Remarque relative aux transformations linéaires, orthognales.

Par

A. Hoborski.

Le théorème suivant est bien connu: si les nombres $a_{ik} (i, k = 1, 2, 3)$ satisfont aux égalités:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} = 0 \qquad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3), \tag{2}$$

le déterminant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3}$$

vérifie la relation:

$$\Delta^2 = 1. \tag{4}$$

Mais on n'a peut-être pas encore remarqué l'existence du théorème que voici: lorsque les nombres $a_{ik} (i, k = 1, 2, 3)$ sont r é e l s, les équations (1) et (4) entraînent les relations (2).

En effet, si l'on pose:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{5}$$

l'équation (4) peut s'écrire:

$$\begin{vmatrix} 1\,, & b_{12}\,, & b_{13} \\ b_{12}\,, & 1\,, & b_{23} \\ b_{13}\,, & b_{23}\,, & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

d'où

$$b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2 - 2b_{12}\,b_{13}\,b_{23} = 0$$

ou encore

$$(b_{13} - b_{12}\,b_{23})^2 + (1 - b_{12}^2)\,b_{23}^2 + b_{12}^2 = 0\,. \tag{6}$$

Or l'une des formules (5) et l'inégalité de Schwarz donnent

$$b_{12}^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{3} a_{1k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} a_{2k}^2\right),$$

donc, à cause de (1), on a

$$b_{12}^2 \leqq 1\,. \tag{7}$$

Les relations (6) et (7) donnent:

$$b_{12} = b_{23} = b_{13} = 0\,,$$

C. Q. F. D.

Cracovie le 1-er avril 1922.