Sur une sommation d'intégrales considérées en calcul des probabilités

1. *Objet de la présente note.* Soient m, n, μ, m', n', μ', M des nombres entiers tels que

$$m + n = \mu, \qquad m' + n' = \mu', \qquad \mu + \mu' = \mathrm{M};$$

p et q des fractions définies par les égalités $\mu p = m$, $\mu q = n$. Soient ensuite

$$m' = \mu' p + x, \qquad n' = \mu' q - x,$$

x variant par unités de 0 à $\pm \mu' l$, l étant une fraction tout au plus égale à la plus petite des quantités $\frac{1}{2} p$, $\frac{1}{2} q$, $\frac{1}{2} q$, par exemple.

Posons ensuite

$$\mathrm{C}_{\mu'}^{m'} = \frac{1.2\ldots\mu'}{1.2\ldots m'.1.2\ldots n'},$$

$$\mathrm{B} = \int_0^1 z^m (1-z)^n \, dz = \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots\mu.\mu+1},$$

$$\mathrm{B}' = \int_0^1 z^{m+m'} (1-z)^{n+n'} = \frac{1.2\ldots m+m'.1.2\ldots n+n'}{1.2\ldots \mathrm{M}.\mathrm{M}+1},$$

$$\mathrm{T}_{\mu' p + x} = \mathrm{T}_{m'} = \mathrm{C}_{\mu'}^{m'} \mathrm{B}' : \mathrm{B}.$$

La somme

$$\mathrm{P} = \mathop{\mathrm{S}}_{x=-\mu l}^{x=\mu l} \mathrm{T}_{\mu' p + x}$$

exprime la probabilité *a posteriori* qu'un événement, dont la probabilité *a priori* peut varier de zéro à l'unité et qui est arrivé m fois en μ épreuves, se présentera à l'avenir m' fois sur μ' épreuves, la différence entre $(m : \mu)$ et $(m' : \mu')$ étant tout au plus égale à l.

Nous nous proposons de calculer une limite supérieure et une limite inférieure de $B' : B$ et de $T_{m'}$, une limite inférieure de P. On sait d'ailleurs que la somme P est inférieure à l'unité.

Laplace, dans la *Théorie analytique des probabilités* (n° 30, 3e édition, 1820, pp. 385-387), calcule une valeur approchée du $T_{m'}$; Poisson, dans la *Probabilité des jugements* (n° 87, p. 223, ou p. 188 de la traduction allemande), une valeur approchée de P. Mais, suivant l'usage de leur temps, ni l'un ni l'autre ne s'inquiètent d'enfermer ces expressions entre deux limites, l'une supérieure, l'autre inférieure; autrement dit, ils n'évaluent pas l'erreur commise dans l'évaluation de $T_{m'}$ et de P. L'évaluation précise de cette erreur est l'objet propre de la présente note.

2. *Limites de* $(B' : B)$. On a, comme l'on sait, d'après la formule de Stirling,

$$\sqrt{2\pi}\, r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r} < 1.2\ldots r < \sqrt{2\pi}\, r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r+\frac{1}{12r}}.$$

On déduit de là

$$B > \frac{\sqrt{2\pi}}{\mu+1} \frac{m^{m+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}}}{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{12\mu}},$$

$$B < \frac{\sqrt{2\pi}}{\mu+1} \frac{m^{m+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}}}{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}}.$$

De même,

$$B' > \frac{\sqrt{2\pi}}{M+1}\,\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{12M}},$$

$$B' < \frac{\sqrt{2\pi}}{M+1}\,\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}}\,e^{\frac{1}{12(m+m')}+\frac{1}{12(n+n')}}.$$

Par suite,

$$\frac{B'}{B} > \frac{\mu+1}{M+1}\,\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}.\,a,$$

$$a = e^{-\frac{1}{12M}-\frac{1}{12m}-\frac{1}{12n}};$$

$$\frac{B'}{B} < \frac{\mu+1}{M+1}\,\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}.\,b,$$

$$b = e^{\frac{1}{12(m+m')}+\frac{1}{12(n+n')}+\frac{1}{12\mu}}.$$

On démontre aisément les inégalités suivantes :

$$\frac{\mu+1}{M+1} > \frac{\mu}{M}, \qquad \frac{\mu+1}{M+1} < \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\mu+\mu'} < \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m+n} < \frac{1}{2m}+\frac{1}{2n},$$

$$\frac{1}{m+m'}+\frac{1}{n+n'} < \frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{12(m+m')}+\frac{1}{12(n+n')}+\frac{1}{12\mu}$$

$$<\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}+\frac{1}{24m}+\frac{1}{24n}=\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n},$$

$$\frac{1}{12\mathrm{M}}+\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}<\frac{1}{24m}+\frac{1}{24n}+\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}=\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n},$$

$$-\frac{1}{12\mathrm{M}}-\frac{1}{12m}-\frac{1}{12n}>-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}.$$

On a donc

$$a>e^{-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}},\quad b<e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}},$$

Par suite,

$$\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}}>\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\,\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+1}}{\mathrm{M}^{\mathrm{M}+1}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}},$$

$$\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}}<\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+1}}{\mathrm{M}^{\mathrm{M}+1}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}}.$$

En observant que

$$(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}=m^{m+m'+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{m'}{m}\right)^{m+m'+\frac{1}{2}},$$

$$(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}=n^{n+n'+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{n'}{n}\right)^{n+n'+\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{M}^{\mathrm{M}+1}=(\mu+\mu')^{\mathrm{M}+1}=\mu^{\mathrm{M}+1}\left(1+\frac{\mu'}{\mu}\right)^{\mathrm{M}+1},$$

puis que $p = \frac{m}{\mu}$, $q = \frac{n}{\mu}$, on trouve

$$\frac{B'}{B} > \sqrt{\frac{m}{M}}\, p^{m'} q^{n'} \frac{\left(1 + \frac{m'}{m}\right)^{m+m'+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{n'}{n}\right)^{n+n'+\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{\mu'}{\mu}\right)^{\mu+\mu'+1}} e^{-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}},$$

$$\frac{B'}{B} < \qquad p^{m'} q^{n'} \frac{\left(1 + \frac{m'}{m}\right)^{m+m'+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{n'}{n}\right)^{n+n'+\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{\mu'}{\mu}\right)^{\mu+\mu'+1}} e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}}.$$

Ces valeurs sont évidemment très voisines de $p^{m'}q^{n'}$ si m, n sont de grands nombres comparativement à m', n'.

3. *Limites de* $T_{\mu', p+x}$. Au moyen de la formule de Stirling, on établit sans peine les inégalités

$$C_{\mu'}^{m'} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}} \frac{\mu'^{\mu'+1}}{m'^{m'+\frac{1}{2}} n'^{n'+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{12m'}-\frac{1}{12n'}}$$

$$C_{\mu'}^{m'} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}} \frac{\mu'^{\mu'+1}}{m'^{m'+\frac{1}{2}} n'^{n'+\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{12\mu'}}.$$

Posons

$$C = \frac{\mu'^{\mu'+1}}{m'^{m'+\frac{1}{2}} n'^{n'+\frac{1}{2}}} \frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}} (n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}}{M^{M+1}} \frac{\mu^{\mu+1}}{m^{m+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Puisque

$$T_{\mu' p+x} = C_{\mu'}^{m'} \frac{B'}{B},$$

on aura évidemment

$$T_{\mu'p+x} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\,C\,e^{-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}-\frac{1}{12m'}-\frac{1}{12n'}},$$

$$T_{\mu'p+x} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}}\,C\,e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}+\frac{1}{12\mu'}}.$$

On a

$$\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}=\frac{1}{8\mu p}+\frac{1}{8\mu q}=\frac{1}{8\mu pq},$$

$$\frac{1}{12m'}+\frac{1}{12n'}=\frac{\mu'}{12m'n'}=\frac{\mu'}{12(\mu'p+x)(\mu'q-x)}.$$

Puisque x est tout au plus égal à $\mu'l$, et l au plus égal à $\frac{1}{2}q$ supposé inférieur ou égal à $\frac{1}{2}p$, on a

$$\begin{aligned} m'n' &\gtreqless (\mu'p+\mu'l)(\mu'q-\mu'l) \gtreqless \mu'^2(p+\tfrac{1}{2}q)(q-\tfrac{1}{2}q) \\ &= \tfrac{1}{4}\mu'^2(1+p)q > \tfrac{1}{2}\mu'^2 pq. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\mu'}{12m'n'} < \frac{\mu'}{6\mu'^2pq} = \frac{1}{6\mu'pq}, \quad -\frac{\mu'}{12m'n'} > -\frac{1}{6\mu'pq}.$$

Par conséquent,

$$T_{\mu'p+x} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\,C\,e^{-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu'pq}}.$$

Mais on sait que $e^{-\alpha}$ surpasse $1-\alpha$, si α est positif. Donc

$$e^{-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu' pq}} > 1-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu' pq}.$$

De même, si α est égal ou inférieur à $\frac{1}{2}$, on a

$$e^{\alpha} = \frac{1}{e^{-\alpha}} < \frac{1}{1-\alpha} \overline{\overline{<}} 1 + 2\alpha.$$

Par suite,

$$e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}+\frac{1}{12\mu'}} = e^{\frac{1}{8\mu pq}+\frac{1}{12\mu'}} < 1 + \frac{1}{4\mu pq} + \frac{1}{6\mu'}.$$

On a donc enfin

$$T_{\mu' p+x} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}} \sqrt{\frac{\mu}{M}}\, C\left(1 - \frac{1}{8\mu pq} - \frac{1}{6\mu' pq}\right),$$

$$T_{\mu' p+x} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}}\, C\left(1 + \frac{1}{4\mu pq} + \frac{1}{6\mu'}\right)$$

Ce sont les deux limites cherchées de $T_{\mu' p+x}$.

On peut mettre

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}}\, C$$

sous une autre forme, en se servant des relations

$$m = \mu p, \qquad n = \mu q, \qquad m' = \mu' p + x, \qquad n' = \mu' q - x.$$

On trouve ainsi

$$\frac{\mu'^{\mu'+1}}{m'^{m'+\frac{1}{2}} n'^{n'+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p^{\mu' p+x+\frac{1}{2}} q^{\mu' q-x+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{\mu' p}\right)^{\mu' p+x+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{\mu' q}\right)^{\mu' q-x+\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}} (n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}}{M^{M+1}}$$

$$= p^{Mp+x+\frac{1}{2}} q^{Mq\ x+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{Mp}\right)^{Mp+x+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{Mq}\right)^{Mq-x+\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\mu^{\mu+1}}{m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{p^{\mu p+\frac{1}{2}}q^{\mu q+\frac{1}{2}}},$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\mathrm{C}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\,\frac{\left(1+\frac{x}{\mathrm{M}p}\right)^{\mathrm{M}p+x+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{\mathrm{M}q}\right)^{\mathrm{M}q-x+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{\mu' p}\right)^{\mu' p+x+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{\mu' q}\right)^{\mu' q-x+\frac{1}{2}}}.$$

Pour abréger, nous écrirons

$$t_{\mu' p+x}=\frac{\left(1+\frac{x}{\mathrm{M}p}\right)^{\mathrm{M}p+x+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{\mathrm{M}q}\right)^{\mathrm{M}q-x+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{\mu' p}\right)^{\mu' p+x+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{\mu' q}\right)^{\mu'-qx+\frac{1}{2}}}.$$

Alors on aura

$$\mathrm{T}_{\mu' p+x}>\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\left(1-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu' pq}\right)t_{\mu' p+x},$$

$$\mathrm{T}_{\mu' p+x}<\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\left(1+\frac{1}{4\mu pq}+\frac{1}{6\mu'}\right)t_{\mu' p+x}.$$

La première inégalité seule nous servira dans la suite. Pour simplifier les écritures, nous écrirons

$$c=1-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu' pq}.$$

4. *Limite inférieure de* $t_{\mu' p+x} + t_{\mu' p-x}$. On a

$$t_{\mu' p+x} + t_{\mu' p-x} > 2\sqrt{t_{\mu' p+x} . t_{\mu' p-x}} .$$

Posons

$$t_{\mu' p+x} . t_{\mu' p-x} = e^v, \qquad \sqrt{t_{\mu' p+x} . t_{\mu' p-x}} = e^{\frac{1}{2}v}$$

$$v = \left(\mathrm{M}p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mathrm{M}p}\right) + \left(\mathrm{M}p - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mathrm{M}p}\right)$$

$$-\left(\mu' p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{\mu' p}\right) - \left(\mu' p - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu' p}\right) + \text{etc.},$$

etc. désignant ici et plus bas des termes en q analogues aux termes en p.

On trouve, en dérivant v par rapport à x,

$$v' = \log\left(1 + \frac{x}{\mathrm{M}p}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{M}p + x} - \log\left(1 - \frac{x}{\mathrm{M}p}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{M}p - x}$$

$$- \log\left(1 + \frac{x}{\mu' p}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu' p + x} + \log\left(1 - \frac{x}{\mu' p}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu' p - x} + \text{etc.};$$

$$v'' = \frac{1}{\mathrm{M}p + x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mathrm{M}p + x)^2} + \frac{1}{\mathrm{M}p - x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mathrm{M}p - x)^2}$$

$$- \frac{1}{\mu' p + x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu' p + x)^2} - \frac{1}{\mu' p - x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu' p - x)^2} + \text{etc.}$$

On a évidemment, puisque μ' est inférieur à M,

$$v'' > \frac{1}{\mathrm{M}p + x} + \frac{1}{\mathrm{M}p - x} - \frac{1}{\mu' p + x} - \frac{1}{\mu' p - x} + \text{etc.}$$

$$= \frac{2\mathrm{M}p}{\mathrm{M}^2 p^2 - x^2} - \frac{2\mu' p}{\mu'^2 p^2 - x^2} + \text{etc.}$$

$$v'' > \frac{2}{\mathrm{M}p}\left[1+\frac{x^2}{\mathrm{M}^2p^2}+\cdots\right]-\frac{2}{\mu' p}\left[1+\frac{x^2}{\mu'^2p^2}+\cdots\right]+\text{etc.}$$

$$> \frac{2}{\mathrm{M}p}-\frac{2}{\mu' p}\left[1+\frac{4}{3}\frac{x^2}{\mu'^2p^2}\right]+\frac{2}{\mathrm{M}q}-\frac{2}{\mu' q}\left[1+\frac{4}{3}\frac{x^2}{\mu'^2q^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\mathrm{M}pq}-\frac{2}{\mu' pq}-\frac{8}{3}\frac{x^2(p^3+q^3)}{\mu'^3p^3q^3}$$

$$> \frac{2}{\mathrm{M}pq}-\frac{2}{\mu' pq}-\frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu'^3p^3q^3}=-\frac{2}{\mu' pq}\frac{\mu}{\mathrm{M}}-\frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu'^3p^3q^3}.$$

Comme v et v' s'annulent, pour $x=0$, on trouve, en intégrant de 0 à x,

$$v' > -\frac{2x}{\mu' pq}\frac{\mu}{\mathrm{M}}-\frac{8}{9}\frac{x^3}{\mu'^3p^3q^3},$$

$$v > -\frac{x^2}{\mu' pq}\frac{\mu}{\mathrm{M}}-\frac{2}{9}\frac{x^4}{\mu^3p^3q^3}.$$

On a donc

$$t_{\mu' p+x}+t_{\mu' p-x} > 2e^{\frac{1}{2}v}=2e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}\frac{\mu}{\mathrm{M}}-\frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu'^3p^3q^3}},$$

et, par suite,

$$t_{\mu' p+x}+t_{\mu' p-x} > 2e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\left(1-\frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu'^3p^3q^3}\right).$$

5. *Limite inférieure de* P. On a, puisque $t_{\mu p}=1$,

$$\mathrm{P}=\mathop{\mathrm{S}}_{x=-\mu l}^{x=+\mu l}\mathrm{T}_{\mu' p+x} > \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\mathop{\mathrm{S}}_{x=-\mu' l}^{x=+\mu' l}t_{\mu' p+x}$$

$$=\frac{2c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{M}}}\left[\mathop{\mathrm{S}}_{x=0}^{x=\mu' l}(t_{\mu p+x}+t_{\mu p-x})-\frac{1}{2}\right],$$

$$P > \frac{2c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\left[\mathop{S}_{x=0}^{x=\mu' l} e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}\frac{\mu}{M}}\left(1-\frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}\right)-\frac{1}{2}\right],$$

et, *a fortiori,* comme on le voit, en recourant à une représentation géométrique,

$$P > \frac{2c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\left[\int_0^{\mu' l} e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}\frac{\mu}{M}}\left(1-\frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu'^3 p^3 q^3}\right)dx-\frac{1}{2}\right].$$

Posons

$$t^2 = \frac{\mu x^2}{2\mu' pq M},\quad T = l\sqrt{\frac{\mu'}{2pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}} = l\sqrt{\frac{\mu\mu'}{2pq(\mu+\mu')}},$$

il viendra

$$P > \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt - \frac{8c}{9\sqrt{\pi}}\frac{M^2}{\mu^2\mu' pq}\int_0^T e^{-t^2}t^4dt - \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}.$$

La seconde intégrale peut être remplacée par l'intégrale plus grande

$$\frac{8c}{9\sqrt{\pi}}\frac{M^2}{\mu^2\mu' pq}\int_0^\infty e^{-t^2}t^4dt,$$

sans que l'inégalité cesse d'exister. Or, si l'on pose $t^2 = u$,

$$\int_0^\infty e^{-t^2}t^4dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{3}{2}}du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$$

Il résulte de là que

$$P > \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt - \frac{1}{3}\,\frac{M^2}{\mu^2\mu' pq} - \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}.$$

On a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt < 1, \qquad c = 1 - \frac{1}{8\mu pq} - \frac{1}{6\mu' pq} < 1.$$

Par conséquent,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt - \frac{1}{8\mu pq} - \frac{1}{6\mu' pq} - \frac{1}{3}\,\frac{M^2}{\mu^2\mu' qq} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{3}\,\frac{M^2}{\mu^2\mu' pq} = \frac{1}{3pq}\,\frac{\mu^2 + 2\mu\mu' + \mu'^2}{\mu^2\mu'} = \frac{1}{3\mu' pq} + \frac{2}{3\mu pq} + \frac{\mu'}{3\mu pq}.$$

Donc, enfin, en introduisant cette valeur dans l'inégalité précédente,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt - \frac{19}{24\mu pq} - \frac{1}{2\mu' pq} - \frac{1}{3}\,\frac{\mu'}{\mu pq} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}.$$

Si μ et μ' sont de grands nombres, P est très voisin de l'unité (*).

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 5, pp. 538-549, 1904.