I.

SULLE VIBRAZIONI DEI CORPI ELASTICI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. II_1, 1° sem. 1893, pp. 389-397.

1. Siano u, v, w le componenti degli spostamenti dei punti d'un corpo elastico, isotropo, secondo le direzioni degli assi coordinati x, y, z. Se u, v, w sono indipendenti da z, e si ammette che siano nulle le forze applicate ai punti della massa del corpo, le equazioni differenziali del movimento saranno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

nelle quali si sono denotate rispettivamente con a, b, le velocità con cui si propagano le vibrazioni trasversali e longitudinali.

In una Nota pubblicata l'anno scorso in questi « Rendiconti » (1) ho dato una formula relativa alla equazione (3), che comprende in sé quella ben nota di POISSON-PARSEVAL e mediante la quale mi sembra che venga posta in chiara luce la esistenza relativamente alla equazione stessa di certe superficie coniche le quali godono di quelle stesse proprietà che posseggono le linee *caratteristiche* nel caso delle equazioni differenziali a due variabili.

Mi propongo ora di estendere il metodo tenuto per la (3) al caso del sistema di equazioni differenziali simultanee (1) e (2).

2. A tal fine osserviamo che le equazioni stesse possono scriversi sotto la forma seguente:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a^2\frac{\partial \tilde\omega}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - a^2\frac{\partial \tilde\omega}{\partial x} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

in cui si è posto per brevità

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \tilde\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot$$

(1) Vol. I, ser. 5^a, 2° sem. 1892, p. 265. [In queste « Opere »: volume primo, XXXV, p. 568].

www.rcin.org.pl

Di queste quantità ϑ e $\tilde{\omega}$ è ben conosciuto il significato cinematico.

Noi considereremo in tutto ciò che segue x, y, t come le coordinate cartesiane dei punti di uno spazio a tre dimensioni, ed esamineremo un campo S di esso, limitato da un contorno Σ.

Se u_1, v_1 è un sistema di integrali delle (4) regolari entro S, ed a questa stessa condizione soddisfano pure gl'integrali u, v, mediante il noto procedimento d'integrazione per parti, otterremo la formula

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \Big\{ u_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2\, \vartheta \cos nx - a^2\, \tilde{\omega} \cos ny \right) \\
&\qquad + v_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - b^2\, \vartheta \cos ny + a^2\, \tilde{\omega} \cos nx \right) \Big\}\, d\Sigma \\
&= \int_\Sigma \Big\{ u \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \cos nt - b^2\, \vartheta_1 \cos nx - a^2\, \tilde{\omega}_1 \cos ny \right) \\
&\qquad + v \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \cos nt - b^2\, \vartheta_1 \cos ny + a^2\, \tilde{\omega}_1 \cos nx \right) \Big\}\, d\Sigma,
\end{aligned}
$$

in cui ϑ_1 e $\tilde{\omega}_1$ denotano le quantità analoghe a ϑ e $\tilde{\omega}$ rispetto al sistema di integrali u_1, v_1.

3. Consideriamo ora l'equazione

$$
(6) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.
$$

Posto

$$
\theta = \frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2}},
$$

cerchiamo gl'integrali della (6) i quali sono della forma $t\,\psi(\theta)$.

La (6) si trasforma allora nell'altra

$$
(6') \qquad \theta\,(1 - \theta^2)\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + (2 - \theta^2)\, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0
$$

la quale ammette l'integrale

$$
\psi = \frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}\right).
$$

Nel caso in cui $\theta > 1$, questo integrale si conserverà sempre reale, e dovremo prendere i radicali nel loro valore assoluto.

Ne segue che

$$
\varphi(t, x, y) = t \left(\frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}\right) \right)
$$

www.rcin.org.pl

sarà un integrale della (6). Per conseguenza, essendo t_1, x_1, y_1, tre costanti, i seguenti sistemi di funzioni

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \varphi (a(t_1 - t), x - x_1, y - y_1)}{\partial y} \\ v_1 = -\dfrac{\partial \varphi (a(t_1 - t), x - x_1, y - y_1)}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \varphi (b(t_1 - t), x - x_1, y - y_1)}{\partial x} \\ v_1 = \dfrac{\partial \varphi (b(t_1 - t), x - x_1, y - y_1)}{\partial y} \end{cases}$$

ci daranno due sistemi d'integrali delle (4).

Eseguendo le derivazioni essi possono scriversi sotto la forma

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r^2} (y - y_1) = \dfrac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \operatorname{sen} \omega \\ v_1 = -\dfrac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r^2} (x - x_1) = -\dfrac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \cos \omega \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r^2} (x - x_1) = \dfrac{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \cos \omega \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r^2} (y - y_1) = \dfrac{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \operatorname{sen} \omega \end{cases}$$

essendo

$$x - x_1 = r \cos \omega \quad , \quad y - y_1 = r \operatorname{sen} \omega .$$

4. Cominciamo dall'applicare il sistema d'integrali (I). Avremo allora

$$\begin{cases} \vartheta_1 = 0, \\ \tilde{\omega}_1 = \Delta^2 \varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = -\dfrac{a^2 (t_1 - t)}{r \sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} \operatorname{sen} \omega \quad , \quad \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \dfrac{a^2 (t_1 - t)}{r \sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} \cos \omega \end{cases}$$

onde la (5) diventerà

$$\text{(7)} \quad \int_\Sigma \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos nx - a^2 \tilde{\omega} \cos ny \right] \operatorname{sen} \omega \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos ny + a^2 \tilde{\omega} \cos nx \right] \cos \omega \right\} d\Sigma$$
$$= \int_\Sigma \frac{a^2}{r \sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} \left\{ u [-(t_1 - t) \cos nt \operatorname{sen} \omega + r \cos ny] \right.$$
$$\left. + v [(t_1 - t) \cos nt \cos \omega - r \cos nx] \right\} d\Sigma .$$

www.rcin.org.pl

Affinché questa formula sia valida dovremo scegliere il campo S in modo tale che in esso le u_1, v_1 siano regolari. Perciò lo sceglieremo nella seguente maniera.

Per il punto x_1, y_1, t_1 come vertice si conducano due coni di rotazione M, N aventi l'asse ζ parallelo all'asse t e le aperture 2μ, 2ν, tali che

$$\operatorname{tg}\nu < \operatorname{tg}\mu < a.$$

Si limiti mediante una superficie σ una porzione interna al cono M tale che in essa si abbia sempre $t < t_1$; quindi si conduca il piano Λ avente per equazione

$$t = t_1 - \varepsilon, \qquad (\varepsilon > 0).$$

Prendiamo per campo S quello racchiuso dalle quattro superficie M, N, Λ, σ. Il suo contorno Σ sarà formato dalle porzioni di queste

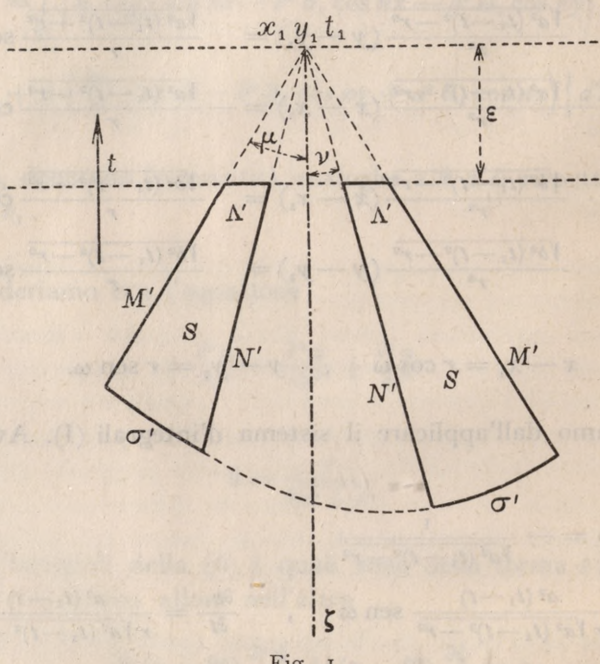

Fig. 1.

superficie che denoteremo rispettivamente con M', N', Λ', σ'. (Ved. fig. 1).

Sopra i due coni M e N abbiamo

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos ny}{\cos nt} &= \frac{t_1 - t}{r}\operatorname{sen}\omega \\ \frac{\cos nx}{\cos nt} &= \frac{t_1 - t}{r}\cos\omega \end{aligned} \right.$$

quindi applicando la (7), la parte dell'integrale che comparisce nel secondo membro, la quale è estesa alle due porzioni M', N' del contorno, si annullerà, onde la integrazione nel secondo membro andrà estesa soltanto a Λ' e a σ'.

www.rcin.org.pl

Facciamo ora crescere l'angolo μ fino a che tg μ divenga eguale ad a; allora lungo M' il radicale

$$\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}$$

sarà nullo, e perciò nel primo membro la integrazione andrà estesa a N', Λ', σ' solamente. Posto dunque

$$(9) \qquad \Omega' = \int_{\sigma'} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos nx - a^2 \tilde{\omega} \cos ny\right] \operatorname{sen} \omega \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos ny + a^2 \tilde{\omega} \cos nx\right] \cos \omega \right\} d\sigma'$$

$$- \int_{\sigma'} \frac{a^2}{r \sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} \{u [-(t_1 - t) \cos nt \operatorname{sen} \omega + r \cos ny]$$

$$+ v [(t_1 - t) \cos nt \cos \omega - r \cos nx]\} d\sigma'$$

$$\Theta' = - \int_{N'} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos nx - a^2 \tilde{\omega} \cos ny\right] \operatorname{sen} \omega \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos ny + a^2 \tilde{\omega} \cos nx\right] \cos \omega \right\} dN'$$

$$\chi' = - \int_{\Lambda'} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos nx - a^2 \tilde{\omega} \cos ny\right] \operatorname{sen} \omega \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos ny + a^2 \tilde{\omega} \cos nx\right] \cos \omega \right\} d\Lambda'$$

$$+ \int_{\Lambda'} \frac{a^2}{r \sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} \left\{ u [-(t_1 - t) \cos nt \operatorname{sen} \omega + r \cos ny] \right.$$

$$\left. + v [(t_1 - t) \cos nt \cos \omega - r \cos nx] \right\} d\Lambda'$$

avremo

$$\Omega' = \Theta' + \chi'.$$

Ora tenendo presente le (8) si ricava che sul cono N' sono soddisfatte le condizioni

$$\cos nt = \operatorname{sen} \nu$$

$$\cos nx = \cos \nu \cos \omega$$

$$\cos ny = \cos \nu \operatorname{sen} \omega$$

$$dN' = \frac{r d\omega \, dt}{\cos \nu}$$

$$r = (t_1 - t) \operatorname{tg} \nu$$

www.rcin.org.pl

quindi

$$\Theta' = -\int_0^{2\pi} d\omega \int_{t'}^{t_1-\varepsilon} a(t_1 - t) \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \nu}{a^2}} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{tg} \nu - b^2 \vartheta \cos \omega - a^2 \tilde{\omega} \operatorname{sen} \omega \right] \operatorname{sen} \omega \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t} \operatorname{tg} \nu - b^2 \vartheta \operatorname{sen} \omega + a^2 \tilde{\omega} \cos \omega \right] \cos \omega \right\} dt$$

$$= a^3 \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \nu}{a^2}} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t'}^{t_1-\varepsilon} (t_1 - t) \tilde{\omega} \, dt$$

$$- a \operatorname{tg} \nu \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \nu}{a^2}} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t'}^{t_1-\varepsilon} (t_1 - t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial v}{\partial t} \cos \omega \right) dt$$

chiamando t' le coordinate t dei punti di intersezione di N' con σ'.

Sul piano Λ si ha

$$d\Lambda = r dr d\omega \quad , \quad \cos nt = -1 \quad , \quad \cos nx = \cos ny = 0 \quad , \quad t_1 - t = \varepsilon ,$$

per conseguenza

$$\chi' = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\varepsilon \operatorname{tg} \nu}^{\varepsilon a} \left\{ \sqrt{a^2 \varepsilon^2 - r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial v}{\partial t} \cos \omega \right) + \frac{a^2 \varepsilon}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - r^2}} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) \right\} dr$$

Facciamo tendere ν verso zero; avremo

$$\Theta = \lim_{\nu=0} \Theta' = 2\pi a^3 \int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} (t_1 - t) \tilde{\omega} \, dt$$

$$\chi = \lim_{\nu=0} \chi' = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{a\varepsilon} \left\{ \sqrt{a^3 \varepsilon^2 - r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial v}{\partial t} \cos \omega \right) \right.$$

$$\left. + \frac{a^2 \varepsilon}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - r^2}} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) \right\} dr$$

essendo t_0 la coordinata t del punto ove l'asse ζ incontra σ.

Finalmente

$$\Omega = \lim_{\nu=0} \Omega'$$

sarà l'integrale stesso che comparisce nel secondo membro della (9), soltanto al limite la integrazione dovrà estendersi non più alla superficie σ', ma alla intera superficie σ_a compresa entro il cono M. Potremo dunque scrivere

$$\Omega = \Theta + \chi .$$

www.rcin.org.pl

Impiccioliamo ora indefinitamente ε, si avrà

$$\lim_{\varepsilon=0} \chi = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \Theta = 2\pi a^3 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \tilde{\omega}\, dt .$$

Si potrà dunque concludere: *Se per il punto* x_1, y_1, t_1, *come vertice, si conduce il cono* A *di apertura* 2α, (*essendo* $\operatorname{tg}\alpha = a$) *ed avente l'asse* ζ,

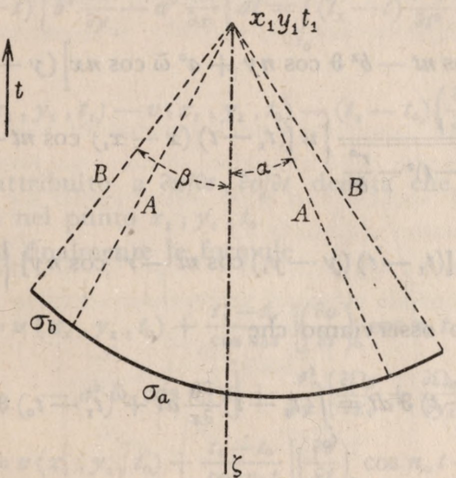

Fig. 2.

parallelo a t, *e si chiama* σ_a *la porzione della superficie* σ *inclusa entro di esso, avremo*

$$(10) \qquad 2\pi a^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \tilde{\omega}\,(x_1, y_1, t)\, dt = \Omega_a ,$$

essendo

$$(a) \quad \Omega_a = \int_{\sigma_a} \frac{\sqrt{(t_1-t)^2 - \dfrac{r^2}{a^2}}}{r^2} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos nx - a^2 \tilde{\omega} \cos ny \right] (y - y_1) \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos ny + a^2 \tilde{\omega} \cos nx \right] (x - x_1) \right\} d\sigma$$

$$+ \int_{\sigma_a} \frac{1}{r^2 \sqrt{(t_1-t)^2 - \dfrac{r^2}{a^2}}} \left\{ u \left[(t_1 - t)(y - y_1) \cos nt - r^2 \cos ny \right] \right.$$

$$\left. - v \left[(t_1 - t)(x - x_1) \cos nt - r^2 \cos nx \right] \right\} d\sigma .$$

5. In modo del tutto analogo, partendo dagli integrali (II) si giunge al risultato seguente: *Conduciamo per* x_1, y_1, t_1, *come vertice, il cono* B *di*

www.rcin.org.pl

apertura 2β, (*essendo* $\operatorname{tg}\beta = b$) *ed avente per asse* ζ, *e si chiami* σ_b *la porzione di* σ *inclusa entro questo cono, allora*

$$2\pi b^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \vartheta\,(x_1, y_1, t)\, dt = \Omega_b$$

essendo

$$\text{(b)} \quad \Omega_b = \int_{\sigma_b} \frac{\sqrt{(t_1-t)^2 - \frac{r^2}{b^2}}}{r^2} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta \cos nx - a^2\,\tilde\omega \cos ny\right](x - x_1) \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos ny + a^2\,\tilde\omega\cos nx\right](y - y_1)\right\} d\sigma$$

$$+ \int_{\sigma_b} \frac{1}{r^2\sqrt{(t_1-t)^2 - \frac{r^2}{b^2}}} \Big\{ u\,[(t_1 - t)(x - x_1)\cos nt - r^2 \cos nx]$$

$$+ v\,[(t_1 - t)(y - y_1)\cos nt - r^2\cos ny] \Big\}\, d\sigma.$$

6. Ciò premesso osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\,\vartheta\, dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}dt + (t_1 - t_0)\,\vartheta_0\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\,\vartheta\, dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}dt + (t_1 - t_0)\,\vartheta_0\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\,\tilde\omega\, dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x}dt + (t_1 - t_0)\,\tilde\omega_0\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\,\tilde\omega\, dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\frac{\partial\tilde\omega}{\partial y}dt + (t_1 - t_0)\,\tilde\omega_0\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

in cui si sono denotati con ϑ_0 e $\tilde\omega_0$, rispettivamente, i valori di ϑ e $\tilde\omega$ nel punto x_1, y_1, t_0, e con n_0 la normale a σ in questo stesso punto.

Perciò

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\Omega_b}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_a}{\partial y_1}\right] = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\left\{b^2\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a^2\frac{\partial\tilde\omega}{\partial y}\right\}dt$$

$$+ \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\,[b^2\,\vartheta_0\cos n_0 x + a^2\,\tilde\omega_0\cos n_0 y]$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\Omega_b}{\partial y_1} - \frac{\partial\Omega_a}{\partial x_1}\right] = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\left\{b^2\frac{\partial\vartheta}{\partial y} - a^2\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x}\right\}dt$$

$$+ \frac{t_1 - t_0}{\cos u_0 t}\,[b^2\,\vartheta_0\cos n_0 y - a^2\,\tilde\omega_0\cos n_0 x].$$

www.rcin.org.pl

Ma per le (4)

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\left\{b^2\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+a^2\frac{\partial\tilde\omega}{\partial y}\right\}dt=\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt$$

$$=u(x_1,y_1,t_1)-u(x_1,y_1,t_0)-(t_1-t_0)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\left\{b^2\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-a^2\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x}\right\}dt=\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dt$$

$$=v(x_1,y_1,t_1)-v(x_1,y_1,t_0)-(t_1-t_0)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 .$$

in cui l'indice zero attribuito a $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ denota che i valori di queste quantità vanno presi nel punto x_1, y_1, t_0.

Otterremo quindi finalmente le formule

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}u(x_1,y_1,t_1)&=u(x_1,y_1,t_0)+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t-b^2\vartheta_0\cos n_0 x\right.\\&\qquad\left.-a^2\tilde\omega_0\cos n_0 y\right]+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\Omega_b}{\partial x_1}+\frac{\partial\Omega_a}{\partial y_1}\right]\\v(x_1,y_1,t_1)&=v(x_1,y_1,t_0)+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t-b^2\vartheta_0\cos n_0 y\right.\\&\qquad\left.+a^2\tilde\omega_0\cos n_0 x\right]+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\Omega_b}{\partial y_1}-\frac{\partial\Omega_a}{\partial x_1}\right]\end{aligned}\right.$$

essendo Ω_a, Ω_b, date dalle (a) (b).

Queste formule esprimono i valori di u e v nel vertice dei due coni, mediante i valori di u, v e delle loro derivate lungo le superficie σ_a, σ_b.

7. Le formule a cui siamo giunti costituiscono la naturale estensione di quelle che abbiamo date nei §§ 2, 3, 4 della Nota già citata *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi*. I due coni A e B funzionano nel presente caso come il cono C considerato nella precedente comunicazione, e possono denominarsi i *coni caratteristici* del sistema di equazioni differenziali simultanee (1), (2). Nei §§ 8, 9 della detta Nota ho esaminato il caso in cui la superficie lungo la quale sono dati i valori della funzione incognita e delle sue derivate è esterna al cono C. Analogamente nel caso attuale il procedimento usato può applicarsi allorché le superficie lungo le quali sono dati i valori delle funzioni incognite e delle loro derivate limitano delle regioni adiacenti al vertice *esterne* ai due coni A e B, anziché delle regioni *interne* come abbiamo considerato nella presente Nota. Ciò formerà il soggetto di una prossima comunicazione nella quale darò ancora delle formule analoghe alle (11), nelle quali in luogo delle rotazioni degli elementi e delle dilatazioni, compariranno le componenti delle tensioni.

www.rcin.org.pl