IV.

ALCUNE OSSERVAZIONI ALLA NOTA SUI GRUPPI DI OPERAZIONI FUNZIONALI

« Rend. Ist. Lomb. di Sc., lett. ed arti », S. II, vol. XXVIII (1895)

pp. 864-873.

La proposizione:

Una equazione differenziale ordinaria:

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dA^n}, A\right) = 0,$$

è, con un cambiamento di funzione $\varphi = \lambda(\psi)$ *(*λ *contenendo anche la variabile indipendente* A *quale parametro) riducibile alla forma lineare, se, essendo* φ_1 *e* φ_2 *due integrali particolari qualunque,*

$$\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A),$$

è ancora un integrale della stessa equazione, venne da me enunciata nella nota *Sui gruppi di operazioni funzionali* (¹), ma la dimostrazione, che io ho indicata allora è soggetta ad alcune restrizioni (²), le quali, pur introducendosi naturalmente rispetto alle operazioni funzionali, ne scemano l'interesse dal lato della teoria delle equazioni differenziali. Inoltre il procedimento da me seguito inceppa in una difficoltà, su cui, con cortese pensiero, richamò la mia attenzione il chiar.mo prof. E. VESSIOT.

Ecco in primo luogo l'obbiezione del sig. VESSIOT.

Nella relazione (5) (³) le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dipendono *in generale* non soltanto dalle a e dalle b, ma altresì dalla scelta dell'integrale φ'; perciò non si può concludere addirittura che la (1) definisca un gruppo

(¹) Questi *Rendiconti*, anno presente. [In questo volume: III, pp. 110-111].
(²) Nota citata, pp. 105-106.
(³) Ib., p. 106.

(puntuale). Questa asserzione sarebbe legittima, solo introducendo una restrizione di più, ammettendo cioè fin da principio che le operazioni, le quali debbono costituire il gruppo (funzionale), soggiacciano alla legge associativa, mentre nella precedente nota si trova enunciata (4) questa proprietà come necessaria conseguenza dell'ipotesi fondamentale.

Ora una tale restrizione non reca danno nel campo delle operazioni funzionali, tanto più che, come i signori PINCHERLE e VOLTERRA hanno recentemente osservato, ogni operazione funzionale è (almeno formalmente) rappresentabile a mezzo di integrali definiti, nel qual caso vale appunto la legge associativa (5). Ma, se si bada invece alle equazioni differenziali, ammessa una relazione

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$$

fra gli integrali, ogni ulteriore ipotesi sulla natura di Π (il che appunto equivale a restrizioni imposte al gruppo funzionale) sminuisce notevolmente e toglie quasi del tutto interesse al teorema ricordato.

Io sono perciò indotto a presentarne una nuova dimostrazione, che ne ponga in miglior luce tutta la generalità.

Il prof. VESSIOT, al quale comunicai codesta dimostrazione, ne propose a sua volta una oltremodo semplice ed elegante, che il suo gentile consenso mi autorizza a render pubblica nella presente occasione.

Io mi permetterò quindi di riportare, in seguito alla mia dimostrazione, un brano d'una sua lettera, che contiene molte osservazioni acute ed interessanti.

* * *

Sia

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dA^n}, A\right) = 0,$$

una equazione differenziale d'un ordine qualunque n, rispetto a cui si suppone che, essendo φ_1, φ_2 due integrali particolari arbitrari,

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$$

sia ancora un integrale.

Dico in primo luogo che, scelti a piacere due integrali φ e φ_1 (o φ_2), la funzione φ_2 (o φ_1) definita da

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

(4) Loco citato p. 110.

(5) Cfr. ad es. la mia nota: *I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti,* in questi « Rendiconti », anno presente. [In questo volume: V, pp. 125–152].

è anch'essa un integrale. Se infatti si designa con

$$f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

l'integral generale di $W = 0$, l'espressione

$$\prod \{\varphi_1, f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n), A\},$$

è per ipotesi integrale di W, anzi ne è l'integrale generale, perchè contiene essenzialmente le n costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$; essa può dunque, particolarizzando opportunamente queste costanti, ridursi a φ. Ne viene che uno almeno dei rami della funzione φ_2 definita da

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

è, assieme a φ e φ_1, integrale di $W = 0$. Dacchè però si suppone che la relazione

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

sia analitica, la medesima proprietà spetta anche a tutti gli altri rami.

Ciò posto, consideriamo dapprima una forma particolare della relazione

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

cioè:

$$\varphi = H(\varphi_1, A) + K(\varphi_2, A). \tag{1}$$

Scelto a piacere un integrale particolare $\varphi_1 = \varphi_1^0$, si ponga:

$$\varphi' = H(\varphi_1^0, A) + K(\varphi_2, A); \tag{2}$$

eliminando φ_2, ed osservando che, per essere φ_1^0 una funzione determinata A, la differenza $H(\varphi_1, A) - H(\varphi_1^0, A)$ si può designare semplicemente con $\Omega(\varphi_1, A)$ otteniamo

$$\varphi = \varphi' + \Omega(\varphi_1, A), \tag{3}$$

la quale può sostituirsi alla (1) come relazione fondamentale fra tre integrali della nostra equazione $W = 0$, per modo che, se due qualunque delle quantità φ, φ', φ_1 sono integrali, la terza, definita da (3), è a sua volta un integrale.

Sieno ora φ, φ_1, φ_1' tre integrali particolari qualisivogliono di $W=0$ e si faccia:

$$\varphi = \varphi' + \Omega(\varphi_1, A),$$

$$\varphi'' = \varphi + \Omega(\varphi_1', A),$$

da cui:

$$\varphi'' = \varphi' + \Omega(\varphi_1, A) + \Omega(\varphi_1', A).$$

Siccome, qualunque sieno gli integrali φ'' e φ', la funzione φ_1'' definita da:

$$\varphi'' = \varphi' + \Omega(\varphi_1'', A),$$

soddisfa ancora a $W=0$, così avremo, φ_1 e φ_1' essendo per ipotesi arbitrarie, la nuova relazione:

$$\Omega(\varphi_1'', A) = \Omega(\varphi_1, A) + \Omega(\varphi_1', A). \tag{4}$$

fra tre integrali di $W=0$.

Dopo ciò, è manifesto che, se si eseguisce il cambiamento di funzione $\psi = \Omega(\varphi, A)$, la (4) diviene $\psi_1'' = \psi_1 + \psi_1'$, e quindi l'equazione trasformata è certamente lineare.

Passiamo ora alle relazioni:

$$\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A),$$

nelle quali le variabili φ_1 e φ_2 non sono separate. Ciò è quanto dire che

$$\frac{\partial \prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial \varphi_2},$$

non è indipendente da φ_1. Sostituendo per φ_1 il suo valore in funzione di φ e φ_2, verrà:

$$\frac{\partial \prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial \varphi_2} = \chi(\varphi, \varphi_2, A),$$

e si può supporre addirittura che χ non abbia la forma:

$$\mu(\varphi, A)\nu(\varphi_2, A),$$

perchè, da

$$\frac{\partial \prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_2} = \mu(\varphi, A)\nu(\varphi_2, A),$$

si dedurrebbe

$$\frac{\partial\varphi}{\mu(\varphi, A)} = \nu(\varphi_2, A)\partial\varphi_2,$$

da cui integrando e cambiando funzione in W, si sarebbe ricondotti alla forma (1).

Escluso questo caso, sieno φ e φ_2 due integrali affatto indeterminati dell'equazione $W=0$. Si supponga di dare a φ_2 un piccolo aumento $\delta\varphi_2$ conciliabile coll'equazione $W=0$, cioè tale che:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_2}\delta\varphi_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial\frac{d\varphi}{dA}}\right)_{\varphi=\varphi_2}\delta\frac{d\varphi_2}{dA} + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial\frac{d^n\varphi}{dA^n}}\right)_{\varphi=\varphi_2}\delta\frac{d^n\varphi_2}{dA^n} = 0,$$

ovvero, se si vuole:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_2}\delta\varphi_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial\frac{d\varphi}{dA}}\right)_{\varphi=\varphi_2}\frac{d\delta\varphi_2}{dA} + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial\frac{d^n\varphi}{dA^n}}\right)_{\varphi=\varphi_2}\frac{d^n\delta\varphi_2}{dA^n} = 0; \tag{5}$$

in causa della relazione

$$\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A);$$

all'aumento $\delta\varphi_2$ di φ_2 corrisponderà un aumento $\delta\varphi$ di φ determinato da:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial\varphi_2}\delta\varphi_2,$$

ovvero, sostituendo a φ_1 il suo valore dato da

$$\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A),$$

avremo:

$$\frac{\partial\prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial\varphi_2} = \chi(\varphi, \varphi_2, A), \tag{6}$$

$$\delta\varphi = \chi(\varphi, \varphi_2, A)\delta\varphi_2. \tag{7}$$

La variazione $\delta\varphi$, qualunque sieno gli integrali particolari φ e φ_2, che entrano in χ, deve soddisfare all'equazione:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial W}{\partial \dfrac{d\varphi}{dA}}\frac{d\delta\varphi}{dA} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial \dfrac{d^n\varphi}{dA^n}}\frac{d^n\delta\varphi}{dA^n} = 0\ ;$$

in altri termini la quantità:

$$XW \equiv \frac{\partial W}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial W}{\partial \dfrac{d\varphi}{dA}}\frac{d\delta\varphi}{dA} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial \dfrac{d^n\varphi}{dA^n}}\frac{d^n\delta\varphi}{dA^n},$$

dove $\delta\varphi$ è data dalla (7), si annulla con W.

Seguendo il sig. Lie, noi diremo che l'equazione $W = 0$ ammette la trasformazione infinitesima estesa (erweiterte):

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial f}{\partial \dfrac{d\varphi}{dA}}\frac{d\delta\varphi}{dA} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \dfrac{d^n\varphi}{dA^n}}\frac{d^n\delta\varphi}{dA^n}. \tag{7'}$$

Essa equazione deve dunque ammettere tutte le trasformazioni del gruppo monometrico (eingliedrig) generato dalla trasformazione infinitesima (7').

Poniamo ora:

$$\varphi_6 = \prod (\varphi_3\,,\ \varphi_4\ A), \tag{8}$$

$$\varphi_2 = \prod (\varphi_5\,, \varphi_6\,, A) = \Xi(\varphi_3\,, \varphi_4\,, \varphi_5\,, A)\,, \tag{9}$$

e osserviamo che, in quest'ultima equazione, φ_2, φ_3, φ_4 possono considerarsi come integrali affatto arbitrari, che definiscono per φ_5 un nuovo integrale. Supponendo di attribuire a φ_4 una variazione $\delta\varphi_4$ che soddisfaccia all'equazione analoga a (5):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_4}\delta\varphi_4 + \left(\frac{\partial W}{\partial \dfrac{d\varphi}{dA}}\right)_{\varphi=\varphi_4}\frac{d\delta\varphi_4}{dA} + \ldots + \left(\frac{\partial W}{\partial \dfrac{d^n\varphi}{dA^n}}\right)_{\varphi=\varphi_4}\frac{d^n\delta\varphi_4}{dA^n} = 0, \tag{10}$$

ogni $\delta\varphi_2$, che verifica l'equazione (5), potrà essere rappresentato da:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\partial \Xi(\varphi_3\,, \varphi_4\,, \varphi_5\,, A)}{\partial \varphi_4}\delta\varphi_4 = \frac{\partial \Pi(\varphi_5\,, \varphi_6\,, A)}{\partial \varphi_6}\frac{\partial \Pi(\varphi_3\,, \varphi_4\,, A)}{\partial \varphi_4}\delta\varphi_4\,,$$

ossia, sostituendo a φ_5 il suo valore (9), a φ_3 il suo valore (8) e tenendo presente la notazione (6):

(11) $$\delta\varphi_2 = \chi\{\prod(\varphi_3, \varphi_4, A), \varphi_2, A\}\chi\{\prod(\varphi_3, \varphi_4, A), \varphi_4, A)\}\delta\varphi_4 .$$

Siccome χ contiene entrambi gli argomenti, da cui esso dipende (perchè si è esclusa la forma $\mu(\varphi, A)\nu(\varphi_2, A)$ o le sue degenerazioni), il prodotto

$$\chi\{\prod(\varphi_3, \varphi_4, A), \varphi_2, A\}\cdot\chi\{\prod(\varphi_3, \varphi_4, A), \varphi_4, A\}$$

conterrà senza dubbio $\prod(\varphi_3, \varphi_4, A)$ e per conseguenza φ_3. Se si assumono per φ_2 e φ_4 due integrali particolari qualsivogliono φ_2' e φ_4' di W e per $\delta\varphi_4$ un integrale particolare qualunque della (10) moltiplicato per una costante infinitesima ε, $\delta\varphi_2$ prenderà la forma $\varepsilon\varrho(\varphi_3, A)$, ϱ essendo funzione delle variabili indicate, e $\delta\varphi$, facendo:

$$\chi(\varphi_2', \varphi, A) = \xi(\varphi, A) ,$$

diverrà:

(12) $$\delta\varphi = \varepsilon\varrho\,(\varphi_3, A)\,\xi(\varphi, A) ,$$

la quale rappresenta dunque, affatto indipendentemente dall'integrale φ_3, una trasformazione infinitesima ammessa da $W = 0$.

Se si pone infine:

(13) $$\bar{\varphi} = \varphi + t\varrho\xi + \frac{t^2}{2!}\varrho^2\xi\frac{d\xi}{d\varphi} + \dots ,$$

ogni trasformazione di questo gruppo monometrico di parametro t cangia un integrale φ di W in un nuovo integrale $\bar{\varphi}$. Ma, facendo:

$$t\varrho(\varphi_3, A) = \tau ,$$

si ha:

$$\bar{\varphi} = \varphi + \tau\xi + \frac{\tau^2}{2!}\xi\frac{d\xi}{d\varphi} + \dots ,$$

e si sa ([6]) che una tale relazione fra $\bar{\varphi}$ e φ può essere scritta:

(14) $$\Omega(\bar{\varphi}, A) = \Omega(\varphi, A) + S(\tau, A) ,$$

dove nè τ, nè per conseguenza φ_3, entrano nelle Ω.

([6]) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, Erster Band, Leipzig, Teubner, 1888; S. 47.

La (13) fornisce per ogni valore di t una relazione fra tre integrali della nostra equazione $W = 0$ che rientra nel tipo (1).

Il teorema è così dimostrato. Il procedimento seguito mostra inoltre che, per la riduzione effettiva di una equazione $W = 0$ alla forma lineare si richiede, oltre ad operazioni finite, una sola quadratura, che è in generale necessaria per passare dalla (13) alla (14).

Aggiungo la seguente osservazione:

« Non esistono altre equazioni differenziali oltre le lineari (e loro trasformate per un cambiamento di funzione) tali che, essendo conosciuti m (>1) integrali particolari qualunque $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, si possa con operazioni in termini finiti determinarne l'integral generale:

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m;\ C_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ »}.$$

Basta infatti fissare per $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_m$ degli integrali particolari arbitrari, per $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dei valori numerici a piacere; e si ottiene per l'equazione $W = 0$ una relazione determinata fra tre integrali, ciò che permette di concludere giusta l'enunciato.

* * *

Extrait d'une lettre de M.r E. Vessiot à M.r T. Levi-Civita.

Toulouse, le 23 Mai 1895.

. . . .

J'ai vu avec le plus vif plaisir par votre lettre que le théorème que vous aviez donné dans votre note est vrai sous la forme suivante:

« Si une relation $\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$ fournit toujours une intégrale de l'équation différentielle:

$$W\left\{\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dA^n}, A\right\} = 0,$$

quand on y remplace φ_1 et φ_2 par deux intégrales quelconques de la même équation, il existe un changement de fonction

$$\psi = \Omega(\varphi, A),$$

qui ramène l'équation $W = 0$ à la forme linéaire et homogène ».

Je n'ai en effet pas d'objection à faire à votre nouvelle démonstration, et je ne puis que vous féliciter de son ingéniosité.

Mais il ne m'a pas semblé sans intérêt d'en chercher une un peu plus rapide, et je viens, à mon tour, vous soumettre la suivante:

Désignant par $f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ l'intégrale générale de $W = 0$, je pose:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi = f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \varphi_1 = f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \varphi_2 = f(A, b_1, b_2, \ldots, b_n) . \end{cases}$$

L'hypothèse revient à dire que la relation:

$$(2) \qquad \varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$$

est vérifiée identiquement, pourvu que les constantes c soient certaines fonctions des a et des b:

$$(3) \qquad c_k = \gamma_k(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

De plus la relation (2) fournit l'intégrale générale de $W = 0$, lorsque donnant aux b des valeurs particulières, on laisse les a indéterminés; car Π dépend alors essentiellement de n constantes arbitraires. Cela revient à dire que les équations (3) peuvent se résoudre par rapport aux a, c. à. d. que les fonctions γ_k satisfont à un système complet de la forme:

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_k} = \sum_{h=1}^{m} \varrho_{kh}(a|b) \cdot \frac{\partial F}{\partial b_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où le symbole $\varrho(a|b)$ désigne une fonction des variables

$$a_1, \ldots, a_n ; \quad b_1, \ldots, b_n .$$

En vertu des identités (2), on a donc, pour $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_k} = \sum_h \varrho_{kh}(a|b) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_h} .$$

Dans ces identités donnons aux b des valeurs particulières, et remplaçons les lettres a par les lettres c; φ_2 devient une fonction particulière de A, les $\partial\varphi_2/\partial b_h$ deviennent des fonctions $f_h(A)$, et le quotient $\partial\Pi/\partial\varphi_2 : \partial\Pi/\partial\varphi_1$ devient une certaine fonction $\theta(\varphi, A)$. On a donc des identitès:

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial c_k} = \theta(\varphi, A) \sum_{h=1}^{n} \sigma_{hk}(c_1, \ldots, c_n) \cdot f_k(A) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Définissons ensuite une fonction $\Omega(\varphi, A)$ par la condition:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \cdot \theta(\varphi, A) = 1 \,, \tag{6}$$

et posons:

$$\psi = \Omega[f(A, c_1, \dots, c_n), A] = \Omega(\varphi, A) \,.$$

Nous aurons:

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_k} = \sum_h \sigma_{kh}(c_1, \dots, c_n) f_h(A) \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \,,$$

c. à. d. que ψ est de la forme:

$$\psi = \sum_{h=1}^{n} \omega_h(c_1, c_2, \dots, c_n) f_h(A) \,,$$

si l'on choisit convenablement la fonction arbitraire de A, qui figure dans l'intégrale générale Ω de l'équation (6).

On voi donc bien que l'équation différentielle d'ordre n, dont dépend ψ, a son intégrale générale de la forme:

$$\psi = \sum_{h=1}^{n} C_h f_h(A) \,,$$

c. à. d. que c'est une équation linéaire et homogène. Votre théorème se trouve donc démontré.

. . . .

. . . .

Il est bien clair d'après l'énoncé du théorème, que les équations considérées font partie de ces équations, étudiées par M. Lie, qui admettent un groupe continu — nécessairement fini (car le théorème n'à d'intérêt que si $n > 1$) — de transformations ponctuelles. C'est là sans doute l'idée qui vous a inspiré votre démonstration. De là résulte aussi que l'intégration de telles équations comportera les simplifications indiquées par M. Lie (7).

Je remarque enfin que, comme vous le verrez bien facilement, la démonstration précédente — et par suite votre théorème — s'étend à

(7) *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten*, «Math. Ann.», B. XXXII (1888). [«Gesamm. Abhandl.», B. V, pp. 240–310; Leipzig–Oslo, Teubner–Aschehoug, 1924.]

tout système d'équations différentielles d'ordre quelconque à un nombre quelconque de fonctions inconnues et de variables indépendantes, dont la soluzion la plus générale ne dépend que de constantes arbitraires.

Votre théorème me parait du reste susceptible d'une extension encore plus grande; il n'y aurait en effet que peu de choses à changer à votre démonstration pour qu'elle s'appliquât d'elle même, non seulement au cas où $W=0$ serait une équation aux dérivées partielles, mais encore au cas tout à fait général d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles.