Aspetto integrale delle curve inviluppi

Nota del

Dr. Witold Wilkosz.

Cracovia.

In un lavoro recente „Un problema integrale nella teoria delle funzioni implicite[1]) ho cercato di esaminare il modo di comportarsi della soluzione delle funzioni implicite in tutto il campo prescritto a priori (sotto certe condizioni), ed ho introdotto un metodo di esporre la quistione in modo che il raggionamento là usato potrebbe esser facilmente applicato alle quistioni analoghe. Nel lavoro presente voglio studiare in modo simile il comportamento integrale („im Großen“) delle curve inviluppi di una famiglia ad un parametro. Incomincio colla esposizione elaborata delle idee dovute al prof. G. Peano[2]) — ma colle modificazioni necessarie conformi al nostro problema. Quella parte del lavoro non contiene quasi niente di nuovo — la posizione stessa della ricerca rimane ancora „locale“ („im Kleinen“). Ne segue la seconda parte ove incominciano le ricerche mie in guisa da far vedere la forma delle curve inviluppi (della quali gli elementi furono dati per mezzo dei teoremi della prima parte), in tutto il campo prescritto a priori. Un caso particolare, ma del tutto interessante, quello di periodicità chiude la memoria.

§ 1. **Punti limiti di una famiglia degli insiemi ad un parametro.**

---

[1]) Bull. de l'Acad. Polonaise 1920. Cracovie.

[2]) Applicazioni geometriche del Calcolo. Torino 1887.

Consideriamo una famiglia degli insiemi data in modo, che ad ogni t soddisfacente alla condizione

$$\alpha \leqq t \leqq \beta$$

corrisponde un insieme determinato $E(t)$, composto di punti posti in uno spazio aritmetico a n dimensioni delle variabili reali (S_n)

$$x_1, \ldots x_n$$

[$E(t)$ può essere anche vuoto per certi valori di t !].

Sia P un punto generico dello spazio S_n,

di cui le coordinate sono:

$$x_1^{(P)} \ldots x_n^{(P)}$$

Indico con $\Delta(P, E(t)$ la distanza cioè il limite inferiore delle distanze di P da un punto qualunque di $E(t)$ — ad eccezione del caso ove $E(t)$ fosse vuoto. $\Delta(P, E(t))$ è un numero non negativo perfettamente determinato.

Df. Diremo $A(x_1^{(A)} \ldots x_n^{(A)})$ punto di S_n, punto limite della famiglia $\{E(t)\}_{t=\alpha}^{t=\beta}$ con tendente verso γ $(\alpha \leqq \gamma \leqq \beta)$ se:

$$\lim_{t/\gamma} \Delta(A\, t) = 0.$$

Df. Insieme di tutti i punti limiti per γ fisso indico con $D(\gamma)$.

§ 2. **Risultante ed eliminante della famiglia delle curve reali ad un parametro.**

I. Sia una funzione a tre variabili reali

$$F(x\, y\, a)$$

avente la proprietà di essere continua colle sue derivate parziali d'ordine primo [1]) nel parallelepipedo seguente:

$$(R) \begin{Bmatrix} a_1 \leqq a \leqq a_2 \\ x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1 \leqq y \leqq y_2 \end{Bmatrix}$$

[condizione α].

---

[1]) Diremo con Bolza che F è di Classe C'. cf. Lectures on Calculus of Variations.

Con $\mathcal{C}_a$ indico la figura composta di tutti i punti $P(\xi\eta)$ tali, che

(1) (ξ, η, a) cade in R

(2) $F(\xi, \eta, a) = 0$.

[Diremo curva $\mathcal{C}_a$].

Per ogni a in $[a_1\, a_2]$ (chiuso!) consideriamo la seguente famiglia.

$$\{E_a(h)\}_{h=a-a_1}^{h=a_2-a}$$

ove $E_a(h)$ indica la figura totale dei punti soddisfacenti al sistema:

$$(1) \qquad \begin{cases} F(xya) = 0 \\ F(xya+h) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo adesso per ogni a in $[a_1\, a_2]$ la figura $D_a(0)$ composta dei punti limiti — ed anche insieme di tutti i punti appartenenti a qualunque delle $D_a(0)$, che io denoto con L e chiamo la risultante della famiglia $\{\mathcal{C}_a\}_{a_1}^{a_2}$ nel campo $\breve{R}$.

II. Teor 1. Ogni punto di $L(a)$ soddisfa il sistema

$$(S) \qquad \begin{matrix} F(xya) = 0. \\ F_a(xya) = 0. \end{matrix}$$

Dim: Sia $P(x_p y_p)$ un tale, allora

(1) in un certo intorno $|h| \leqq \delta$

$\Delta(P, E_a(h))$ deve avere il senso — donde $E_a(h)$ non nullo.

(2) $\lim\limits_{h/0} \Delta(P, E_a(h)) = 0$.

(3) Sott la condizione (α) dev'essere $E_a(h)$ un insieme chiuso — quindi esiste almeno un punto A appartenente alla $E_a(h)$ tale che:

$$\text{dist. } (AP) = \Delta(P, E_a(h));$$

questi punti formano anche un insieme chiuso — ne prendiamo quello che ha le coordinate minime — sia $B_h(x(h), y(h))$.

Ne segue:

$$\begin{cases} \lim\limits_{h/0} x(h) = x_p \\ \lim\limits_{h/0} y(h) = y_p \end{cases}$$

ma anche:

$$(2) \qquad \begin{cases} F(x(h), y(h), a+h) = 0 \\ F(x(h), y(h), a) = 0 \end{cases}$$

[1]) Jordan. Cours d'Analyse v. 1.

donde:

$$\begin{cases} F(x(h), y(h), a) = 0 \\ \dfrac{F(x(h), y(h), a+h) - F(x(h), y(h), a)}{h} = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} F(x(h), y(h), a) = 0 \\ F_a(x(h), y(h), a + \theta(h) \, . \, h) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

con $0 < \theta(h) < 1$ $\{$perchè $\breve{R}$ è un campo convesso$\}$

Passando al limite abbiamo:

$$F(x_P y_P a) = 0$$
$$F_a(x_P y_P a) = 0$$

ciò che dimostra il teorema.

Se chiameremo la eliminante della famiglia, insieme di tutti i punti (xy) tali che per qualche a

sistema (x, y, a)

annulla (S)[1], il nostro teorema ci dice in tal caso:

Ogni punto della risultante fa parte della eliminante di nostra famiglia.

III. Poniamo, che non solo F ma anche F_a siano di classe (C') **[condizione α^{bis}]** nel campo $(\breve{R})$.

Sia $(x_0 y_0 a_0)$ un sistema annullante (S) ed ancora

(1) $(x_0 y_0 a_0)$ un punto interno di $(\breve{R})$

(2) $I(xya) = \dfrac{\partial(F_1 F_a)}{\partial(x_1 y)}$ sia divèrso dallo zero nel punto $(x_0 y_0 a_0)$ quindi, anche in un certo intorno di questo.

I teoremi noti della teoria delle funzioni implicite vi danno:

Esiste un sistema delle funzioni

$$\lambda(h), \quad \mu(h)$$

ed un numero $\sigma > 0$ tali che:

$$\begin{cases} f(\lambda(h), \mu(h), a_0 + h \equiv 0 \\ f(\lambda(h), \mu(h), a_0) \equiv 0 \end{cases} \tag{1}$$

per $|h| \leqq \sigma$ e $a_1 \leqq a_0 + h \leqq a_2$

---

[1]) Diremo: a appartiene al punto (xy) della eliminante.

(2) $\lambda(h)$, $\mu(h)$ è di classe C' per $|h| \leqq \sigma$

(3) ogni punto (xya) annullante (S)

ha per $|a - a_0| \leqq \sigma$ la forma

$$x = \lambda(a - a_0),\ y = \mu(a - a_0),\ a$$

(4) $$\lambda(0) = x_0,\ \mu(0) = y_0.$$

Dimostreremo il teorema:

Teor. 2. Ogni punto $(\lambda(h), \mu(h))$ è un punto limite, ed appartiene allora alla L se $|h| \leqq \sigma' \leqq \sigma$ per qualche σ' opportuno.

Dim. Vogliamo risolvere il sistema (1)

(1) $$\begin{aligned} F(xya_0 + h) &= 0 \\ F(xya_0) &= 0 \end{aligned}$$

in vicinanza del sistema $x = x, y_0 = y_0, h = 0$ per x e y.

Il Jacobiano di quelle è infelicemente nullo nel punto sopradetto, bisogna adoperare un artificio: Al posto di (1) poniamo il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned} &F(xya_0) = 0 \\ &\frac{F(xya_0 + h) - F(xya_0)}{h} \end{aligned}\right| \quad (1') \text{ per } h \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} F(xya_0) &= 0 \\ F_a(xya_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1'') \text{ per } h = 0.$$

od ancora:

(5) $$\left\{\begin{aligned} &F(xya_0) = 0 \\ &F(xya_0 + \theta\,(h, xy)\,.\,h) = 0 \end{aligned}\right.$$

con $0 < \theta < 1$ risultante dal teorema della media — il quale è anche di classe (C') com'è facile a confermarsi, calcolando le derivate di $(1')$ e $(1'')$ direttamente; il suo Jacobiano per x e y

$$\bar{I}(xyh) = \begin{vmatrix} f_{ax}(xya_0 + \theta h), & f_{ay}(xya_0 + \theta h) \\ f_x(xya_0) & f_y(xya_0) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero per $x = x_0\, y = y_0, h = 0$ perchè:

$$\bar{I}(x_0 y_0 0) = I(x_0 y_0 a_0) \neq 0.$$

E possibile trovare una $0 < \sigma'' \leqq \sigma$ tale, che:

Esistono due funzioni $l(h)$, $m(h)$ per $|h| \leqq \sigma''$ tali che

(1) $$l(h),\ m(h) \text{ di classe } C' \text{ è per } |h| \leqq \sigma''$$

(2) $$\left.\begin{array}{l} f(l(h),\ m(h),\ a_0 + h) \equiv 0 \\ f(l(h),\ m(h),\ a_0) \equiv 0 \end{array}\right\} \text{per } |h| \leqq \sigma''$$

(3) ogni punto (xya) con $|a - a_0| \leqq \sigma''$, che soddisfa le (5) ha la forma

$$x = l(a - a_0)$$
$$y = m(a - a_0)$$

(4) $$l(0) = x_0 \quad m(0) = y_0.$$

(5) Quel sistema $l(h)$, $m(h)$, soddisfa anche le (1) — ed è unico di tal genere.

Allora per $|h| \leqq \sigma''$ le curve $\mathcal{C}_{a_0-h}$ e $\mathcal{C}_{a_0}$ hanno un punto unico in comune nella vicinanza di $(x_0 y_0)$ — donde:

$$\Delta(P_{0_1} E_{a_0}(h)) = \sqrt{[x_0 - l(a)]^2 + [y_0 - m(h)]^2} \quad \{P_0 = (x_0 y_0)\}$$

quindi:

$$\lim_{h/0} \Delta(P_0 E_{a_0}(h)) = 0$$

ne segue, che $(x_0 y_0)$ è un punto limite.

Le stesse condizioni, che valgono per $(x_0 y_0)$ hanno, luogo anche per ogni $(\lambda(h),\ \mu(h))$ in vicinanza di $(x_0 y_0)$ se, solo $|h| \leqq \sigma'$ è opportunamente piccolo — Il teorema viene allora dimostrato.

Mostreremo ancora che:

Teor. 3: Se $F_{aa}(x_0 y_0 a_0) \neq 0$.
allora esiste una $0 < \sigma''' \leqq \sigma$ tale che
per $|h''| \leqq \sigma'''$ la curva $\mathcal{C}_{a_0+h}$
è tangente alla curva

(6) $$\left.\begin{array}{l} \overline{X} = \lambda(h) \\ \overline{Y} = \mu(h) \end{array}\right\} |h| \geqq \sigma'''$$

Dim: Cerchiamo $\sigma''' > 0$ tale, che

$$F_{aa}(\lambda(h),\ \mu(h),\ a_0 + h) \neq 0 \quad \text{con} \quad |h| \leqq \sigma'''$$

Considero $\mathcal{C}_{a_0}$ — Ivi $I(x_0 y_0 a_0) \neq 0$
quindi $|F_x| + |F_y| \neq 0$ in $(x_0 y_0 a_0)$

— la curva ha dunque un elemento regolare

$$x(t),\ y(t) \qquad |t| \leqq \tau$$

tale che

$$x(0) = x_0 \qquad y(0) = y_0$$

è di classe C'. Per la tangente di $\mathcal{C}_{a_0}$ in $(x_0 y_0)$ abbiamo:

$$F_x(x_0 y_0 a_0) \cdot x'(0) + F_y(x_0 y_0 a_0) \cdot y'(0) = 0 \tag{7}$$

ma contemporaneamente

$$f_{ax}(x_0 y_0 a_0) \cdot \lambda'(0) + f_{ay}(x_0 y_0 a_0) \cdot \mu'(0) + f_{aa}(x_0 y_0 a_0) = 0 \tag{8}$$

ciò che segue dal

$$\begin{cases} f_a(\lambda(h),\ \mu(h),\ a_0 + h) \equiv 0 \\ f(\lambda(h),\ \mu(h),\ a_0) \equiv 0 \end{cases}$$

Donde:

$$|\lambda'(0)| + |\mu'(0)| \neq 0 \tag{1}$$

$$x'(0) \cdot \mu'(0) - y'(0) \cdot \lambda'(0) = 0 \tag{2}$$

cioè: $\mathcal{C}_{a_0}$ è tangente alla (6).

In vicinanza di $|h| \leqq \sigma'''$ ogni punto $(\lambda(h),\ \mu(h))$ è nella stessa posizione che P_0, quindi il teorema susiste ancora per essi.

IV. Addendo adesso due nuove condizioni possiamo proseguire un poco avanti:

[Condizione β] Sia per ogni punto $(x_0 y_0 a_0)$ soddisfacente la (S)

$$\frac{\partial(F, F_a)}{\partial(xy)} \neq 0.$$

[Condizione γ]. Sia per ogni $(x_0 y_0 a_0)$ annullante la (S)

$$F_{aa}(x_0 y_0 a_0) \neq 0.$$

allora sotto le condizioni $(\alpha) \to (\gamma)$ abbiamo il:

Teor. 4. (1) Ogni punto (xy) della eliminante, che con sua a appartenente ad esso dà un sistema (xya) cadente dentro di $(\widehat{R})$, fa parte della risultante e viceversa.

(2) Ogni punto della eliminante, che colle sue a cade nell' interno di $(\breve{R})$, appartiene con ogni tale a ad un elemento della eliminante il quale in ogni punto è tangente alla $\mathcal{C}$ determinata — poi esso è punto limite delle intersezioni di $\mathcal{C}$ colle curve in vicinanza (in rispetto di a). Diremo brevemente, che in tal caso ogni quel punto appartiene per ogni a corrispondente ad un arco del' l'inviluppo.

§ 3. **Prolungazione dell' elemento inviluppante.**

I. Le condizioni sopradette ci danno, che

$$I(xya) = \frac{\partial(F,F_a)}{\partial(xy)}$$

ammette sulla eliminante il limite inferiore dei valori assoluti $(\nu > 0)$. Tutte le derivate F_x F_y F_{ax} F_{ay} F_o F_{aa} hanno il limite superiore dei valori assoluti, che indico con $N(>0)$.

Consideriamo un punto $M_0(x_0 y_0 a_0)$, annullante (S) ed interno di $(\breve{R})$ — esso fa parte dell' arco inviluppante

$$x(a),\ y(a)$$

dato in un certo intervallo $(a_0 - \sigma, a_0 + \sigma)$.

Per mezzo del metodo esposto completamente nel mio lavoro citato, possiamo prolungare quell' arco in due lati — sia $(\sigma_M\ \tau_M)$ intervallo massimale d'esistenza per quell' arco prolungato. Naturalmente: $a_1 \leqq \sigma_M < \tau_M \leqq a_2$.

Abbiamo pero:

$$\left.\begin{aligned} F(x(a), y(a), a) &\equiv 0 \\ F_a(x(a), y(a), a) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} (S) \text{ in } (\sigma_M, \tau_M)$$

quindi:

$$\left.\begin{aligned} x'(a) \,.\, F_x + y'(a) Fy &\equiv 0 \\ x'(a) \,.\, F_{ax} + y'(a) F_{ay} &\equiv f_{aa} \end{aligned}\right\} \text{ in } (\sigma_M\ \tau_M)$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} x'(a) &= \frac{F_y F_{aa}}{I} \\ y'(a) &= -\frac{F_x F_{aa}}{I} \end{aligned}\right| I = \frac{\partial(F, F_a)}{\partial(xy)}$$

allora:

$$|x'(a)| \leqq \frac{N}{\nu}$$

$$|y'(a)| \leqq \frac{N}{\nu} \quad \text{in } (\sigma_M \tau_M)$$

ma quello ci dimostra, che esistono i limiti:

$$\lim_{a/\sigma_M} x(a) = \bar{x}_M \qquad \lim_{a/\sigma_M} y(a) = \bar{y}_M$$

$$\lim_{a/\tau_M} x(a) = \bar{\bar{y}}_M \qquad \lim_{a/\tau_M} y(a) = \bar{\bar{y}}_M$$

I punti $\bar{M}(\bar{x}_M, \bar{y}_M)$ ed $\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{x}}_M, \bar{\bar{y}}_M)$ annullando (S) appartengono alla eliminante.

II. Un punto $(x_0\, y_0)$ della eliminante potrebbe avere più che una a corrispondente, ma:

Teor. 5. Il numero delle a corrispondenti è finito.

Dim. Altrimenti esisterebbe una successione convergente delle tali:

$$a_0^{(1)} \ldots \qquad a_0^{(n)} \ldots$$

con

$$\lim_{n/\infty} a_0^{(n)} = a_0$$

cosi chè

(1) $\qquad a_0^{(n)} \quad n|1,2\ldots$ diversi fra loro

(2) $\qquad (x_0\, y_0\, a_0^{(n)})$ soddisfa (S)

quindi $(x_0\, y_0\, a_0)$ farebbe lo stesso.

Ma se

$$f_a(x_0\, y_0\, a_0^{(n)}) = 0 \qquad n|1\ldots$$

$$f_a(x_0\, y_0\, a_0) = 0$$

allora sarebbe

$$f_{aa}(x_0\, y_0\, a_0) = 0$$

ciò che contradice la (γ).

Da un punto determinato della eliminante, cadente dentro di $(\widetilde{R})$ non esce che un numero finito degli archi inviluppanti:

§ 4. **Il carattere topologico degli archi integrali.**

I. Ancora una condizione restringente ci permette andare più avanti.

[Condizione δ]. Esiste per lo più, un numero finito di punti della eliminante sulla frontiera del quadrato

$$R \begin{Bmatrix} x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1 \leqq y \leqq y_2 \end{Bmatrix}$$

e da ogni tale esce per una a uno ed unico elemento della eliminante.

Il metodo accennato di sopra, vi permette per ogni sistema $M(xya)$ soddisfacente la (S), attaccare una curva nello spazio

$$\{x(a), y(a), a\} \quad \text{in} \quad [\sigma_M, \tau_M]$$

che io indico con W_M.

Se M' fa parte di W_n allora

$$W_M \equiv W_{M'}$$

perchè in vicinanza di P le W_M e $W_{M'}$ coincidono — ne segue la identita totale di ambedue.

Teor. 6. Il numero delle W diverse in (R) è finito.

Supponiamo che vi esiste un numero infinito delle W — quindi anche una sequenza:

$$W_1 \; W_2 \dots \qquad W_n \dots$$

e da ogni W_n io scelgo qualche punto determinato $P_{(n)}$ — Questi ammettono almeno un punto limite, sia P — e supponiàmo, ciò che è lecito:

$$\lim P_{(n)} = P \qquad P_n(x_n y_n a_n) = P_n$$

Il punto P appartiene alla sua W_P.

Tutti i punti della eliminante in vicinanza di P cadono sulla W_P — quindi $W_{(n)}$ non possono essere diverse.

Corr. Ad ogni curva $W(x(a) y(a), a)$ corrisponde un arco della eliminante $Z_w(x(a), y(a))$.

Il numero delle Z_w diverse è dunque finito.

II. La questione dei punti multipli di Z_W o punti comuni fra due Z_W e $Z_{W'}$ rimane ancoro aperta — vi possono darsi casi diversissimi. Ma per poter dire qualche cosa più precisa ammetto una restizione ancora più forte:

[Condizione δ^{bis}]. Sulla frontiera di R non esistono punti della eliminante.

Abbiamo in tal caso.

Teor. 7. Sul mantello di $(\widetilde{R})$ [superficie laterale, se $(\overline{R}, a_1)$ e $(\overline{R}_1 a_2)$ ne sono le basi] non esistono punti annullanti la (S) — sulle basi soltanto un numero finito.

Dim. Se p. es. sulla $(\overline{R}_1 a_1)$ vi esistessero infiniti, allora anche una serie convergente:

$$(x_1 y_1) \dots \qquad (x_n y_n) \dots \qquad \rightarrow \qquad (x_0 y_0)$$

quindi:

$$f(x_n y_n a_1) = 0 \qquad f_a(x_n y_n a_1) = 0$$
$$f(x_0 y_0 a_1) = 0 \qquad f_a(x_0 y_0 a_1) = 0$$

donde:

$$f_x(\theta_n)(x_n - x_0) + f_y(\theta_n)(y_n - y_0) = 0$$
$$f_{ax}(\vartheta_n)(x_n - x_0) + f_{ay}(\vartheta_n)(y_n - y_0) = 0$$

ove

$$f(\theta) = f(x_0 + \theta(x_n - x_0), y_0 + \theta(y_n - y_0), a) \dots$$
$$|\theta_n| < 1, |\vartheta_n| < 1$$

ma in un certo intorno:

$$\begin{vmatrix} f_x(\theta_n) f_y(\theta_n) \\ f_{ax}(\vartheta_n), f_{ay}(\vartheta_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

donde: $x_n = x_0 \quad y_n = y_0$ da un certo n.

Teor. 8. Ogni $Z_W(x(a), y(a))$ è definita in $[a_1 a_2]$ e il numero delle tali è finito.

Dim. Prolungazione d'un elemento, che dà $W(x(a), y(a))$ non può arrestarsi se non a viene in a_1 ed a_2 od anche $x(a), y(a)$ al contorno di $\overline{R}$ — ma quello è già escluso per la (δ^{bis}).

La curva W esce dal punto interno della base inferiore giunge alla base superiore — la W_z corrispondente esce dall' interno di $\overline{R}$ è finisce in qualche punto dentro di $\overline{R}$.

III. Addiamo ancora:

[Condizione ε]: Se (1) $f(xya) = f(xya')$ in R

(2) $|a - a'| < a_2 - a_1$

allora $a = a'$.

Teor. 9. Sotto quella ultima condizione le Z_W non hanno punti multipli ed alle diverse W e W' corrispondono Z_W e $Z_{W'}$ che non hanno punti interni in comune neanche i punti finali dell' una coincidono con punti interni dell' altra.

Le curve Z esistono in numero finito — e sono gli archi di Jordan aperti o chiunsi (cicli) — tutti i punti interni hanno la derivata dell' ordine primo continua — nei punti finali hanno le derivate almeno unilaterali. Se un punto finale d'una coincide con tale d'altra, quello può essere un punto angolare. Gli altri non sono singolari. È possibile, che due Z e Z' siano giunte una con altra per mezzo dei punti finali — il punto di coincidenza può essere angolare. Se consideriamo come diversi solo quegli archi che non sono giunti insieme, allora sull' ogni arco della inviluppante può darsi solo un numero finito dei punti angolari.

IV. Bisogna avere almeno una delle Z; per quello scopo ammettiamo:

[Condizione ξ]. Esiste almeno un punto dentro di R, ove la (S) viene essere soddisfatta.

§ 5. **Il caso della F periodica.**

Ancora un caso interessante:

Sotto le condizioni $(\alpha - \xi)$ ammettiamo ancora che

$$F(xya_1) = F(xya_2)$$

in tutto $(\overline{R})$ cioè, che F sia periodica.

Dilatando la definizione di F in modo che:

$$F(xya) = F(xy\bar{a})$$

ove

$$\bar{a} = a - E\left(\frac{\bar{a} - a_1}{a_2 - a_1}\right)(a_2 - a_1)$$

per $a > a_2$ $\qquad$ [$E(x)$ funzione numerica nota]

ed analogo per $a < a_1$

avremo in

$$\left|\begin{array}{c} -\infty < a < +\infty \\ x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1 \leqq y \leqq y_2 \end{array}\right|$$

una funzione continua.

Consideriamo adesso tutti gli archi Z in $\overline{R}$ corrispondenti alle W in R

$$Z_1 \ldots \qquad Z_p \qquad p \geqq 1.$$

Supponiamo la R_∞ divisa in parallelepipedi per mezzo dei piani paralleli al piano di (xy) e di altezza $a_2 - a_1$, in tal modo che $\widehat{R}$

facendo parte di essi, viene essere indicata con R_0 — numeriamo gli altri succesivamente

$$R_{+1}\, R_{-1}\, R_2\, R_3 \dots$$

Tutti gli archi W in R_0 vengono ad essere riprodotti in ogni

$$R_n \quad n\,|\,0, 1, -1_1 + 2_1 - 3 \dots$$

e danno in proiezione sul piano di (xy) le stesse:

$$Z_1 \dots \qquad Z_p.$$

Se Z_1 non è chiusa, allora dal punto finale di essa esce qualche altra — la proiezione di qualche W in R_1 — quella è quindi qualche

$$Z_m.$$

Raggionando in questo modo avremo la certezza, che le curve

$$Z_1 \dots \qquad Z_p$$

devono essere parteggiate in cicli, diversi fra loro.

[Condizione η]. Se ancora la periodicità di F è anche (η) nelle sue derivate $F_x\, F_y\, F_a\, F_{ax}\, F_{ay}$ allora i punti di coincidenza non possono essere angolari. Possiamo al fine conchiudere:

Sotto le condizioni $[\alpha - \eta]$ la eliminante (o risultante od inviluppante) è composta di un numero finito (non nullo) di curve di Jordan, chiuse, di classe C', senza punti singolari.
