NOTA II.

Ibidem, s. 4, vol. IV_1, 1888_1; pp. 107–115 (*).

1. In una Nota che ebbi l'onore di presentare recentemente, ho esposto i fondamenti della estensione della teoria di RIEMANN. Nella presente mi propongo di stabilire la teoria delle *caratteristiche* relativa alle *funzioni collegate nel senso riemanniano*.

Dalle formule (6) trovate nella Nota citata si ricava

$$\mathrm{D}_1\,dx + \mathrm{D}_2\,dy + \mathrm{D}_3\,dz = \frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}(\mathrm{D}'_1\,dx' + \mathrm{D}'_2\,dy' + \mathrm{D}'_3\,dz'). \tag{1}$$

L'espressione differenziale lineare $\mathrm{D}_1\,dx + \mathrm{D}_2\,dy + \mathrm{D}_3\,dz$ gode quindi di una proprietà invariantiva.

Distingueremo due casi: quello cioè in cui

$$\mathrm{D}_1\,dx + \mathrm{D}_2\,dy + \mathrm{D}_3\,dz = 0 \tag{2}$$

è integrabile, dal caso in cui non è integrabile.

1° CASO – 2. Nella ipotesi della (2) integrabile avremo

$$\mathrm{D}_1\,dx + \mathrm{D}_2\,dy + \mathrm{D}_3\,dz = \lambda d\mu. \tag{3}$$

Abbiasi una funzione Φ dipendente da linee e supponiamo che sia

$$\mathrm{D}_1\,\frac{d\Phi}{d(y,z)} + \mathrm{D}_2\,\frac{d\Phi}{d(z,x)} + \mathrm{D}_3\,\frac{d\Phi}{d(x,y)} = 0. \tag{4}$$

Poniamo

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)} = \varpi \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(z,x)} = \chi \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x,y)} = \rho\,,$$

avremo

$$\frac{\partial\varpi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\mu}{\partial x}\varpi + \frac{\partial\mu}{\partial y}\chi + \frac{\partial\mu}{\partial z}\rho = 0\,,$$

quindi (vedi: *Sopra le funz. dip. da linee*, Art. III, § 1) si potrà trovare una funzione θ la quale soddisfa alle condizioni

$$\frac{d(\theta,\mu)}{d(y,z)} = \varpi \quad , \quad \frac{d(\theta,\mu)}{d(z,x)} = \chi \quad , \quad \frac{d(\theta,\mu)}{d(x,y)} = \rho. \tag{5}$$

Le funzioni θ e μ rimangono inalterate eseguendo un cambiamento di variabili. Se sopra una superficie σ sarà $d\Phi/d\sigma = 0$, nei tratti di essa ove μ non è costante potremo prendere $\theta = 0$. (Vedi: *Sopra le funz. dip. da linee*, Art. III, § 2, 4).

(*) Presentata dal Socio U. DINI.

3. Ricaviamo prima di tutto dalle formule precedenti un teorema analogo a quello di GREEN. A tal fine consideriamo due funzioni Φ_1 e Φ_2 dipendenti da linee le quali soddisfino alla condizione (4). Esisteranno due funzioni θ_1 e θ_2 tali che

$$(6_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial z} - \dfrac{\partial\theta_1}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = \tilde{\omega}_1 = \dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_1}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} - \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial z} = \chi_1 = \dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial y} - \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} = \rho_1 = \dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)} \end{cases} \qquad (6_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial z} - \dfrac{\partial\theta_2}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = \tilde{\omega}_2 = \dfrac{d\Phi_2}{d(y,z)} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_2}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} - \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial z} = \chi_2 = \dfrac{d\Phi_2}{d(z,x)} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial y} - \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} = \rho_2 = \dfrac{d\Phi_2}{d(x,y)}. \end{cases}$$

Essendo noto il μ, potremo limitarci a considerare una porzione di spazio T entro il quale, comunque siano $\tilde{\omega}_1$, χ_1, ρ_1; $\tilde{\omega}_2$, χ_2, ρ_2, purché monodrome, finite e continue, le (6_1) e (6_2) si possano soddisfare mediante delle funzioni θ_1 e θ_2 pure monodrome finite e continue.

Dando alle E_{is} lo stesso significato attribuito loro nella Nota precedente, avremo:

$$(7)\qquad H_{\Phi_1\Phi_2} = \frac{E_{22}\rho_1\rho_2 - E_{23}(\rho_1\chi_2 + \rho_2\chi_1) + E_{33}\chi_1\chi_2}{D_1^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\left(\frac{E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \left(\frac{E_{23}\chi_2 - E_{22}\rho_2}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \left(\frac{E_{33}\chi_2 - E_{32}\rho_2}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\left(\frac{E_{13}\chi_1 - E_{12}\rho_1}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \left(\frac{E_{23}\chi_1 - E_{22}\rho_1}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \left(\frac{E_{33}\chi_1 - E_{32}\rho_1}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial z}\right\}.$$

Se lo spazio limitato dal contorno σ fa parte di quello T in cui si considerano Φ_1 e Φ_2, si ottiene facilmente dalle formule precedenti, mediante integrazione per parti, denotando con n la normale a σ diretta verso l'esterno di S,

$$(A)\qquad \int_S \lambda H_{\Phi_1\Phi_2}\, dS$$

$$= \int_\sigma \theta_2\left\{\frac{E_{13}\chi_1 - E_{12}\rho_1}{D_1}\cos nx + \frac{E_{23}\chi_1 - E_{22}\rho_1}{D_1}\cos ny + \frac{E_{33}\chi_1 - E_{32}\rho_1}{D_1}\cos nz\right\} d\sigma$$

$$- \int_S \theta_2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{13}\chi_1 - E_{12}\rho_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\chi_1 - E_{22}\rho_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{33}\chi_1 - E_{23}\rho_1}{D_1}\right)\right\} dS$$

$$= \int_\sigma \theta_1\left\{\frac{E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2}{D_1}\cos nx + \frac{E_{23}\chi_2 - E_{22}\rho_2}{D_1}\cos ny + \frac{E_{33}\chi_2 - E_{32}\rho_2}{D_1}\cos nz\right\} d\sigma$$

$$- \int_S \theta_1\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\chi_2 - E_{22}\rho_2}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{33}\chi_2 - E_{23}\rho_2}{D_1}\right)\right\} dS.$$

Queste formule ci forniscono evidentemente il teorema analogo a quello di GREEN.

Altre formule che è utile stabilire sono le seguenti

$$\Theta_{\Phi_1\,\Phi_2} = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix}\chi_2\,,\rho_2\\ \chi_1\,,\rho_1\end{vmatrix} = \frac{1}{D_2}\begin{vmatrix}\rho_2\,,\tilde\omega_2\\ \rho_1\,,\tilde\omega_1\end{vmatrix} = \frac{1}{D_3}\begin{vmatrix}\tilde\omega_2\,,\chi_2\\ \tilde\omega_1\,,\chi_1\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\tilde\omega_1\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \chi_1\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial\theta_2}{\partial z}\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\tilde\omega_2\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \chi_2\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \rho_2\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right],$$

da cui si deduce, mediante integrazioni per parti,

$$\text{(B)}\qquad \int_S \lambda\Theta_{\Phi_1\,\Phi_2}\,dS = \int_\sigma \theta_2(\tilde\omega_1\cos nx + \chi_1\cos ny + \rho_1\cos nz)\,d\sigma = \int_\sigma \theta_2\frac{d\Phi_1}{\partial\sigma}\,d\sigma$$

$$= \int_\sigma \theta_1(\tilde\omega_2\cos nx + \chi_2\cos ny + \rho_2\cos nz)\,d\sigma = \int_\sigma \theta_1\frac{d\Phi_2}{d\sigma}\,d\sigma.$$

4. Possiamo dare subito una applicazione della formula (A) dimostrando il seguente teorema:

Se la funzione reale Ψ, *dipendente da linee, soddisfa alle condizioni*

$$\text{(C)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x\,,y)} - E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z\,,x)}}{D_1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y\,,z)} - E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x\,,y)}}{D_2}\right]\\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z\,,x)} - E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y\,,z)}}{D_3}\right] = 0\\ &D_1\frac{d\Psi}{d(y\,,z)} + D_2\frac{d\Psi}{d(z\,,x)} + D_3\frac{d\Psi}{d(x\,,y)} = 0\end{aligned}\right.$$

e si conoscono i valori di Ψ *corrispondenti a tutte le linee del contorno* σ *del campo* S (*entro il quale* λ *conserva sempre lo stesso segno e che è interno a* T), *la* Ψ *è completamente determinata per tutte le linee chiuse del campo* S.

Infatti supponiamo che esistano due funzioni Ψ'' e Ψ''' le quali soddisfino alle condizioni poste; anche la loro differenza Ψ'''' dovrà soddisfare alle condizioni (C) ed inoltre essa dovrà avere corrispondentemente alle linee del contorno un valore nullo. Applichiamo ora la formula (A) prendendo, $\Phi_1 = \Phi_2 = \Psi''''$; si avrà

$$\int_S \lambda\,H_{\Psi''''\,\Psi''''}\,dS$$

$$= \int_\sigma \theta_1\left\{\frac{E_{13}\chi_1 - E_{12}\rho_1}{D_1}\cos nx + \frac{E_{23}\chi_1 - E_{22}\rho_1}{D_1}\cos ny + \frac{E_{33}\chi_1 - E_{32}\rho_1}{D_1}\cos nz\right\}d\sigma.$$

Ma al contorno σ si ha $d\Psi''''/d\sigma = 0$, quindi (vedi § 2) potremo prendere $\theta_1 = 0$ lungo σ, nei tratti in cui μ non è costante, mentre negli altri tratti avremo

$$\text{(8)}\qquad \cos nx : \cos ny : \cos nz = \frac{\partial\mu}{\partial x} : \frac{\partial\mu}{\partial y} : \frac{\partial\mu}{\partial z};$$

perciò la equazione precedente diverrà

$$\int_S \lambda H_{\Psi''''\,\Psi''''}\,dS = 0$$

da cui risulta $H_{\Psi''' \Psi'''} = 0$ e quindi Ψ''' costante (vedi Nota prec., § 6). La Ψ''' dovendo esser nulla al contorno, sarà sempre nulla e perciò $\Psi' = \Psi''$.

Basterà dunque conoscere i valori corrispondenti alle linee del contorno di S *della parte reale o della parte immaginaria di una funzione collegata alla* F *nel senso riemanniano, perché la funzione stessa sia nota.*

Il teorema precedente può dimostrarsi anche applicando la (B) e supponendo in essa $\Phi_1 + i\Phi_1$ collegata ad F nel senso riemanniano.

5. Riprendiamo la formula (6) e poniamo $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$. Avremo:

$$I = \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi\Phi}\, dS = \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi_1\Phi_1}\, dS + \int_S \lambda H_{\Phi_1\Phi_2} + \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi_2\Phi_2}\, dS.$$

Supponendo Φ_2 nullo per tutte le linee del contorno σ, potremo assumere $\theta_2 = 0$ lungo σ ove μ non è costante, mentre negli altri tratti ove $\mu = \text{cost.}$, avremo soddisfatte le (8), onde applicando la (A) otterremo

$$I = \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi_1\Phi_1}\, dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi_2\Phi_2}\, dS - \int_S \theta_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{13}\chi_1 - E_{12}\rho_1}{D_1}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\chi_1 - E_{22}\rho_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{33}\chi_1 - E_{32}\rho_1}{D_1}\right) \right\} dS.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché I risulti massimo o minimo, per dati valori di Φ corrispondenti alle linee del contorno, e supponendo λ sempre dello stesso segno in S, sarà quindi data da

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{13}\chi - E_{12}\rho}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\chi - E_{22}\rho}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{33}\chi - E_{32}\rho}{D_1}\right) = 0 \tag{9}$$

e si avrà per I un minimo od un massimo secondoché λ sarà positivo o negativo.

Dall'esser soddisfatta la (9) insieme alla (4) segue (vedi Nota prec., § 7) che esisterà una funzione Φ' tale che $\Phi + i\Phi'$ sarà collegata alla F nel senso riemanniano. È palese l'analogia fra le presenti considerazioni e quelle su cui si basa il così detto *principio di Riemann-Dirichlet*.

6. Se $\Phi_1 + i\Phi_2$ è collegato ad F nel senso riemanniano, esisteranno le due funzioni θ_1 e θ_2 (vedi § 2) le quali soddisfano le equazioni (5).

Troviamo ora quali relazioni sussistono fra queste funzioni. Tenendo conto delle equazioni (A_1) della Nota prec., § 4, avremo

$$\left\{\begin{aligned} D_3\frac{\partial\theta_1}{\partial y} - D_2\frac{\partial\theta_1}{\partial z} &= E_{11}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + E_{13}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} \\ D_1\frac{\partial\theta_1}{\partial z} - D_3\frac{\partial\theta_1}{\partial x} &= E_{21}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + E_{23}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} \\ D_2\frac{\partial\theta_1}{\partial x} - D_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y} &= E_{31}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + E_{33}\frac{\partial\theta_2}{\partial x}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

come pure le equazioni equivalenti

$$D_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = -\left(E_{11} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right)$$

$$D_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = -\left(E_{21} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right)$$

$$D_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = -\left(E_{31} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right).$$

Le due funzioni θ_1 e θ_2 debbono dunque soddisfare ad una stessa equazione differenziale che è la seguente

$$\text{(D)} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \theta}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \theta}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\right] = 0$$

e lungo una superficie qualunque σ, per la quale il quadrato dell'elemento lineare è $ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$, dovrà aversi (vedi: *Sopra le funz. dip. da linee*, Art. III, § 3)

$$\frac{d\Phi_1}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(\theta_1 \mu)}{d(u, v)} \quad , \quad \frac{d\theta_2}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(\theta_2 \mu)}{d(u, v)}.$$

7. Le

$$p_1 = \frac{dF_1}{d(y, z)} \quad , \quad q_1 = \frac{dF_1}{d(z, x)} \quad , \quad r_1 = \frac{dF_1}{d(x, y)}$$

$$p_2 = \frac{dF_2}{d(y, z)} \quad , \quad q_2 = \frac{dF_2}{d(z, x)} \quad , \quad r_2 = \frac{dF_2}{d(x, y)}$$

soddisfano anche esse alle condizioni (vedi Nota prec., § 4)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial r_1}{\partial z} = 0 \\ &D_1 p_1 + D_2 q_1 + D_3 r_1 = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial r_2}{\partial z} = 0 \\ &D_1 p_2 + D_2 q_2 + D_3 r_2 = 0 ; \end{aligned}\right.$$

quindi potremo porre

$$\text{(11)} \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d(t_1, \mu)}{d(y, z)} = p_1 \quad , \quad \frac{d(t_1, \mu)}{d(z, x)} = q_1 \quad , \quad \frac{d(t_1, \mu)}{d(x, y)} = r_1 \\ &\frac{d(t_2, \mu)}{d(y, z)} = p_2 \quad , \quad \frac{d(t_2, \mu)}{d(z, x)} = q_2 \quad , \quad \frac{d(t_2, \mu)}{d(x, y)} = r_2 . \end{aligned}\right.$$

Se ne deduce

$$D_1 = -\frac{d(t_1, t_2, \mu)}{d(x, y, z)} \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad , \quad D_2 = -\frac{d(t_1, t_2, \mu)}{d(x, y, z)} \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad , \quad D_3 = -\frac{d(t_1, t_2, \mu)}{d(x, y, z)} \frac{\partial \mu}{\partial z} ;$$

$$\lambda = -\frac{d(t_1, t_2, \mu)}{d(x, y, z)} .$$

Eseguiamo un cambiamento di variabili e prendiamo invece di x, y, z un sistema di variabili x', y', z', tali che $x' = t_1$, $y' = t_2$, $z' = \mu$. Avremo

$$E_{11} = 1 \;,\; E_{22} = 1 \;,\; E_{33} = 0 \quad ; \quad E_{23} = 0 \;,\; E_{31} = 0 \;,\; E_{12} = 0$$

$$D_1 = 0 \quad , \quad D_2 = 0 \quad , \quad D_3 = -1$$

e le equazioni (10) diverranno

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y'} = -\frac{\partial \theta_2}{\partial x'}, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x'} = \frac{\partial \theta_2}{\partial y'}.$$

Ne segue che

$$\theta_1 + i\theta_2 = \mathrm{G}(t_1 + it_2, \mu). \tag{12}$$

Nell'Art. III, § 5 della Nota: *Sopra le funz. dip. da linee*, abbiamo dimostrato che se sono soddisfatte le (6_1) (6_2) (11) si ha

$$\int_\sigma (p_1 \cos nx + q_1 \cos ny + r_1 \cos nz)\, d\sigma = \int_{\mathrm{L}} t_1\, d\mu$$

$$\int_\sigma (p_2 \cos nx + q_2 \cos ny + r_2 \cos nz)\, d\sigma = \int_{\mathrm{L}} t_2\, d\mu$$

$$\int_\sigma (\tilde{\omega}_1 \cos nx + \chi_1 \cos ny + \rho_1 \cos nz)\, d\sigma = \int_{\mathrm{L}} \theta_1\, d\mu$$

$$\int_\sigma (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz)\, d\sigma = \int_{\mathrm{L}} \theta_2\, d\mu$$

essendo L la linea contorno della superficie σ.

Ne segue che

$$\mathrm{F}\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \int_{\mathrm{L}} (t_1 + it_2)\, d\mu \quad , \quad \Phi\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \int_{\mathrm{L}} (\theta_1 + i\theta_2)\, d\mu;$$

e reciprocamente, se le funzioni complesse F e Φ dipendenti da linee saranno ottenute colle formule precedenti da $t_1 + it_2$ e $\theta_2 + i\theta_2$, legate dalla (12), esse saranno collegate fra loro nel senso riemanniano.

Si ha dunque il modo di costruire le funzioni complesse di linee collegate fra loro nel senso riemanniano nel caso in cui la (2) sia integrabile. Basta perciò prendere tre funzioni finite continue e monodrome t_1, t_2, μ di x, y, z, tali che $d(t_1, t_2, \mu)/d(x, y, z) \gtrless 0$ e quindi una funzione finita continua e monodroma $\mathrm{G}(\zeta, \mu)$ di $\zeta = t_1 + it_2$ e di μ. Presa una linea qualunque L e posto

$$\mathrm{F}\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \int_{\mathrm{L}} \zeta\, d\mu \quad , \quad \Phi\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \int_{\mathrm{L}} \mathrm{G}\, d\mu$$

avremo che F e Φ saranno collegate fra loro nel senso riemanniano.

2° Caso. – Consideriamo ora il caso in cui la (2) non sia integrabile. Adottando le solite notazioni, relativamente alle due funzioni F e Φ collegate fra loro nel senso riemanniano, si determinino φ_1 e φ_2 in modo che siano soddisfatte le equazioni:

$$(13_1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{E}_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \mathrm{E}_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mathrm{E}_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \mathrm{D}_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \mathrm{D}_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = k\tilde{\omega}_1 \\ &\mathrm{E}_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \mathrm{E}_{22} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mathrm{E}_{23} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \mathrm{D}_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \mathrm{D}_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = k\chi_1 \\ &\mathrm{E}_{31} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \mathrm{E}_{32} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mathrm{E}_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \mathrm{D}_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \mathrm{D}_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = k\rho_1, \end{aligned} \right.$$

in cui k è una funzione che lasceremo per ora indeterminata. Supporremo di rimanere entro un campo T in cui le equazioni precedenti possono essere soddisfatte da funzioni φ_1, φ_2 monodrome, finite e continue, comunque siano k, ω_1, χ_1, ρ_1 purché anche esse monodrome, finite e continue. A cagione delle relazioni (3) e (B_1) (vedi Nota I) avremo che, delle equazioni precedenti, una risulta conseguenza delle altre due. Da esse si ricava, tenendo conto delle formule (A_1), (3), (4') della Nota I,

$$(13_2)\quad \begin{cases} E_{11}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{12}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{13}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}+D_3\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}=k\omega_2\\ E_{21}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{22}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{23}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_3\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}+D_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}=k\chi_2\\ E_{31}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{32}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{33}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}+D_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}=k\rho_2.\end{cases}$$

Moltiplicando le (13_2) per i e sommandole colle (13_1), posto $\varphi_1+i\varphi_2=\varphi$ e denotando con p', q', r' i valori coniugati di p, q, r, avremo con un calcolo facile:

$$p'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+q'\frac{\partial\varphi}{\partial y}+r'\frac{\partial\varphi}{\partial z}=k\frac{\tilde{\omega}}{p}=k\frac{\chi}{q}=k\frac{\rho}{r}.$$

Se ora eseguiamo un cambiamento di variabili e passiamo dalle x, y, z alle x', y', z', si dimostra senza difficoltà che basterà prender k in modo che $k(x',y',z')=k(x,y,z)\,d(x,y,z)/d(x',y',z')$ affinché colle stesse φ_1 e φ_2 le (13_1) e (13_2) valgano qualunque siano le coordinate x, y, z.

Abbiasi ora un'altra funzione $\Phi'=\Phi'_1+i\Phi'_2$ collegata alle precedenti nel senso riemanniano e a cui corrispondono $\tilde{\omega}'_1,\chi'_1,\rho'_1$; $\tilde{\omega}'_2,\chi'_2,\rho'_2$ e le funzioni φ'_1, φ'_2, tali che fra esse passino le relazioni analoghe alle (13_1) e (13_2).

Formiamo

$$H_{\Phi_1\Phi'_1}=\frac{1}{D_1}\begin{vmatrix}\chi'_2,\rho'_2\\ \chi_1,\rho_1\end{vmatrix}=\frac{1}{D_2}\begin{vmatrix}\rho'_2,\tilde{\omega}'_2\\ \rho_1,\tilde{\omega}_1\end{vmatrix}=\frac{1}{D_3}\begin{vmatrix}\tilde{\omega}'_2,\chi'_2\\ \tilde{\omega}_1,\chi_1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{E_{22}\rho_1\rho'_1-E_{23}(\rho_1\chi'_1+\rho'_1\chi_1)+E_{33}\chi_1\chi'_1}{D_1^2}$$

$$=\frac{E_{33}\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}'_1-E_{31}(\tilde{\omega}_1\rho'_1+\tilde{\omega}'_1\rho_1)+E_{11}\rho_1\rho'_1}{D_2^2}$$

$$=\frac{E_{11}\chi_1\chi'_1-E_{12}(\chi_1\tilde{\omega}'_1+\chi'_1\tilde{\omega}_1)+E_{22}\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}'_1}{D_3^2}.$$

Si otterrà facilmente

$$(14)\quad H=\frac{1}{k}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\tilde{\omega}'_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\chi'_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\rho'_2\right]+\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\tilde{\omega}'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\chi'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\rho'_1\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{k}\left\{\left[\frac{\partial\varphi'_1}{\partial x}\tilde{\omega}_2+\frac{\partial\varphi'_1}{\partial y}\chi_2+\frac{\partial\varphi'_1}{\partial z}\rho_2\right]+\left[\frac{\partial\varphi'_2}{\partial x}\tilde{\omega}_1+\frac{\partial\varphi'_2}{\partial y}\chi_1+\frac{\partial\varphi'_2}{\partial z}\rho_1\right]\right\}.$$

Moltiplicando la (14) per $k\,d$S ed estendendo la integrazione ad un campo S, interno a T, entro il quale le funzioni che compariscono non hanno alcuna singolarità, otterremo, mediante integrazione per parti,

$$(15)\quad \int_S kH\,dS=\int_\sigma\left(\varphi'_1\frac{d\Phi_2}{d\sigma}+\varphi'_2\frac{d\Phi_1}{d\sigma}\right)d\sigma=\int_\sigma\left(\varphi_1\frac{d\Phi'_2}{d\sigma}+\varphi_2\frac{d\Phi'_1}{d\sigma}\right)d\sigma,$$

in cui le derivazioni rispetto a σ sono eseguite in modo che la normale sia diretta verso l'esterno di S. In particolare, prendendo $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}'_1$, $\chi_1 = \chi'_1$, $\rho_1 = \rho'_1$, avremo $H = \Theta$ (vedi Nota I, § 5); onde

$$(16) \qquad \int_S k\Theta \, dS = \int_\sigma \left(\varphi_1 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} + \varphi_2 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right) d\sigma .$$

11. Dalle (14) si deduce facilmente la espressione di H per mezzo di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2$, che denoteremo con $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2)$, e quella di Θ mediante φ_1 e φ_2, che si indicherà con $\Theta(\varphi_1, \varphi_2)$.

Si ponga

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{k} \left(E_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right],$$

essendo la somma del 2° membro costituita da tre termini che si ottengono ruotando. Le equazioni a cui dovranno soddisfare φ_1 e φ_3 saranno

$$(17) \qquad \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \qquad \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1) = 0 .$$

Reciprocamente, se φ_1 e φ_2 soddisfaranno alle equazioni precedenti, le $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1; \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ dedotte dalle (13_1), e (13_2) verificheranno le condizioni (E) della Nota I.

Le (17) dipendono da un problema di calcolo delle variazioni. Infatti si consideri

$$I = \frac{1}{2} \int_S k\Theta(\varphi_1, \varphi_2) \, dS$$

e si formi

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_S k\Theta(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) \, dS = \frac{1}{2} \int_S k\Theta(\varphi_1, \varphi_2) \, dS + \frac{1}{2} \int_S k\Theta(\psi_1, \psi_2) \, dS$$
$$+ \int_S kH(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) \, dS .$$

Supponendo ψ_1 e ψ_2 nulli al contorno, avremo mediante integrazioni per parti

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_S k\Theta(\varphi_1, \varphi_2) \, dS + \frac{1}{2} \int_S k\Theta(\psi_1 \psi_2) \, dS - \int_S (\psi_1 \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) + \psi_2 \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1)) \, dS .$$

Quindi (supponendo k sempre dello stesso segno) affinché sia I massimo o minimo, per dati valori al contorno di φ_1 e φ_2, bisognerà che siano soddisfatte le equazioni (17). Dalle formule precedenti si deduce pure facilmente che *dati i valori di* φ_1 e φ_2 *al contorno del campo* S, *le funzioni stesse sono determinate dalle condizioni* (17).

12. Riprendiamo la formula (15) e supponiamo k sempre dello stesso segno entro tutto il campo S. Se esistessero due funzioni complesse di linee Φ' e Φ'' collegate ad F nel senso riemanniano e che per le linee del contorno di S avessero gli stessi valori, posto $\Phi' - \Phi'' = \Phi$ risulterebbe lungo $\sigma, 0 = \frac{d\Phi}{d\sigma} = \frac{d\Phi_1}{d\sigma} + i \frac{d\Phi_2}{d\sigma}$, quindi per la (15) si avrebbe $\Theta = 0$ e perciò Φ sarebbe nullo per tutte le linee del campo S. Se ne conclude che i valori al contorno di S di una funzione Φ collegata ad F nel senso riemanniano definiscono completamente la funzione.