899.

SUR LES SURFACES MINIMA.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXI. (*Juillet—Décembre*, 1890), pp. 953, 954.]

ON peut généraliser tant la définition que la construction de ces surfaces, en substituant pour le cercle imaginaire à l'infini une conique ou même une surface quadrique quelconque.

Je rappelle que, dans la théorie ordinaire, une surface minima est une surface telle qu'un point quelconque de la surface est situé à mi-chemin entre les deux centres de courbure, et qu'une telle surface est le lieu des points à mi-chemin entre les deux points situés respectivement sur deux courbes de longueur nulle quelconques. Or on peut rattacher la notion d'une courbe de longueur nulle à celle d'une courbe de poursuite. Pour expliquer cela, j'observe que, dans le plan, en supposant comme à l'ordinaire que le lièvre coure selon une droite et que le chien et le lièvre courent avec des vitesses uniformes, la courbe de poursuite est une courbe déterminée; mais si les vitesses varient arbitrairement, alors la définition exprime seulement que la courbe est une courbe plane. Mais, dans l'espace, si au lieu d'une droite on considère une courbe plane ou à double courbure (disons une directrice) quelconque, alors, quelles que soient les vitesses, la définition précise toujours la courbe, savoir: on a toujours pour courbe de poursuite une courbe dont chaque tangente rencontre la courbe directrice. Au lieu d'une courbe, on peut avoir une surface directrice; dans ce cas, le nom est moins applicable, néanmoins je le retiens, et je dis que la courbe de poursuite est une courbe dont chaque tangente touche la surface directrice. Nous avons, de cette manière, la définition d'une courbe de poursuite par rapport à une courbe ou surface directrice quelconque.

A présent, au lieu du cercle imaginaire à l'infini, considérons une conique quelconque, l'absolue: on établit, comme on sait, par rapport à cette conique, la notion de la perpendicularité, et ainsi les notions d'une normale et des centres de courbure ne cessent pas de subsister. On peut donc considérer une surface telle que chaque point de la surface soit l'harmonicale par rapport aux deux centres de courbure du point de rencontre de la normale avec le plan de l'absolue: on a ainsi ce que je nomme une surface *quasi-minima*. Il va sans dire qu'il faut modifier convenablement la notion métrique d'une aire minima pour qu'elle soit applicable à cette nouvelle surface.

Pour construire la surface, on prend par rapport à l'absolue deux courbes de poursuite quelconques, et puis sur la droite, menée par deux points quelconques de ces courbes respectivement, l'harmonicale par rapport à ces deux points du point de rencontre de la droite avec le plan de l'absolue: le lieu de ce point harmonical sera la surface quasi-minima.

Il paraît permis de substituer pour la conique absolue une surface quadrique quelconque, que je nomme aussi l'*absolue*: on a, comme on sait, les notions de la normale et des centres de courbure. Pour la surface quasi-minima, le point sur la surface sera l'un des points doubles (foyers) de l'involution formée par les deux centres de courbure et les deux points de rencontre de la normale avec l'absolue; et de même pour la construction de la surface, il faut prendre sur la droite menée par deux points quelconques des deux courbes de poursuite respectivement les points doubles (foyers) de l'involution formée par ces deux points et les deux points de rencontre de la droite avec l'absolue.