XIV.

SOPRA UNA PROPRIETÀ DI UNA CLASSE DI FUNZIONI TRASCENDENTI

« Rend. Acc. Lincei », ser. IV, vol. II, 1886, pp. 211-214 (*).

TEOREMA. – *Abbiansi* $m+n$ *variabili* $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$, *legate fra loro dalle* m *equazioni algebriche*

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \end{array}\right.$$

e siano $f_1, f_2, \cdots, f_n$, n *funzioni razionali delle* $m+n$ *variabili, tali che*

$$f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n = d\mathrm{F}$$

sia un differenziale esatto.

Si costruiscano ora n *equazioni algebriche*

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m, u_1, u_2, \cdots, u_k) = 0 \\ \psi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m, u_1, u_2, \cdots, u_k) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m, u_1, u_2, \cdots, u_k) = 0, \end{array}\right.$$

le quali, oltre al contenere razionalmente le variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$, *contengano pure razionalmente le* k *variabili* $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Il sistema delle $m+n$ *equazioni algebriche* (I) *e* (II) *possegga, per ogni sistema di valori delle* $u_1, u_2, \cdots, u_k$, p *sistemi di soluzioni che denoteremo con*

$$\text{(III)}\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \cdots, y_m^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \cdots, y_m^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \cdots, x_n^{(p)}, y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, \cdots, y_m^{(p)}. \end{array}\right.$$

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

Nella funzione

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

si sostituiscano in luogo delle $m + n$ *variabili successivamente i* p *sistemi di soluzioni* (III). *Otterremo* p *funzioni che denoteremo con*

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(p)},$$

le quali saranno funzioni di $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Abbiamo sempre che

$$F^{(1)} + F^{(2)} + \cdots + F^{(p)}$$

è una funzione algebrica e logaritmica di $u_1, u_2, \cdots, u_k$ *il cui differenziale è razionale in* $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Un metodo che può seguirsi nella dimostrazione del teorema è il seguente.

Supponiamo che il campo di variabilità di ciascuna delle variabili complesse $u_1, u_2, \cdots, u_k$ sia un piano indefinito ad un solo foglio.

Facciamo partire queste variabili da un sistema di valori arbitrarî $u_1^0, u_2^0, \cdots, u_k^0$ e facciamole tornare agli stessi valori iniziali, dopo che ciascuna variabile ha eseguito nel suo piano un giro qualunque.

Se consideriamo i sistemi di valori (III) come funzioni delle $u_1, u_2, \cdots, u_k$, quando queste variabili torneranno ai valori iniziali dovrà evidentemente verificarsi uno dei tre casi seguenti:

1° ciascuna linea del quadro (III) ritornerà in sé stessa;

2° alcune linee soltanto del quadro (III) torneranno in loro stesse, e le rimanenti si scambieranno fra loro;

3° tutte le linee del quadro (III) si scambieranno le une nelle altre.

Analogamente consideriamo il sistema di valori $u_1 + du_1, u_2 + du_2, \cdots, u_k + du_k$ i quali, partendo dai valori $u_1^0 + du_1^0, u_2^0 + du_2^0, \cdots, u_k^0 + du_k^0$ tornino ai valori iniziali stessi.

Se ad essi corrispondono per le $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$ i p sistemi di soluzioni

$$\text{(III')}\quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} + dx_1^{(1)}, x_2^{(1)} + dx_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)} + dx_n^{(1)}, y_1^{(1)} + dy_1^{(1)}, y_2^{(1)} + dy_2^{(1)}, \cdots, y_m^{(1)} + dy_m^{(1)} \\ x_1^{(2)} + dx^{(2)}, x_2^{(2)} + dx_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)} + dx_n^{(2)}, y_1^{(2)} + dy_1^{(2)}, y_2^{(2)} + dy_2^{(2)}, \cdots, y_m^{(2)} + dy_m^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(p)} + dx_1^{(p)}, x_2^{(p)} + dx_2^{(p)}, \cdots, x_n^{(p)} + dx_n^{(p)}, y_1^{(p)} + dy_1^{(p)}, y_2^{(p)} + dy_2^{(p)}, \cdots, y_m^{(p)} + dy_m^{(p)} \end{array} \right.$$

e se si suppone che i cammini descritti dai punti $u_1, u_2, \cdots, u_k$ evitino quei sistemi di valori per cui alcune delle radici distinte del quadro (III) divengono fra loro eguali, è evidente, per la continuità, che ad ogni scambio di linee nel sistema (III) corrisponderà un eguale scambio di linee nel sistema (III').

Ciò premesso, consideriamo la espressione differenziale

$$dF^{(1)} + dF^{(2)} + \cdots + dF^{(p)} = \sum_1^p{}_i \sum_1^n{}_s f_s^{(i)}\, dx_s^{(i)}$$

la quale, quando si riguardino le

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots, y_m^{(i)}$$

come funzioni di $u_1, u_2, \cdots, u_k$, potrà scriversi sotto la forma

$$\sum_1^k{}_t \Phi_t(u_1, u_2, \cdots, u_k)\, du_t\,.$$

Se facciamo muovere le $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_1 + du_1, u_2 + du_2, \cdots, u_k + du_k$ (ciascuna di esse nel suo piano) partendo da un sistema di valori arbitrario $u_1^0, u_2^0, \cdots, u_k^0, u_1^0 + du_1^0, u_2^0 + du_2^0, \cdots, u_k^0 + du_k^0$ fino a ritornare ai valori stessi (ed evitando quei sistemi di valori per cui alcune delle radici distinte del quadro (III) divengono fra loro eguali), per ciò che si è detto, le $dF^{(1)}$, $dF^{(2)}, \cdots, dF^{(p)}$ non faranno altro che riprendere i loro valori iniziali o scambiarsi fra loro, lasciando quindi inalterata la loro somma.

Ne segue che l'espressione differenziale

$$\sum_1^k{}_t \Phi_t(u_1, u_2, \cdots, u_k)\, du_t$$

dovrà essere monodroma. Da questo risultato e da una semplice ispezione delle funzioni Φ_t risulta che l'espressione differenziale dovrà essere razionale in $u_1, u_2, \cdots, u_k$, come appunto dovevasi dimostrare.

Se F *è tale che non diviene mai infinita per nessun sistema di valori di* $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$, *è evidente allora che*

$$F^{(1)} + F^{(2)} + \cdots + F^{(p)}$$

dovrà risultare costante e quindi dovremo avere

$$\Phi_t = 0 \qquad (t = 1, 2, \cdots, k).$$

Supponiamo che $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ siano funzioni razionali delle $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $y_1, y_2, \cdots, y_m$ senza che

$$\theta_1\, dx_1 + \theta_2\, dx_2 + \cdots + \theta_n\, dx_n$$

sia un differenziale esatto. Potremo evidentemente applicare alle θ lo stesso ragionamento già applicato alle f, onde *posto*

$$\sum_1^p{}_i \sum_1^n{}_s \theta_s^{(i)}\, dx_s^{(i)} = \sum_1^k{}_t \Psi_t(u_1, u_2, \cdots, u_k)\, du_t\,,$$

avremo che il secondo membro dovrà risultare razionale in $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Supponiamo di mantenere costanti le $u_1, u_2, \cdots, u_{l-1}, u_{l+1}, \cdots, u_k$ e di far variare la sola u_l. In questa ipotesi avremo che

$$\sum_1^p {}_i \sum_1^n {}_s \theta_s^{(i)} dx_s^{(i)} = \frac{\partial F_l(u_1, u_2, \cdots, u_k)}{\partial u_l} du_l,$$

e per la F_l potremo prendere una funzione algebrica e logaritmica di $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Se quindi le θ_s sono tali che le F_l debbano conservarsi sempre finite, avremo che le Ψ_t dovranno esser nulle.

Il teorema enunciato da principio può ritenersi come una estensione del teorema d'ABEL.

Dalle considerazioni svolte dopo, può dedursi come caso particolare un risultato enunciato da H. POINCARÉ in una Nota pubblicata nei « Comptes Rendus » nel gennaio 1885.