta}{\partial y},\quad \delta y = -\frac{\partial \Theta}{\partial x} \tag{20}$$

gilt. Sei (x^0, y^0) irgendein Punkt auf dem Rande von Q. Man kann

$$\Theta = -\int\limits_{(x^0, y^0)}^{(x, y)} (\delta y dx - \delta x dy) \tag{21}$$

setzen. Wegen (20) ist auf dem Rande

$$\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0. \tag{22}$$

In (15) eingesetzt, liefert dies

$$\int\limits_Q \left(\varrho X \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \varrho Y \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) dx dy = 0, \tag{23}$$

oder, falls ϱX und ϱY stetige oder allenfalls abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, nach einer teilweisen Integration wegen (22)

$$\int\limits_Q \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\varrho X) - \frac{\partial}{\partial x} (\varrho Y) \right\} \Theta dx dy = 0. \tag{24}$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{\partial}{\partial y} (\varrho X) - \frac{\partial}{\partial x} (\varrho Y) = 0. \tag{25}$$

Wäre nämlich der Klammerausdruck in (24) in einem Punkte (x_1, y_1) in Q etwa > 0, so könnte man gewiß Θ, allen vorhin eingeführten Bedingungen genügend, in einer Umgebung von (x_1, y_1) positiv, sonst gleich Null wählen, so daß das Integral (24) positiv ausfallen würde. Es gilt also in K

$$\frac{\partial}{\partial y} (\varrho X) = \frac{\partial}{\partial x} (\varrho Y) \tag{26}$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial z} (\varrho X) = \frac{\partial}{\partial x} (\varrho Z), \quad \frac{\partial}{\partial y} (\varrho Z) = \frac{\partial}{\partial z} (\varrho Y). \tag{27}$$

Die Formeln (26) und (27) gelten in der Umgebung jedes Stetigkeitspunktes in T. Aus Gründen der Stetigkeit gelten sie im Innern und auf dem Rande eines jeden Bereiches, in dem ϱX, ϱY, ϱZ sich stetig verhalten, insbesondere also auch auf S. Also gibt es eine, bis auf eine additive Konstante bestimmte, in $T + S$ stetige Funktion $\bar{p}$, die stetige, oder doch abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, so daß

$$\varrho X = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad \varrho Y = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad \varrho Z = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \tag{28}$$

gilt.

Die Gleichung (6) geht wegen

$$\int_T \varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau = \int_T \left(\frac{\partial \bar p}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \bar p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \bar p}{\partial z}\,\delta z\right) d\tau.$$

$$= -\int_S \bar p\,(\delta x \cos(n,x) + \delta y \cos(n,y) + \delta x \cos(n,z))\,d\sigma$$

$$= -\int_{S''} \bar p\,(\delta x \cos(n,x) + \delta y \cos(n,y) + \delta z \cos(n,z))\,d\sigma$$

über in

$$\int_{S''} \{(X_\sigma - \bar p \cos(n,x))\,\delta x + (Y_\sigma - \bar p \cos(n,y))\,\delta y + (Z_\sigma - \bar p \cos(n,z))\,\delta z\}\,d\sigma = 0. \tag{29}$$

Diese Formel gilt für alle δx, δy, δz auf S'', die sich dort stetig verhalten und überdies so beschaffen sind, daß

$$\int_{S''} [\delta x \cos(n,x) + \delta y \cos(n,y) + \delta z \cos(n,z)]\,d\sigma = 0 \tag{30}$$

ist. Man gewinnt die Beziehung (30) aus (4) durch Integration über T

$$\int_T \left[\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right] d\tau$$

$$= -\int_S [\delta x \cos(n,x) + \delta y \cos(n,y) + \delta z \cos(n,z)]\,d\sigma \tag{31}$$

$$= -\int_{S''} [\delta x \cos(n,x) + \delta y \cos(n,y) + \delta z \cos(n,z)]\,d\sigma = 0.$$

Nach bekannten Sätzen folgt aus (29) und (31)

$$X_\sigma = (\bar p + \alpha)\cos(n,x),\quad Y_\sigma = (\bar p + \alpha)\cos(n,y),\quad Z_\sigma = (\bar p + \alpha)\cos(n,z) \tag{32}$$
$(\alpha$ konstant$)$.

Diese Formel bringt erneut zum Ausdruck, daß der Druck bislang nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Bekanntlich pflegt man den Wert des Druckes dadurch festzulegen, daß man ihn in denjenigen Punkten der Oberfläche, in denen $X_\sigma^2 + Y_\sigma^2 + Z_\sigma^2 = 0$ ist, verschwinden läst[1]. Setzt man jetzt $\bar p + \alpha = p$, so findet man

---

[1]) Man denke an den klassischen Versuch von Torricelli.

$$\varrho X = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \varrho Z = \frac{\partial p}{\partial z} \tag{33}$$

und

$$X_\sigma = p \cos(n, x), \quad Y_\sigma = p \cos(n, y), \quad Z_\sigma = p \cos(n, z) \tag{34}$$

aus S''. Die Formeln (33) und (34) sind die Grundgleichungen der Hydrostatik.

Die Beziehungen (20) sind in den bekannten allgemeinen Formeln

$$\delta x = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \delta y = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \delta z = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \tag{35}$$

für die Komponenten eines Vektors δx, δy, δz, dessen Divergenz $\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}$ verschwindet, für $U = 0$, $V = 0$ enthalten. Man könnte natürlich zu den Formeln (33) und (34) auch dadurch gelangen, daß man für δx, δy, δz in (11) die Ausdrücke (35) einsetzt und, wie vorstehend, teilweise integriert. Auf einem ähnlichen Wege gewinnt Herr Herglotz in einer schon länger zurückliegenden Arbeit die Bewegungsgleichungen eines Elektrons aus dem Hamiltonschen Prinzip [1]). Die Methode versagt, sobald ϱX, ϱY, ϱZ nicht abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung haben. Diese Voraussetzung kann man entbehren, wenn man sich eines Hilfssatzes des Herrn Haar bedient, der folgenden Wortlaut hat [2]).

Sei F irgendein beschränkter einfach zusammenhängender ebener Bereich, dessen Begrenzung C abteilungsweise stetige Tangente hat. Es seien U und V zwei in $F + C$ stetige Funktionen, und sei

$$\int\limits_F \left(U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx dy = 0 \tag{36}$$

für alle Φ, die in $F + C$ stetig sind, auf C verschwinden und in F stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Alsdann ist das längs einer beliebigen geschlossenen stetig gekrümmten Kurve Γ in F erstreckte Integral

[1]) Vgl. G. Herglotz, Zur Elektronentheorie, Gött. Nachrichten 1903, S. 357—382.

[2]) A. Haar, Über die Variation der Doppelintegrale, Journal für Mathematik 149 (1919), S. 1—18.

$$\int_{\Gamma} (U dy - V dx) = 0. \tag{37}$$

Es gibt also eine in $F + C$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion $\omega(x, y)$, so daß

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \tag{38}$$

ist. Dieser Satz gilt, wie weiter unten gezeigt wird, auch wenn bezuglich der Funktionen U und V lediglich vorausgesetzt wird, daß sie in $F + C$ abteilungsweise stetig sind.

Es genügt offenbar für U, V, Ψ und ω entsprechend $-\varrho Y$, ϱX, Θ, $-p$ einzusetzen, um die Beziehungen (33) zu gewinnen und damit die Aequivalenz der Gleichgewichtsbedingungen (33) und der Aussage des Prinzips der virtuellen Verrückungen unter Zugrundelegung abteilungsweise stetiger ϱX, ϱY, ϱZ darzutun.

Nun ein einfacher Beweis des Haarschen Hilfssatzes. Sei Γ eine geschlossene, doppelpunktfreie, stetig gekrümmte Kurve in F, Γ_1 eine zu dieser im Abstande ε parallele Kurve, D der von Γ, D_1 der von Γ_1 begrenzte endliche Bereich. Es möge übrigens Γ in D_1 liegen. Sei ferner $\chi(h)$ irgendeine nebst ihrer Ableitung in $\langle 0 \varepsilon \rangle$ stetige Funktion, die folgenden Bedingungen genügt,

$$\chi(0) = 1, \ \chi(\varepsilon) = 0, \ \chi'(0) = 0, \ \chi'(\varepsilon) = 0, \ \chi'(h) < 0 \quad \text{für } 0 < h < \varepsilon. \tag{39}$$

Wir nehmen $\Psi = 1$ in D, gleich 0 in $F - D_1$, auf jeder Parallelkurve Γ_h zu Γ in $D_1 - D$, deren Abstand von Γ den Wert $h \leqq \varepsilon$ hat, gleich $\chi(h)$. Sei (n) eine beliebige nach außen gerichtete Normale zu Γ und α der von (n) mit der x-Achse eingeschlossene Winkel. Sei schließlich P_h der Schnittpunkt von (n) mit Γ_h. Man überzeugt sich fast unmittelbar, daß in P_h

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \cos \alpha \, \chi'(h), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sin \alpha \, \chi'(h) \tag{40}$$

ist. Führt man jetzt die Bogenlänge s von Γ und den Abstand h als neue unabhängige Variablen ein, so erhält man wegen (40) für alle hinreichend kleinen ε

$$\int_{\Gamma} \int_{0}^{\varepsilon} ds \, (U \cos \alpha + V \sin \alpha) \, \chi'(h) \left(1 + \frac{h}{r}\right) dh = 0, \tag{41}$$

unter $\mathfrak{r}$ den Krümmungsradius der Kurve Γ im Punkte s verstanden. Wegen

$$(42)\quad \sin\alpha = -\frac{dx}{ds},\ \cos\alpha = \frac{dy}{ds},\ \left|\int\limits_0^\varepsilon \chi'(h)\, h dh\right| < \varepsilon \left|\int\limits_0^\varepsilon \chi'(h)\, dh\right| = \varepsilon$$

gibt (41) für $\varepsilon \to 0$ die gesuchte Formel

$$\int\limits_\Gamma (U dy - V dx) = 0.$$

6. II. 1924.