VI.

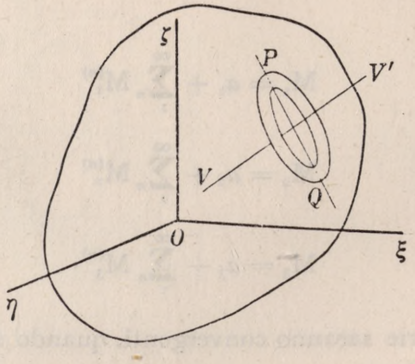
SULLA TEORIA DEI MOTI DEL POLO TERRESTRE

«Atti Acc. Sc. Torino», vol. XXX, 1894-95, pp. 301-306.

In una Nota comunicata alle «Astronomishe Nachrichten» (*) ho esposto una teoria, di cui mi permetto di presentare brevemente i principii fondamentali a codesta illustre Accademia.

Gli autori che hanno cercato la spiegazione dei cangiamenti che si osservano nelle latitudini geografiche esaminarono l'influenza che le azioni geologiche, la elasticità e la plasticità terrestre possono avere sulla rotazione della terra [1]. Mi propongo ora di considerare il problema sotto un altro punto di vista, esaminando altre cause che possono pure influire sulla rotazione stessa.

Immaginiamo un corpo i cui assi principali centrali d'inerzia siano ξ, η, ζ, e supponiamo che, senza che se ne alterino la forma e la distribuzione di densità, abbiano luogo nell'interno di esso o alla sua superficie, sotto l'azione



di forze interne, dei *moti stazionarii* di una parte della materia che lo costituisce. Per esempio, onde fissare le idee, e per semplicità, supponiamo che il corpo sia omogeneo e che per l'effetto di forze interne un toro di rivoluzione PQ interno al corpo, abbia, relativamente al corpo stesso, un moto uniforme di rotazione attorno al proprio asse VV', mentre tutto il resto del corpo conservi la propria rigidità. Né il baricentro del corpo, né i suoi assi d'inerzia, né i momenti principali d'inerzia A, B, C del corpo cangeranno.

(*) In questo volume: V, 87.

(1) Vedi TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, T. II, Cap. XXIX e XXX; PORRO, *Astronomia sferica*, Cap. VII.

Le componenti secondo gli assi ξ, η, ζ della coppia di quantità di moto dovuta ai moti stazionarii (qualunque essi siano) saranno tre costanti M_1, M_2, M_3.

Se poi il sistema avrà un moto attorno al proprio baricentro O, e le componenti della velocità angolare di rotazione nelle direzioni degli assi stessi saranno p, q, r, le componenti della coppia totale di quantità di moto nelle direzioni ξ, η, ζ risulteranno $Ap + M_1$, $Bq + M_2$, $Cr + M_3$.

Supponiamo che il sistema sia sottratto all'azione di forze esterne: allora la coppia totale di quantità di moto dovrà esser costante in grandezza e direzione. Prendiamo come asse fisso z l'asse di questa coppia, e scegliamo gli assi fissi x, y nel piano invariabile. Rappresentiamo con la seguente tabella i coseni di direzione delle due terne di assi ξ, η, ζ e x, y, z:

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Avremo allora le equazioni seguenti per gl'integrali delle aree:

$$(Ap + M_1)\alpha_1 + (Bq + M_2)\alpha_2 + (Cr + M_3)\alpha_3 = 0$$
$$(Ap + M_1)\beta_1 + (Bq + M_2)\beta_2 + (Cr + M_3)\beta_3 = 0$$
$$(Ap + M_1)\gamma_1 + (Bq + M_2)\gamma_2 + (Cr + M_3)\gamma_3 = K$$

denotando con K la grandezza costante della coppia di quantità di moto.

Derivando le precedenti equazioni rispetto al tempo ed applicando le formule del POISSON, si giunge con calcoli molto semplici alle equazioni:

$$(a) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + M_3 q - M_2 r = 0 \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + M_1 r - M_3 p = 0 \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq + M_2 p - M_1 q = 0\,. \end{cases}$$

Queste equazioni sono analoghe a quelle di EULERO e dimostrano che le reazioni prodotte sul corpo dai moti interni equivalgono ad una coppia motrice di componenti $M_2 r - M_3 q$, $M_3 p - M_1 r$, $M_1 q - M_2 p$.

Le precedenti equazioni si integrano senza difficoltà. Moltiplicandole infatti rispettivamente per p, q, r e sommando, otteniamo:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{cost.} = h.$$

Moltiplicando per $Ap + M_1$, $Bq + M_2$, $Cr + M_3$ e sommando, abbiamo:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2ApM_1 + 2BqM_2 + 2CrM_3 = \text{cost} = K_1\,.$$

Questo integrale poteva evidentemente anche dedursi dagli integrali delle aree.

Ciò premesso, se risolviamo le due equazioni precedenti rispetto a q ed r, e ne sostituiamo i valori nella prima delle (a) otteniamo una equazione della forma:

$$dt = F_1(p)\,dp\,,$$

ed in modo analogo possono aversi

$$dt = F_2(q)\,dq \quad , \quad dt = F_3(r)\,dr\,.$$

Il problema di integrare le (a) è dunque ridotto alle quadrature.

Conosciute p, q, r in funzione del tempo si avranno i coseni γ_1, γ_2, γ_3 mediante le formule:

$$\gamma_1 = (Ap + M_1)\frac{1}{K} \quad ; \quad \gamma_2 = (Bq + M_2)\frac{1}{K} \quad ; \quad \gamma_3 = (Cr + M_3)\frac{1}{K}\,,$$

quindi, applicando noti teoremi, si potranno ottenere i sei rimanenti coseni mediante una nuova quadratura.

Ci si può chiedere: la precedente teoria può essere di qualche sussidio allo studio dei moti del polo terrestre?

Ammettiamo che nell'istante iniziale il corpo ruoti attorno ad uno dei suoi assi principali d'inerzia, per esempio intorno a ζ. Avremo allora nell'istante iniziale:

$$p = q = 0\ ; \quad r \gtrless 0\,,$$

onde nell'istante iniziale le equazioni (a) assumeranno la forma

$$A\frac{dp}{dt} = M_2 r \quad ; \quad B\frac{dq}{dt} = -M_1 r \quad ; \quad C\frac{dr}{dt} = 0\,,$$

il che prova che le derivate di p e q non sono nulle se M_1 e M_2 sono diverse da zero, e in conseguenza l'asse principale di inerzia ζ non sarà un asse permanente di rotazione, ma l'asse stesso tenderà a variare.

Ora certamente nell'interno e alla superficie della terra esistono dei moti stazionari (che nulla esclude possano esser potenti), i quali senza alterare sensibilmente i momenti d'inerzia ed il baricentro della terra possono dar luogo a valori diversi da zero per M_1 e M_2 e quindi alterano l'asse di rotazione terrestre.

Per esempio, le correnti marine potrebbero in certo modo riguardarsi come moti stazionarii del genere di quelli considerati, e così pure i moti dei fiumi, la susseguente evaporazione dell'acqua del mare, quindi la sua congelazione nelle navi delle montagne, ecc.

I moti interni terrestri possono però considerarsi solo approssimativamente come stazionarii. Si può ammettere che, pur conservando inalterata la distribuzione di materia, possano in talune epoche rallentarsi, in altre accelerarsi, o anche mentre alcuni si rallentano, altri si accelerino. La modificazione che ciò apporta nelle formule consiste nel dover supporre fin da principio M_1, M_2, M_3 non più costanti, ma variabili, restando però sempre costanti le posizioni degli assi d'inerzia nell'interno del corpo ed i momenti principali d'inerzia A, B, C.

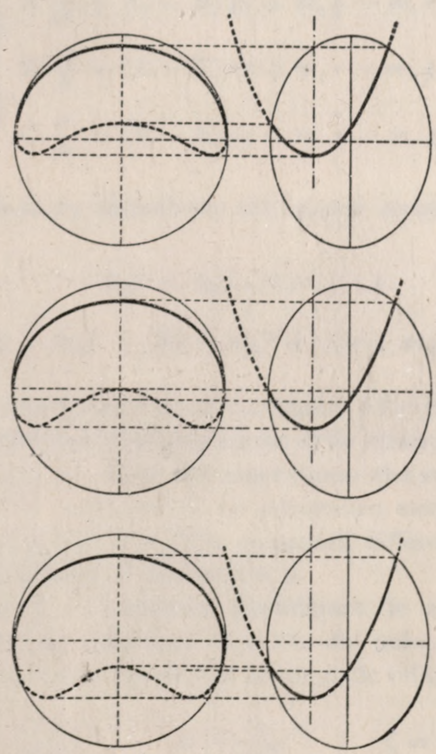
Alle equazioni (*a*) è necessario quindi in tale ipotesi sostituire le altre:

$$(b)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)\,qr + M_3 q - M_2 p + \dfrac{dM_1}{dt} = 0 \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)\,rp + M_1 r - M_3 q + \dfrac{dM_2}{dt} = 0 \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)\,pq + M_2 p - M_1 r + \dfrac{dM_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Queste equazioni non hanno più i due integrali trovati per le (*a*), bensì il solo integrale

$$(Ap + M_1)^2 + (Bq + M_2)^2 + (Cr + M_3)^2 = \text{cost.} = K^2.$$

Nella ipotesi in cui sia $B = A$, esse si integrano facilmente col metodo delle approssimazioni successive mediante serie.



Valendosi dei due integrali trovati per le (*a*) è facile esaminare, con procedimenti del tutto elementari, l'andamento del moto nella ipotesi che M_1, M_2, M_3 siano costanti, servendosi di quei metodi coi quali POINSOT delucidò così mirabilmente lo studio dei moti di rotazione. Si possono pure studiare le leggi secondo cui sono distribuiti gli assi permanenti di rotazione, le cui proprietà sono del tutto alterate per la esistenza dei moti interni. È cosa semplice studiare le traiettorie diverse (*polodie*) che il polo di rotazione può descrivere sull'ellissoide d'inerzia del corpo in moto, e stabilire le relazioni che passano fra i loro punti singolari e le rotazioni permanenti. Nel caso in cui l'ellissoide d'inerzia ha un asse di simmetria, si dimostra che esiste un piano meridiano sul quale la polodia si proietta secondo una parabola; perciò, coi metodi della geometria descrittiva, si disegnano le proiezioni della polodia con grande facilità.

Come esempio, diamo il disegno di tre fra tali possibili polodie nel caso particolare in cui due dei momenti d'inerzia del corpo sono eguali, e minori del terzo.