VI.

SOPRA ALCUNI PROBLEMI DI IDRODINAMICA [1]

« Nuovo Cimento », ser. 3ª, vol. XII, 1882₂, pp. 65–96.

Nella presente Nota vengono risoluti alcuni problemi di idrodinamica con un metodo analogo a quello con cui vennero risoluti da Sir W. THOMSON alcuni problemi di elettrostatica applicando il principio delle immagini [2]. Colla risoluzione di questi problemi di idrodinamica si ottiene anche la soluzione di alcune questioni sulla distribuzione delle correnti elettriche stazionarie nei conduttori a tre dimensioni. Come è noto, nel caso di conduttori a due dimensioni è applicabile il principio delle immagini in modo del tutto simile al caso della elettrostatica [3], mentre ciò non avviene quando i conduttori sono a tre dimensioni [4].

Darò prima qualche teorema generale e considererò poi successivamente il caso di due sfere (che si tagliano o no) le quali si muovono in un fluido incompressibile e indefinito parallelamente alla retta dei centri, il caso di una sfera che si muove in un fluido incompressibile limitato da un piano indefinito o da una sfera fissa, il caso di sfere situate in un fluido le quali cambiano di raggio, e finalmente il caso di una o più sfere situate in un fluido nel quale esistono delle linee vorticose.

I.

Siano A e B due punti reciproci rispetto alla sfera σ di raggio R, di centro O. Sia concentrata nel punto A una massa a, nel punto B una massa b, e sulla retta [*] $OB = \rho_1$ una massa omogenea ad una dimensione colla densità c. Le funzioni potenziali di queste tre masse, se il punto potenziato E

(1) Questa Nota era già ultimata quando venni a conoscere che il sig. HICKS in due sue recenti Memorie (*Il moto di due sfere in un fluido*, London, « Phil. Trans. Roy. Soc. » 1880, part II; *Sopra il problema di due sfere pulsanti in un fluido e sopra la gravitazione degli atomi vorticosi*, « Proc. Camb. Phil. Soc. » 1879–80) aveva già applicato il metodo delle immagini alla risoluzione dei problemi di idrodinamica. Però alcune formule che vengono date nella presente Nota non si trovano nelle Memorie del sig. HICKS.

(2) *Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism by* WILLIAM THOMSON, § XIV.

(3) G. KIRCHHOFF, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 7.

(4) MAXWELL, *Electricity and Magnetism*, § 316.

(*) Qui, e talvolta anche in seguito, l'A. usa il vocabolo retta nel senso di segmento rettilineo [N.d.R.].

ha le coordinate ρ, θ, φ rispetto al centro della sfera come polo e alla retta OA come asse polare, saranno rispettivamente

$$\frac{a}{\sqrt{\rho^2+\frac{R^4}{\rho_1^2}-2\rho\frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta}},$$

$$\frac{b}{\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\theta}},$$

$$c\log\frac{\rho_1-\rho\cos\theta+\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\theta}}{-\rho\cos\theta+\rho}.$$

Quindi la funzione potenziale delle tre masse sarà

$$f(\rho,\theta)=\frac{a}{\sqrt{\rho^2+\frac{R^4}{\rho_1^2}-2\rho\frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta}}+\frac{b}{\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\theta}}$$

$$+c\log\frac{\rho_1-\rho\cos\theta+\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\theta}}{-\rho\cos\theta+\rho}.$$

Se ne deduce

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}=-a\frac{\rho-\frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta}{\left(\rho^2+\frac{R^4}{\rho_1^2}-2\rho\frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta\right)^{3/2}}-b\frac{\rho-\rho_1\cos\theta}{(\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\theta)^{3/2}}$$

$$-c\frac{\rho_1}{\rho\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\theta}}.$$

Facendo $\rho=R$, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{\rho=R}=-a\frac{\rho_1^2}{R^2}\frac{\rho_1-R\cos\theta}{(R^2+\rho_1^2-2R\rho_1\cos\theta)^{3/2}}-b\frac{R-\rho_1\cos\theta}{(R^2+\rho_1^2-2R\rho_1\cos\theta)^{3/2}}$$

$$-c\frac{\rho_1}{R(R^2+\rho_1^2-2R\rho_1\cos\theta)^{1/2}}=-\frac{[a\rho_1^3+bR^3+cR\rho_1(R^2+\rho_1^2)]-\rho_1R(a\rho_1+bR+2cR\rho_1)\cos\theta}{R^2(R^2+\rho_1^2-2R\rho_1\cos\theta)^{3/2}}.$$

Ponendo

$$a\rho_1^3+bR^3+cR\rho_1(R^2+\rho_1^2)=0,$$

$$a\rho_1+bR+2cR\rho_1=0,$$

si otterrà

$$b=\frac{\rho_1}{R}a,\quad c=-\frac{1}{R}a.$$

Ciò prova il seguente teorema:

Se in A *è concentrata la massa a, in* B *la massa* $\frac{\rho_1}{R}a$, *e sulla retta* OB *si trova una massa ad una dimensione colla densità* $-\frac{1}{R}a$, *la funzione potenziale di queste masse ha eguale a zero la derivata rispetto alla normale alla superficie* σ.

Supponiamo ora che in un punto A sia concentrata la massa $-a$, in un punto B la massa $+a$ e sia $AB = d$. Se, restando costante $ad = \mu$, A si avvicina indefinitamente a B, la funzione potenziale delle due masse tende verso quella di un *elemento magnetico* il cui asse è AB e il cui momento è μ (5). Tale funzione potenziale sarà

$$-\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

se AB è l'asse delle x, r la distanza del punto potenziato da B, x, y, z le coordinate del punto potenziato.

Supponiamo che i punti A e A′, B e B′ siano rispettivamente reciproci rispetto ad una sfera σ di raggio R di centro O (*). Poniamo:

$$OA' = \rho_1 \quad , \quad OB' = \rho_2 \quad , \quad AB = d.$$

Sia in A concentrata una massa $-a$, in B una massa a, in A′ una massa $-\frac{\rho_1}{R}a$, in B′ una massa $+\frac{\rho_2}{R}a$, sulla retta A′ B′ una massa avente la densità $\frac{a}{R}$.

Per il teorema precedente la funzione potenziale di tutte queste masse avrà, nei punti della superficie della sfera, la derivata rispetto alla normale nulla.

Facciamo avvicinare B indefinitamente ad A, in modo che resti costante

$$ad = \mu.$$

Le masse situate esternamente alla sfera si riducono ad un elemento magnetico concentrato nel punto A di momento μ, e di cui l'asse è OA. Le masse situate internamente alla sfera si riducono pure ad un elemento magnetico di momento

$$\mu' = -\mu \frac{\rho_1^3}{R^3}$$

concentrato in A′ e il cui asse è OA′.

Si ha dunque che *la funzione potenziale di questi due elementi magnetici ha nulla la derivata rispetto alla normale alla superficie della sfera.*

Questa proprietà si verifica direttamente con facilità.

Infatti la funzione potenziale dei due elementi magnetici A e A′ (se le coordinate cartesiane del punto potenziato sono x, y, z e le sue coordinate polari rispetto al polo O e alla polare OA sono ρ, θ, φ) sarà data da

$$f(\rho, \theta) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{R^2}{\rho_1}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \mu' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-\rho_1)^2 + y^2 + z^2}} =$$

(5) E. Betti, *Teorica delle forze Newtoniane*, Cap. III, § 1.
(*) In più è sottinteso che A e B siano allineati con O, ecc. [N.d.R.].

$$= \mu \frac{x - \dfrac{R^2}{\rho_1}}{\left[\left(x - \dfrac{R^2}{\rho_1}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} + \mu' \frac{x - \rho_1}{([x-\rho_1]^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \mu \frac{\rho \cos\theta - \dfrac{R^2}{\rho_1}}{\left(\rho^2 + \dfrac{R^4}{\rho_1^2} - 2\rho \dfrac{R^2}{\rho_1}\cos\theta\right)^{3/2}} + \mu' \frac{\rho\cos\theta - \rho_1}{(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta)^{3/2}},$$

quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \mu \frac{\cos\theta\left(\rho^2 + \dfrac{R^4}{\rho_1^2} - 2\rho\dfrac{R^2}{\rho_1}\cos\theta\right) - 3\left(\rho - \dfrac{R^2}{\rho_1}\cos\theta\right)\left(\rho\cos\theta - \dfrac{R^2}{\rho_1}\right)}{\left(\rho^2 + \dfrac{R^4}{\rho_1^2} - 2\dfrac{R^2}{\rho_1}\rho\cos\theta\right)^{5/2}}$$

$$+ \mu' \frac{\cos\theta\,(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta) - 3\,(\rho - \rho_1\cos\theta)\,(\rho\cos\theta - \rho_1)}{(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta)^{5/2}}.$$

Facendo $\rho = R$, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = \mu \frac{\rho_1^3}{R^3} \frac{\cos\theta\,(\rho_1^2 + R^2 - 2\rho_1 R\cos\theta) - 3\,(\rho_1 - R\cos\theta)\,(\rho_1\cos\theta - R)}{(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta)^{5/2}}$$

$$+ \mu' \frac{\cos\theta\,(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta) - 3\,(R - \rho_1\cos\theta)\,(R\cos\theta - \rho_1)}{(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta)^{5/2}}.$$

Questa espressione è evidentemente nulla quando

$$\mu' = -\mu \frac{\rho_1^3}{R^3}.$$

Col far crescere indefinitamente il raggio R della sfera σ si può passare dalla considerazione della sfera a quella di un piano indefinito. Però si trovano più facilmente gli stessi resultati direttamente.

Abbiasi concentrata la massa $-a$ in ciascuno dei due punti A ed A' simmetrici rispetto ad un piano α. La funzione potenziale di queste due masse avrà la derivata rispetto alla normale al piano nulla nei punti del piano stesso.

Nei punti B e B' pure simmetrici rispetto ad α e situati sulla retta AA' si concentri la massa $+a$. La funzione potenziale dei quattro punti A, A', B e B' avrà la derivata rispetto alla normale al piano nulla.

Ora si facciano avvicinare A e B indefinitamente e nello stesso tempo si faccia crescere a pure indefinitamente in modo che, posto $AB = d$, il prodotto

$$ad = \mu$$

si mantenga costante.

Le quattro masse verranno a costituire due elementi magnetici simmetrici rispetto ad α, concentrati in B e B', di momenti μ e $-\mu$ e la cui funzione potenziale avrà la derivata rispetto alla normale ad α nei punti di questo piano nulla.

Abbiamo dunque:

La funzione potenziale di masse elettriche eguali e dello stesso segno situate simmetricamente rispetto ad un piano ha eguale a zero la derivata rispetto alla normale al piano, mentre, *la funzione potenziale di elementi magnetici eguali e di momenti di segno opposto, situati simmetricamente rispetto ad un piano, con gli assi perpendicolari ad esso, ha eguale a zero la derivata rispetto alla normale al piano.*

Riprendiamo il caso di una sfera. Siano A e B due punti allineati col centro O della sfera σ di raggio R e situati esternamente alla sfera stessa; supponiamo che A sia il punto più vicino al centro della sfera.

Sia concentrata nel punto A la massa

$$m = a\delta$$

e distribuita sulla retta AB $= a$ una massa colla densità $-\delta$.

A causa del primo teorema dimostrato si avrà che sarà possibile distribuire nell'interno della sfera σ una massa, in modo che la derivata della funzione potenziale di questa massa e di quella situata esternamente alla sfera, presa rispetto alla normale alla superficie della sfera, sia nulla.

Vediamo di determinare applicando il primo teorema queste masse interne alla sfera.

Sia C un punto della retta AB compreso fra questi due punti; poniamo OC $= \rho$; potremo evidentemente considerare le masse situate esternamente alla sfera come costituite dalla massa concentrata in A e dalle masse

$$-\delta d\rho$$

concentrate in ciascun elemento C.

Cerchiamo successivamente quali masse vanno aggiunte nell'interno della sfera alla massa A e a ciascuna delle masse

$$-\delta d\rho$$

affinchè la derivata rispetto alla normale alla sfera della funzione potenziale resulti nulla.

Sia A′ il punto reciproco ad A rispetto alla sfera σ; poniamo $b =$ OA′. È evidente che la massa concentrata in A, una massa $ab\delta/\mathrm{R}$ concentrata in A′ ed una massa ad una dimensione distribuita colla densità $-a\delta/\mathrm{R}$ sopra OA′, hanno la funzione potenziale colla derivata rispetto alla normale alla superficie nulla.

Sia C′ reciproco al punto C e OC′$= \rho'$. La massa

$$-\delta d\rho$$

concentrata in C, la massa

$$\frac{-\delta\rho'}{\mathrm{R}} d\rho$$

concentrata in C′ e la massa colla densità

$$\frac{\delta}{R}\,d\rho$$

distribuita sulla retta OC′, hanno la funzione potenziale colla derivata rispetto alla normale alla sfera nulla.

Se riuniamo dunque tutte le masse alle quali danno luogo nell'interno della sfera i diversi punti C, avremo che nel punto C′ verrà a concentrarsi la massa

$$\mu = -\frac{\rho'\delta}{R}\,d\rho + \frac{\delta}{R}\,d\rho'\int_{R^2/b}^{R^2/\rho'} d\rho = -\frac{\rho'\delta}{R} + \frac{\delta}{R}\left(\frac{R^2}{\rho'} - \frac{R^2}{b}\right)d\rho'.$$

Ma abbiamo

$$\rho = \frac{R^2}{\rho'}.$$

Quindi in valore assoluto sarà

$$\frac{d\rho}{d\rho'} = \frac{R^2}{\rho'^2}$$

e per conseguenza

$$\mu = -\frac{\rho'\delta}{R}\,\frac{R^2}{\rho'^2}\,d\rho' + \frac{\delta}{R}\left(\frac{R^2}{\rho'} - \frac{R^2}{b}\right)d\rho' = -\frac{R\delta}{b}\,d\rho'.$$

Sia B′ il punto reciproco a B, vediamo quale massa viene a concentrarsi in un punto D compreso fra O e B′ per effetto delle masse nell'interno della sfera a cui danno luogo i punti C. Avremo che questa massa sarà evidentemente:

$$\frac{\delta}{R}\,d\rho'\int_{R^2/b}^{R^2/c} d\rho = \frac{\delta a}{R}\,d\rho',$$

posto $OB' = c$.

Si vede dunque che le masse interne alla sfera le quali insieme alla massa in A e alla massa distribuita su AB hanno la funzione potenziale colla derivata nulla rispetto alla normale alla superficie della sfera, consistono nella massa

$$m' = \frac{ab\delta}{R}$$

concentrata in A′ e della massa colla densità

$$-\delta' = -\frac{\delta}{R}\left(a + \frac{R^2}{b}\right) = -\delta\,\frac{R}{c}$$

distribuita su $A'B' = a'$.

È da osservare che si ha la relazione

$$m' = a'\,\delta'.$$

Abbiamo dunque il teorema:

Se esternamente ad una sfera e sopra un segmento di un diametro di essa si ha distribuita una massa omogenea e alla estremità del segmento più vicino *alla sfera si ha concentrata una massa eguale e di segno opposto, si potrà sempre distribuire nell'interno della sfera, sopra un segmento dello stesso diametro una massa omogenea e ad una estremità di questo segmento si potrà concentrare una massa eguale e di segno opposto, in modo che la funzione potenziale delle masse esterne ed interne alla sfera abbia eguale a zero la derivata rispetto alla normale alla superficie della sfera.*

II.

Premesse queste considerazioni generali, studiamo il moto di sfere solide aventi il raggio fisso, entro un fluido indefinito incompressibile e senza attrito.

Consideriamo due masse $+a$ e $-a$ concentrate in due punti A e A′ dell'asse x alle distanze r e $-r$ dall'origine O. La funzione potenziale di queste due masse sarà, se il punto potenziato ha le coordinate x, y, z:

$$f(x, y, z) = \frac{a}{\sqrt{(x-r)^2+y^2+z^2}} - \frac{a}{\sqrt{(x+r)^2+y^2+z^2}}$$

$$= \frac{4xra}{\sqrt{(x-r)^2+y^2+z^2}\,\sqrt{(x+r)^2+y^2+z^2}\,\left[\sqrt{(x-r)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x+r)^2+y^2+z^2}\right]}.$$

Poniamo

$$u = \frac{2a}{r^2}$$

e facciamo crescere r ed a indefinitamente in modo però che u resti costante. Avremo che la $f(x, y, z)$ tenderà verso ux.

Si ha dunque che *il potenziale di velocità di un fluido indefinito che si muove parallelamente all'asse delle x può considerarsi come il potenziale di due punti* A *e* A′ *situati sull'asse delle x alle distanze infinitamente grandi r e $-r$ dall'origine, in cui sono concentrate due masse infinitamente grandi*:

$$b = +\frac{u}{2}r^2 \quad , \quad b' = -\frac{u}{2}r^2.$$

Quindi se in un fluido indefinito si ha una sfera fissa e il fluido si muove in modo che a distanza infinitamente grande ha una velocità u parallelamente all'asse delle x, il potenziale di velocità potrà trovarsi nel modo seguente.

Si determinerà la funzione potenziale di due masse

$$b = +\frac{u}{2}r^2 \quad , \quad b' = -\frac{u}{2}r^2$$

concentrate nei punti A e A′ situati sull'asse x alle distanze r e $-r$ da O; la funzione potenziale delle due masse

$$\frac{u}{2}r^2\frac{r'}{R} = \frac{u}{2}\frac{R^3}{r'} \quad , \quad -\frac{u}{2}r^2\frac{r'}{R} = -\frac{u}{2}\frac{R^3}{r'}$$

concentrate nei punti B e B′ reciproci ad A e A′, situati rispettivamente alle distanze r' e $-r'$ dall'origine O, e la funzione potenziale delle masse omogenee ad una dimensione distribuite sulle rette OB ed OB′ colle densità

$$-\frac{u}{2}r^2\frac{1}{R} \quad , \quad \frac{u}{2}r^2\frac{1}{R};$$

si farà la somma di queste funzioni potenziali e si andrà al limite per $r = \infty$.

Passando al limite, le masse situate nell'interno della sfera vengono a costituire un elemento magnetico di momento

$$\frac{R^3 u}{2}$$

e il cui asse è l'asse delle x.

Di qui si deduce immediatamente *che se in un fluido le cui particelle a distanza infinita sono fisse si ha una sfera che si muove parallelamente ad una data direzione, il potenziale di velocità del fluido sarà eguale alla funzione potenziale di un elemento magnetico concentrato nel centro della sfera il cui asse coincide colla direzione del moto* (6).

Se in un fluido indefinito e incompressibile si hanno più sfere che si tagliano o no, fisse e coi centri disposti nella direzione della velocità che ha il fluido all'infinito, a causa delle proprietà ora dimostrate e del secondo teorema del § 1, si vede come si potrà applicare, per determinare il potenziale di velocità, il metodo delle immagini successive.

Quando si hanno due sfere che non si tagliano, le immagini verranno in numero infinito; se si tagliano sotto un angolo π/n, n essendo un numero intero, le immagini verranno in numero finito (7).

Evidentemente lo stesso metodo delle immagini successive potrà applicarsi quando le particelle del fluido situate a distanza infinita saranno fisse e le sfere si muoveranno nella direzione della retta dei centri colla medesima velocità o con velocità diversa.

Consideriamo il caso di due sfere che non si tagliano né si toccano e che si muovono lungo la retta dei centri colle velocità U ed U′. Supponiamo inoltre che le particelle del fluido situate a distanza infinita siano fisse.

Condotto un piano che passi per i centri delle due sfere, si ottengano delle sezioni le quali appartengano ad un sistema di coordinate dipolari u e v (8). Supponiamo che le due sezioni corrispondano a

$$u = \alpha > 0 \quad , \quad u = \alpha' < 0.$$

Le coordinate dei centri m_0 e m'_0 delle due sfere saranno:

$$v = 0 \quad , \quad u = 2\alpha,$$
$$v = 0 \quad , \quad u = 2\alpha',$$

ed i raggi

$$R = \frac{a}{\operatorname{senh}\alpha} \quad , \quad R' = -\frac{a}{\operatorname{senh}\alpha'},$$

essendo $2a$ la distanza fra i due poli nel sistema di coordinate in questione.

(6) Vedi G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik,* p. 227.
(7) Vedi MAXWELL, op. cit., § 166.
(8) Vedi E. BETTI, op. cit., Cap. II, § VI.

L'immagine di m_0 rispetto alla sfera α' sia m_1, quella di m_1 rispetto alla sfera α sia m_2, ecc. L'immagine di m'_0 rispetto ad α sia m'_1, quella di m'_1 rispetto ad α' sia m'_2, ecc.

Ponendo $\alpha - \alpha' = \omega$, le coordinate dei punti

$$m_{2s} \quad , \quad m_{2s-1} \quad , \quad m'_{2s} \quad , \quad m'_{2s-1}$$

saranno

$$\begin{cases} v = 0 \quad , \quad u = 2\alpha + 2s\omega\,, \\ v = 0 \quad , \quad u = -2s\omega\,, \\ v = 0 \quad , \quad u = 2\alpha' - 2s\omega\,, \\ v = 0 \quad , \quad u = 2s\omega\,. \end{cases}$$

Quindi i *parametri di Neumann* corrispondenti agli stessi punti resulteranno dati da

$$\begin{cases} \xi_{2\alpha+2s\omega,0} = \dfrac{a}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}\,, \\[2ex] \xi_{-2s\omega,0} = -\dfrac{a}{\operatorname{senh} s\omega}\,, \\[2ex] \xi_{2\alpha'-2s\omega,0} = \dfrac{a}{\operatorname{senh}(\alpha' - s\omega)}\,, \\[2ex] \xi_{2s\omega,0} = \dfrac{a}{\operatorname{senh} s\omega}\,. \end{cases}$$

Indicando con ρ_{2s} la distanza del punto m_{2s} dal punto m_0, con ρ_{2s-1} la distanza del punto m_{2s-1} dal punto m'_0, con ρ'_{2s} la distanza del punto m'_{2s} dal punto m'_0 e con ρ'_{2s-1} la distanza del punto m'_{2s-1} da m_0, avremo

$$\begin{cases} \rho_{2s} = a\dfrac{\operatorname{senh} s\omega}{\operatorname{senh}\alpha \operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}\,, \\[2ex] \rho_{2s-1} = -a\dfrac{\operatorname{senh}[\alpha + (s-1)\omega]}{\operatorname{senh}\alpha' \operatorname{senh} s\omega}\,, \\[2ex] \rho'_{2s} = -a\dfrac{\operatorname{senh} s\omega}{\operatorname{senh}\alpha' \operatorname{senh}(s\omega - \alpha')}\,, \\[2ex] \rho'_{2s-1} = a\dfrac{\operatorname{senh}[(s-1)\omega - \alpha']}{\operatorname{senh}\alpha \operatorname{senh} s\omega}\,, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_{2s}}{R} = \dfrac{\operatorname{senh} s\omega}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}\,, \\[2ex] \dfrac{\rho_{2s-1}}{R'} = \dfrac{\operatorname{senh}[\alpha + (s-1)\omega]}{\operatorname{senh} s\omega}\,, \\[2ex] \dfrac{\rho'_{2s}}{R'} = \dfrac{\operatorname{senh} s\omega}{\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')}\,, \\[2ex] \dfrac{\rho'_{2s-1}}{R} = \dfrac{\operatorname{senh}[(s-1)\omega - \alpha']}{\operatorname{senh} s\omega}\,. \end{cases}$$

Ora il momento dell'elemento magnetico che deve essere concentrato in m_0 è

$$\mu_0 = -\frac{U}{2} R^3 = -\frac{U}{2}\left(\frac{a}{\operatorname{senh}\alpha}\right)^3,$$

e quello dell'elemento che deve essere concentrato in m'_0

$$\mu'_0 = -\frac{U'}{2} R'^3 = \frac{U'}{2}\left(\frac{a}{\operatorname{senh}\alpha'}\right)^3.$$

Chiamando μ_{2s}, μ_{2s-1}, μ'_{2s}, μ'_{2s-1} i momenti degli elementi magnetici che devono essere concentrati nei punti m_{2s}, m_{2s-1}, m'_{2s}, m'_{2s-1}, avremo

$$\left\{\begin{aligned}
\mu_{2s} &= -\frac{U}{2} a^3 \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)},\\
\mu_{2s-1} &= \frac{U}{2} a^3 \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega},\\
\mu'_{2s} &= -\frac{U'}{2} a^3 \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega - \alpha')},\\
\mu'_{2s-1} &= \frac{U'}{2} a^3 \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}.
\end{aligned}\right.$$

Quindi chiamando r_p la distanza del punto m_p da un punto e esterno alle due sfere in questione, e r'_p la distanza dello stesso punto e dal punto m'_p, avremo che il potenziale di velocità del fluido nel punto e sarà dato da

$$\varphi_e = \frac{Ua^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha+s\omega)} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{U'a^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega-\alpha')} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s-1}}}{\partial x}\right),$$

quando si prenda per asse delle x la retta dei centri delle due sfere e si supponga che le coordinate del punto e siano x, y, z.

È stato così determinato il potenziale di velocità indipendentemente dal metodo dello sviluppo per funzioni sferiche [(9)].

La formola trovata presenta una grande analogia colla nota formola che dà la funzione potenziale nel caso della distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due sfere conduttrici in presenza una dell'altra; soltanto la serie trovata nel nostro caso è più rapidamente convergente di quella che figura nella formula analoga di elettrostatica [(10)].

Si passa immediatamente dal caso ora considerato di due sfere esterne una all'altra, al caso di due sfere che si toccano e si muovono colla stessa velocità in direzione parallela alla retta dei centri. Come è noto basta sosti-

(9) Vedi KIRCHHOFF, op. cit., p. 228.
(10) Vedi E. BETTI, op. cit., cap. II, § VII.

tuire alle coordinate dipolari u e v le coordinate definite da $\mu a = \text{senh}\, u/2$, $\nu a = \text{sen}\, v/2$ e passare al limite per $a = 0$. Se i raggi delle due sfere sono R′ e R, si trova

$$\lim_{a=0} \frac{\text{senh}\,(\alpha + s\omega)}{a} = \frac{1}{R} + s\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{R' + s\,(R + R')}{RR'}.$$

Quindi il potenziale di velocità nel punto e resulta:

$$\varphi_e = \frac{U}{2} R^3 R'^3 \left(\sum_0^\infty {}_s \frac{1}{[R' + s\,(R + R')]^3} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{[s\,(R + R')]^3} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x} \right.$$

$$\left. + \sum_0^\infty {}_s \frac{1}{[R + s\,(R + R')]^3} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{[s\,(R + R')]^3} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s-1}}}{\partial x} \right).$$

Studiamo ora il moto di un solido formato da due callotte sferiche convesse maggiori ciascuna di una mezza sfera, entro un fluido indefinito incompressibile e senza attrito, parallelamente alla retta dei centri.

Conduciamo per la retta dei centri un piano; le due sezioni prodotte nelle sfere appartengano ad un sistema di coordinate dipolari u e v. Supponiamo che le sezioni corrispondano a

$$v = \beta > 0 \quad , \quad v = \beta' < 0.$$

Le coordinate dei centri m_0 e m'_0 saranno

$$u = 0 \quad , \quad v = 2\beta,$$

$$u = 0 \quad , \quad v = 2\beta',$$

e i raggi delle due sfere

$$R = \frac{a}{\text{sen}\,\beta},$$

$$R' = -\frac{a}{\text{sen}\,\beta'},$$

essendo $2a$ la corda d'intersezione delle due circonferenze β e β'.

Prendiamo a considerare il caso in cui l'angolo secondo cui si tagliano le due sfere è π/n, essendo n un numero intero.

L'immagine di m_0 rispetto alla sfera β' sia m_1, quella di m_1 rispetto alla sfera β sia m_2, l'immagine di questo punto rispetto a β' sia m_3, ecc.

Avremo che tutte queste immagini fino a $m_{2(n-1)}$ saranno situate internamente alle due sfere e questo punto coinciderà con m'_0. Le coordinate dei punti m_{2s} e m_{2s-1}, saranno

$$u = 0 \quad , \quad v = 2\beta + 2s\vartheta,$$

$$u = 0 \quad , \quad v = -2s\vartheta,$$

quando si ponga

$$\vartheta = \beta - \beta'.$$

Passando ai *parametri di Neumann* si ottiene:

$$\xi_{0,\,2\beta+2s\vartheta} = \frac{a}{\operatorname{sen}(\beta+s\vartheta)},$$

$$\xi_{0,\,-2s\vartheta} = \frac{a}{-\operatorname{sen} s\vartheta},$$

onde, chiamando ρ_{2s} la distanza di m_0 da m_{2s} e ρ_{2s-1} quella di m_0 da m_{2s-1}, si ha

$$\begin{cases} \rho_{2s} = \dfrac{a \operatorname{sen} s\vartheta}{\operatorname{sen}(\beta+s\vartheta)\operatorname{sen}\beta}, \\[2ex] \rho_{2s-1} = -\dfrac{a \operatorname{sen}[\beta+(s-1)\vartheta]}{\operatorname{sen} s\vartheta \operatorname{sen}\beta'}, \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_{2s}}{R} = \dfrac{\operatorname{sen} s\vartheta}{\operatorname{sen}(\beta+s\vartheta)}, \\[2ex] \dfrac{\rho_{2s-1}}{R'} = \dfrac{\operatorname{sen}[\beta+(s-1)\vartheta]}{\operatorname{sen} s\vartheta}. \end{cases}$$

Indichiamo rispettivamente con μ_{2s} e μ_{2s-1} i momenti degli elementi magnetici che debbono venire concentrati in m_{2s} e m_{2s-1}; avremo, chiamando U la velocità con cui si muovono le due callotte nel fluido,

$$\mu_{2s} = -\frac{U}{2}\,\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3(\beta+s\vartheta)} = -\frac{U}{2}\,\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3\left(\beta+\dfrac{s\pi}{n}\right)}$$

$$\mu_{2s-1} = \frac{U}{2}\,\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3 s\vartheta} = \frac{U}{2}\,\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3\dfrac{s\pi}{n}}.$$

Se quindi prendiamo per asse delle x la retta dei centri, il potenziale di velocità del fluido nel punto e di coordinate x, y, z sarà dato da

$$\varphi_e = \frac{U}{2}a^3\left(\sum_0^{n-1}\frac{1}{\operatorname{sen}^3\left(\beta+\dfrac{s\pi}{n}\right)}\,\frac{\partial\dfrac{1}{r_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^{n-1}\frac{1}{\operatorname{sen}^3\dfrac{s\pi}{n}}\,\frac{\partial\dfrac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x}\right),$$

in cui r_p rappresenta la distanza del punto e dal punto m_p.

Si vede dunque come nel caso di due callotte che si tagliano sotto un angolo sottomultiplo di π, il potenziale di velocità resulta sotto forma finita.

Se le due callotte sferiche sono ortogonali, in tal caso gli elementi magnetici che dovranno supporsi concentrati nell'interno delle sfere saranno tre soltanto. Essi saranno concentrati rispettivamente nei centri A e B delle due sfere, e nel punto C d'intersezione del piano d'incontro delle due sfere e della retta dei centri AB. I loro momenti saranno

$$-\frac{R^3 U}{2}, \quad -\frac{R'^3 U}{2}, \quad \frac{R^3 R'^3 U}{2(R^2+R'^2)^{3/2}},$$

se R e R' saranno i raggi delle due sfere, U la velocità con cui si muovono. L'asse magnetico sarà la retta AB dei centri.

Questo resultato si verifica direttamente con grandissima facilità.

Dalle formule trovate si hanno immediatamente le equazioni delle linee di flusso nei diversi moti considerati delle sfere o delle callotte sferiche in un fluido.

Le linee di flusso saranno infatti, nei diversi casi considerati, delle linee situate in piani che passano per la retta dei centri delle sfere, ed in essi avranno per equazione [11]

$$\int y\left(\frac{\partial\varphi_e}{\partial x}\,dy-\frac{\partial\varphi_e}{\partial y}\,dx\right)=\text{cost.},$$

essendo φ_e il potenziale di velocità nel punto e di coordinate x e y.

Ora si riconosce facilmente che

$$\int y\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dy-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dx\right]=\frac{\partial}{\partial x}\cos\psi,$$

in cui r rappresenta la distanza di un punto di coordinate x e y da un punto dell'asse delle x, e ψ rappresenta l'angolo che la retta che congiunge questi punti fa coll'asse delle x; quindi le linee di flusso, nel caso delle due sfere che non si tagliano né si toccano, saranno definite dalla equazione:

$$\frac{\mathrm{U}\,a^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha+s\omega)}\frac{\partial\cos\psi_{2s}}{\partial x}-\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\frac{\partial\cos\psi_{2s-1}}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{\mathrm{U}'a^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega+\alpha')}\frac{\partial\cos\psi'_{2s}}{\partial x}-\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\frac{\partial\cos\psi'_{2s-1}}{\partial x}\right)=\text{cost.};$$

nel caso in cui le due sfere si toccano da

$$\frac{\mathrm{UR}^3\,\mathrm{R}'^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s\frac{1}{[\mathrm{R}'+s(\mathrm{R}+\mathrm{R}')]^3}\frac{\partial\cos\psi_{2s}}{\partial x}-\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{[s(\mathrm{R}+\mathrm{R}')]^3}\frac{\partial\cos\psi_{2s-1}}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\sum_0^\infty{}_s\frac{1}{[\mathrm{R}+s(\mathrm{R}+\mathrm{R}')]^3}\frac{\partial\cos\psi'_{2s}}{\partial x}-\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{[s(\mathrm{R}+\mathrm{R}')]^3}\frac{\partial\cos\psi'_{2s-1}}{\partial x}\right)=\text{cost.}$$

e nel caso delle due calotte sferiche da

$$\frac{\mathrm{U}}{2}a^3\left[\sum_0^{n-1}{}_s\frac{1}{\operatorname{sen}^3\left(\beta+\frac{s\pi}{n}\right)}\frac{\partial\cos\psi_{2s}}{\partial x}-\sum_1^{n-1}{}_s\frac{1}{\operatorname{sen}^3\frac{s\pi}{n}}\frac{\partial\cos\psi_{2s-1}}{\partial x}\right]=\text{cost.}$$

Con ψ_p s'intende l'angolo che la retta congiungendo il punto e di coordinate x e y col punto m_p fa coll'asse x, con ψ'_p l'angolo della retta em'_p coll'asse x. È noto il significato che nei diversi casi hanno i punti m_p e m'_p.

Si può anche dedurre facilmente dalle espressioni trovate per il potenziale di velocità nei diversi casi considerati, il valore della forza viva del fluido.

Abbiamo infatti, se φ è il potenziale di velocità del fluido, μ la sua densità, che la sua forza viva è

$$\mathrm{T}=-\frac{\mu}{2}\int_\sigma\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma,$$

(11) Vedi E. BETTI, op. cit., cap. I, § XXIII.

in cui σ è la superficie contorno del fluido, n la normale alla superficie σ diretta verso l'interno del fluido.

Consideriamo il caso delle due sfere esterne una all'altra. Abbiamo in un punto qualunque della superficie della sfera α

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathrm{U} \cos \theta ,$$

se con θ si indica l'angolo che il raggio che va al punto in questione fa colla direzione positiva dell'asse x. Alla superficie della sfera α' abbiamo analogamente in un punto qualunque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathrm{U}' \cos \theta' ,$$

in cui θ' è l'angolo che il raggio che va al punto considerato fa colla direzione positiva dell'asse x.

Ne segue che la forza viva sarà data da:

$$\mathrm{T} = -\left(\mathrm{U} \int_\alpha \varphi \cos \theta \, d\sigma + \mathrm{U}' \int_{\alpha'} \varphi \cos \theta' \, d\sigma' \right) \frac{\mu}{2} \cdot$$

Ora, se r_m indica la distanza di un punto della sfera α di coordinate x, y, z da un punto m situato sull'asse x alla distanza l dal centro della sfera α, abbiamo

$$\int_\alpha \frac{\partial \frac{1}{r_m}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = \frac{8}{3} \pi \frac{\mathrm{R}^3}{l^3}$$

se $l > \mathrm{R}$; e abbiamo

$$\int_\alpha \frac{\partial \frac{1}{r_m}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = -\frac{4}{3} \pi$$

se $l < \mathrm{R}$. Quindi:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_\alpha \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = -\frac{4}{3} \pi , \\ & \int_\alpha \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s-1}}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = -\frac{4}{3} \pi , \\ & \int_\alpha \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = \frac{8}{3} \pi \frac{\rho_{2s}^3}{\mathrm{R}^3} = \frac{8}{3} \pi \frac{\operatorname{senh}^3 s\omega}{\operatorname{senh}^3 (\alpha + s\omega)} , \\ & \int_\alpha \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s}}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = \frac{8}{3} \pi \frac{\rho'^3_{2s+1}}{\mathrm{R}^3} = \frac{8}{3} \pi \frac{\operatorname{senh}^3 (s\omega - \alpha')}{\operatorname{senh}^3 (s + 1) \omega} , \end{aligned} \right.$$

e analogamente:

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_{\alpha'} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} \cos\theta' \, d\sigma' = \frac{8}{3}\pi \frac{\rho_{2s+1}^3}{R'^3} = \frac{8}{3}\pi \frac{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)}{\operatorname{senh}^3 s\omega}, \\
&\int_{\alpha'} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s-1}}}{\partial x} \cos\theta' \, d\sigma' = \frac{8}{3}\pi \frac{\rho'^3_{2s}}{R'^3} = \frac{8}{3}\pi \frac{\operatorname{senh}^3 s\omega}{\operatorname{senh}^3 (s\omega - \alpha')}, \\
&\int_{\alpha'} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x} \cos\theta' \, d\sigma' = -\frac{4}{3}\pi, \\
&\int_{\alpha'} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s}}}{\partial x} \cos\theta' \, d\sigma' = -\frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}\right.$$

Ne segue

$$\int_{\alpha} \varphi \cos\theta d\sigma = -\frac{2}{3}\pi U \frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 \alpha} - 2\pi U a^3 \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)} + 2\pi U' a^3 \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega},$$

$$\int_{\alpha'} \varphi \cos\theta' d\sigma' = 2\pi U a^3 \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega} - 2\pi U' a^3 \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega - \alpha')} + \frac{2}{3}\pi U' \frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 \alpha'},$$

e quindi

$$T = \frac{1}{3}\pi\mu a^3 \left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}^3 \alpha} - \frac{U'^2}{\operatorname{senh}^3 \alpha'}\right) + \pi U^2 a^3 \mu \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)}$$

$$+ \pi U'^2 a^3 \mu \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 (s\omega - \alpha')} - 2\pi U U' a^3 \mu \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}.$$

Nel caso delle due sfere a contatto, essendo le velocità eguali, la espressione precedente diviene:

$$T' = \pi\mu U^2 R^3 R'^3 \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R'^3}\right) - \sum_{1}^{\infty}{}_s \left(\frac{2}{[s(R + R')]^3} - \frac{1}{[R + s(R + R')]^3}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{[R' + s(R + R')]^3}\right)\right].$$

La forza viva T può anche porsi sotto altre forme.

Ponendo mente ai valori trovati per μ_s e μ'_s, si ha

$$T = -2\pi\mu \left[\frac{1}{3}(U\mu_0 + U'\mu'_0) + U \sum_{1}^{\infty}{}_s (\mu_{2s} + \mu'_{2s-1}) + U' \sum_{1}^{\infty}{}_s (\mu'_{2s} + \mu_{2s-1})\right].$$

Le serie che qui compariscono nella espressione di T si sommano facilmente applicando il metodo dei residui. Si ottiene così la forza viva espressa per mezzo di integrali definiti.

Applicheremo a tale scopo la formula [12]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \varphi(z)\, w(z)\, dz - \sum_1^{m_n}{}_r\, \gamma_r = \sum_1^n{}_s \frac{\varphi(\lambda_s)}{u'(\lambda_s)},$$

nella quale $\varphi(z)$ e $w(z)$ sono funzioni della variabile complessa z, uniformi e senza singolarità essenziali; $u(z) = 1/w(z)$; la $w(z)$ diviene infinita del primo ordine nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$; la $\varphi(z)$ non diviene infinita in questi punti; $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m_n}$ sono i residui della $\varphi(z)\, w(z)$ negli altri punti d'infinito; C_n è una curva che racchiude i punti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ e quelli corrispondenti a $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m_n}$. Prendiamo

$$\varphi(z) = \frac{1}{\operatorname{senh}^3(a+\lambda z)}\quad,\quad w(z) = \frac{1}{\operatorname{tang} z};$$

C_n eguale al rettangolo di cui due lati sono

$$y = \frac{\pi}{2\lambda} = \mu'\quad,\quad y = -\frac{\pi}{2\lambda},$$

e gli altri sono

$$x = \frac{\pi}{2}\qquad x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

Avremo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{dz}{\operatorname{senh}^3(a+\lambda z)\operatorname{tang} z} = \sum_1^n{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(a+s\lambda\pi)}.$$

Ora, se $a + \lambda\frac{\pi}{2} = \nu$,

$$\int_{C_n} \frac{dz}{\operatorname{senh}^3(a+\lambda z)\operatorname{tang} z} = \int_{(n+1/2)\pi}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{senh}^3\left(a+\lambda x+i\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tang}(x+i\mu')}$$

$$+\int_{\pi/2}^{(n+1/2)\pi} \frac{dx}{\operatorname{senh}^3\left(a+\lambda x-i\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tang}(x-i\mu')}$$

$$+\int_{\mu'}^{-\mu'} \frac{i\,dy}{\operatorname{senh}^3(\nu+iy\lambda)\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)} + \int_{-\mu'}^{\mu'} \frac{i dy}{\operatorname{senh}^3(\nu+\lambda n\pi+iy\lambda)\operatorname{tang}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+iy\right]}.$$

Ossia, chiamando ε l'ultimo termine,

$$\int_{C_n} \frac{dz}{\operatorname{senh}^3(a+\lambda z)\operatorname{tang} z} = -i\int_{\pi/2}^{(n+1/2)\pi} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cosh^3(a+\lambda x)(\operatorname{senh}^2\mu'+\operatorname{sen}^2 x)}\,dx$$

$$+2i\int_0^{\mu'} \operatorname{tangh} y\,\frac{\operatorname{sen}\lambda y\cosh\nu\,(3\operatorname{senh}^2\nu\cos^2\lambda y-\cosh^2\nu\operatorname{sen}^2\lambda y)}{(\operatorname{senh}^2\nu+\operatorname{sen}^2\lambda y)^3}\,dy+\varepsilon=$$

(12) Vedi DINI, *Serie di Fourier*, p. 146.

$$= i \int_0^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cosh^3(\nu+\lambda x)(\operatorname{senh}^2\mu'+\cos^2 x)} dx$$

$$+ 2i \int_0^{\mu'} \operatorname{tangh} y \frac{\operatorname{sen}\lambda y \cosh\nu\,(3\operatorname{senh}^2\nu\cos^2\lambda y - \cosh^2\nu\operatorname{sen}^2\lambda y)}{(\operatorname{senh}^2\nu + \operatorname{sen}^2\lambda y)^3} dy + \varepsilon\,.$$

Si ha dunque

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cosh^3(\nu+\lambda x)(\operatorname{senh}^2\mu'+\cos^2 x)} dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\mu'} \frac{\operatorname{sen}\lambda y \cosh\nu\,(3\operatorname{senh}^2\nu\cos^2\lambda y - \cosh^2\nu\operatorname{sen}^2\lambda y)}{(\operatorname{senh}^2\nu + \operatorname{sen}^2\lambda y)^3} \operatorname{tangh} y\, dy = \sum_1^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(a+s\lambda\pi)}\,.$$

Se ne deduce la seguente espressione della forza viva per mezzo di integrali definiti:

$$T = \frac{1}{3}\pi a^3\mu\left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}^3\alpha} - \frac{U'^2}{\operatorname{senh}^3\alpha'}\right) + \frac{1}{2}a^3\mu\int_0^{\infty}\left(\frac{U^2}{\cosh^3(\nu+\lambda x)} + \frac{U'^2}{\cosh^3(\nu'+\lambda x)}\right.$$

$$\left.-\frac{2UU'}{\cosh^3(\nu''+\lambda x)}\right)\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{senh}^2\mu'+\cos^2 x}dx + a^3\mu\int_0^{\mu'}\left(\frac{U^2\cosh\nu\,(3\operatorname{senh}^2\nu\cos^2\lambda y - \cosh^2\nu\operatorname{sen}^2\lambda y)}{(\operatorname{senh}^2\nu+\operatorname{sen}^2\lambda y)^3}\right.$$

$$+\frac{U'^2\cosh\nu'\,(3\operatorname{senh}^2\nu'\cos^2\lambda y - \cosh^2\nu\operatorname{sen}^2\lambda y)}{(\operatorname{senh}^2\nu'+\operatorname{sen}^2\lambda y)^3}$$

$$\left.-2\frac{UU'\cosh\nu''\,(3\operatorname{senh}^2\nu''\cos^2\lambda y - \cosh^2\nu\operatorname{sen}^2\lambda y)}{(\operatorname{senh}^2\nu''+\operatorname{sen}^2\lambda y)^3}\right)\operatorname{sen}\lambda y\operatorname{tangh} y\,dy,$$

nella quale si ha:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega}{\pi},\\ \mu' &= \frac{\pi^2}{2\omega},\\ \nu &= \alpha + \frac{\omega}{2},\\ \nu' &= -\alpha' + \frac{\omega}{2},\\ \nu'' &= \frac{\omega}{2}. \end{aligned}\right.$$

Se noi supponiamo le due sfere α ed α' ad una distanza grandissima rispetto ai loro raggi, avremo che α e $-\alpha'$ saranno grandissimi, quindi ω, ν, ν', ν'' saranno pure grandissimi, mentre μ' sarà piccolissimo. Ne segue che i tre termini costituenti l'ultimo integrale della espressione precedente di T sono tutti di un ordine inferiore di grandezza dei tre termini costituenti il primo integrale. Abbiamo quindi per T il seguente valore approssimato:

$$T_0 = \frac{1}{3}\pi a^3 \mu \left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}^3\alpha} - \frac{U'^2}{\operatorname{senh}^3\alpha'}\right) + \frac{1}{2} a^3 \mu \int_0^\infty \left(\frac{U^2}{\cosh^3(\nu+\lambda x)} + \frac{U'^2}{\cosh^3(\nu'+\lambda x)}\right.$$

$$\left. - \frac{2\,UU'}{\cosh^3(\nu''+\lambda x)}\right) \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{senh}^2\mu' + \cos^2 x}\, dx .$$

Se le due sfere hanno lo stesso raggio e si muovono colla stessa velocità e nella stessa direzione si deduce, dalla prima espressione trovata per T, il seguente valore per la forza viva del fluido:

$$T_1 = 2\pi a^3 \mu U^2 \left(- \frac{2}{3\operatorname{senh}^3\alpha} + \sum_1^\infty{}_s \frac{(-1)^{s-1}}{\operatorname{senh}^3 s\alpha}\right).$$

Per esprimere la serie contenuta in questa espressione mediante integrali definiti, poniamo nella formola citata della teoria dei residui

$$\begin{cases} \varphi(z) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}^3 \alpha z}, \\[2mm] w(z) = \dfrac{-\pi}{\operatorname{sen}\pi z}, \end{cases}$$

e prendiamo per C_n il rettangolo che ha per lati

$$y = R \quad , \quad y = -R$$

$$x = \frac{1}{2} \quad , \quad x = n + \frac{1}{2};$$

avremo

$$-\frac{1}{2i}\int_{C_n} \frac{dz}{\operatorname{senh}^3\alpha z \operatorname{sen}\pi z} = \sum_1^n{}_s \frac{(-1)^{s-1}}{\operatorname{senh}^3 s\alpha},$$

da cui (*) si deduce:

$$\sum_1^\infty{}_s \frac{(-1)^{s-1}}{\operatorname{senh}^3 s\alpha} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha y}{\cosh\pi y} \frac{\left(\operatorname{senh}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha y - 3\cosh^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}^2\alpha y\right)}{\left(\operatorname{senh}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\alpha y\right)^3} dy.$$

Abbiamo dunque

$$T_1 = 2\pi a^3 \mu U^2 \left(-\frac{2}{3\operatorname{senh}^3\alpha} + \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha y}{\cosh\pi y} \frac{\left(\operatorname{senh}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha y - 3\cosh^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}^2\alpha y\right)}{\left(\operatorname{senh}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\alpha y\right)^3} dy\right).$$

Il valore della forza viva T nel caso generale può ottenersi sempre espresso per mezzo di integrali definiti, applicando un'altra formula della teoria dei residui (13), sotto una forma un poco diversa da quella ora trovata.

(*) Facendo tendere all'infinito anche R [N.d.R.].

(13) Vedi DINI, op. cit., p. 143.

La formula da cui si parte è:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \varphi(z)\, w^2(z)\, dz - \sum_{1}^{m_n}{}_r\, \gamma_r = \sum_{1}^{n}{}_s \frac{\varphi'(\lambda_s)\, u'(\lambda_s) - \varphi(\lambda_s)\, u''(\lambda_s)}{u'(\lambda_s)^3}$$

nella quale $\varphi(z)$, $w(z)$, ecc. hanno lo stesso significato di quello che hanno nella formula della teoria dei residui precedentemente considerata.

Prendiamo:

$$\left\{\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z} \\ \varphi(z) &= \omega \operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z + \pi\cosh(\alpha + z\omega)\frac{1}{\cos^2 \pi z} \end{aligned}\right.$$

e per C_n il rettangolo che ha per lati

$$y = \frac{\pi}{\omega} = \mu \quad , \quad y = -\frac{\pi}{\omega}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad , \quad x = n + \frac{1}{2}.$$

Avremo

$$\frac{\omega}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z}{[\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z]^2}\, dz + \frac{1}{2i}\int_{C_n} \frac{\cosh(\alpha + z\omega)\frac{1}{\cos^2 \pi z}}{[\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z]^2}\, dz$$

$$= -\frac{2\omega}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)},$$

ovvero

$$-\frac{1}{4i}\int_{C_n} \frac{dz}{\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z} + \frac{\pi^2}{2\omega^2 i}\int_{C_n} \frac{1}{\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)}\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen}^3 \pi z}\, dz = \sum_{1}^{n}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)},$$

e quindi, ponendo

$$\nu = \frac{2\alpha + \omega}{2},$$

si avrà

$$\sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)} = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}(\nu + \omega x)}\frac{\operatorname{senh} 2\mu\pi}{\operatorname{senh}^2 \mu\pi + \cos^2 \pi x}\, dx$$

$$-\frac{\pi^2}{\omega^2}\int_0^{\infty} \frac{\cosh\nu \operatorname{sen}\omega y}{\operatorname{senh}^2 \nu + \operatorname{sen}^2 \omega y}\frac{\operatorname{senh}\pi y}{\cosh^3 \pi y}\, dy - \frac{1}{2}\int_0^{\mu} \frac{\cosh\nu \operatorname{sen}\omega y}{\operatorname{senh}^2 \nu + \operatorname{sen}^2 \omega y}\operatorname{tangh}\pi y\, dy.$$

Da questa formula si deduce:

$$T = \frac{1}{3}\pi a^3 \mu\left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}^3 \alpha} - \frac{U'^2}{\operatorname{senh}^3 \alpha'}\right) + \pi a^3 \mu\left[\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}(\nu + \omega x)} + \frac{U'^2}{\operatorname{senh}(\nu' + \omega x)}\right.\right.$$

$$\left.- \frac{2UU'}{\operatorname{senh}(\nu'' + \omega x)}\right)\frac{\operatorname{senh} 2\mu\pi}{\operatorname{senh}^2 \mu\pi + \cos^2 \pi x}\, dx - \frac{\pi^2}{\omega^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\cosh\nu}{\operatorname{senh}^2 \nu + \operatorname{sen}^2 \omega y} U^2 + \right.$$

$$+\frac{\cosh\nu'}{\operatorname{senh}^2\nu'+\operatorname{sen}^2\omega y}U'^2-2\frac{\cosh\nu''}{\operatorname{senh}^2\nu''+\operatorname{sen}^2\omega y}UU'\Big)\frac{\operatorname{sen}\pi y}{\cosh^3\pi y}\operatorname{sen}\omega y\,dy$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\mu}\Big(\frac{\cosh\nu}{\operatorname{senh}^2\nu+\operatorname{sen}^2\omega y}U^2+\frac{\cosh\nu'}{\operatorname{senh}^2\nu'+\operatorname{sen}^2\omega y}U'^2$$

$$-\frac{2\cosh\nu'}{\operatorname{senh}^2\nu''+\operatorname{sen}^2\omega y}UU'\Big)\operatorname{tangh}\pi y\operatorname{sen}\omega y\,dy\Big].$$

La espressione della forza viva diviene molto semplice nel caso di due sfere eguali di raggio R che si muovono colla velocità U mantenendosi sempre fra loro tangenti. Essa risulta:

$$T'=2\pi\mu U^2R^3\Big(-\frac{2}{3}+\sum_{1}^{\infty}{}_s\frac{(-1)^s}{s^3}\Big).$$

Ma si ha per la prima delle formule citate della teoria dei residui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,dy}{\left(\frac{1}{2}+iy\right)^3\operatorname{sen}\pi\left(\frac{1}{2}+iy\right)}=\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_s\frac{(-1)^s}{s^3},$$

ovvero

$$8\int_0^{\infty}\frac{1-12y^2}{(1+4y^2)^3}\frac{dy}{\cosh\pi y}=\sum_{1}^{\infty}{}_s\frac{(-1)^s}{s^3};$$

quindi, sostituendo,

$$T'=2\mu\pi U^2R^3\Big(-\frac{2}{3}+8\int_0^{\infty}\frac{1-12y^2}{(1+4y^2)^3}\frac{dy}{\cosh\pi y}\Big).$$

III.

Passiamo ora a considerare il caso del moto di una sfera in un fluido incompressibile limitato da un piano indefinito fisso. Supponiamo che il moto avvenga normalmente al piano colla velocità U, e supponiamo inoltre che le particelle del fluido situate a distanza infinita siano fisse. Conduciamo un piano che passi per il centro della sfera e sia normale al piano dato. Prendiamo in questo piano un sistema di coordinate dipolari u, v in modo che i poli siano disposti simmetricamente rispetto alla retta A B d'intersezione dei due piani, e la sezione della sfera sia una delle linee coordinate

$$u=\alpha=\text{cost.}>0.$$

Sia m_0 il centro di questa sezione, m'_0 sia il punto simmetrico rispetto ad A B; sia m_1 l'immagine di m'_0 rispetto ad α; m'_1 sia simmetrico rispetto ad A B; ecc.

Le coordinate dei punti $m_0, m_1, \cdots, m_s, \cdots$ saranno:

$$u = 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2(s+1)\alpha, \cdots; v = 0$$

e quelle dei punti $m'_0, m'_1, \cdots, m'_s, \cdots$ saranno:

$$u = -2\alpha, -4\alpha, \cdots -2(s+1)\alpha, \cdots; v = 0.$$

Chiamiamo ρ_s la distanza del punto m_s dal punto m_0, avremo:

$$\rho_s = \frac{a \operatorname{senh} s\alpha}{\operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh}(s+1)\alpha}$$

in cui a è la distanza fra i due poli. Se R è il raggio della sfera, sarà

$$R = \frac{a}{\operatorname{senh} \alpha},$$

quindi:

$$\frac{\rho_s}{R} = \frac{\operatorname{senh} s\alpha}{\operatorname{senh}(s+1)\alpha}.$$

I momenti degli elementi magnetici che dovremo concentrare nei punti

$$m_0, m_1, \cdots, m_s, \cdots$$

saranno dunque

$$-\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 \alpha}, \quad -\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 2\alpha}, \cdots -\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 (s+1)\alpha}, \cdots$$

e quelli degli elementi magnetici che dovremo concentrare in

$$m'_0, m'_1, \cdots, m'_s \cdots$$

saranno:

$$\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 \alpha}, \quad \frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 2\alpha}, \cdots, \frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 (s+1)\alpha}, \cdots$$

Per conseguenza se chiamiamo r_s la distanza di un punto e appartenente al fluido dal punto m_s, e r'_s la distanza di e dal punto m'_s, avremo che il potenziale di velocità del fluido nel punto e di coordinate x, y, z sarà

$$\varphi_e = \frac{U}{2} a^3 \sum_0^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 (s+1)\alpha} \left(\frac{\partial \frac{1}{r_s}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r'_s}}{\partial x} \right),$$

quando si prenda per asse x la perpendicolare alla retta A B condotta pel centro m_0 della sfera.

Questa formula si può dedurre da quella trovata nel caso delle due sfere esterne una all'altra (§ 2), facendo in essa $U' = 0$, $\alpha' = 0$.

Le equazioni delle linee di flusso saranno date in questo caso da

$$\frac{U}{2} a^3 \sum_0^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 (s+1)\alpha} \left(\frac{\partial \cos \psi_s}{\partial x} - \frac{\partial \cos \psi'_s}{\partial x} \right) = \text{cost.}$$

in cui ψ_s e ψ'_s rappresentano gli angoli che le congiungenti il punto di coordinate x, y, z con m_s e m'_s fanno cogli assi.

Se nella formula trovata nel caso delle due sfere esterne una all'altra facciamo $U' = 0$ e supponiamo che α' sia positivo e minore di α invece di essere negativo, la formula che si ottiene

$$\varphi_e = \frac{Ua^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)}\frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x}\right),$$

ci rappresenterà il potenziale di velocità del fluido rinchiuso entro la sfera α' nel cui interno la sfera α si muove colla velocità U lungo un diametro.

Le linee di flusso sono date da:

$$\frac{Ua^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)}\frac{\partial \cos\psi_{2s}}{\partial x} - \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\frac{\partial \cos\psi_{2s-1}}{\partial x}\right) = \text{cost.}$$

Anche in questi casi riesce molto facile calcolare la forza viva del fluido.

Avremo, nel caso della sfera e del piano, che essa sarà data da

$$T = -\frac{\mu}{2}\int_\sigma \varphi\,\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma = -\frac{\mu}{2}\int_\sigma \varphi U \cos\theta\, d\sigma,$$

in cui μ rappresenta la densità del fluido, θ è l'angolo che il raggio corrispondente ad un punto della sfera fa coll'asse x, gli integrali sono estesi alla superficie della sfera.

Se ne deduce

$$T = -\frac{\mu}{4}U^2 a^3 \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s+\alpha\, 1)}\int_\sigma\left(\frac{\partial \frac{1}{r_s}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r'_s}}{\partial x}\right)\cos\theta\, d\sigma.$$

Eseguendo le integrazioni si ha

$$T = \pi\mu U^2 a^3\left(\frac{1}{3\operatorname{senh}^3\alpha} + \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s+1)\alpha}\right).$$

Sarebbe facile anche in questo caso ridurre la serie che qui comparisce ad integrali definiti.

Nel caso di una sfera interna all'altra, la forza viva risulterà evidentemente

$$T = \pi U^2 a^3 \mu\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\operatorname{senh}^3\alpha} + \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)}\right).$$

IV.

Se in un fluido incomprensibile e indefinito sono immerse delle sfere di cui il raggio cambia, mentre i centri restano invariati, e se le particelle del fluido a distanza infinita sono fisse, il potenziale di velocità del fluido in un dato istante sarà una funzione che verifica l'equazione

$$\Delta^2 = 0\,.$$

si annulla insieme alle sue derivate all'infinito, e ha la derivata rispetto alla normale alla superficie di ciascuna sfera eguale ad una costante, variabile da sfera a sfera.

Consideriamo una sfera di raggio R immersa in un fluido indefinito, e in un dato istante supponiamo che il suo raggio cresca colla velocità U.

Per quanto è stato ora detto avremo che il potenziale di velocità in quell'istante, supponendo che le particelle del fluido a distanza infinita siano fisse, sarà eguale alla funzione potenziale di una massa

$$-R^2 U$$

concentrata nel centro della sfera. Se ora supponiamo che nel fluido sia immersa una seconda sfera fissa e col raggio fisso, il potenziale di velocità del fluido si potrà determinare col metodo delle immagini successive (14) cioè prendendo l'immagine L della massa $-R^2 U$ concentrata nel centro della prima sfera rispetto alla seconda sfera, quindi l'immagine L′ di L rispetto alla prima sfera e così di seguito; determinando quindi la funzione potenziale di tutte le immagini successive.

Evidentemente per il primo e per l'ultimo dei teoremi del § 1 ciascuna di queste immagini consisterà in una massa distribuita con densità uniforme sopra una porzione di retta e una concentrata in un punto, la somma delle due masse essendo nulla.

Il potenziale di velocità si ottiene così sotto forma di una serie convergente in egual grado insieme alle sue derivate.

Se anche l'altra sfera ha il raggio variabile, il potenziale di velocità si otterrà sommando i due potenziali che si hanno considerando successivamente ciascuna delle due sfere come fissa. Se poi, oltre a cambiare il raggio, cambiano anche le posizioni dei centri delle due sfere lungo la retta dei centri, bisognerà sommare i due potenziali di velocità che nascono per il movimento dei centri delle sfere e per il cambiamento dei raggi.

Supponiamo che le due sfere abbiano i centri m_0 e m'_0. Le sezioni che si ottengono con un piano che passa per i centri appartengano ad un sistema di coordinate dipolari u e v ed abbiano i parametri $\alpha > 0$ e $\alpha' < 0$. Supponiamo inoltre che la sfera α' sia fissa ed abbia il raggio fisso, mentre il raggio della sfera α cresca colla velocità U.

Siano m_0 e m_1 punti reciproci rispetto alla sfera α', m_1 e m_2 punti reciproci rispetto alla sfera α, m_2 e m_3 punti reciproci rispetto ad α', ecc.; siano m'_0 e m'_1 punti reciproci rispetto alla sfera α, m'_1 e m'_2 punti reciproci rispetto alla sfera α', ecc.

La distanza fra i due punti m_{2s} e m'_{2s-1} sarà

$$m_{2s}\, m'_{2s-1} = \frac{a}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega) \operatorname{senh} s\omega} \operatorname{senh} \alpha,$$

(14) In questo paragrafo si diranno immagini una dell'altra, rispetto ad una sfera, due masse distribuite in punti e su segmenti di retta tali, che la loro funzione potenziale abbia la derivata rispetto alla normale alla sfera nulla.

e la distanza fra i due punti m_{2s+1} e m'_{2s} sarà

$$m_{2s+1}\, m'_{2s} = \frac{a}{\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')\operatorname{senh}(s+1)\omega}\operatorname{senh}\alpha\,;$$

quindi l'immagine $2s^{\text{esima}}$ sarà costituita dalla massa

$$-\mathrm{UR}\frac{a}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}$$

concentrata nel punto m_{2s} e dalla massa colla densità

$$\mathrm{U}a\operatorname{senh}s\omega$$

distribuita uniformemente sul segmento $m_{2s}\, m'_{2s-1}$; l'immagine $(2s+1)^{\text{esima}}$ sarà costituita dalla massa

$$-\mathrm{UR}\frac{a}{\operatorname{senh}(s+1)\omega}$$

concentrata nel punto m_{2s+1} e dalla massa distribuita uniformemente colla densità

$$\mathrm{U}a\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')$$

sulla retta $m_{2s+1}\, m'_{2s}$.

Chiamando dunque con X (a, b, e) la funzione potenziale di un segmento omogeneo di densità 1 limitato dai punti a e b, essendo e il punto potenziato, si avrà che il potenziale di velocità del fluido nel punto e sarà dato da:

$$-\mathrm{U\,R}a\left(\sum_0^\infty{}_s \frac{1}{r_{2s}\operatorname{senh}(s\omega+\alpha)} + \sum_0^\infty{}_s \frac{1}{r_{2s+1}\operatorname{senh}(s+1)\omega}\right)$$

$$+\mathrm{U}a\left[\sum_1^\infty{}_s \operatorname{senh}s\omega\,\mathrm{X}(m_{2s}, m'_{2s-1}, e) + \sum_1^\infty{}_s \operatorname{senh}((s-1)\omega - \alpha')\,\mathrm{X}(m_{2s-1}, m'_{2s-2}, e)\right]$$

in cui r_h sta ad indicare la distanza del punto m_h dal punto e.

V.

È per ultimo da notare come [osservando che le componenti della velocità delle particelle di un fluido indefinito, in cui non è immerso alcun solido e ove si hanno delle linee vorticose, possono esprimersi per mezzo della funzione potenziale di masse magnetiche] applicando i principii enunciati al § 1 possono con grandissima facilità determinarsi le componenti delle velocità delle diverse particelle di un fluido avente note linee vorticose in un dato istante, quando in esso sia immersa una sfera solida fissa, oppure avente un dato moto di traslazione, con un raggio costante, oppure con un raggio variabile con una data legge.

In casi particolari riesce facile applicare il metodo delle immagini successive se nel fluido è immersa più di una sfera.

Pisa, giugno 1882.