MATEMATYKA I RZECZYWISTOŚĆ.

Przedruk z „Niwy“.

Sprostowanie. Str. 10 wiersz 14 od dołu zamiast [6]) winno być [5]); str. 11 wiersz 6 od góry zamiast [5]) winno być [6]).

S. DICKSTEIN.

MATEMATYKA I RZECZYWISTOŚĆ.

SZKIC.

WARSZAWA.
Wydawnictwo Redakcyi „Prac matematyczno-fizycznych".
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.
1893.

Дозволено Цензурою, Варшава 29 Мая 1893 г.

W drukarni J. Sikorskiego, pod zarządem A. Saładyckiego. Warszawa, Warecka 14.

MATEMATYKA I RZECZYWISTOŚĆ.

Pełnej rozmaitości, życia i ruchu, działającej na zmysły i wyobraźnią rzeczywistości, przeciwstawia się zwykle jednostajny, szematyczny i suchy jakoby świat form matematycznych. Przepaść między jednym a drugim światem zdaje się być nieprzebytą: pierwszy istnieje po za nami i bez nas, drugi tylko w umysłach naszych; pierwszy ulega w rozmaitości swej stałym i niezmiennym „prawom“ przyrody, drugi jest wytworem subjektywnym myślenia i ulega tylko prawom logiki; zjawiska w pierwszym rozwijają się według prawa przyczynowości, rozwój drugiego zdaje się być dziełem przypadku.

Jakie, mimo tej głębokiej różnicy, istnieje pokrewieństwo między temi światami, jakie zachodzą pomiędzy niemi związki? — oto pytanie, na które staramy się odpowiedzieć w niniejszym zarysie.

Dzieje matematyki wykazują, że nie powstała ona odrazu, lecz podobnie, jak i inne umiejętności, ze słabych, niemowlęcych wyrosła początków, z niemałym dobywając trudem nawet najprostsze pojęcia, dziś dostępne każdemu dziecku wśród ucywilizowanych narodów. Wytworzenie takich form, jak: liczby całkowite, prosta, okrąg koła, i t. d., poznanie ich najprostszych własności i ujęcie ich w pewien system — stanowiło jeden z najpotężniejszych kroków w dziedzinie umysłowości. Już przez te formy zdobyła sobie ludzkość drogę do doskonalenia się, za pomocą nich bowiem przeniósł człowiek część świata zewnętrznego do swego umysłu, upraszczając go i idealizując. Odtąd, dzięki nieustającemu doświadczeniu i refleksyi, wzbogacał zasób form i ich kombinacyj. Była to podstawa, na której powoli w ciągu wieków wznosił się gmach wiedzy abstrakcyjnej, imponującej dziś bogactwem, ścisłością i systematycznością.

Formy matematyczne, o jakich mówimy, nazwaćby można w pewnej mierze odbiciem rzeczywistości w umyśle. Odbicie to nie jest wszakże biernem, jak np. odbicie przedmiotów zewnętrznych w zwierciedle, bo w niem czynny jest umysł, działa wyobraźnia twórcza, stwarzając to, co w świecie zewnętrznym w odosobnieniu nie istnieje. Forma matematyczna, jak liczba lub linia, jakkolwiek pod wpływem świata zewnętrznego powstała, jest czemś zupełnie różnem od tego, co na jej wytworzenie wpłynęło. Linia np. jest formą, którą umysł wyłania z przedmiotów świata zewnętrznego, której wszakże uzewnętrznić w odosobnieniu nie można; każda bowiem linia nakreślona staje się sama przedmiotem zewnętrznym, *nieprzyrównalnym* (indaequatus) do formy geometrycznej. Linia istnieje zatem, ściśle mówiąc, tylko w umyśle, jako pewien typ, lub schemat, dający się odkryć w świecie zewnętrznym. Podobnież liczba całkowita, naprzykład liczba trzy, jest formą odpowiadającą pewnej określonej wielości przedmiotów, zjawisk lub aktów świadomości. Liczba i odpowiadająca jej wielość przedmiotów są jednak w istocie swej różnemi: liczbę upatrujemy w wielości jako typ, lub pierwowzór, jako wyraz tego, co pozostaje stałem i niezmiennem, mimo zmiany porządku przedmiotów ją składających.

To, co mówimy o formach najprostszych, stosuje się do wszystkich form matematycznych, powstałych czy to za pobudką doświadczenia, czy to w dalszym rozwoju wiedzy, bez bezpośredniego udziału tegoż. W powstaniu tych form czynną więc jest zawsze wyobraźnia twórcza: umysł, który daje światu formy matematyczne, jest artystą nie w przenośnem, lecz w ścisłem znaczeniu tego wyrazu.

W tworzeniu form matematycznych zachodzi wzajemne współdziałanie umysłu i świata zewnętrznego. Pobudka pierwotna pochodzi z zewnątrz, umysł zaś wytworzone formy przenosi znów do świata zewnętrznego, szukając przedmiotów i zjawisk, do których możnaby je było stosować. Formy matematyczne są więc, rzec można, dziedziną wzajemnego przystosowania rzeczywistości do umysłu i odwrotnie; są, jak to zobaczymy, przewodnikami, za pośrednictwem których umysł ludzki przy pomocy doświadczenia dochodzi do poznania rzeczywistości, a raczej do naukowego badania zjawisk przyrody.

W tworzeniu form nowych matematyka wszakże wznosi się często ponad rzeczywistość, zbadaną w danej epoce, t. j. mówiąc inaczej, przekracza dziedzinę form, z doświadczenia zaczerpniętych i z niego za pomocą rozumowań wyprowadzonych: rozwój matematyki wyprzedza niejako rzeczywistość.

Przekroczenie dziedziny jest spekulacyą czysto teoretyczną, pod wpływem tej samej twórczości, która pierwotne dała nam pojęcia. Takie formy, jak liczby ułamkowe, powstać mogły i powstały zapewne pod wpływem doświadczenia (dzielenie wielkości na części), ale liczby ujemne, zespolone (urojone), niewymierne, nieskończenie małe i nieskończenie wielkie powstały na drodze badania teoretycznego i później dopiero znalazły zastosowanie, czyli zostały „zrealizowane". W tego rodzaju poszukiwaniach naukowych powtarza się to zjawisko, że jedni trzymając się ściśle dziedziny pierwotnej uważają za dozwolone to tylko, co do niej bezpośrednio się odnosi, odrzucając formy nowe, jako symbole bezużyteczne; inni zaś, obdarzeni duchem bardziej spekulacyjnym, wprowadzają bez obawy nowe formy do dziedziny badań, na podstawie określeń formalnych.

Liczby ujemne odrzucano dawniej, uważając je za niedorzeczne, a przynajmniej nie umiano sobie radzić z tego rodzaju formami, nie wiedząc, czy będą mogły znaleść zastosowanie. Lecz gdy postęp nauki wskazał zastosowania ich ważne, zwłaszcza w geometryi analitycznej, pogodzono się z niemi, uprawniono je, i dzięki im, można było wiele twierdzeń algebry wypowiedzieć w formie ogólniejszej niż przedtem. Odtąd dziedzina liczb rozszerzyła się i wzbogaciła, objąwszy w sobie i liczby ujemne. Dziś działania nad niemi są rzeczą tak pewną i ustaloną, że wszelkie wątpliwości zupełnie ustały.

Podobną walkę stoczyć musiały formy zespolone (urojone) z umysłami zachowawczych matematyków, i jakkolwiek zwycięztwo osiągnęły niezaprzeczone, mimo to, od czasu do czasu powstają jeszcze głosy przeciwne równouprawnieniu tych form z „rzeczywistemi“. Już sama nazwa liczb lub ilości urojonych“ (imaginaires) maluje dostatecznie pogląd, jaki miano dawniej o tych formach rachunkowych. Napotkano je pierwszy raz wtedy, gdy umiejąc już wykonywać działania zasadnicze na liczbach ujemnych, próbowano zastosować do tych ostatnich działanie wyciągania pierwiastków (np. przy rozwiązywaniu równań stopnia drugiego). Rozumowano w ten sposób: ponieważ kwadrat liczby dodatniej czy ujemnej jest zawsze liczbą dodatnią, oczywiście więc niema takiej liczby ani dodatniej ani ujemnej, którejby kwadrat był równy danej liczbie ujemnej np. -4; $\sqrt{-4}$ zatem jest liczbą „niemożliwą“, „nieistniejącą“, „urojoną“,—nie jest wcale liczbą, — jest symbolem bez znaczenia. Tak przedstawia się atoli sprawa na pierwszy rzut oka i tak zapatrywali się na nią matematycy nawet do niezbyt odległych czasów. Ale gdy spostrzeżono, że liczby urojone w algebrze zawierają się w tych samych wyrażeniach lub formach ogólnych, w których zawierają się i liczby rzeczywiste, uznano, że ogólność, będąca cechą badań matematycznych, nie godzi się z banicyą form urojonych, i postanowiono rozszerzyć dziedzinę liczb, wprowadzając do niej i takie formy, które owo działanie wyciąganie pierwiastka kwadratowego z liczb ujemnych za uprawnione uważać dozwalają. Takie wprowadzenie liczb nowych, gwoli usunięcia niemożliwości, mogłoby się wydawać tylko pewnym wybiegiem, pozornem załatwieniem sprawy. Tak byłoby w istocie, gdyby nowe formy i działania nad niemi, na podstawie odpowiednich określeń wykonywane, pozostały tylko czczą i bezużyteczną spekulacyą. Tymczasem rzecz się ma zupełnie przeciwnie, nowe bowiem formy pozwoliły na znakomite uogólnienie badań i na odkrycie twierdzeń, dojście do których na innej drodze nie dałoby się wcale lub z trudnością osiągnąć. Oprócz tych korzyści bezpośrednich, potrafiono szczęśliwie znaleść dla liczb zespolonych i sposób przedstawienia geometrycznego, (sposoby A r g a n d a i G a u s s a) i zastosować je do zagadnień nietylko analizy ale i geometryi. Przez wprowadzenie liczb urojonych nauka uczyniła postęp rzetelny.

Co do sprzeczności wewnętrznej, jaka tkwić się zdaje w pierwotnem pojęciu form urojonych, uczynimy tu uwagę ogólną, odnoszącą się do całej kategoryi form nowych, do nauki w analogiczny sposób wprowadzanych. Sprzeczność, o której mowa (np. w przypadku liczby urojonej, wyrażająca się w równaniu $x^2 = -4$), nie jest sprzecznością bezwzględną z zasadniczemi prawami logiki, na których matematyka, jak i każda umiejętność, opierać się musi. Sprzeczność ta jest względna, t. j. zachodzi tylko w odniesieniu do dziedziny, w której badania nasze wykonywamy. Skoro dziedzinę rozszerzymy, sprzeczność znika. Dla objaśnienia tej myśli możemy podać przykład następujący z geometryi.

Dajmy na to, że konstrukcye geometryczne wykonywamy na płaszczyznie, i że z punktu danego chcemy nakreślić trzy proste wzajemnie do siebie prostopadłe. Układ taki, jak to dobrze wiadomo z planimetryi, jest niemożliwy, bo do prostej w punkcie danym tylko jednę prostopadłą poprowadzić można. Lecz niemożliwość upada, skoro od płaszczyzny przechodzimy do przestrzeni, w której w każdym punkcie taki układ trójprostokątny pomyśleć i nakreślić można. To więc, co było niemożliwością w dziedzinie dwuwymiarowej płaszczyzny, staje się możliwem w dziedzinie trójwymiarowej przestrzeni. Niemożliwość zatem lub sprzeczność pierwotna przez rozszerzenie dziedziny została usunięta.

Postęp matematyki polega właśnie między innemi i na tem, że niemożliwości, jakie napotyka na drodze rozwoju, (jeżeli nie są niemożliwościami logicznemi lub bezwzględnemi) znosi przez to, że przekracza dziedzinę badania, że rozszerza niejako widnokrąg, stwarzając nowy świat form, obejmujący w sobie świat pierwotny. Badanie takich form ogólniejszych nasuwa umysłowi nowe interesujące zagadnienia, zazwyczaj płodne w następstwa.

Liczby niewymiernie (algebraicznie) i przestępne przedstawiały także niemałe trudności przy wprowadzeniu ich do dziedziny arytmetycznej. Pierwsze z nich odkrył już P y t a g o r a s, gdy pragnął wyrazić liczbą stosunek długości przekątnej do długości boku w kwadracie; jest to zadanie znane z geometryi elementarnej. Stosunek ten nie dał się wyrazić ani liczbą całkowitą ani ułamkową; a ponieważ dziedzina podówczas znanej nauki innych liczb nie obejmowała, nie był więc ten stosunek liczbą w ówczesnem, ograniczonem znaczeniu tego wyrazu. Wiemy, że ten stosunek wyraża się jako $\sqrt{2}$; nie wyłączamy go obecnie z dziedziny liczb, owszem miejsce jego w tej dziedzinie określić potrafimy. Ale sposób, w jaki tę i inne liczby niewymierne, które później poznano, do dziedziny liczb wprowadzać należy; droga, na jakiej należy liczby niewymierne związać z pozostałą dziedziną, bywa jeszcze dotąd rozmaicie pojmowana. Można np. $\sqrt{2}$ uważać jako granicę, do której dąży szereg liczb 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142,... coraz bardziej rosnących i coraz mniej od siebie się różniących, jest zatem $\sqrt{2}$ wyrazem *idealnym* zasobu powyższych kolejnych wartości, coraz dokładniej stosunek przekątnej do boku kwadratu wyrażających. Jest to więc nowa forma rachunkowa, nowe narzędzie, upraszczające nasze rozumowania i dochodzenia. Gdy zaś okaże się, że do tej formy lub innych w podobny sposób wprowadzonych, można na zasadzie definicyi stosować i arytmetyczne działania, że te działania nie prowadzą do sprzeczności z działaniami dla liczb wymiernych (całkowitych i ułamkowych), że owszem jedne i drugie w ogólnych prawidłach zawrzeć się dają, to od tej chwili liczby niewymierne mają prawo bytu w nauce.

W inny oryginalny sposób wprowadza Dedekind [1]) liczby niewymierne do arytmetyki. Wyobraźmy sobie najprzód szereg liczb wymiernych (całkowitych i ułamkowych) i podzielmy go na dwie klasy tak, aby każda liczba pierwszej klasy była mniejsza od którejkolwiek liczby klasy drugiej. Możemy naprzykład w klasie pierwszej umieścić wszystkie liczby mniejsze od 2 oraz liczbę 2, w drugiej zaś wszystkie liczby większe od 2. Przy takim podziale liczba 2 jest *największą* w klasie pierwszej. Jest ona *przecięciem* (Schnitt) szeregu liczb wymiernych na dwie klasy, bo na niej kończy się klasa pierwsza i od niej zaczyna druga. Gdybyśmy w klasie pierwszej umieścili wszystkie liczby wymierne mniejsze od 2, w drugiej liczbę 2 oraz liczby od 2 większe, to znów liczba 2 byłaby *najmniejszą* w klasie drugiej i stanowiłaby jak poprzednio „przecięcie“ danego szeregu.

Ale zachodzić może i taki przypadek podziału liczb wymiernych na dwie klasy, że w klasie pierwszej nie będzie liczby największej lub w drugiej — najmniejszej. W samej rzeczy podzielmy liczby wymierne na dwie klasy tak, aby w pierwszej znajdowały się wszystkie liczby, których kwadrat jest mniejszy od 2, w drugiej te, których kwadrat jest większy od 2. Ponieważ oczywiście nie ma liczby wymiernej, której kwadrat równa się 2, nie będzie zatem, jak to powiedzieliśmy, ani liczby największej w klasie pierwszej ani najmniejszej w drugiej. Mimo to, dla zachowania analogii, możemy liczbę $\sqrt{2}$ uważać za „przecięcie“ szeregu liczb wymiernych i będzie ona przez to zupełnie ściśle określona. Na podstawie podobnych określeń da się miejsce liczb niewymiernych w dziedzinie liczb wyznaczyć i teorya działań nad niemi uzasadnić.

Liczby przestępne, arytmetycznie biorąc, mają cechę liczb algebraicznie niewymiernych (wyrażają się, jako ułamek dziesiętny nieperyodyczny o nieskończonej liczbie cyfr dziesiętnych), ale geneza ich jest odmienna. Takiemi np. są wogóle logarytmy liczb; taką jest stosunek okręgu koła do średnicy, owa sławna liczba, oznaczana dziś przez π, znana w starożytności, lecz ostatecznie dopiero co do istoty swej zbadana przed niedawnym czasem. Przed dziesiątkiem lat, dzięki pracom Hermite'a, mógł Lindemann [2]) dowieść, że liczba π nie może być pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych. Tym sposobem zamknięte zostały długie dzieje daremnych poszukiwań nad kwadraturą koła, które tyle umysłów bezpożytecznie najczęściej podejmowało. Najciekawsza historya błędnych rozumowań mieści się w tych właśnie niezliczonych pracach, które miały na celu dokonanie zupełnie ścisłej kwadratury koła sposobem elementarnym. Jeżeli kto dziś jeszcze podejmuje tego rodzaju usiłowania, to napewno powiedzieć o nim można, że obecnego stanu nauki nie zna i wyników jej nie rozumie.

Wracając do przykładu wyżej podanego liczby niewymiernej $\sqrt{2}$, możemy powiedzieć, że liczby 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142,... coraz bardziej rosnące, *dążą* do granicy „idealnej“ $\sqrt{2}$ w ten sposób, że różnica między kolejnemi liczbami a tą granicą staje się wciąż mniejszą i stać się może mniejszą od każdej liczby wymiernej dowolnie małej. Od tego właśnie uważania był tylko krok jeden do utworzenia nowego pojęcia, a mianowicie pojęcia liczby *nieskończenie małej*, stanowiącej jednę z zasadniczych form rachunku wyższego. Ten krok stanowczy uczyniono względnie późno, bo w drugiej połowie 17-go stulecia. Przyczyna tego tkwiła, jak sądzimy w tem, że matematyka nie prędko wzniosła się do jasnego pojęcia zależności jednych form od drugich, którą to zależność obejmujemy dziś pod ogólną nazwą *funkcyi*. Liczby uważano raczej w stanie gotowym, tak jakby sztywne formy geometryczne, a powolne stopniowe wzrastanie lub ubywanie jednych wielkości przy zmienianiu drugich, nie było poddawane roztrząsaniu. Dopiero badanie rzeczywistości, t. j. zjawisk przyrody, pobudziło umysły matematyków do odpowiednich spekulacyj teoretycznych. Dowód tego znajdujemy w świetnych Galileusza: „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nouve scienze“ (1638), gdzie odkrycie podstawowych prawd mechaniki łączy się ze spekulacyą o naturze ilości nieskończenie małych. To dzieło Galileusza i wcześniejsze jeszcze prace Keplera, Cavalieri'ego, Fermata, Barrowa i Wallisa [3]) urobiły i przygotowały umysły matematyków do przyjęcia nauki Leibniza o nieskończenie małych; ta zaś wraz z równoczesną prawie metodą „fluksyj“ lub stycznych Newtona [4]) dała światu potężne narzędzia teoretyczne pod postacią rachunku rożniczkowego i całkowego. Rachunek ten ustalił swoje metody, ale natura „nieskończenie małych“ niepokoiła i niepokoi wciąż jeszcze umysły. Metafizyce tych form liczne poświęcono studya i dziś jeszcze zapatrują się na nie filozofowie odmiennie, stosownie do stanowiska swego. Mimo jednak różnic w poglądach, mimo sprzeczności, jakie niektórzy w pojęciu nieskończenie małych znajdują, matematyk z całem zaufaniem wykonywa na nich działania, fizyk zaś stosuje je w badaniach teoretycznych. Określenia formalne nieskończenie małych i działań nad niemi są dla matematyka dostateczną rękojmią, że używając metod ściśle uzasadnionych i z określeniami zgodnych, błędu nie popełni. Teorya formalna usuwa niejako metafizykę i pozwala badaczowi stąpać bez obawy po drodze, najeżonej trudnościami dla filozofa.

Toż samo da się powiedzieć o formach nieskończenie wielkich, które w matematyce znalazły przytułek pewny i nie prowadzą na manowce, jeżeli tylko ściśle trzymać się będziemy tych określeń, na podstawie których formy te wprowadziliśmy i strzedz się będziemy błędów logicznych w rozumowaniu. Powiemy więcej: formy takie okazują się bardzo pożytecznem narzędziem i otwierają widoki szersze, prowadzą do interesujących uogólnień. Pytanie metafizyczne, czy liczby lub formy nieskończone „istnieją“ w znaczeniu metafizycznem, do matematyki, ściśle biorąc, nie należy; jest w niej rzec można, pytaniem próżnem. Pomieszanie teoryj matematycznych z pytaniami metafizycznemi prowadziło często do błędów i niedorzeczności. W zastosowaniu zwłaszcza do przestrzeni należy starannie wystrzegać się pomieszania matematyki z metafizyką [6]). Dla matematyka przestrzeń, jako pewna forma geometryczna, może być skończoną lub nieskończoną; czy zaś przestrzeń zjawisk przyrody jest „w rzeczy samej“ skończoną lub nieskończoną, tego matematyka nie rozstrzyga i rozstrzygnąć nie może. Wolno badaczowi przyjąć jedno lub drugie, byleby wiedział dokładnie, co tkwi w jego przyjęciu i do jakich wniosków logicznych ono go upoważnia.

Pojęcie liczb niewymiernych, przestępnych i nieskończenie małych związane jest z pojęciem *ciągłości*. I to pojęcie niemało sprawia kłopotu filozofom. Powszechnie uważamy przez intuicyą przestrzeń za ciągłą, ruch ciał w przestrzeni za ciągły; jednem słowem poczytujemy ciągłość za własność zasadniczą i konieczną w dziedzinie rzeczywistości. Głębsze wszakże wniknięcie w istotę tego poglądu wskazuje, że nie tylko nie potrafimy bliżej określić, na czem ciągłość polega, lecz że doświadczenie zwykłe, jeżeli na niem wprost ciągłość oprzeć zechcemy, doprowadza do sprzeczności z zasadniczemi prawami logiki. Pokazuje to dobrze przykład podany przez Poincaré'go [5]). Weźmy trzy ciężary A, B, C, z których pierwszy waży 10 gramów, drugi 11, trzeci 12, i dajmy, że chcemy ocenić różnicę pomiędzy niemi za pomocą wrażenia, jakie sprawiają, cisnąc na dłoń naszą. Znanym to jest faktem, że wrażenie doznane od A i od B, z powodu niewielkiej różnicy ciężarów obu ciał, będzie jednakowe, podobnież jednakowem będzie wrażenie doznane od B i C; jeżeli jednak weźmiemy A i C, to z powodu większej różnicy ciężarów, doznamy wrażeń różnych. Gdybyśmy więc z wrażeń doznanych chcieli wnioskować o ciężarach, doszlibyśmy do wniosku następującego:

$$A = B, B = C, \quad A > C.$$

Otóż wniosek ten jest w sprzeczności z zasadniczem prawem logiki, według którego, jeżeli

$$A = B, \quad B = C, \quad \text{to być musi} \quad A = C.$$

Toż samo miałoby miejsce, gdybyśmy chcieli porównywać długości. Najdoskonalsze narzędzie miernicze nie pozwala na oznaczenie długości z ścisłością bezwzględną; skąd wynika, że to pojęcie ciągłości, które jakoby na drodze doświadczalnej otrzymujemy, ściśle biorąc, ukrywa w sobie sprzeczność logiczną.

Przykład ten pokazuje, że ciągłość jest pojęciem czysto matematycznem i jakkolwiek pobudkę do niego daje doświadczenie, to jednak tylko przy pomocy form matematycznych, od błędów doświadczenia wyzwolonych, może być stosowane z zupełną pewnością i bez obawy o sprzeczność z zasadami logiki. Do tego właśnie celu liczby nieskończenie małe okazały się narzędziem najodpowiedniejszem.

Czem jest ciągłość, metafizycznie biorąc,—to do matematyki nie należy. Matematyka nie rozstrzyga pytania, czy ciągłość ta tkwi w przedmiotach, czy jest wypływem właściwości umysłu i pozostawia pytanie to filozofom. To wszakże nie ulega wątpliwości, że tylko w dziedzinie matematyki ciągłość jest pojęciem, na którem bez szwanku operować można. Przy stosowaniu zaś tego pojęcia do badania przyrody, trzeba mieć zawsze to na pamięci, że za pomocą niego rzeczywistość idealizujemy i że wyniki podobnego badania należy pojmować jedynie w związku z hypotezami, którą za podstawy przyjęto, jakto jeszcze niżej objaśnimy [7]).

*

* *

Na stosunek matematyki do rzeczywistości rzuca wiele światła geometrya. Wiadomo, że nauka ta opiera się na pewnej liczbie twierdzeń zasadniczych czyli pewników, aksiomatów lub postulatów, odnoszących się do linii prostej i do płaszczyzny i że system prawd treść jej stanowiących, rozwija się na tej podstawie przy pomocy dedukcyi. Nie potrzebuje ta umiejętność doświadczenia dla dochodzenia do prawd nowych, zastępując je dowodzeniem, opartem na prawidłach logiki i prawdach, poprzednio już dowiedzionych. Ostatecznemi więc elementami każdego dowodu geometrycznego są własności form, wprowadzanych za pomocą konstrukcyi lub przez określenie, i owe prawdy zasadnicze, będące podwaliną całego systemu. Jeżeli więc wolno podnieść pytanie o „prawdziwości“ geometryi, to ono przedewszystkiem zwrócone być winno do twierdzeń zasadniczych; innemi słowy, pytanie, czy geometrya może mieć zastosowanie do świata rzeczywistego, należy zwrócić do jej pewników.

Powiemy tu odrazu, że w nauce formalnej, ściśle biorąc, pytanie takie jest zbyteczne. Nie pytamy w niej bowiem, jakie jest źródło prawd podstawowych, ale czy stanowią one układ konieczny i dostateczny do zbudowania umiejętności; albo raczej czy są od siebie niezależne i czy nie zachodzi pomiędzy niemi sprzeczność logiczna. Jeżeli tak jest, to układ prawd, z nich wynikający, a prawom logiki zadość czyniący, stanowi naukę formalną, mającą w sobie samej racyą bytu. Nieco inaczej przedstawia się rzecz, gdy umiejętność formalną stosujemy do badania przyrody. Wtedy pytamy, czy i w jakim stopniu w pewnikach odtwarza się idealnie rzeczywistość, czy stosowanie twierdzeń nie doprowadza do niezgody z doświadczeniem. Strona zasadnicza tego pytania, należącego przeważnie do teoryi poznania, stanowi jedno z największych zagadnień filozoficznych.

Geometrya euklidesowa stanowi typ umiejętności, przy pomocy którego filozofowie pragnęli rozstrzygnąć powyższe pytanie. Geometryą bowiem stosujemy bez wahania w fizyce, astronomii i w naukach praktycznych. Doświadczenie i obserwacya nie doprowadzają nigdy do sprzeczności z jej twierdzeniami. Czy jednak wolno wyprowadzać stąd wniosek, że geometrya euklidesowa jest ściśle przystosowaną do rzeczywistości, lub raczej, że stosunki, zachodzące w świecie zewnętrznym, odpowiadają ściśle prawdom geometryi euklidesowej? Matematyk takiego wniosku stąd nie wyciąga; co najwyżej wolno mu twierdzić, że geometrya euklidesowa nadaje się w zupełności do *opisania* rzeczywistości w granicach doświadczenia. Nie porzucając więc wcale tej geometryi, jako „nieprawdziwej“, wolno wszakże pomyśleć i nowy system, który do opisania rzeczywistości mógłby się nadać.

Lecz w jaki sposób matematyka doszła do tak zadziwiającego postawienia kwestyi? Historya tego jest bardzo ciekawa, w treści zaś swej przedstawia się w sposób następujący:

Jeden z pewników geometryi euklidesowej, znany powszechnie pod nazwą XI-go aksiomatu, stanowiący podstawę nauki o liniach równoległych w tej geometryi, brzmi tak: „Dwie proste na płaszczyźnie, przecięte trzecią, a tworzące kąty wewnętrzne, których suma jest nierówna dwóm kątom prostym, muszą się przecinać po przedłużeniu w tę stronę, po której ta suma jest od dwóch kątów prostych mniejsza". Pewnik ten jest równoważny jednemu z twierdzeń następujących:

przez punkt dany zewnątrz prostej można do niej poprowadzić tylko *jednę* równoległą;

suma kątów wewnętrznych trójkąta równa się dwóm kątom prostym.

Otóż którekolwiek z tych twierdzeń możemy przyjąć za twierdzenie zasadnicze, a wtedy XI aksiomat będzie jego konsekwencyą. Możnaby przeto powiedzieć, że geometryą euklidesową charakteryzuje twierdzenie zasadnicze planimetryi: „suma kątów trójkąta równa się dwóm kątom prostym".

Geometrów oddawna trapił pewnik, o którym mowa, i nieraz nasuwała się im myśl, czy nie jest on wynikiem innych pewników, czy nie jest twierdzeniem, dającem się dowieść? Podejmowali w tym kierunku usiłowania i podawali często misterne bardzo dowodzenia, które jednak w gruncie rzeczy okazały się zwodniczemi. Teorya linij równoległych nie dała się ostatecznie inaczej uzasadnić i na tej drodze liczby pewników geometryi nie można było zmniejszyć.

Wtedy profesor kazański Łobaczewski (w r. 1826), a z nim równocześnie prawie geometra węgierski Bolyai postawili kwestyą w sposób całkiem odmienny. Jeżeli aksiomat o liniach równoległych dowieść się nie da, zmieńmy go i zobaczmy, czy na tej podstawie nie da się zbudować system umiejętności? W miejsce twierdzenia: „suma kątów w trójkącie jest równa dwóm kątom prostym“ postawmy inne: „suma kątów trójkąta jest mniejszą od dwóch kątów prostych“ i dołączywszy ten pewnik do pozostałych twierdzeń zasadniczych geometryi, postarajmy się rozwinąć geometryę według typu geometryi euklidesowej. Zadanie to udało się rozwiązać w zupełności, i nauka, w ten sposób powstała, nazwaną została *geometryą nieeuklidesową*. W geometryi tej przez punkt dany zewnątrz prostej nie jednę tylko lecz dwie właściwe równoległe poprowadzić można; a za tem twierdzenie idzie cały szereg innych, których tu przedstawiać nie będziemy [8]).

Teorya Łobaczewskiego była wielkim krokiem naprzód, jakkolwiek nie postawiła jeszcze kwestyi na stanowisku najogólniejszem. Riemann (1854) i Helmholtz (1867) posunęli się jeszcze dalej [9]). Jeżeli w układzie pewników można jeden z nich zastąpić założeniem nowem—tak rozumują ci uczeni — w takim razie system pewników geometryi nie stanowi prawd *koniecznych;* pewniki geometryi euklidesowej są zatem *hypotezami*, z doświadczenia wywnioskowanemi i nadającemi geometryi euklidesowej charakter nauki w podstawach swych empirycznej. Możliwem jest więc pytanie, jaki jest układ hypotez, mogących służyć za podstawę umiejętności ogólnej, której geometrya euklidesowa i nieeuklidesowa są szczególnemi przypadkami.

Zadanie takiej umiejętności ogólnej polega na tem, aby wynaleźć te cechy elementów zasadniczych, jak punktu, prostej (linii najkrótszej) i t. d. które charakteryzują system elementów (przestrzeń) i mogą być wydzielone, jako układ pewników geometryi. Według Riemanna i Helmholtza, którzy pytanie to traktowali na drodze analitycznej, rachunkowej, cechą przestrzeni jest wyrażenie jej elementu liniowego (odległości dwóch punktów nieskończenie bliskich), lub też jej *krzywizna*. Przestrzeń geometryi euklidesowej jest tym sposobem przestrzenią trójwymiarową ciągłą o krzywiznie równej zeru. W przestrzeni geometryi nieeuklidesowej krzywizna jest stałą ujemną. Ale oprócz tych dwóch przypadków są możliwe inne; jednym z najważniejszych jest ten, w którym krzywizna jest stałą dodatnią (przestrzeń Riemannowska). Trójwymiarowość nie stanowi konieczności w tej ogólnej nauce; cechy matematyczne bowiem nie zmieniają się, jeżeli zamiast przestrzeni trójwymiarowej rozważać będziemy powierzchnie t. j. „rozmaitości“ dwuwymiarowe, lub jeżeli *pomyślimy* rozmaitość *niewyobrażalną*, której liczba wymiarów jest większą niż trzy. Możemy mówić zatem o płaszczyznie lub w ogóle o rozmaitości euklidesowej, (parabolicznej, według terminologii Kleina), w której suma kątów trójkąta jest równa dwóm kątom prostym; o rozmaitości nieeuklidesowej (hyperbolicznej), w której ta suma jest od dwóch kątów prostych mniejsza, wreszcie o rozmaitości Riemannowskiej (eliptycznej), w której ta suma jest od dwóch kątów prostych większa. „Rozmaitości dwuwymiarowe“ można sobie wyobrazić wewnątrz naszej zwykłej przestrzeni; pierwszą z nich jest oczywiście każda zwyczajna płaszczyzna; do kategoryi drugich należy powierzchnia nieskończona, t. z. pseudo-sferyczna, opisana przez Beltrami'ego; do kategoryi trzecich powierzchnia zwyczajnej kuli. (Wiadomo, że na powierzchni kuli suma kątów trójkąta sferycznego, utworzonego z łuków kół wielkich, jest od dwóch kątów prostych większa).

Każda z tych geometryj rozwinęła się w sposób ścisły i konsekwentny, a rozwój ich wpłynął na inne dziedziny matematyki; mają więc te badania racyą bytu w nauce zupełnie tak samo, jak teorye liczb niewymiernych, ujemnych i urojonych, którym początkowo nie przypisywano żadnego znaczenia.

Mimo to niemało jest filozofów, którzy uważają te badania za pracę poronioną, a wszelką geometryą od euklidesowej różną za sprowadzającą się ostatecznie do absurdu. Dühring, Renouvier i inni [10]). Filozofowie ci są zdania, że jedynie pewniki geometryi euklidesowej są idealizacyą rzeczywistości. Czyż tak jest w istocie? Do tego pytania sprowadza się, jak sądzimy, i wielki problemat Kanta o przestrzeni, jako formie koniecznej poznania zmysłowego. Ze stanowiska matematyki problemat ten jest nierozstrzygnięty, a w samej matematyce zbyteczny; doświadczeniem również rozstrzygnąć się nie da. Doświadczenie nic nie może orzec o nieskończoności przestrzeni zjawisk; to zaś, co o skończoności lub nieskończoności przestrzeni wchodzi pod formą pewników do geometryi odnosi się do idealnej formy przestrzeni matematycznej. Matematyka zatem, nie czekając rozwiązania metafizycznego, uogólnia swoje pojęcia i snując wątek swych rozumowań na formach idealnych, dokładnie określonych, stwarza umiejętność w ścisłem znaczeniu tego wyrazu, pozostawiając przyszłości możliwe zastosowanie do badań fizycznych jej prawd abstrakcyjnych, na tej drodze zdobywanych.

Jak w badaniach arytmetycznych używamy liczb ujemnych, ułamkowych, niewymiernych, urojonych i t. d., nie wyrzekając się liczb rzeczywistych całkowitych, które pozostaną układem *najprostszym* liczb arytmetyki, podobnież badając teoretycznie przestrzenie różne od euklidesowej, nie usuwamy wcale geometryi euklidesowej, która pozostanie układem *najprostszym* naszej umiejętności geometrycznej. Mylnem więc jest twierdzenie, że zwolennicy nowych geometryi chcą zburzyć geometryą Euklidesa; widzą oni w niej tylko jeden z przypadków szczególnych ogólniejszej nauki formalnej, która prawdy zasadnicze, z doświadczenia poczerpnięte, zastępuje prawdami w pewnej mierze dowolnemi lecz ściśle określonemi. Pewniki lub postulaty i samej geometryi euklidesowej nie są więc, ściśle biorąc, prawdami doświadczalnemi, lecz odnoszą się do form idealnych, jako elementy przestrzeni uważanych [11]).

I wybór elementów jest nawet dowolny. Prostą wyznaczają, jak wiadomo nie tylko dwa punkty, ale i dwie płaszczyzny (przecięcie płaszczyzn), tak że wielu twierdzeniom geometrycznym, odnoszącym się do figur uważanych za układy punktów, odpowiadają twierdzenia odnoszące się do figur, określonych przez układy płaszczyzn. Istnieje, jak widzimy, pewien dualizm, okazany tu na przykładzie najprostszym, skutkiem którego „punkt" i „płaszczyzna" mogą być uważane zarówno za elementy przestrzeni. Dualizm ten wzbogacił geometryą wielu nowemi i pięknemi twierdzeniami. Dajmy inny jeszcze przykład: nazwijmy „punktem" prostą, przechodzącą przez punkt w zwykłem znaczeniu; „płaszczyzną" ogół (∞) prostych przestrzeni, przechodzących przez punkt zwykły; „prostą" nazwijmy ogół (∞) prostych w zwykłem znaczeniu, przechodzących przez jeden punkt zwykły i leżących na jednej płaszczyźnie w znaczeniu zwykłem. Przy tak zmienionej roli pojęć utrzymuje się wszakże twierdzenie: „prosta" jest określona przez dwa „punkty"; trzy „proste" stanowią „trójkąt" (kąt trójścienny) i t. d. [12]).

Widzimy więc, że geometrya jest w pewnej mierze niezależną od tego, czy formy, będące przedmiotem jej badania są lub nie są wyobrażalne; pewniki zaś geometryi sprowadzają się ostatecznie do pewnych „postulatów", jakie stawiamy dla form elementarnych naszego badania. Nie przeczy temu bynajmniej ta okoliczność, że pobudkę do przyjęcia faktów, mających charakter pewników w geometryi euklidesowej, mogło dać doświadczenie.

Nowsze badania geometryczne wskazały nadto, że możliwem jest nawet utworzenie umiejętności geometrycznej bez stosowania pojęcia miary (odległości i kąta). Taka geometrya, zwana geometryą rzutową lub geometryą położenia, może być rozwiniętą bez pewnika euklidesowego o liniach równoległych. Biorąc za podstawę twierdzenia zasadnicze geometryi rzutowej, możemy wprowadzić do jej dziedziny określenia długości i kąta, i to tak ogólnie, że z tych określeń dadzą się wyprowadzić te pojęcia dla wszelkich gatunków geometryi. Jest to wielka zasługa genialnego matematyka niemieckiego K l e i n a, że odsłonił tę zupełnie nieznaną dziedzinę i wskazał niejako źródło, z którego wypływają poglądy geometryczne. Ponieważ zarazem udało się wskazać piękne i doniosłe ich zastosowanie do teoryi funkcyj, znaleziono więc tym sposobem metody badania nowych i bardzo ogólnych zmienności. To zaś może utorować drogę dla metod przyszłych badania zjawisk przyrody [13]).

*

* *

Przychodzimy do mechaniki, t. j. do nauki o ruchu ciał i zapytujemy, jaki jest stosunek nauki tej do rzeczywistości.

Ruch *spostrzegamy* w przyrodzie i przenosimy do dziedziny umysłowej, przy pomocy form, jakie daje nam matematyka, a w szczególności geometrya. Schematem elementarnym jest ruch *punktu*, odbywający się w *przestrzeni*; przybywa tu wszakże jeden element, którego w geometryi nie uwzględniamy: jest nim *czas*. Formy ruchu powstają w czasie, mechanika bada ich powstawanie, a raczej stawanie się form w zależności od czasu. Zależność tę pojmujemy czysto formalnie, jako następstwo elementów formy; albo inaczej, jako zależność czysto-matematyczną, polegającą na tem, że różnym momentom czasu odpowiadają wogóle różne wartości elementów. Stąd to L a g r a n g e nazwał mechanikę geometryą o czterech wymiarach; czwartym wymiarem jest tu czas, przybywający do trzech wymiarów przestrzeni.

Póki nie wprowadzamy do badań nic innego po nad ciała idealne, poruszające się w przestrzeni idealnej, stoimy na stanowisku cynematycznem, t. j. na stanowisku czystej nauki o ruchu, zwanej cynematyką lub foronomią. Pojęcia, jakie dla bliższego określenia tego ruchu wprowadzamy: kierunek ruchu, prędkość, przyspieszenie, krzywizna drogi i t. p. mają tu znaczenie teoretyczne i wprowadzają się na podstawie definicyj matematycznych, jakkolwiek w wielu razach nie trudno wskazać doświadczalne źródło tych pojęć, i zarazem to, co w świecie zewnętrznym tym *ścisłym* pojęciom matematycznym *przybliżenie* odpowiadać może. Ruch przeto, będący przedmiotem cynematyki, jest pewną formą matematyczną, jest wyidealizowaniem rzeczywistości, jak są nią formy geometryczne w stosunku do przedmiotów świata zewnętrznego. Cynematyka opierać się zatem musi na tych samych podstawach, na jakich spoczywa geometrya: postulaty geometryi są jej postulatami. Możliwą jest więc cynematyka w przestrzeni euklidesowej i w przestrzeniach nieeuklidesowych; możliwą w przestrzeni trójwymiarowej lub mającej mniej i więcej wymiarów. I jak geometrya za pomocą właściwych sobie konstrukcyj stwarza wielką rozmaitość form, bezpośrednio w przyrodzie spostrzedz się nie dających, to samo czyni i cynematyka.

W pewnej epoce umysłowości lub dla pewnych celów stanowisko czysto-cynematyczne może być wystarczającem. Wszak systemy planetarne Ptolemeusza i Kopernika były właściwie teoryami cynematycznemi, a i prawa ruchu Keplera nie inny w istocie rzeczy mają charakter. Możnaby nawet pomyśleć idealnie taki stan wiedzy mechanicznej, w którym by wystarczał *opis* ruchów, spostrzeganych w przyrodzie; lecz do tego byłoby potrzeba, aby znaną była cała rozmaitość wszelkich ruchów, zachodzących w świecie zewnętrznym. Skoro jednak to być nie może, skoro zadaniem wiedzy jest nietylko opis ścisły ruchów spostrzeganych, ale zarazem przewidywanie ruchów, spostrzeganych tylko w części lub wcale bezpośrednio nie spostrzeganych; jednem słowem, skoro wiedza przekracza dziedzinę bezpośredniego spostrzegania, należy wznieść się tedy na stanowisko wyższe, a raczej zagłębić się w rzeczywistość zjawisk przez ujęcie i sformułowanie idealne nowych elementów. Badając ruchy zachodzące w przyrodzie, spostrzegamy, że z przebiegiem pewnej liczby zjawisk zmienia się przebieg innych; jeżeli więc idzie o to, aby ująć w całość pewną dziedzinę spostrzeganych zjawisk, lub utworzyć z nich system, to należy wprowadzić do mechaniki pojęcie wzajemnego związku ruchów, którego wyrazem metafizycznym jest zasada *przyczynowości*. Nie będziemy tu zastanawiali się nad źródłem tej zasady i nad znaczeniem filozoficznem pojęcia *przyczyny*; powiemy tylko, że w mechanice przyczynowość sprowadza się do wyrażenia związku, zachodzącego pomiędzy elementami badanych zjawisk lub ruchów. Czy ten związek „istnieje" w samej przyrodzie, ukryty w głębiach uważanej za niedościgłą istoty rzeczy, czy jest wynikiem konieczności tkwiącej w umyśle, czy wreszcie jest wynikiem jednego i drugiego czynnika—pytania tego mechanika nie rozstrzyga i rozstrzygnąć nie może. Ona szuka tylko funkcyj matematycznych, wyrażających zależności pomiędzy zjawiskiem lub grupą zjawisk, określonych za pomocą pewnych elementów $a, b, c \ldots$, a innem zjawiskiem lub grupą zjawisk, określonych za pomocą elementów $a', b', c', \ldots$ [14]). Idzie więc w mechanice przedewszystkiem o to, aby znaleźć takie zjawisko lub taki układ zjawisk zasadniczych, określonych za pomocą pewnych elementów $A, B, C, \ldots$ z którym możnaby zestawić całą dziedzinę badanych zjawisk w podobne związki matematyczne. To zjawisko lub ten układ zjawisk lub faktów elementarnych stanowi podstawy mechaniki, w nim zawierają się jej pewniki lub postulaty. Ze stanowiska realnego można te postulaty nazwać *zasadniczemi prawami przyrody*; ze stanowiska formalnego są one *postulatami*, albo, jeżeli chcemy, *hypotezami*, stanowiącemi podstawę umiejętności. Pogląd pierwszy znajduje usprawiedliwienie swoje w tem, że dojście do praw podstawowych wymagało uprzednio drogi doświadczalnej; drugi przez to, że są one z jednej strony wyidealizowanym wynikiem doświadczenia, z drugiej zaś układ ich może uledz w pewnej mierze zmianie podobnej, jakiej doznał układ geometryi euklidesowej w przejściu do geometryi ogólnej.

Odkrycie takich postulatów, określenie elementów zasadniczych A, B, C,... nie było rzeczą łatwą i wymagało całych wieków długiego rozwoju umysłowego; datuje ono właściwie od Galileusza i zostało sformułowane przez Newtona. Jednym np. z takich postulatów zasadniczych mechaniki jest prawo tak zwanej *bezwładności*, z którem ściśle w rozwoju mechaniki wiąże się pojęcie siły i masy. Prawo bezwładności znane jest ze wszystkich podręczników fizyki każdemu początkującemu uczniowi, a mimo to tkwi w niem głębia trudności, nad rozwiązaniem których pracują dotąd najtęższe umysły filozofów i matematyków [12]). Przekroczylibyśmy ramy niniejszego zarysu, gdybyśmy chcieli zająć się szczegółowym rozbiorem tego ważnego pytania; pozwolimy sobie tylko poczynić pewne uwagi, mające bliższy związek z przedmiotem naszym.

Prawo bezwładności jest sformułowane przez Newtona [15]) w jego tak nazwanem „pierwszem prawie ruchu" w sposób następujący:

„Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku albo ruchu jednostajnego i prostoliniowego dopóty, dopóki siły zewnętrzne nie spowodują zmiany tego stanu".

Prawo to wyraża, jak mówi Clerk Maxwell, [16]) przy jakich warunkach siła zewnętrzna nie istnieje, t. j. nie działa na ciało. Pomińmy więc to, że w powyższem wyrażeniu prawa bezwładności ukrywa się zarazem i pojęcie siły zewnętrznej i zastanówmy się nad pozostałą treścią. W braku takiej siły, ciało powinno pozostawać w stanie spoczynku lub poruszać się ruchem jednostajnym po linii prostej. Jak określić stan spoczynku? Oznacza on, że ciało nie powinno zmieniać swego miejsca w przestrzeni. Lecz miejsce ciała oznaczyć możemy tylko względnie do innych ciał. Jakie więc ciała wybierzemy do porównania; czy będzie to powierzchnia ziemi, czy słońce, czy gwiazdy stałe? O ziemi wiemy, że obraca się około swej osi i obiega około słońca; słońce i gwiazdy stałe prawdopodobnie zmieniają swe miejsca w przestrzeni. Gdzież jest więc to ciało lub raczej ten układ współrzędnych, względem którego oznaczyć mamy położenie danego ciała? Czy spoczynek, o jakim mowa, jest więc względny, t. j. względem ziemi, słońca, gwiazd stałych, czy bezwzględny? Co mamy rozumieć przez spoczynek bezwzględny w przyrodzie?

Też same uwagi zastosować można do innych ustępów pierwszego prawa. Mowa tam o ruchu prostoliniowym i jednostajnym ciała, na które nie działają siły zewnętrzne, t. j. ciała pozostawionego samemu sobie. Ruch możemy określić tylko względnie, t. j. odnosząc ciało do pewnego układu współrzędnych. Gdzież jest ten układ, względem którego ciało, poruszając się bez działania siły, opisuje linią prostą ruchem jednostajnym? Jeżeli opisuje linią prostą względem powierzchni ziemi, to z pewnością nie opisuje jej względem układu, którego początek znajduje się w środku słońca; jeżeli kreśli prostą względem tego ostatniego, to nie opisze jej względem układu, którego początek znajduje się np. w środku Syriusza. Jak więc rozumieć mamy ruch prostoliniowy i jednostajny ciała, poruszającego się wskutek bezwładności? Pomijam trudności, jakie tkwią w określeniu ruchu jednostajnego, odbywającego się przez całą nieskończoność, bo poprzednie uwagi wystarczają już do wykazania ważności pytań zasadniczych, tkwiących w pojęciu bezwładności. Jak więc rozumieć mamy to prawo? Czy jest ono prawdą, czy może być podstawą umiejętnego badania przyrody, czy zgadza się z doświadczeniem i nie prowadzi do błędów?

Odpowiedź jest prosta. Prawo bezwładności z całem zaufaniem stosować można; zgodne jest ono bowiem z istotą wszelkiego dochodzenia i badania naukowego. Odkrytem zostało ono na drodze doświadczalnej przez badanie ciał poruszających się na powierzchni ziemi w jej bliskości. Nie ma tu wprawdzie ciał, na które nie działa żadna „siła zewnętrzna“; ciał, „pozostawionych zupełnie samym sobie“, ale są ciała, co do których w pewnej mierze i w pewnych granicach takie założenie (przybliżone) uczynić można; taką jest np. kula, poruszająca się po gładkiej powierzchni poziomej, takim np. jeden z ciężarków, spadających w znanem doświadczeniu z machiną Atwooda. Kula, której na płaszczyznie nadano ruch, porusza się następnie w skutek bezwładności ruchem jednostajnym po linii prostej wciągu pewnego czasu; podobnież ruchem (prawie) jednostajnym spada ów ciężarek w machinie Atwooda ku ziemi. W tych przeto zjawiskach mamy doświadczalne stwierdzenie prawa bezwładności ciał, odniesionych do powierzchni ziemi. Ze zjawisk ruchu, spostrzeganych na powierzchni ziemi można już wydzielić a raczej wyidealizować treść prawa bezwładności. Galileusz zastosował je do teoryi ruchu ciał spadających, Newton poszedł dalej i zastosował do teoryi ruchów ciał niebieskich i do mechaniki wogóle. Tym sposobem, w miarę rozwijania się wiedzy, w miarę przekraczania pierwotnej dziedziny badań, stosowalność prawa bezwładności rozszerzała się coraz bardziej, stwierdzana wynikami obserwacyi, które wykazywały zgodność z teoryą. Tym sposobem prawo bezwładności w wysłowieniu Newtona i w tem znaczeniu, jakie obecnie nadaje mu mechanika, należy rozumieć, jako wyidealizowaną formę wyniku doświadczenia, którą stosujemy kolejno w miarę rozszerzania się dziedziny badań naszych do ruchów ziemskich, planetarnych, gwiazdowych. Jestto więc i prawda doświadczalna, jako z doświadczenia wydzielona i doświadczeniem na różnych stopniach rozwoju stwierdzić się dająca, i zarazem zasada kierownicza przy stosowaniu pojęć, zdobytych na pierwszych stopniach badania, przy badaniach dalszych; zasada, którą moglibyśmy zarzucić dopiero wtedy, gdybyśmy w pewnem stadyum badania znaleźli niezgodność obserwacyi z teoryą i zarazem dowieść mogli, że ta niezgodność jedynie z przyjęcia prawa bezwładności pochodzi. Do tej pory niezgodności takiej nie napotkano i stąd prawo bezwładności jest zasadą mechaniki fizykalnej i fizyki, w mechanice teoretycznej zaś pod tą lub inną formą (np. przez określenie matematyczne siły) jest podstawą systemu; stąd to także i ze względu na pierwiastek idealny, w niem tkwiący, uważane bywa niekiedy przez filozofów za zasadę apriorystyczną, zupełnie od doświadczenia niezależną.

Zwróciliśmy uwagę na ważną okoliczność, że prawo bezwładności jest zasadą kierowniczą, przy pomocy której wznosimy się po nad dziedzinę pierwotną badań, doświadczeniu naszemu dostępną, i posuwamy się na dalsze stopnie poznania. Pod tym względem zachodzi wyraźna analogia pomiędzy rozwojem mechaniki i matematyki, analogia, która powtarza się we wszystkich niemal dziedzinach umysłowego badania. Analogii tej poświęcimy niżej kilka jeszcze uwag.

Powiedzieliśmy, że prawo bezwładności związane jest ściśle z pojęciem siły i masy, do takiego stopnia, że można w układzie prawd zasadniczych mechaniki prawo bezwładności zastąpić definicyami siły i masy. Taki sposób przedstawienia rzeczy widzimy w „Mechanice teoretycznej“ Kirchoffa, w której wszelka metafizyka, tkwiąca w pojęciach zasadniczych mechaniki jest usunięta, a sama mechanika, jako *opisanie zupełne i najprostsze ruchów w przyrodzie*, opiera się na definicyach formalnych siły i masy oraz na prawie tak nazwanej niezależności sił.

Zasadnicze pojęcia siły i masy były, podobnie jak i prawo bezwładności, przedmiotem głębokiej krytyki umiejętnej, przed którą ostały się, jako pewne formy idealne, za pomocą ścisłych definicyj do związków matematycznych wprowadzać się dające. Na nich zbudowano całą mechanikę teoretyczną, której najwspanialsze zastosowanie stanowi mechanika niebieska, na prawach mechaniki teoretycznej i określeniu siły ciążenia oparta. Mechanika teoretyczna stała się typem idealnym umiejętności, na wzór której umysł ludzki usiłował wznieść fizykę umiejętną, obejmującą całą rozmaitość zjawisk, które nie zawsze bezpośrednio do rozmaitych zjawisk mechanicznych sprowadzić się dały.

Pod potężnym wpływem mechaniki Newtona pozostawały i pozostają jeszcze nauki fizyczne.

Posunięta w najnowszych czasach doświadczalna i teoretyczna wiedza zjawisk fizycznych odsłania nowe widnokręgi dla badawczego umysłu. Pojęcie energii i zasada jej zachowania występuje coraz wyraźniej na plan pierwszy i staje się tym faktem elementarnym i zasadniczym, na którym buduje się obecnie umiejętność fizyczna. Wydzielona z praw mechaniki, stwierdzana doświadczalnie w zjawiskach ruchu, stała się zasada energii zasadą kierowniczą, która na podobieństwo zasady bezwładności przenosi fizyka do coraz nowych dziedzin badania. Przy pomocy niej przekracza on pierwotną dziedzinę mechaniki właściwej i wstępuje w dziedzinę zjawisk światła, ciepła, elektryczności i magnetyzmu oraz zjawisk chemicznych. Przez to samo zasada ta uogólnia się i idealizuje, z czysto-mechanicznej staje się zasadą ogólno-fizyczną. Czynione są próby do postawienia pojęcia energii na czele całego systemu wiedzy, jako pojęcia zasadniczego, z którego wypływają nietylko już pojęcia siły i masy w ruchu mechanicznym, ale odpowiadające im elementy w innych zjawiskach jako pochodne [17]). Bliższy rozbiór tego nowego kierunku nauk fizycznych do naszego przedmiotu nie należy; zaznaczamy tylko, że w tym rozwoju wiedzy, w tem tworzeniu form nowych, coraz bogatszych i treściwszych, w stawianiu zasad umiejętności przebija się wyraźnie to samo dążenie, które przedstawiliśmy wyżej, mówiąc o rozwoju czystej wiedzy matematycznej. Jedno prawo zdaje się kierować postępem myśli ludzkiej, badającej przyrodę, wznoszącej się ponad rzeczywistość doświadczalną i jednocześnie zgłębiającej coraz dokładniej świat zewnętrzny.

*

*   *

Matematyk angielski Peacock i niemiecki Hankel [18]) sformułowali zasadę, jaką kieruje się matematyka przy uogólnianiu pojęć i praw w dziedzinie liczb. Zasada ta, nazwana przez nich „zasadą zachowania form równoważnych lub praw formalnych". (Principle of the permanence of equiqualents form; Prinzip der Permanenz formaler Gesetze), w nauce o liczbach polega na tem, że gdy działania arytmetyczne odwrotne (odejmowanie, dzielenie, wyciąganie pierwiastków), pobudzają nas do tworzenia liczb nowych, (ujemnych, ułamkowych, urojonych i t. p.), wtedy staramy się, rozszerzając zakres działań, poddać je takim prawidłom, aby prawidła te obejmowały w sobie, jako szczególny przypadek, działania nad liczbami dziedziny pierwotnej, t. j. nad liczbami całkowitemi (dodatniemi). Podobnie rzecz się ma z uogólnieniem np. pojęcia potęgi. Potęgę, t. j. iloczyn czynników równych, określamy pierwotnie tylko dla wykładników całkowitych dodatnich, lecz w dalszym rozwoju nauk uogólniamy pojęcie potęgi, wprowadzając wykładniki ujemne, ułamkowe, urojone. Otóż to uogólnienie odbywa się w ten sposób, że prawidła dla potęg uogólnionych zawierać w sobie winny prawidła działań nad potęgami o wykładnikach całkowitych dodatnich.

Są to przykłady szczególne zastosowania zasady zachowania działań, lecz oczywiście zasada ta ma znaczenie daleko ogólniejsze; sądzimy nawet, że daje się ona wykryć w rozwoju całej wiedzy matematycznej. Już samo sformułowanie jej dla dziedziny liczbowej było zasługą nie małą i przyniosło korzyść nauce z tego względu, że pobudziło matematyków do zajęcia się gruntownem zbadaniem istoty samych działań arytmetycznych. Teorya działań w ścisłem znaczeniu tego wyrazu była przedtem nieznaną. Dopiero pytanie o stosowalności pierwotnie określonych działań, do dziedziny liczb nowych, doprowadziło do badań nad tem, jakie są cechy istotne (konieczne i dostateczne) każdego z działań zasadniczych, oraz do wskazania i wyczerpania związków pomiędzy działaniami. Zwrócono wtedy uwagę na zasadnicze własności dodawania i mnożenia, którym to własnościom nadano nazwy *prawa łączności*, wyrażającego się wzorami:

$$a + (b + c) = (a + b) + c\,, \qquad a\,(bc) = (ab)\,c\,;$$

prawa przemienności:

$$a + b = b + a\,, \qquad ab = ba\,,$$

wreszcie *prawa rozdzielności:*

$$(a + b)\,c = (a + c)\,b\,.$$

Przyjmując te własności za podstawę określenia działań, osnuto na nich teoryą *formalną* działań arytmetycznych, która rozwinięta i udoskonalona przez Grassmana, Hankela, Peirce'a i innych, dała początek nowoczesnej algebrze *formalnej*. Umiejętność ta odpowiada najściślej duchowi czystej wiedzy matematycznej, która, jak wiemy, jest w gruncie rzeczy nauką o *formach* idealnych. Rozwój tej nauki związał ją też ściśle z tak nazwaną logiką formalną, która przybrawszy szaty matematyczne, staje się dziś umiejętnością ścisłą i odkrywa dla umysłu dziedziny, trudno dostępne dla logiki, traktowanej sposobem zwykłym.

Zasadę zachowania wypowiada Hankel w postaci takiej: „Jeżeli dwie formy, wyrażone w ogólnych znakach algebraicznych, są sobie równe, to pozostają takiemi, gdy znaki te nie oznaczają już liczb dziedziny pierwotnej, gdy przeto działania otrzymują treść nową".

Dodaje przytem Hankel, że ta zasada nie winna być stosowaną zupełnie swobodnie, bo mogłaby krępować ogólność badań: ma ona służyć przedewszystkiem do określenia prawideł koniecznych i dostatecznych, o ile te są od siebie niezależne.

Jak rozumieć należy to zastrzeżenie? Podaliśmy wyżej cechy zasadnicze dodawania i mnożenia. Jedną z takich cech jest naprzykład przemienność, $ab = ba$. Otóż w badaniu ogólnem możemy tę cechę pominąć lub zastąpić innym warunkiem np. $ab = -ba$, i zapytać, jaki jest układ form, który czyni zadość pozostałym warunkom? Zachodzi w tym przypadku analogia do opisanego przez nas poprzednio postępowania w geometryi, kiedy w układzie pewników geometryi euklidesowej pomijamy lub zmieniamy jeden z nich, pozostawiając bez zmiany inne, i tym sposobem od geometryi euklidesowej wznosimy się do geometryi ogólnej.

Zasadę zachowania działań formalnych możemy wypowiedzieć w postaci ogólniejszej [19]), która wykaże, że ona ujawnia się w rozwoju całej matematyki, a mianowicie: „Jeżeli formy pewnej określonej dziedziny poddajemy określonym konstrukcyom i działaniom, które doprowadzają do pewnych związków pomiędzy formami tej dziedziny, to związki te uważamy za zachodzące i wtedy, gdy konstrukcye i działania prowadzą do wyników, których nie można uważać bezpośrednio za formy do naszej dziedziny należące". Utrzymanie właśnie związków tych samych dla jednych i drugich form pozwala objąć dawne i nowe formy jedną dziedzinę rozszerzoną.

Historya wiedzy wskazuje, że istotnie podobna zasada kierowała, lubo niekiedy bezwiednie, krokami wynalazców. Przeczytajmy naprzykład to, co mówi geometra francuski Poncelet we wstępie do swego znakomitego dzieła o własnościach rzutowych figur (Traité des propriétés perspectives des figures, 1822) o zasadzie ciągłości (principe de continuité), która pozwala „aby własności i związki znalezione w jednym układzie figur, stosowały się do układów następujących, z zachowaniem naturalnie zmian szczególnych, jakie zajść mogły"; przeczytajmy niemniej świetny wstęp do równie znakomitego dzieła geometry niemieckiego Steinera o rozwoju systematycznym zależności wzajemnej form geometrycznych („Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander 1832“), w którym mówi „że rozmaite własności figur geometrycznych, o istnieniu których można było przekonać się jedynie za pomocą sztucznych dowodów, i które, po odkryciu, zdawały się czemś cudownem, są koniecznem następstwem najprostszych własności elementów zasadniczych“— a słowa te przekonają nas, że nietylko w nauce liczb ale i w nauce form geometrycznych rozwój odbywa się w ten sposób, że znalezione dla pewnej pierwotnej dziedziny związki zasadnicze stosujemy do dziedzin dalszych. Tą dziedziną pierwotną jest w arytmetyce układ własności, cechujących działania zasadnicze na liczbach całkowitych; w geometryi — układ postulatów lub pewników i konstrukcyj elementarnych.

Pomyślmy sobie z góry dwie dziedziny form i niechaj każdej pojedyńczej formie lub elementowi jednej z nich odpowiada pewna forma, lub element drugiej. Jeżeli to przejście od jednej dziedziny do drugiej, stanowiące pewien proces myślowy, mający swój wyraz matematyczny w pewnej konstrukcyi lub działaniu, nazwiemy *odtworzeniem* jednej dziedziny w drugiej lub *przekształceniem* jednej na drugą, to z wyżej wypowiedzianej zasady zachowania można będzie wysnuć zasadę odwrotną następującą:

„Można pomyśleć takie odtwarzania lub przekształcenia, iż związki, zachodzące pomiędzy formami pierwszej dziedziny, zachodzić będą pomiędzy formami drugiej; pomyślane zatem odtwarzania lub przekształcenia mają tę własność, iż nie zmieniają związków, zachodzących pomiędzy formami“.

Przykład stosowania podobnej zasady mamy w nowszych teoryach geometrycznych o przekształcaniu powierzchni jednych na drugie, przy niezmienności wyrażenia ich elementu liniowego; do niej sprowadza się ogólniejsza teorya odtwarzania *podobnego*; do niej sprowadzić się dają zasady *dwoistości* i *odpowiedności* (la dualité et homographie) Chasle'a i t. d. Wprowadzając pojęcie *grupy przekształcenia* t. j. szeregu przekształceń, mających tę własność, że każda zmiana, wynikająca z kombinacyi dwóch przekształceń, znajduje się w tym szeregu, możemy pójść jeszcze dalej i objąć tą zasadą wszystkie najwyższe uogólnienia nauki geometrycznej [20]).

Jesteśmy zdania, że pod przewodnictwem zasady zachowania odbywa się rozwój wiedzy matematycznej; ona to bowiem prowadzi do uogólnień, stanowiących wybitną cechę tej wiedzy. Nie należy jednak sądzić, że samo sformułowanie zasady wystarcza do czynienia odkryć. Jest to bowiem zasada kierowniczo-metodyczna, ważna przy badaniu rozwoju wiedzy, przy stawianiu twierdzeń ogólnych i przy wykładzie, lecz nie czyni ona wcale zbyteczną twórczości, ani nie wystarcza do ścisłego uzasadnienia prawd matematycznych. Przedewszystkiem obok niej konieczna jest pewna zasada regulująca, aby uogólnienia pojęć, działań i związków nie doprowadzały ani do sprzeczności logicznych, ani do niezgodności z prawdami, stwierdzonemi już dla badanej dziedziny. Jeżeli więc na zasadzie zachowania, prawdę, powstałą przez uogólnienie pewnego twierdzenia, dowiedzionego dla jednej dziedziny, zastosowaliśmy do innej dziedziny, to musimy w tej nowej dziedzinie pogodzić to twierdzenie z cechami jej zasadniczemi lub z innemi twierdzeniami, znanemi skąd inąd.

Jeżeli pozwoliliśmy tu sobie zatrzymać się dłużej nieco nad stroną formalną prawd matematycznych, to dlatego, że pytania te, pozostają, jak sądzimy, w ścisłym związku z metodami stosowania matematyki do badań przyrody. Stosowanie to, jak wiemy, polega na stopniowem idealizowaniu rzeczywistości, na nadawaniu wynikom obserwacyi i doświadczenia postaci związków matematycznych. Zadanie astronomiczne, fizykalne lub chemiczne, gdy je przy pomocy form matematycznych pod postacią podobnego związku przedstawimy, staje się zadaniem czysto-matematycznem, które przy pomocy właściwych metod poddać można badaniu teoretycznemu. Najczęściej prowadzą pytania takie do równań różniczkowych; znalezienie rozwiązań lub odkrycie zasadniczych własności rozwiązań tych równań staje się głównem zadaniem badacza; od doskonałości zaś metod rozwiązania pytań czysto-matematycznych zależy powodzenie badania. Otrzymane rozwiązania poddaje się wtedy interpretacyi fizykalnej: rezultaty teoretyczne porównywa się z rzeczywistością, t. j. z wynikami doświadczenia i obserwacyi. Z drugiej strony nadanie formy matematycznej zjawisku fizycznemu pozwala na uogólnienia właściwe matematyce. Już sama forma matematyczna może być ogólniejsza od zjawiska fizycznego, a stąd rozwiązania matematyczne mogą obejmować rozmaitości, jakich nie napotykamy bezpośrednio, albo wcale nie napotykamy w doświadczeniu. Okoliczność ta pozwala często na odkrycie pewnych związków lub praw, których bezpośrednio za pomocą doświadczenia nie bylibyśmy w stanie odsłonić. Fakt ten zbyt dobrze jest znany z dziejów fizyki i astronomii, abyśmy potrzebowali stwierdzać go przykładami.

Gdy więc wątpliwości nie ulega, że przy pomocy form i metod matematyki, udało się zgłębić przyrodę, nie może ulegać też wątpliwości, że i rozwój wiedzy przyrodniczej jak to już powiedziano na samym wstępie, ściśle jest związany z postępem nauk matematycznych. Zasadzie zachowania praw formalnych w matematyce można przeciwstawić analogiczną zasadę stosowania tak zwanych praw przyrody do coraz nowych dziedzin badania. Wspomnieliśmy już wyżej o prawie bezwładności, które w rozwoju wiedzy fizycznej stosowano kolejno do ruchów ziemskich, do układów planetarnych, do ruchów gwiazd stałych. Jest to, inaczej mówiąc, zachowanie form matematycznych siły i masy, wydzielonych ze spostrzegania zjawisk ziemskich, do nowych i dalszych dziedzin badania. Wspominaliśmy o zasadzie zachowania energii, którą z dziedziny mechanicznej przeniesiono do dziedziny zjawisk fizykalnych (fizycznych i chemicznych). Podobnie, jak to wyżej powiedziano o stosowaniu zasady zachowania działań do poszczególnych dziedzin, należy analogicznie przy stosowaniu zasady zachowania energii do poszczególnych dziedzin fizykalnych np. do zjawisk ciepła, mieć oczywiście na względzie, aby stosowanie to nie pozostawało w sprzeczności z prawami, charakteryzującemi te dziedziny. Możnaby np. powiedzieć, że drugie prawo termodynamiki jest właśnie taką zasadą regulującą, która występuje obok zasady zachowania energii, która w tej dziedzinie nosi nazwę pierwszego prawa termodynamiki.

Nie wdając się w dalsze rozwinięcie wskazanych analogij, poświęcimy jeszcze w końcu słów kilka na bliższe określenie znaczenia matematyki w badaniach przyrodniczych.

Wiemy już, że matematyka jest w badaniu tem narzędziem niezbędnem do tego stopnia, że nie można pomyśleć wcale rozwoju wiedzy ścisłej bez udziału matematyki. Wiemy także, że nauka wtedy dopiero wstępuje na wyższy stopień doskonałości, gdy staje się bardziej dedukcyjna, to jest im bardziej zbliża się np. do typu mechaniki, budującej swe prawdy za pomocą metod matematycznych, na podstawie pewnego układu prawd zasadniczych. Ale pozostaje jeszcze do rozstrzygnięcia ważne pytanie, czy matematyka jest jedynie narzędziem badania, wprawdzie ważnem i niezbędnem, lecz tylko narzędziem; czy też przeciwnie odtwarza nam i odkrywa rzeczywistość do tego stopnia, że do poznania rzeczywistości sama jedna wystarczyć może. Sądzimy, że poprzednie uwagi nasze dają dostateczną odpowiedź na to pytanie. W tych granicach, w jakich mówić nam wolno o poznawaniu rzeczywistości, prowadzą do niej zarówno i w połączeniu: obserwacya, doświadczenie i matematyka. Różnica tych narzędzi polega na tem, że doświadczenie i obserwacya odnoszą się do zjawisk, lub układu zjawisk, że tak powiem specyficznych; matematyka zaś związkami swemi objąć może rozmaite możliwości, których przypadkiem szczególnym jest rzeczywistość. Matematyka jest, jak powiedzieliśmy już, ogólniejsza od rzeczywistości spostrzeganej lub doświadczanej. Daje ona niejako ramy, w których tę rzeczywistość pomieścić można, a zatem w pewnej mierze więcej niż w nią wkładamy, dzięki temu, że pojęcia form matematycznych są zdolne do uogólnień. Powiedzieliśmy *w pewnej mierze*, bo jeżeli zechcemy od formuł matematycznych powrócić do rzeczywistości, to winniśmy z konieczności uwzględnić znowu podstawy zasadnicze i ścieśnić niejako możliwość, aby otrzymać z niej interpretacyą rzeczywistości.

Z drugiej strony, przyjmując pewne wyniki doświadczeń elementarnych, po wyidealizowaniu ich, za podstawę czysto formalną dochodzenia, możemy stworzyć umiejętność idealną, która, nie będąc wprost badaniem przyrodniczem, stanowić może sama przez się interesujący przedmiot spekulacyi i prowadzić do pewnych wyników ogólnych, pod które podciągnąć się dają wyniki teoryj fizycznych. Taki np. charakter mają piękne prace Gosiewskiego, w których wychodząc z najogólniejszych pojęć zmienności układu w czasie, przy pomocy zasad rachunku prawdopodobieństwa, dochodzi do interesujących twierdzeń, obejmujących w sobie niektóre zasady ogólne nowszych poglądów fizycznych [21]). Tego rodzaju badanie, nie będąc w istocie rzeczy badaniem fizykalnem, rzuca ciekawe światło na istotę zastosowań matematyki.

Spekulacya matematyczna może zajść bardzo daleko i przenieść badacza w dziedziny, zupełnie od rzeczywistości oderwane do tego stopnia, iż umysł jego opanowuje złudzenie, że rezultaty tej spekulacyi mają wprost wartość ontologiczną. Wyradza się wtedy pewnego rodzaju mistycyzm matematyczny, jaki w historyi napotykamy u pytagorejczyków, neoplatoników, astrologów oraz dziś w nieuprawnionych twierdzeniach zwolenników istnienia czwartego wymiaru, którzy za pomocą nowych pojęć geometrycznych rozwiązują zagadki istnienia. Mistycyzm taki jest oczywiście zboczeniem od zasad stosowania matematyki. Badacz prawdziwy nie bierze wprost form matematycznych za samą rzeczywistość, bo świadomy jest drogi, na jakiej pojęcia tych form powstały i rozumie, pod jakiemi zastrzeżeniami wolno mu od wyników spekulacyi powrócić do świata rzeczywistego. Mistycyzm matematyczny tedy jest wynikiem niezrozumienia genezy pojęć matematycznych i warunków ich stosowalności do badania przyrody.

Lecz jeżeli matematyka nie odsłania nam metafizyki bytu i nie rozwiązuje zagadki stworzenia, to daje nam za to potężne narzędzia umysłowe badania zjawisk. Idealną siecią form liczbowych i geometrycznych obejmuje rzeczywistość, sięga do ogromów wszechświata i przenika do niedostępnych wprost dla zmysłów źródeł życia przyrody. Kieruje twórczością naszą w naukach stosowanych, które posuwają cywilizacyą. Genezą swych pojęć i metod przedstawia najwspanialsze zagadnienie dla filozofii, docierającej od wieków do źródła bytu i wiedzy. Matematyka najlepiej uwydatnia moc ducha ludzkiego, który przyrodzie zewnętrznej przeciwstawia myśl i za jej pomocą stwarza świat nowy, będący znamieniem i chwałą ludzkości.

---

[1]) Pomysł ten rozwinął D e d e k i n d w broszurze: „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ 1872, wydanie 2-gie 1892.

[2]) Rozprawa H e r m i t e' a, stanowiąca podstawę nowych badań nad liczbami e i π ogłoszona została w r. 1874 p. t.: „Sur la fonction exponentielle“. L i n d e m a n n ogłosił swoją rozprawę o liczbie π w r. 1882 w tomie XX dziennika: „Mathematische Annalen“. W roku bieżącym (1893) H i l b e r t, a za nim H u r w i t z i G o r d a n podali sposoby tak proste dowodzenia przestępności liczb e i π, że rzecz ta będzie mogła przejść już do podręczników rachunku wyższego. Dowody trzech

wymienionych ostatnio uczonych są powtórzone w znajdującym się pod prasą tomie V „Prac matematyczno-fizycznych“

[3]) Kepler, Stereometria doliorum 1635, Cavalieri, Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota 1635, Fermat, De maximis et minimis 1638, Barrow, Lectiones geometricae 1670, Wallis, Arithmetica infinitorum 1655.

[4]) Leibniz, Nova methodus pro maximis et minimis etc. 1684; Newton De analisi per aequationes numero terminorum infinitas 1669. Methodus fluxionum, napisane w r. 1681, ukazało się w druku dopiero w 1736.

[5]) Podane w tekście słowa o stosunku teoryj matematycznych do metafizyki znajdują uzasadnienie w samodzielności matematyki, która wynika z jej istoty i stwierdzona została jej dotychczasowym rozwojem. Ostrzeżenie nasze nie oznacza bynajmniej, że nie uznajemy źródła psychologicznego form matematycznych i że lekceważymy badania filozoficzne lub teoretyczno-poznawcze nad pojęciami i metodami matematyki. Przeciwnie uważamy badania takie za nader ważne. Pojęcia matematyki są nawet niezbędne w studyach teoryi poznania, a rozwój stopniowy pojęć tych stanowi jedno z najbardziej ciekawych zagadnień dla filozofa; zagadnień, które w każdej epoce rozwoju wiedzy na nowo i z ulepszonemi środkami podejmować należy. Wykrycie źródła pojęć matematycznych, zbadanie procesów myślowych, jakie prowadzą do uogólnień w matematyce, wyśledzenie związków logicznych pomiędzy pojęciami, stanowisko ich wśród pojęć innych umiejętności, zasady i granice stosowalności matematyki w innych naukach — oto zagadnienia, jakie przypadają do rozwiązania filozofowi. W tego rodzaju badaniach będzie on musiał oczywiście oprzeć się na podstawach psychologii i teoryi poznania, ale musi też wniknąć głęboko w charakter metod samej matematyki. Nietyle technika tej nauki— chociaż i ta ma swoją filozofią,—nie tyle specyalne zagadnienia matematyczne, ile jej podstawowe pojęcia i metody stanowić mają pierwszorzędny przedmiot spekulacyi filozoficznej.

Jak z jednej strony nie należy wprowadzać metafizyki do matematyki, tak z drugiej nie wolno też bez zastrzeżeń wysnuwać z matematyki konsekwencyj metafizycznych, do jakich należą np. poglądy metafizyczne o nieskończoności świata, ciągłości materyi i t. p., wysnuwane z nieskończonościowych form matematycznych. Takie nieuprawnione wnioskowanie prowadzić łatwo może do niedorzeczności, jak to niejednokrotnie stwierdziła historya rozwoju myśli ludzkiej. We wszystkich badaniach tego rodzaju najwyższą mądrością jest przestrzeganie granic stosowalności pojęć, oparte na świadomości źródła, z którego powstały, i drogi, na jakiej doznały uogólnienia.

[6]) P o i n c a r é, Le continu mathématique w „Revue de metaphysique et de morale“ Nr 1. 1893.

[7]) Nie możemy tu pominąć milczeniem nowego kierunku w analizie, którego przedstawicielem w Niemczech jest niedawno zmarły znakomity matematyk K r o n e c k e r, we Francyi M é r a y i R i q u i e r. Kierunek ten możnaby nazwać „arytmetycznym“, a polega on na tem, że całą dziedzinę analizy stara się sprowadzić na pole metod czysto arytmetycznych, t. j. takich, w których występują jedynie liczby całkowite (dodatnie), uważane za stanowiące dziedzinę „realną“, podczas gdy wszystkie inne rodzaje i gatunki liczb są tylko według tego poglądu symbolami rachunkowemi. Wszelkie działania, które w zwykłem traktowaniu prowadzą do liczb ułamkowych, niewymiernych, urojonych i t. d. stara się ta szkoła wyrazić za pomocą związków pomiędzy liczbami całkowitemi.

Na pozór zdawać by się mogło, że pogląd taki stanowi powrót do dawnych czasów, w którym liczbom niewymiernym, urojonym i t. d. nie przypisywano żadnego znaczenia, lecz w istocie tak nie jest. Nowy kierunek dotychczasowego postępu i rozwoju matematyki nie neguje; owszem wchłania go, że tak powiemy, tylko odmienną a oryginalną nadaje mu postać. Wszystko to, co zdobyto w matematyce na drodze jej rozwoju, nacechowanego powyżej w tekście kilkoma rysami, wszystko to stanowi zdobycz niewzruszoną, której umysły oryginalnych myślicieli starają się nadać formę sobie właściwą. Różnice te prowadzą do różnych kierunków, do różnych szkół matematycznych. Objaw to niezmiernie interesujący, powtarzający się w dziejach matematyki, stanowi również jak sądzimy, zagadnienie bardzo wdzięczne dla filozofa. W matematyce, jak i w innych umiejętnościach, objawia się dualizm kierunków umysłowych, znany w filozofii pod różnemi nazwami. Matematyka wszakże przez samą istotę swych zagadnień, przez czysto-formalny charakter swych pojęć i działań, wznosi się niejako po nad różnicę kierunków i w tem właśnie tkwi jej potęga teoretyczna oraz doniosłość praktyczna w zastosowaniach.

[8]) Ł o b a c z e w s k i pomysły swoje wypowiedział po raz pierwszy w rozprawie „Exposition succinte des principes de la Géométrie“ czytanej na posiedzeniu fakultetu fizyko-matematycznego w Kazaniu w lutym 1826 r., lecz dopiero rozprawa ogłoszona w XVII tomie dziennika C r e l l e' g o p. t. „Géométrie imaginaire“ (r. 1837) oraz „Geometrische Utersuchungen zur Theorie der Parallelen“ (1840) przyczyniły się

do rozpowszechnienia jego teoryi. Poglądy Bolyaia ogłoszone zostały w r. 1832 w dziełku Tentamen juventutis i t. d. W geometryi nieeuklidesowej Łobaczewskiego przez punkt P dany zewnątrz prostej AB można poprowadzić dwie proste PC i PD *równoległe* do prostej AB. Przedłużając proste PC i PD po za punkt P w drugą stronę, otrzymamy dwa pola CPD i $C'PD'$. Każda z prostych, w tem polu nakreślonych i przez punkt P przechodzących, nie przecina prostej AB. Mamy więc w geometryi nieeuklidesowej w każdym punkcie P zewnątrz prostej AB dwie proste do prostej AB *równoległe* i nieskończoną liczbę prostych, *nieprzecinających* danej lecz nierównoległych.

[9]) Rozprawy Riemanna, Helmholtza, stanowiące podstawę całego niemal dzisiejszego ruchu w dziedzinie geometryi ogólnej, mają tytuły, pierwsza: „Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen“, druga: „Ueber die Thatsachen die der Geometrie zum Grunde liegen“. Obie wpłynęły też znakomicie na rozwój badań filozoficznych o przestrzeni. Należy wszakże wspomnieć, że już w znakomitem dziele Grassmanna: „Ausdehnungslehre“ z r. 1844 i 1862 znajdujemy poglądy o przestrzeni geometrycznej, podobne w znacznej części do poglądów dwóch wymienionych wyżej uczonych.

[10]) Dühring występuje przeciwko geometryi nieeuklidesowej, a zwłaszcza przeciwko poglądom Riemanna, w rozmaitych dziełach swoich, między innemi w książce „Logik und Wissenschaftslehre“ (1878). Polemika napiętnowana namiętnością dotyka atoli mniej strony czysto-matematycznej i obraca się w sferze pojęć ogólno-filozoficznych. Renouvier pomieścił krytykę nowych geometryj w rozprawie p. t. „Le philosophie de la règle et du compas“ pomieszczonej w drugim roczniku czasopisma „L' Année philosophique“, 1892. Pomijamy nazwiska wielu innych filozofów i matematyków, występujących przeciwko nowym teoryom geometrycznym. Kwestya oczywiście pozostaje sporną ze stanowiska filozoficznego, jak spornemi są kwestye, dotyczące i innych form matematycznych np. ilości nieskończenie małych, co jednak nie staje na zawadzie rozwojowi teoryj pod względem czysto-matematycznym. Dla matematyki w pierwszym rzędzie ważną jest krytyka umiejętna poglądów Riemanna i Helmholtza, taka naprzykład, jaką obecnie ze stanowiska nauki o grupach przekształceń przeprowadza matematyk norwegski Lie, profesor uniwersytetu lipskiego.

[11]) Filozof belgijski J. Delboeuf w najnowszej swej pracy „L'ancienne et les nouvelles géométries“, której część pierwsza ogłoszona została w zeszycie listopadowym z r. 1893 pisma „Revue philosopheque“ poddaje rozbiorowi pojęcie o przestrzeni, i rozróżniając, jak

my to czynimy w tekście, przestrzeń objektywną czyli przestrzeń zjawisk od przestrzeni geometrycznej, dochodzi wszakże do wniosków przeciwnych podanym przez nas. Według Delboeufa przestrzeń euklidesowa jest jednorodna, pozwala na konstrukcyą figur podobnych i jest skończoną; gdy tymczasem w przestrzeni „rzeczywistej" jednorodności i figur podobnych nie ma, są w niej tylko wielkości bezwzględne, przestrzeń zaś sama jest nieskończoną. Nam się zdaje, że „przestrzeń zjawisk" może być uważana za przestrzeń, t. j. za formę matematyczną, właśnie w oderwaniu od zjawisk. Forma lub pojęcie nieskończoności daje się do niej przenieść tylko na drodze formalnej, a możliwość istnienia figur podobnych w geometryi euklidesowej nie pociąga za sobą, jak mniemamy, jej skończoności. Mimo całej przenikliwości i jasności, jaką podziwiamy w wykładzie Delboeufa, nie jesteśmy pewni, czy oddzielił on dostatecznie pojęcia czysto-matematyczne od pojęć mechanicznych i fizycznych.

[12]) Pomysł podobnej transformacyi pojęć zawdzięczamy Petersenowi, Bemerkungen über den Beweis der Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks (Mathematische Annalen, t. XXIX).

[13]) Pierwsze prace Kleina w tym przedmiocie ogłoszone zostały w IV i V-ym tomie dziennika „Mathematische Annalen" i rozwinięte w wielu rozprawach późniejszych oraz w wykładach, jakie miewa w uniwersytecie w Getyndze. Ogólny pogląd na nowe badania geometryczne wypowiedział ten uczony w świetnej rozprawie, w r. 1872 ogłoszonej a obecnie w r. 1893 na nowo przedrukowanej p. t. „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen". Matematyk włoski Veronese w pracowitem i obszernem dziele p. t. „Fondamenti di geometria à più dimensioni e a più specie di unità rettilinee etc." (1891) przedstawił systematycznie, historycznie i z uwzględnieniem filozoficznej strony przedmiotu zasady nowoczesnej nauki geometrycznej.

[14]) Porówn. Mach. Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, 1872.

[15]) Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica" (1687) porówn. Wł. Natanson. „Wstęp do Fizyki teoretycznej", 1891. str. 13.

[16]) Clerk Maxwell, Materya i ruch, przekład polski 1879.

[17]) Porówn. Ostwald. Lehrbuch der allgemeinen Chemie, 1882 t. I. Rozdział II.

[18]) Peacock, A Treatise on Algebra 1842, Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, 1867.

[19]) W „Pojęciach i metodach matematyki" (1891) uogólniłem w sposób wskazany zasadę zachowania H a n k e l a.

[20]) Teorya grup występuje dziś na plan pierwszy w badaniach matematycznych. W potężnych rękach L i e'g o teorya grup przekształceń stała się obecnie wielką gałęzią badań matematycznych, zapowiadającą świetne rezultaty w dziedzinie geometryi i analizy, a może i nowe zupełnie kierunki myśli.

[21]) G o s i e w s k i. O związku między zasadą najmniejszego działania i najprawdopodobniejszym układem („Prace matematyczno-fizyczne", t. I, 98—110). O zasadzie najprawdopodobniejszego bytu (tamże, t. III, str. 55—68).