Dalsze badania

nad odkształceniem ziemi

pod ciężarem wielkich lodowców.

Wpływ ciężaru wielkich lodowców

przez

M. P. Rudzkiego.

Wniesiono na posiedzeniu dnia 6 listopada 1899 r.

Niniejsza rozprawa jest poniekąd dalszym ciągiem innej, którą ogłosiłem przed kilku miesiącami [1]). W I rozdziale zamierzam podać niektóre poprawki i uzupełnienia do poprzedniej rozprawy, w drugim zajmuję się odkształceniami kuli posiadającej tę samą sztywność co stal, ale zupełnie nieściśliwej, w trzecim traktuję zadanie o odkształceniu kuli pod ciężarem wielkich lodowców w sposób ścisły, podczas gdy rozwiązanie podane w poprzedniej rozprawie było poniekąd tylko przybliżone, albowiem nie uwzględniliśmy tam tej okoliczności, że na dnie oceanów zmiany ciśnienia nie są dane „à priori“, ale same po części zależą od odkształceń. W rezultacie okazuje się, że ścisła metoda prowadzi do nazbyt trudnych i zawiłych rachunków, że przeto w praktyce stosować jej nie warto tembardziej, że i mniej ścisła metoda poprzedniej rozprawy daje zupełnie zadawalniające rezultaty. W ten sposób widzimy, że treść trzeciego rozdziału ma głównie teoretyczne znaczenie.

---

[1]) Odkształcanie się ziemi pod ciężarem wielkich lodowców. Rozprawy Akad. Umiej. tom XXXVII str. 176—224.

W czwartym rozdziale, posługując się metodą poprzedniej rozprawy, rozpatruję pewien rozkład ciśnienia, podobny do rzeczywistego rozkładu ciśnienia na powierzchni ziemi w czasie lodowej epoki, w piątym za pomocą pewnych wzorów zapożyczonych u Boussinesqa traktuję kwestyę odkształceń sprawionych przez nowoutworzoną koralową wyspę.

ROZDZIAŁ I.

Jeszcze o odkształceniu wielkiej stalowej kuli. Poprawki i uzupełnienia do poprzedniej rozprawy.

W czasie, gdy pisałem poprzednią (wyżej przytoczoną) rozprawę, zdawało mi się, że można pominąć zmiany objętości oceanicznych zbiorników spowodowane przez odkształcenie ziemi. Zdawało mi się, że miejscowe pogłębienia oceanicznych zbiorników powinny być mniej więcej zrównoważone przez miejscowe wzniesienia dna oceanów, że zatem suma objętości wszystkich oceanicznych zbiorników mogła uledz tylko nieznacznej zmianie, że przeto zmiany poziomu wód w czasie lodowej epoki były spowodowane tylko przez zmiany potencyału przyciągania oraz przez to, że oceany zawierały mniej wody niż obecnie, albowiem lodowce utworzyły się z wody odjętej oceanom. Przekonałem się jednak następnie, że owe zmiany objętości oceanicznych zbiorników były wprawdzie nieznaczne jednakże nie o tyle, aby je należało zupełnie pominąć, że lepiej uczynimy, jeżeli je uwzględnimy w naszych rachunkach. W niniejszym rozdziale zamierzam właśnie uwzględnić zmiany objętości oceanicznych zbiorników i w odpowiedni sposób poprawić liczby podane w poprzedniej rozprawie.

Podobnie jak poprzednio oznaczamy przez Δr przesunięcie powierzchni litosfery w kierunku promienia, przez δr_1 przesunięcie poziomu wód wskutek zmian w przyciąganiu litosfery, przez δr_2 przesunięcie poziomu wód wskutek przyciągania lodowców, wreszcie przez d grubość tej warstwy wody, która została odjęta oceanom wskutek zamiany ogromnej ilości wody na lód. Dzięki temu, że objętość oceanicznych zbiorników wskutek odkształcenia ziemi uległa pewnej zmianie, ogólne zniżenie poziomu wód jest różne od d i należy je oznaczyć nowym znakiem n. p. znakiem d'. Ponieważ w naszych rachunkach same zmiany objętości oceanicznych zbiorników jawnie nie występują, natomiast wielkość przed chwilą przez d' oznaczona ważną odgrywa rolę, przeto postaramy się obliczyć d' bezpośrednio.

Najłatwiej jest obliczyć d' z warunku, że objętość wody w oceanach pomimo zmian objętości zbiorników nie uległa żadnym zmianom oprócz tej, którą spowodowała strata warstwy wody o grubości d. Wyrażając analitycznie ten warunek otrzymamy równanie:

$$\int (\delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d' + d)\, d\omega = 0, \qquad \text{I}$$

w którem $d\omega$ oznacza element powierzchni a całkowanie odnosi się do całej przestrzeni zajętej przez oceany. Nie potrzebujemy tu ponownie przytaczać wzorów na δr_1 i Δr, wzory te bowiem są podane w poprzedniej rozprawie; natomiast podamy wzór na δr_2, albowiem przekonaliśmy się, że dogodniej jest obliczać δr_2 ze wzoru przedstawiającego tę funkcyę w postaci szeregu funkcyi kulistych aniżeli z całkowych wzorów Woodwarda, którymi posługiwaliśmy się w poprzedniej rozprawie. Wyrażenie na δr_2, o którem mówimy, znajduje się zresztą także w rozprawie Woodwarda na str. 35 (wzór 54), wygląda zaś tak:

$$\delta r_2 = 3h.\frac{\rho_g}{\rho}\sum \frac{A_i P_i}{2i+1}. \qquad \text{II}$$

Znaczenie liter w tym wzorze jest wogóle takie same jak we wzorach poprzedniej rozprawy, prócz tego ρ_g oznacza średnią gęstość lodu, zaś ρ średnią gęstość ziemi.

Wyrażeniem II na δr_2 posługiwaliśmy się nietylko do podstawienia we wzór I, ale także do ponownego obliczenia samych wartości δr_2. Te nowe wartości na δr_2 są podane poniżej w tablicy. Obliczyłem je kładąc:

$$\rho_g = 0{,}9, \qquad \rho = 5{,}5$$

oraz biorąc za każdym razem w rachubę wszystkie wyrazy szeregu aż do wyrazu o wskaźniku 12 włącznie. Wartości na δr_2, w ten sposób ze wzoru II otrzymane, są nieco acz nieznacznie różne od odpowiednich wartości obliczonych z całkowych wzorów Woodwarda, ale nic w tem dziwnego, albowiem tak całkowe wzory Woodwarda jak wzór II są bądź co bądź przybliżone, a po drugie obliczając δr_2 z szeregu II możemy uwzględnić tylko dość ograniczoną ilość wyrazów szeregu.

Wracamy teraz do obliczenia d'. Powiedzieliśmy już, że we wzorze I należy podstawić δr_2 ze wzoru II, a δr_1 i Δr ze wzorów poprzedniej rozprawy. Naturalnie gdy chodzi o zlodowacenie obu półkuli, to należy posługiwać się wzorami trzeciego i czwartego rozdziału poprzedniej rozprawy, gdy zaś chodzi o zlodowacenie jednej półkuli, to wzorami piątego rozdziału. Zamiast $d\omega$ należy podstawić

$$a \sin\theta.\, d\theta.\, d\psi,$$

następnie należy całkować względem ψ od o do 2π a względem θ od

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ do $\cos\theta = +\frac{\sqrt{3}}{2}$. Całkowanie nie przedstawia żadnych trudności tembardziej, że wszystkie funkcye stojące pod znakiem całkowania są niezależne od ψ, a d' i d są niezależne od θ i ψ. Pozostając przy założeniach poprzedniej rozprawy po łatwych rachunkach, których tu przytaczać nie będziemy, znajdziemy, że $d' = 117{,}4$ metrom, gdy tylko jedna półkula jest zlodowacona, oraz $d' = 234{,}8$ metrom, gdy obie półkule są zlodowacone. Gdybyśmy zaś chcieli uwzględnić to, że oceany w rzeczywistości pokrywają nie $0{,}866$ powierzchni ziemi, ale tylko $0{,}736$, to możemy otrzymane przed chwilą wartości na d' pomnożyć przez $\frac{866}{736}$, poczem otrzymamy:

$d' = 138{,}1$ metrom, gdy tylko jedna półkula jest zlodowacona
$d' = 276{,}3$ metrom, gdy obie półkule są zlodowacone.

Zestawiając wyniki otrzymane w poprzedniej rozprawie z tem, cośmy teraz znaleźli, możemy podać następujące liczby.

A. Krągła lodowa powłoka o jednostajnej grubości $h = 2000$ metrów i średnicy 6666 kilometrów. Wszystkie liczby w metrach.

	Δr	(δr_1) min.	δr_2
Środek lodowca	— 396,9	— 109,1	+ 196,4
Krawędź lodowca	— 152,1	— 53,5	+ 93,1
W odległości 90° od środka lodowca	+ 49,2	+ 18,9	— 8,4
Antypody krawędzi lodowca . . .	— 26,7	— 5,4	— 36,5
Antypoda środka lodowca	— 100,9	— 18,4	— 25,7

Przytem

$$d' = 138{,}1 \text{ metrom.}$$

Stąd zaś wynikają następujące przesunięcia poziomu wód.

Środek lodowca . . . . $Dr = +\ 346{,}1$ metrom
Krawędź „ . . . . „ $= +\ 53{,}6$ „
W odległości 90° od środka lodowca „ $= -\ 176{,}8$ „
Antypody krawędzi lodowca . . . „ $= -\ 153{,}3$ „
Antypoda środka lodowca . . . . „ $= -\ 81{,}3$ „

B. Dwie jednakowe krągłe lodowe powłoki o grubości 2000 metrów i średnicy 6666 kilometrów położone jedna naprzeciw drugiej.

	Δr	(δr_1) min.	δr_2
Środek lodowca	— 497,8	— 127,5	+ 170,7
Krawędź lodowca	— 178,7	— 58,9	+ 56,6
W odległości 90° od środka lodowca	+ 98,4	+ 37,8	— 16,8

Przytem

$$d' = 276{,}3 \text{ metrom.}$$

Stąd zaś wynikają następujące przesunięcia poziomu wód:

Środek lodowca .... $Dr = + 264{,}7$ metrom

Krawędź lodowca ...... „ $= - 99{,}9$ „

W odległości 90° od środka lodowca „ $= - 353{,}9$ „

Skoro porównamy te liczby z liczbami, otrzymanemi w poprzedniej rozprawie, to zaraz spostrzeżemy, że wszystkie wnioski z poprzedniej rozprawy pozostają w swej sile, jednakże obecnie przytoczone, poprawione przesunięcia poziomu wód, są wogóle nieco większe niż przesunięcia, znalezione w poprzedniej rozprawie. Przypominamy też czytelnikom, że ani Δr, ani δr_1, ani δr_2 nie mogą być bezpośrednio obserwowane, natomiast Dr t. j. przesunięcia poziomu wód pozostawiają po sobie widome ślady.

ROZDZIAŁ II.

Odkształcenie wielkiej kuli spowodowane przez ciśnienie wielkich lodowców w razie, gdy kula jest nieściśliwą.

Polemika pomiędzy pp. Johnstone Stoney i Chree[1]) naprowadziła mię na myśl, że wartoby obliczyć odkształcenie wielkiej, absolutnie nieściśliwej kuli. Załóżmy n. p., że na kuli spoczywają dwie wielkie lodowe powłoki o średnicy *6666* kilometrów i o grubości h metrów, dalej załóżmy, jak poprzednio, że współczynnik sztywności materyału naszej kuli jest prawie równy współczynnikowi sztywności stali t. j. połóżmy

$$n = 800 \times 10^6 \text{ gramów na kwadratowy centymetr,}$$

ale zamiast kłaść

$$m = 2n,$$

[1]) Phil. Mag. V serya, tom 47 str. 372—375, 494—497, 557—565. tom 48 str. 156—158.

Chree sądzi, że wnętrze ziemi jest prawie zupełnie pozbawione ściśliwości.

położmy

$$m = \infty,$$

t. j. zróbmy założenie, że nasza kula jest absolutnie nieściśliwa.

Ponieważ założenia nasze są wogóle takie same jak w poprzedniej rozprawie, więc będziemy mogli korzystać ze wzorów i wyników w tamtej rozprawie otrzymanych (patrz rozdziały II i III), tylko współczynniki D_i muszą być na nowo obliczone. Zamiast współczynników D_i poprzedniej rozprawy [patrz tablicę IV na str. 202] znajdziemy

$$D_0 = o \qquad D_1 = \infty$$

$$D_2 = \frac{5}{19} \qquad D_3 = \frac{7}{44}$$

$$D_4 = \frac{6}{51} \qquad D_5 = \frac{55}{584}$$

$$D_6 = \frac{39}{495} \qquad D_7 = \frac{35}{516}$$

$$D_8 = \frac{68}{1141} \qquad D_9 = \frac{171}{3216}$$

$$D_{10} = \frac{35}{729} \qquad D_{11} = \frac{253}{5780}$$

$$D_{12} = \frac{50}{1243}$$

Stosownie do tego, co było powiedziane w poprzedniej rozprawie, współczynnik D_1 wcale nie wchodzi w rachubę, gdy zaś podstawimy nowoobliczone wartości na D_i we wzory poprzedniego rozdziału, to w przypadku jednoczesnego zlodowacenia obu półkuli otrzymamy następujące wartości na Δr t. j. na przesunięcia powierzchni litosfery. (Dla porównania jednocześnie przytaczamy wartości na Δr, odpowiadające hypotezie $m = 2n$).

	Δr przy $m = 2n$,	Δr przy $m = \infty$
Środek lodowca . . . . , . . .	$-0,2489\,h$	$-0,17551\,h$
Krawędź lodowca	$-0,08937\,h$	$-0,06544\,h$
W odległości 90° od środka lodowca	$+0,0492\,h$	$+0,03743\,h$

A więc kładąc n. p.

$$h = 2000 \text{ metrów.}$$

	Δr przy $m = 2n$,	Δr przy $m = \infty$ (w metr.)
Środek lodowca	$-497,8$	$-351,0$
Krawędź lodowca	$-178,7$	$-130,9$
W odległości 90° od środka lodowca	$+98,4$	$+74,9$

Widzimy więc, że przy $m = \infty$ odkształcenia kuli wynoszą mniej więcej $^3/_4$ odkształceń przy $m = 2n$[1]).

ROZDZIAŁ III.

Zadanie o odkształceniu ziemi pod ciężarem wielkich lodowców. Rozwiązanie tego zadania za pomocą ścislejszej metody niż metoda użyta w poprzedniej rozprawie.

Już w poprzedniej rozprawie (na str. 192) mówiłem o tem, że metoda, którą tam posługiwaliśmy się, jest pod pewnym względem nie dość ścisła. Chodzi mianowicie o to, że podczas gdy ciśnienie na powierzchnię litosfery jest na powierzchni lądów funkcyą zupełnie określoną, zupełnie znaną, to tymczasem na dnie morza jest właściwie nieokreślone, nieznane. Rzeczywiście tam, gdzie ląd jest pokryty przez lodowce, ciśnienie p' jest proporcyonalne do grubości lodowca, ponieważ zaś grubość lodowca jest dana, przeto i ciśnienie jest „eo ipso" dane. Z drugiej strony tam, gdzie ląd nie jest pokryty przez lodowce, można przyjąć, że ciśnienie p' jest równe zeru, albowiem niema dobrej racyi, aby w tych krajach ciśnienie na powierzchnię było w epoce lodowej różne od współczesnego. Prawda, że i w krajach niepokrytych przez lodowce od epoki lodowej do dni dzisiejszych zaszły pewne zmiany, które mogły w pewnych miejscach wywołać pewne małe zmiany ciśnienia, ale zmian tych nie potrzebujemy tu uwzględniać i możemy pozostać przy hypotezie, że w tych krajach ciśnienie p' jest równe zeru. Widzimy stąd, że i w krajach niepokrytych przez lodowce ciśnienie p' jest znane, a zatem możemy ogólnie powiedzieć, że o ile chodzi o powierzchnię litosfery wśród lądów, to p' jest funkcyą znaną. Ale rzecz się ma inaczej, skoro chodzi o dno morza. Tu ciśnienie jest zależne od wysokości słupa wody, która ze swej strony zależy i od odkształcenia dna i od zmian poziomu wód. Widzimy więc, że ciśnienie p' musi być też zależne od odkształcenia dna i od odkształcenia powierzchni ekwipotencyalnych, które wzajemnie zależą od ciśnienia p'. Ta wzajemna zależność odkształceń od ciśnienia p' i ciśnienia p' od odkształceń znacznie utrudnia i komplikuje zadanie. Aby tę trudność ominąć, w poprzedniej rozprawie pominęliśmy lokalne zmiany funkcyi p' na dnie oceanu i zamiast rzeczywistych wartości oceanicznej funkcyi p' przyjęliśmy średnią jej wartość. Tę średnią wartość łatwo jest obliczyć z warunku, żeby integralne

[1]) Warto porównać otrzymany tu wynik z tem, co mówi H. Love w rozprawie pod tyt. „On Lord Kelvin's Estimate of the Rigidity of the Earth". Cambridge Phil. Trans. tom XV str. 107—118.

ciśnienie p' na dno oceanów było co do absolutnej wartości równe a co do znaku odwrotnie przeciwne integralnemu ciśnieniu p' na powierzchnię lądów. Obecnie jednak pokażemy, w jaki sposób można uwzględnić lokalne zmiany ciśnienia p' na dno oceanów t. j. wprowadzić w rachunek nie średnią wartość ale rzeczywiste lokalne wartości oceanicznego ciśnienia p'. W tym celu postąpimy w następujący sposób.

Zasadniczy warunek

I $$\int p' d\omega = 0$$

naturalnie pozostanie w swej sile. Przypominamy, że p' oznacza różnicę między ciśnieniem na powierzchnię litosfery w czasie lodowej epoki i obecnem ciśnieniem na tę samą powierzchnię, dalej że $d\omega$ oznacza element powierzchni litosfery, zaś całkowanie rozciąga się do całej powierzchni kuli. Zresztą wogóle zatrzymamy znakowanie poprzedniej rozprawy, wprowadzimy tylko niektóre nowe symbole, tak n. p. będziemy oznaczać przez ρ_g średnią gęstość lodu, przez ρ_m średnią gęstość wody morskiej, dalej będziemy oznaczać rzeczywiste średnie zniżenie poziomu wód przez d' t. j. tak samo, jak w pierwszym rozdziale niniejszej rozprawy, zaznaczymy wreszcie, że w obecnym rozdziale będziemy uważać h t. j. grubość lodowca nie za stałą ale za zmienną od miejsca do miejsca wielkość, będzie to więc pewna funkcya współrzędnych θ i ψ.

W myśl tego, co było wyżej powiedziane, ciśnienie p' jest na powierzchni lądu znane: tam, gdzie ląd jest okryty przez lodowce mamy,

$$p' = \rho_g \cdot h \text{ gramów na kwadr. centym.,}$$

tam zaś, gdzie niema lodowców, mamy

$$p' = 0.$$

Na dnie oceanu p' jest tymczasem nieznane i musi być określone ze samych warunków zadania, wiemy atoli, że to ciśnienie jest równe iloczynowi gęstości wody morskiej na zmianę wysokości słupa wody spoczywającego na dnie oceanu t. j. wiemy, że na dnie oceanu

II $$p' = \rho_m (\delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d') \text{ gramów na kw. cent.}$$

Z pomiędzy funkcyi stojących na prawej stronie tego równania δr_2 jest funkcyą naprzód daną, niezależną od odkształceń. Rzeczywiście możemy określić δr_2, skoro tylko kształt i rozmiary lodowców są znane, bo δr_2 zależy tylko od przyciągania lodowców. O funkcyi tej mówiliśmy zresztą już w pierwszym rozdziale niniejszej rozprawy i podaliśmy tam (patrz wzór II rozdziału I) rozwinięcie jej w szereg funkcyi kulistych zastosowane do specyalnego przypadku, gdy grubosć lodu h jest stała.

Tu podamy ogólniejszy wzór, odpowiadający przypadkowi, gdy h jest od miejsca do miejsca zmienne.

Należy najpierw rozwinąć h w szereg funkcyi kulistych powierzchniowych, dajmy na to Σh_i, taki, aby szereg Σh_i w okolicach okrytych przez lodowce był wszędzie równy rzeczywistej grubości lodowców h, a w całej pozostałej powierzchni kuli miał stałą wartość zero. Metody, za pomocą których można wykonać takie rozwinięcie, są znane i nie potrzebujemy się niemi tutaj zajmować. Zakładamy więc, że takie rozwinięcie funkcyi h w szereg funkcyi kulistych powierzchniowych już jest dokonane i piszemy

$$h = \Sigma h_i. \tag{III}$$

Ponieważ grubość lodu h jest wszędzie wobec ogromnych rozmiarów ziemi bardzo mała, więc można użyć metody zagęszczenia i na podstawie znanych twierdzeń od razu napisać

$$\delta r_2 = 3 \cdot \frac{\rho_g}{\rho} \sum_1^{\infty} \frac{h_i}{2i+1}. \tag{IV}$$

We wzorze tym opuściliśmy funkcyę kulistą rzędu zero[1]), przypominamy też, że ρ, jak zwykle, oznacza średnią gęstość ziemi.

Teraz, gdy już posiadamy wzór na δr_2, przejdźmy do obliczenia innych funkcyi, figurujących w równaniu II, mianowicie do obliczenia funkcyi δr_1, Δr i p' wzajemnie od siebie zależnych. W tym celu postąpimy w następujący sposób.

Zawsze można z góry założyć, że p' da się przedstawić jako pewien szereg funkcyi kulistych powierzchniowych, t. j. można zawsze napisać

$$p' = \sum_1^{\infty} p_i, \tag{V}$$

przyczem naturalnie współczynniki zawarte we funkcyach p_i tymczasem pozostaną nieokreślone. Z drugiej strony wedle wzoru XXI na str. 189 poprzedniej rozprawy

$$\Delta r = a \sum_1^{\infty} T_i p_i. \tag{VI}$$

O tem, jakie znaczenie mają współczynniki T_i, nie będziemy tu mówić, albowiem była o tem mowa w poprzedniej rozprawie [patrz wzór XX na str. 189 oraz wzory XIV i XV na str. 199]. Wzory na δr_1 są

---

[1]) Albowiem stała wchodząca w szereg IV zostałaby skompensowana, gdybyśmy uwzględnili pewien defekt przyciągania na morzu spowodowany przez to, że oceany zawierają mniej wody.

również podane w poprzedniej rozprawie, zanim je jednak stamtąd przepiszemy, pozwolimy sobie zrobić następującą uwagę. Obliczając w poprzedniej rozprawie δr_1, zupełnie pominęliśmy pewne zresztą nieznaczne zmiany potencyału przyciągania pochodzące stąd, że podczas odkształcenia gęstość elementów masy doznaje pewnych zmian, albowiem wskutek odkształcenia materyał kuli w pewnych miejscach jest ściśniony a w innych rozciągniony. Otóż mogłoby się komu zdawać, że należy uwzględnić te zmiany potencyału przyciągania i dodać do dawnego wzoru na δr_1 pewne poprawki. Sądzimy jednak, że zupełnie nie warto tracić czas na obliczenie tych poprawek, albowiem i tak nie możemy podać zupełnie dokładnych wartości na δr_1. Rzeczywiście jesteśmy zmuszeni pominąć o wiele ważniejszą okoliczność aniżeli drobne lokalne zmiany gęstości, spowodowane przez ściskanie i rozciąganie, towarzyszące odkształceniu. Jeżeli odkształceniu podlega ciało niejednorodne, jakiem jest nasza ziemia, to na miejsce elementów o pewnej określonej gęstości wsuwają się inne o innej częstokroć znacznie od poprzedniej różnej gęstości. Dzięki temu potencyał przyciągania doznaje zmian donioślejszych aniżeli zmiany gęstości, pochodzące ze ściskania i rozciągania. Lecz zmian tych nie możemy w żaden sposób uwzględnić, bo nie znamy wewnętrznej budowy ziemi. Widzimy więc, że wartości na δr_1 muszą pozostać do pewnego stopnia niepewne i że można tylko powtórzyć to, co już było powiedziane w poprzedniej rozprawie t. j., że δr_1 muszą być koniecznie zawarte między

$$\delta r_1 = 3a \sum \frac{T_i p_i}{2i+1} \quad \text{oraz} \quad \delta r_1 = 3a \frac{\rho_s}{\rho} \sum \frac{T_i p_i}{2i+1}.$$

Napisane przed chwilą wzory nie zawierają żadnych nowych symbolów prócz ρ_s, które oznacza średnią gęstość powierzchownych warstw litosfery. Wiemy zresztą, że prawdziwe rzeczywiste wartości na δr_1 muszą być o wiele bliższe do wartości podanych w drugim z pomiędzy tylko co napisanych wzorów niż do wartości podanych w pierwszym z tych wzorów, wiemy także, że wedle wszelkiego prawdopodobieństwa najbardziej zbliżymy się do rzeczywistości, gdy w tym drugim wzorze przyjmiemy na ρ_s dość wysoką wartość, t. j. gdy założymy, że ρ_s wynosi połowę albo trochę więcej jak połowę średniej gęstości ziemi ρ. Kładziemy więc ostatecznie

$$\text{VII} \qquad \delta r_1 = 3a \cdot \frac{\rho_s}{\rho} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{T_i p_i}{2i+1}$$

rozumiejąc pod ρ_s gęstość mniej więcej równą połowie średniej gęstości ziemi.

Teraz gdy już wszystkie funkcye figurujące w równaniu II są wyrażone przez szeregi funkcyi kulistych powierzchniowych, zawierających pewne tymczasem nieokreślone współczynniki, powróćmy do wyłuszczonych na początku rozdziału warunków, którym musi zadość czynić funkcya $p' = \Sigma p_i$. Wiemy, że w krajach pokrytych lodową powłoką musi być

$$p' = \Sigma p' = \rho_g . h, \qquad \text{VIII}$$

w krajach niepokrytych przez lodowce

$$p' = \Sigma p_i = 0, \qquad \text{IX}$$

wreszcie stosownie do równania II na dnie oceanów

$$p' = \Sigma p_i = \rho_m (\delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d'), \qquad \text{X}$$

albo gdy w te ostatnie równanie podstawimy wartości na δr_1, δr_2 i Δr ze wzorów IV, VI i VII, to otrzymamy dla dna oceanów warunek

$$\sum p_i = \rho \left[3a \sum_1^\infty \left(\frac{\rho_s}{\rho} \cdot \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{3}\right) T_i p_i + \frac{3\rho_g}{\rho} \sum_1^\infty \frac{h_i}{2i+1} - d'\right]. \qquad \text{X bis}$$

Z równań VIII, IX i X [albo, co wszystko jedno X bis] widzimy, że szereg Σp_i musi w trzech różnych częściach powierzchni kuli przedstawiać coraz to inne funkcye.

Ponieważ w obecnym rozdziale staramy się traktować zadanie o ile możności ogólnie, więc nie ograniczymy się do przypadku, gdy funkcya p' jest zależna tylko od θ ale nie od ψ, przeciwnie założymy, że p' jest zależne od obu współrzędnych. Wskutek tego pod symbolem p_i nie należy rozumieć wielomianów Legendre'a ale najogólniejsze funkcye kuliste powierzchniowe. Taka ogólna funkcya i tego stopnia daje się przedstawić w następujący sposób:

$$p_i = \sum_{s=0}^{s=i} (A_i^{(s)} \cos s\psi + B_i^{(s)} \sin s\psi)\, P_i^{(s)}. \qquad \text{XI}$$

$P_i^{(o)}$ jest to nic innego jak wielomian Legendre'a i tego stopnia (w poprzedniej rozprawie oznaczaliśmy wielomiany Legendre'a po prostu przez P_i), co zaś do $P_i^{(s)}$, to ogólne wyrażenie tych funkcyi można napisać w następujący sposób

$$P_i^{(s)} = \sin^s\theta \left[\cos^{i-s}\theta - \frac{(i-s)(i-s-1)}{4.(s+1).1} \cos^{i-s-z}\theta . \sin^2\theta + \right.$$
$$+ \frac{(i-s)(i-s-1)(i-s-2)(i-s-3)}{4^2.(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot \cos^{i-s-4}\theta . \sin^4\theta - \qquad \text{XII}$$
$$\left. - \text{etc} \ldots . \right]$$

Stałe $A_i^{(s)}$ i $B_i^{(s)}$ we wzorze XI są naturalnie tymczasem jeszcze nieokreślone. Gdyby p' było funkcyą wszędzie daną, to moglibyśmy zaraz obliczyć wartość tych stałych $A_i^{(s)}$ etc. .... zapomocą znanych metod. Otóż obecnie pomimo tego, że p' jest daną funkcyą tylko w pewnej części powierzchni kuli, postąpimy sobie tak, jak gdyby p' było wszędzie dane i zastosujemy znane metody, służące do obliczenia współczynników $A_i^{(s)}$, $B_i^{(s)}$. Napiszemy dla krótkości

$$sin\theta . d\theta . d\psi = d\sigma,$$

następnie oznaczymy przez $\int_G$ całkowanie po całej powierzchni lądu okrytej przez lodowce, dalej oznaczymy przez $\int_L$ całkowanie po całej powierzchni lądu nieokrytej przez lodowce, wreszcie przez $\int_M$ całkowanie po całej powierzchni pokrytej przez ocean. Używając tylko co przytoczonych symbolów możemy napisać wyrażenie na $A_i^{(s)}$ w następującym kształcie:

$$A_i^{(s)} = \frac{1}{(i,s)\pi} \cdot \left[\rho_g \int_G h . P_i^{(s)} cos\, s\psi . d\sigma + \right.$$

XIII $$\left. + \rho_m \int_M (\delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d') P_i^{(s)} cos\, s\psi . d\sigma \right],$$

przyczem:

XIV $$(i, s) = \frac{2}{2i+1} \cdot \frac{1.2. \ldots s.}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \left(s - \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1.2. \ldots\ldots (i-s)}{(2s+1) \ldots\ldots (2s+i-s)}.$$

Wzór na $B_i^{(s)}$ jest zupełnie podobny do wzoru na $A_i^{(s)}$, tylko zamiast $cos\, s\psi$ zawiera wszędzie $sin\, s\psi$. Dla $s = 0$ mamy naturalnie $cos\, s\psi = 1$, $sin\, s\psi = 0$ oraz $B_i^{(s)} = 0$, jednocześnie mamy

$$(i, o) = \frac{2}{2i+1}.$$

Co do całkowania po powierzchni nieokrytych przez lodowce lądów, to ze względu na to, że we wszystkich tych okolicach p' równa się zeru, rezultat tego całkowania jest także naturalnie równy zeru. Dlatego też we wzorze XIII zupełnie opuściliśmy całkę $\int_L$.

Przypatrzmy się nieco bliżej wzorowi XIII. Pod znakiem całkowania $\int_G$ stoją zupełnie określone, wiadome funkcye, ponieważ zaś i granice całkowania są wiadome, więc całkowanie $\int_G$ da zupełnie określony liczbowy rezultat; po pomnożeniu tej liczby przez $\frac{\rho_g}{(i, s)\pi}$, które jest także zupełnie określoną wiadomą liczbą, otrzymamy zupełnie określoną liczbę, którą dla krótkości oznaczymy przez $\chi_i^{(s)}$. Zauważmy zresztą, że całkowanie $\int_G$ jest identyczne z tem, które przytrafia się przy rozwinięciu funkcyi h w szereg funkcyi kulistych (porównaj ze wzorem III niniejszego rozdziału). Pod znakiem całkowania $\int_M$ stoi suma $\delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d'$ oraz pewna zupełnie określona funkcya, mianowicie $P_i^{(s)} \cos s\,\psi$. Z pomiędzy wyrazów tylko co pomienionej sumy d' jest to pewna jeszcze nieokreślona stała niezależna od współrzędnych, którą można wyprowadzić poza znak całkowania. To co pozostanie pod znakiem całkowania jest wiadome, granice całkowania są też wiadome, przeto po wykonaniu całkowań i po pomnożeniu przez $\frac{\rho_m}{(i, s)\,\pi}$ otrzymamy pewną liczbową stałą, którą oznaczymy przez $\pi_i^{(s)}$. Weźmy teraz funkcyę δr_2. Wedle wzoru IV δr_2 jest to pewien nieskończony ale zupełnie wiadomy i określony szereg funkcyi kulistych; i tu zatem po dokonaniu całkowania i t. d. otrzymamy zupełnie określoną liczbę, którą oznaczymy przez $\varkappa_i^{(s)}$. Zobaczmy wreszcie, co nam da wyraz zawierający $\delta r_1 - \Delta r$. Wedle wzorów VI i VII $\delta r_1 - \Delta r$ wyraża się przez pewien nieskończony szereg zawierający też same funkcye p_i, których współczynniki właśnie mają być określone, funkcye p_i składają się bowiem ze zupełnie określonych funkcyi $P_i^{(s)}$, $\cos s\,\psi$, $\sin s\,\psi$ i z jeszcze nieokreślonych stałych współczynników $A_i^{(s)}$, $B_i^{(s)}$. Możemy wszakże podstawić ze wzorów VI i VII szeregi wyrażające funkcye δr_1 i Δr, możemy powyprowadzać stałe $A_i^{(s)}$ i $B_i^{(s)}$ za znaki całkowania i wykonać całkowania. Ponieważ granice całkowania są znane, a funkcye, które pozostały pod znakiem całkowania wiadome, przeto otrzymamy zupełnie określone liczby. Pomnóżmy jeszcze te liczby przez $\frac{\rho_g}{(i, s)\,\pi}$ i oznaczmy iloczyny przez $\alpha_i^{(s)}$, $\beta_i^{(s)}$, $\gamma_i^{(s)}$ i t. d. Oczywiście będą to zupełnie określone, wiadome liczby. Ze wszystkiego, co było tu powiedziane, widzimy, że z równania XIII po wykonaniu całkowań i mnożeń otrzymamy następujące równanie

$$\left.\begin{aligned} A_i^{(s)} = \chi_i^{(s)} &+ d'\pi_i^{(s)} + \varkappa_i^{(s)} \\ &+ \alpha_i^{(s)} A_1^{(0)} + \beta_i^{(s)} A_1^{(1)} + \gamma_i^{(s)} B_1^{(1)} \\ &+ \delta_i^{(s)} A_2^{(0)} + \varepsilon_i^{(s)} A_2^{(1)} + \zeta_i^{(s)} B_2^{(1)} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &+ \lambda_i^{(s)} A_n^{(0)} + \mu_i^{(s)} A_n^{(1)} + \nu_i^{(s)} B_n^{(1)} + \\ &+ \ldots\ldots \; in.\ inf. \end{aligned}\right| \qquad \text{XIII bis}$$

Dla $B_i^{(s)}$ otrzymamy oczywiście zupełnie takie same równanie. Równania te zawierają nieskończoną ilość wyrazów. $A_1^{(0)}$, $B_1^{(0)}$, $A_1^{(1)}$, $B^{(1)}$ . . . i t. d.

$A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ i t. d. ... $A_i^{(i)}$, $B_i^{(i)}$ i t. d. ... są niewiadome, dalej jeszcze d' jest niewiadome, zaś $\chi_i^{(i)}$, $\pi_i^{(i)}$, $\varkappa_i^{(i)}$, $\alpha_i^{(i)}$ i t. d. są wiadome, są to więc liniowe algebraiczne równania. Możemy napisać tyleż równań XIII *bis*, ile jest współczynników $A_i^{(i)}$, $B_i^{(i)}$ t. j. nieskończoną ilość równań. Prócz równań w rodzaju XIII *bis* mamy jeszcze jedno równanie, wynikające z warunkowego równania I t. j. z równania

$$\int p' d\omega = 0.$$

Ponieważ

$$\int_L p' d\sigma = 0,$$

więc te warunkowe równanie przejdzie na:

$$\text{I bis} \qquad \int_G p'\,d\sigma + \int_M p'\,d\sigma = 0.$$

Pierwsza z całek, figurujących w tem równaniu, ma stałą wartość, którą można oznaczyć przez $\chi_0^{(0)}$. W drugą całkę podstawimy zamiast p' jego wartość: $\delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d'$, dalej podstawimy zamiast δr_1, Δr i δr_2 ich wartości ze wzorów VII, VI i IV, wykonamy całkowania i inne działania a otrzymamy w rezultacie równanie

$$\text{XV} \qquad \chi_0^{(0)} + A_1^{(0)} \cdot \sigma + A_1^{(1)} \vartheta + \ldots \quad \varkappa_0^{(0)} - d' \frac{A}{a} = 0,$$

w którem, jak dawniej, A oznacza pole powierzchni zajętej przez oceany, a średni promień ziemski, σ, ϑ i t. d. pewne liczbowe stałe, $A_i^{(i)}$, $B_i^{(i)}$ oraz d' szukane niewiadome współczynniki. I to równanie jest także liniowe oraz składa się z nieskończonej liczby wyrazów.

Widzimy więc, że równania w rodzaju XIII bis i równanie XV tworzą pewien system algebraicznych liniowych równań. Równania te należą do kategoryi równań zawierających wiadome wyrazy, tak n. p. równanie XV zawiera wiadomy wyraz: $\chi_0^{(0)} + \varkappa_0^{(0)}$, równanie XIII *bis* wiadomy wyraz: $\chi_i^{(i)} + \varkappa_i^{(i)}$ i t. d. Ilość równań i ilość niewiadomych jest nieskończenie wielka, ale pomimo tego możemy powiedzieć, że ilość równań jest równa ilości niewiadomych, albowiem każdemu współczynnikowi $A_i^{(i)}$ lub $B_i^{(i)}$ odpowiada jedno równanie w rodzaju XIII *bis*, zaś niewiadomej d' odpowiada równanie XV. Wnosimy stąd, że te równania posiadają zupełnie określony system rozwiązań różnych od zera, przyczem naturalnie dla każdej z niewiadomych d', $A_i^{(i)}$, $B_i^{(i)}$ i t. d. otrzymamy tylko po jednej wartości.

Systemy zawierające nieskończoną ilość liniowych algebraicznych równań o nieskończonej ilości niewiadomych nie są czemś nowem w analizie. Takie równania były nietylko niejednokrotnie badane z czysto teoretycznego punktu widzenia, ale nawet stosowane do rozwiązania pewnych praktycznych zagadnień [1]). Swoją drogą, gdybyśmy zechcieli obliczyć współczynniki $A_i^{(\nu)}$, $B_i^{(\nu)}$ zapomocą tylko co wyłożonej metody, tobyśmy musieli pokonać ogromne trudności, przedewszystkiem zaś mielibyśmy do czynienia z okropnie długimi rachunkami. Wskutek tego sądzimy, że wcale nie warto używać tej metody do celów praktycznych tembardziej, że w zagadnieniach odnoszących się do odkształceń ziemi łatwiejsza choć mniej ścisła metoda, którą posługiwaliśmy się poprzednio, jest zupełnie wystarczająca.

Należy też zaznaczyć, że ponieważ współczynniki $A_i^{(\nu)}$ i $B_i^{(\nu)}$ w szeregu Σp_i przy użyciu tej metody obliczają się nie w zwykły sposób, używany przy rozwinięciu pewnej wiadomej funkcyi w szereg funkcyi kulistych, ale aż przez rozwiązanie pewnego systemu liniowych równań, przeto trzeba jeszcze osobno zbadać zbieżność szeregu Σp_i w ten sposób otrzymanego. Jest to nowe dodatkowe a wcale nie łatwe zadanie, którem nie będziemy się tu zajmować, bo nie mamy zamiaru posługiwać się nową metodą do celów praktycznych.

Nie potrzebujemy chyba przypominać, że skoro tylko współczynniki szeregu Σp_i są określone, to obliczenie szeregów wyrażających funkcye δr_2 i Δr jest zupełnie łatwą rzeczą. Wszystkie wzory i wskazówki odnoszące się do tego obliczenia były podane w poprzedniej rozprawie.

ROZDZIAŁ IV.

O pewnym rozkładzie ciśnienia podobnym do rozkładu ciśnienia w czasie epoki lodowej.

Nie wdając się w kwestyę, czy zlodowacenie obu półkuli było jednoczesne czy przemienne, zastanówmy się nad tem, jaki kształt i położenie miały wielkie lodowce lodowej epoki. Co do południowego bieguna, który i dziś jest ze wszech stron otoczony lodami, to przypuszczają, że wówczas był jeszcze więcej zlodowacony. O ile można wnosić ze śladów pozostałych po wyspach antarktycznego oceanu, lody sięgały poza koło biegunowe. Granica tych lodów [porównaj n. p. kartę Nr. 5. w Atlasie Berghausa] była nieregularna; tu i owdzie lody sięgały dalej

---

[1]) Porównaj prace następujących autorów:
Hill. Acta math. Tom 8.
Poincaré. Bull. Soc. math. de France. Tom 14.
Helge von Koch. Acta math. Tom 15 i 16.

ku północy, miejscami zaś odstępowały ku południowi, jednakże wogóle antarktyczne lody były zgrupowane mniej więcej symetrycznie na około południowego bieguna. Prócz wielkiego antarktycznego lodowca w czasie epoki lodowej na południowej półkuli istniały jeszcze inne znacznie od niego mniejsze ale też bardzo rozległe kontynentalne lodowce jak patagoński i nowozelandzki. Inne małe lodowce możemy pominąć milczeniem.

Na północnej półkuli ogromny kontynentalny lodowiec pokrywał Grenlandyę, wyspy północno-amerykańskiego archipelagu i północną Amerykę sięgając miejscami aż do 38^0 półn. szerokości. Drugi wielki jednakże rozmiarami amerykańskiemu ustępujący lodowiec pokrywał północną Europę. Nieco jeszcze niepewne ślady trzeciego bardzo rozległego lodowca znajdują się we wschodniej Syberyi. Prócz tego wszystkie wyższe góry w Ameryce, Azyi i Europie były okryte ogromnymi lodowcami.

Nie możemy napewno rozstrzygnąć, czy owe trzy wielkie kontynentalne lodowce: amerykański, europejski i wschodniosyberyjski łączyły się ze sobą, czy nie, czy należy je uważać za części pewnej większej całości, czy też za samoistne utwory. Bardzo poważni badacze skłaniają się ku hypotezie, że owe trzy wielkie kontynentalne lodowce nie były ze sobą połączone, że sam biegun północny i rozległe okolice w jego pobliżu nie były okryte przez lodowce. Aby zbadać, do jakich konsekwencyi prowadzi ta hypoteza, rozważymy w niniejszym rozdziale pewne specyalne zadanie.

Pomijając wszystkie mniejsze lodowce, rozważymy tylko odkształcenie sprawione przez ciśnienie czterech największych lodowców 1. antarktycznego, 2. amerykańskiego, 3. europejskiego, 4. syberyjskiego. Rzeczywiste granice tych lodowców były naturalnie bardzo nieregularne i gdybyśmy chcieli choćby tylko przybliżenie uwzględnić ich konfiguracyę, tobyśmy musieli pokonać niesłychanie długie rachunki, możemy jednak uprościć trochę zadanie, jeżeli zamiast rzeczywistych granic lodowców weźmiemy pewne koła. Mianowicie przyjmiemy następujące granice i rozmiary lodowców. Zamiast antarktycznego lodowca weźmiemy kręgły lodowiec, sięgający do $64^0\, 9'\, 9''$ połudn. szerokości ($\cos 25^0\, 50'\, 51'' = 0{,}9$), środek jego będzie zatem identyczny z południowym biegunem. Powierzchnia pokryta przez ten lodowiec wyniesie 0,05 powierzchni kuli. Zamiast północno-amerykańskiego lodowca weźmiemy kręgły lodowiec o promieniu wynoszącym $21^0\, 33'\, 55''$ w mierze kątowej [$\cos 21^0\, 33'\, 55'' = 0{,}93$]. Lodowiec ten pokryje 0,035 powierzchni kuli, środek jego można umieścić pod 60^0 połudn. szerok. i 90^0 dług. geogr. na zachód od Greenwich. Zamiast europejskiego lodowca weźmiemy także krągły lodowiec o promieniu wynoszącym $11^0\,28'\,42''$ w mierze kątowej [$cos\,11^0\,28'\,42'' = 0{,}98$], pokrywający 0,01 powierzchni kuli. Takie same rozmiary nadamy też syberyjskiemu lodowcowi. Środek europejskiego lodowca można pomieścić pod 62^0 połudn. szerok i 27^0 geogr. dług. [Dla ułatwienia rachunku założymy potem, że środek europejskiego lodowca też znajduje się pod 60^0 geogr szerokości, to przypuszczenie ma zresztą bardzo nieznaczny wpływ na wyniki rachunku]. Środek syberyjskiego lodowca pomieścimy pod 60^0 połudn. szerok. i 130^0 dług. geogr. [W przykładzie przytoczonym ku końcowi rozdziału geograficzne długości środków lodowców wcale nie wchodzą do rachunku].

Dwa większe lodowce antarktyczny i amerykański miały rzeczywiście z gruba kolisty kształt tak, że zastępując je przez krągłe lodowce nie odbiegamy nazbyt daleko od prawdy; natomiast europejski lodowiec miał kształt raczej z gruba podobny do półkola aniżeli do koła (o problematycznym syberyjskim lodowcu nie wiemy dobrze jakiego był kształtu), ale rachunki, które trzeba wykonać, aby obliczyć odkształcenia i tak już są bardzo długie, gdybyśmy zaś zechcieli wprowadzić takie figury jak półkole,. to przybrałyby wprost zastraszające rozmiary. Tymczasem korzystając z tego, że wszystkie wzory, służące do obliczenia odkształceń i t. d., są liniowe, że zatem można wykonać wszystkie rachunki odnoszące się n. p. do amerykańskiego lodowca zupełnie niezależnie od rachunków odnoszących się do pozostałych, możemy przy rachunkach odnoszących się do któregokolwiek lodowca umieścić biegun współrzędnych w jego środku, a wtedy możemy wyzyskać tę okoliczność, że lodowiec jest krągły [1]) i użyć zamiast ogólnych powierzchniowych funkcyi kulistych po prostu te same wielomiany Legendre'a, którymi posługiwaliśmy się w poprzedniej rozprawie, przez co rachunki ogromnie się upraszczają.

Zasadniczy warunek

$$\int p'\,d\omega = 0,$$

gdzie całkowanie odnosi się do całej powierzchni kuli, musi naturalnie być spełniony. Aby mu zadość uczynić nie będziemy się nawet kusić o zastosowanie ścisłej metody poprzedniego rozdziału, założymy po prostu, że w całej powierzchni kuli niepokrytej przez lodowce istnieje pewne jednostajne odjemne ciśnienie równoważące dodatnie ciśnienie lodowców. Właściwie należałoby założyć, że to kompensujące odjemne

[1]) Rozumie się, musimy jednocześnie założyć, że lodowiec ma jednostajną grubość albo przynajmniej budowę symetryczną naokoło środka.

ciśnienie ogranicza się do okolic zajętych przez oceany, ale chcąc przedstawić te ostatnie choćby tylko przez kombinacyę wielkich kręgów, zawsze musielibyśmy znacznie przedłużyć i tak już długie rachunki, osiągnęlibyśmy zaś rezultaty niewiele od tu podanych odmienne.

Jeżeli oznaczymy pole powierzchni całej kuli przez α, pola pokryte przez lodowce antarktyczny, amerykański, europejski i syberyjski przez α_1, α_2, α_3, α_4, ich grubości przez h_1, h_2, h_3, h_4, wreszcie gęstość lodu lodowcowego przez ρ_g, to ciężar lodowców wyniesie

$$\rho_g(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4) \text{ gramów,}$$

jeżeli wyrazimy wszystkie α_i i h_i w centymetrach, zaś jednostajne odjemne ciśnienie w okolicach niepokrytych przez lodowce wyniesie

$$-\rho_g \cdot \frac{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4}{\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} \text{ gramów na centym kwadr.}$$

Dla krótkości połóżmy:

$$H = \frac{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4}{\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} = \frac{1}{0{,}895}(0{,}05h_1 + 0{,}035h_2 + \\ + 0{,}01h_3 + 0{,}01h_4),$$

a będziemy mogli napisać wzór na jednostajne odjemne ciśnienie w okolicach niepokrytych przez lodowce w stosunkowo prostym kształcie:

$$p' = -\rho_g \cdot H.$$

Przechodząc do rachunków należy przyjąć, że w całej powierzchni kuli panuje jednostajne odjemne ciśnienie

$$-\rho_g H,$$

a w okolicach zajętych przez lodowce prócz tego mamy ciśnienia:

$\rho_g(h_1 + H)$ w okolicy zajętej przez antarktyczny lodowiec
$\rho_g(h_2 + H)$ " " " " amerykański "
$\rho_g(h_3 + H)$ " " " " europejski "
$\rho_g(h_4 + H)$ " " " " syberyjski " ,

w ten sposób bowiem zewnątrz lodowców otrzymamy wszędzie odjemne ciśnienie $-\rho_g H$, a w okolicach zajętych przez lodowce ciśnienia $\rho_g h_1$, $\rho_g h_2$, $\rho_g h_3$, $\rho_g h_4$.

Chcąc obliczyć odkształcenia i t. d. w pewnym punkcie powierzchni kuli o współrzędnych θ i ψ (ψ oznacza dług. geogr., a θ kątową odległość od północnego bieguna) potrzebujemy znać tylko dostawy kątowych odległości γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 punktu θ, ψ od środka lodowców.

Oznaczmy współrzędne środków lodowców przez θ_1, ψ_1, θ_2, ψ_2, θ_3, ψ_3, θ_4, ψ_4, a będziemy mogli wedle znanego wzoru napisać:

$$\cos\gamma_1 = \cos\theta . \cos\theta_1 + \sin\theta . \sin\theta_1 \cos(\psi - \psi_1)$$
$$\cos\gamma_2 = \cos\theta . \cos\theta_2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

i t. d. i t. d.

Znając wartości na $\cos\gamma_1$, $\cos\gamma_2$ i t. d. można łatwo obliczyć wartości funkcyi P_1, P_2 i t. d. dla argumentów

$$\mu = \cos\gamma_1 , \quad \mu = \cos\gamma_2 \quad \text{i t. d.}$$

Same rachunki należy wykonać dla każdego lodowca oddzielnie w taki sam sposób jak w V rozdziale poprzedniej rozprawy, w którym rozpatrywaliśmy zlodowacenie jednej tylko półkuli.

Dla przykładu wykonałem obliczenie dla północnego bieguna. Mamy tu

$$\cos\gamma_1 = 1, \quad \cos\gamma_2 = \cos\gamma_3 = \cos\gamma_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Rachunków przytaczać nie będę, bo są nudne i długie a nic nowego nie przedstawiają, natomiast na końcu rozdziału podam tablice wartości funkcyi P_i oraz współczynników A_i i D_i wchodzących w te rachunki (właściwie podam logarytmy nie zaś same wartości funkcyi P_i i współczynników A_i i D_i), tu zaś podam tylko rezultaty rachunków.

Biorąc po 13 wyrazów we wzorach, odnoszących się do antarktycznego i amerykańskiego, a po 26 wyrazów we wzorach, odnoszących się do europejskiego i syberyjskiego [1]) lodowców otrzymałem następujące liczby [2]):

na północnym biegunie

1. Δr a) zależne od antarktycznego lodowca $- 0{,}04982 \frac{a \cdot \rho_g}{n} . (h_1 + H)$

b) „ „ amerykańskiego „ $- 0{,}07187 \frac{a \cdot \rho_g}{n} . (h_2 + H)$

---

[1]) Swoją drogą szeregi funkcyi kulistych są o tyle mniej zbieżne dla mniejszych lodowców niż dla większych, że liczby odnoszące się do lodowców europejskiego i syberyjskiego są prawdopodobnie mniej dokładne od liczb odnoszących się do lodowców antarktycznego i amerykańskiego.

[2]) Przypominam, że Δr oznacza przesunięcie powierzchni litosfery w kierunku promienia, spowodowane przez odkształcenie, δr_1 takie same przesunięcie powierzchni ekwipotencyalnej, spowodowane przez przyciąganie zagłębień i wyniosłości litosfery, utworzonych wskutek odkształcenia, zaś δr_2 oznacza przesunięcie powierzchni ekwipotencyalnej wskutek przyciągania samych lodowców.

c) zależne od europejskiego lodowca $- 0{,}01299 \frac{a \rho_g}{n} . (h_3 + H)$

d) „ „ syberyjskiego „ $- 0{,}01299 . \frac{a \rho_g}{n} . (h_4 + H)$

2. δr_1 a) zależne od antarktycznego lodowca $- 0{,}01767 . \frac{a \rho_g}{h} . \frac{\rho_s}{\rho} . (h_1 + H)$

b) „ „ amerykańskiego „ $- 0{,}07119 . \frac{a \rho_g}{n} . \frac{\rho_s}{\rho} . (h_2 + H)$

c) „ „ europejskiego „ $- 0{,}01914 . \frac{a \rho_g}{n} . \frac{\rho_s}{\rho} (h_3 + H)$

d) „ „ syberyjskiego „ $- 0{,}01914 \frac{a \rho_g}{n} . \frac{\rho_s}{\rho} (h_4 + H)$

3. δr_2 a) zależne do antarktycznego lodowca $- 0{,}13851 . \frac{\rho_g}{\rho} . h_1$

b) „ „ amerykańskiego „ $+ 0{,}23784 . \frac{\rho_g}{\rho} . h_2$

c) „ „ europejskiego „ $+ 0{,}05661 . \frac{\rho_g}{\rho} . h_3$

d) „ „ syberyjskiego „ $+ 0{,}05661 . \frac{\rho_g}{\rho} . h_4$.

Ogólne zniżenie poziomu wód spowodowane przez to, że lodowce utworzyły się z wody odjętej oceanom, obliczyłem bez uwzględnienia poprawki na zmianę objętości oceanicznych zbiorników; z drugiej strony nie uwzględniłem też tej okoliczności, że oceany pokrywają niecałą powierzchnię niezajętą przez lodowce, lecz tylko około *0,736* powierzchni kuli. Ponieważ obie przed chwilą wspomniane poprawki do pewnego stopnia wzajemnie się kompensują, więc błąd, pochodzący z zaniechania obydwóch, jest nieznaczny. Kładziemy więc po prostu

$$d' = \rho_g . H,$$

dalej kładziemy jak poprzednio [1])

$$n = 800 \times 10^6 \text{ gramów na kwadr. cent.}$$
$$a = 637 \times 10^6 \text{ centymetrów}$$
$$\rho_g = 0{,}9$$
$$\rho_s = \frac{1}{2} \rho$$
$$\rho = 5{,}5,$$

[1]) Przy obliczeniu odkształceń i t. d. kładliśmy tak samo, jak w poprzedniej rozprawie:

$$m = 2n.$$

wreszcie kładziemy

$$h_1 = h_2 = 2000 \text{ metrów}$$
$$h_3 = h_4 = 1000 \quad ,,$$

i znajdziemy

$$H = 212{,}2 \text{ metr.}$$
$$d = 191{,}0 \quad ,,$$

Podstawiając te i poprzednie wartości we wzory na Δr, δr_1 i δr_2 oraz sumując wszędzie wartości podane pod a, b, c, d znajdujemy, że na północnym biegunie

$$\Delta r = - 215{,}5 \text{ metr.}$$
$$\delta r_1 = - 87{,}0 \quad ,,$$
$$\delta r_2 = + 50{,}9 \quad ,, .$$

Dla obliczenia względnego przesunięcia morskiego poziomu używamy tego samego wzoru

$$Dr = \delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d$$

co poprzednio i znajdujemy, że na północnym biegunie

$$Dr = - 11{,}6 \text{ metr.}$$

Błędy popełnione przy obliczeniu Δr, δr_1 i δr_2 mogą wynosić po kilka metrów, a zatem błąd w Dr, pochodzący z tamtych błędów, może wynosić kilkanaście metrów; d było obliczone w taki sposób, że nie mogło wypaść nazbyt wielkie, prędziej można się spodziewać, że jest nieco za małe. Można zatem powiedzieć, że przy zupełnie ścisłem obliczeniu Dr dla północnego bieguna wypadłoby raczej odjemne niż dodatnie, a przytem byłaby to niewielka liczba, jakie kilkanaście, najwyżej kilkadziesiąt metrów. Gdybyśmy jednak mogli uwzględnić tę okoliczność, że lodowce lodowej epoki były innego kształtu niż rozważane tu kręgi, gdybyśmy mianowicie mogli uwzględnić to, że były one zwrócone do północnego bieguna szerszymi frontami niż nasze koliste figury; to otrzymalibyśmy większe a b s o l u t n e wartości na Δr, δr_1 i δr_2 a zarazem prawdopodobnie otrzymalibyśmy na Dr acz małą, ale już nie odjemną, lecz dodatnią liczbę metrów.

Załóżmy jeszcze, że antarktyczny lodowiec wcale nie istnieje, że zatem tylko północna półkula jest zlodowacona a zresztą pozostawmy wszystkie dawne hypotezy. Znajdziemy wtedy:

$$\Delta r = - 128{,}6 \text{ metr.}$$
$$\delta r_1 = - 68{,}7 \quad ,,$$
$$\delta r_2 = + 97{,}4 \quad ,,$$

$$d = + \, 88{,}5 \text{ metr.}$$
$$Dr = + \, 68{,}8 \quad " \; .$$

Gdybyśmy zaś mogli uwzględnić rzeczywistą konfiguracyę lodowców północnej półkuli, to otrzymalibyśmy na *Dr* liczbę o kilkanaście lub kilkadziesiąt metrów większą. Powiększając jeszcze trochę rozmiary i grubość lodowców, moglibyśmy znów powiększyć *Dr* o dalsze kilkanaście metrów. Ale jeszcze większe dodatnie względne przesunięcia poziomu morza otrzymalibyśmy wtedy, gdybyśmy przypuścili, że na samym biegunie i dokoła niego znajdują się wielkie lodowce. Przypominamy tu rezultaty poprzedniej rozprawy, potwierdzone przez rachunki pierwszego rozdziału niniejszej rozprawy, które pokazały, że największe dodatnie względne przesunięcia poziomu morza powinny przytrafiać się w głębi wązkich zatok, wdzierających się daleko w głąb zlodowaconych krajów.

Porównajmy te wyniki z tem, co wiemy o śladach brzegów morskich z czasów lodowej epoki. Wogóle te ślady znajdują się tem wyżej nad dzisiejszym poziomem morza, im dalej postępujemy ku północy; n. p. w Grenlandyi znajdują się wyżej niż w Kanadzie, w Kanadzie wyżej niż w Stanach Zjednoczonych i t. d. Największe wysokości, na jakich je znajdowano, wynoszą po kilkaset (do 600) metrów. Znaczne i ku północy wciąż wzrastające względne przesunięcie morskiego poziomu dałoby się objaśnić, gdybyśmy jednocześnie założyli: 1) że amerykański i europejski lodowiec łączyły się ze sobą właśnie w okolicy północnego bieguna, przyczem środek zlodowacenia północnej półkuli znajdował się także w tej samej okolicy, 2) że największe przesunięcia poziomu morza datują z czasów, gdy lody już topniały a dzięki „elastische Nachwirkung" odkształcenia lodowej epoki jeszcze nie wyszły z fazy największego rozwoju [porównaj z tem, co mówiliśmy w VI rozdziale poprzedniej rozprawy], 3) że współczynnik sztywności *n* posiada mniejszą wartość aniżeli ta, którą tu przyjmowaliśmy, albo też, co jest bardzo a bardzo prawdopodobne, że pomimo tego, iż ziemia wobec prędkich odkształceń okazuje bardzo wielką sztywność, jednakże wobec powolnych jest dosyć plastyczna. Należy tylko pamiętać o tem, że u plastycznego ciała odkształcenia muszą być jeszcze więcej zlokalizowane niż u sztywnego, że zatem największe zagłębienia i największe względne przesunięcia poziomu morza muszą ściśle trzymać się tych okolic, w których grubość lodu jest największa.

Naturalnie niewykluczoną choć à priori mało prawdopodobną jest hypoteza, że z odkształceniami spowodowanemi przez ciśnienie lodowców współdziałały odkształcenia spowodowane przez inne przyczyny.

Do tego rozdziału dołączamy trzy tablice, o których była mowa powyżej.

I TABLICA.

Logarytmy współczynników D_i.
Wszystkie logarytmy są powiększone o *10*.
Wszystkie współczynniki D_i są dodatnie.

log. D_0	9,301 0300	log. D_{14}	8,718 8288
„ D_1	9,191 8855	„ D_{15}	8,689 5148
„ D_2	9,560 6673	„ D_{16}	8,662 0579
„ D_3	9,367 4507	„ D_{17}	8,636 2365
„ D_4	9,244 5919	„ D_{18}	8,611 8662
„ D_5	9,151 2677	„ D_{19}	8,588 7922
„ D_6	9,075 2510	„ D_{20}	8,566 8836
„ D_7	9,010 8837	„ D_{21}	8,546 0280
„ D_8	8,954 9781	„ D_{22}	8,526 1288
„ D_9	8,905 5281	„ D_{23}	8,507 1020
„ D_{10}	8,861 1781	„ D_{24}	8,488 8743
„ D_{11}	8,820 9643	„ D_{25}	8,471 3811
„ D_{12}	8,784 1755	„ D_{26}	8,454 5656
„ D_{13}	8,750 2709		

II TABLICA.

Logarytmy funkcyi $P_i(\mu)$ niektórych wartości argumentu μ. Wszystkie logarytmy są powiększone o *10*. Znaki funkcyi $P_i(\mu)$ podane w osobnej rubryce po prawej stronie logarytmu.

	$\mu = 0{,}98$		$\mu = 0{,}93$		$\mu = 0{,}9$		$\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$		$\mu = \frac{1}{3}$	
log. P_1	9,991 2261	+	9,968 4829	+	9,954 2425	+	9,937 5306	+	9,522 8787	+
„ P_2	9,973 4050	+	9,901 6490	+	9,854 3060	+	9,795 8800	+	9,522 8787	—
„ P_3	9,945 9509	+	9,789 5032	+	9,674 4018	+	9,511 5619	+	9,610 0289	—
„ P_4	9,907 8734	+	9,606 7574	+	9,317 9380	+	8,369 9113	+	8,091 5150	+
„ P_5	9,857 6038	+	9,265 2189	+	8,614 2643	—	9,348 8345	—	9,522 8787	+
„ P_6	9,792 6438	+	8,360 7448	—	9,382 3053	—	9,572 8988	—	9,286 4916	+
„ P_7	9,708 8711	+	9,295 5451	—	9,565 6353	—	9,612 9723	—	9,220 0579	—
„ P_8	9,598 9218	+	9,510 9336	—	9,612 4448	—	9,529 9122	—	9,436 1256	—
„ P_9	9,447 8090	+	9,595 6285	—	9,567 6262	—	9,277 7815	—	8,386 2442	—
„ P_{10}	9,216 7727	+	9,606 9722	—	9,420 2034	—	7,847 4565	—	9,362 2306	+
„ P_{11}	8,726 4827	+	9,556 2663	—	9,065 2809	—	9,196 0289	+	9,227 0032	+
„ P_{12}	8,707 1442	—	9,493 6950	—	8,609 9144	+	9,426 4849	+	9,014 2044	—
„ P_{13}	9,161 9666	—	9,283 0795	—	9,249 8829	+	9,476 6542	+	9,346 1901	—
„ P_{14}	9,356 2363	—	8,738 6379	—	9,432 5685	+	9,412 4427	+		
„ P_{15}	9,469 4833	—					9,166 0788	+		
„ P_{16}	9,540 0666	—					7,558 4686	+		
„ P_{17}	9,608 7185	—					9,120 1690	—		
„ P_{18}	9,649 7923	—					9,353 1267	—		
„ P_{19}	9,669 5493	—					9,407 1291	—		
„ P_{20}	9,670 9876	—					9,391 6029	—		
„ P_{21}	9,655 1577	—					9,239 0315	—		
„ P_{22}	9,621 5294	—					8,765 8175	—		
„ P_{23}	9,567 9082	—					8,826 3146	+		
„ P_{24}	9,489 5366	—					9,229 3797	+		
„ P_{25}	9,376 5587	—					9,349 2671	+		
„ P_{26}	9,205 9078	—					9,355 6585	+		
„ P_{27}	9,902 4924	—								

III TABLICA.

Logarytmy współczynników $A_i = P_{i-1} - P_{i+1}$. Wszystkie logarytmy powiększone o *10*.
Znaki współczynników A_i w osobnej rubryce po prawej stronie logarytmu.

	$\mu = 0{,}98$		$\mu = 0{,}93$		$\mu = 0{,}9$		$\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$		$\mu = \frac{1}{3}$	
log. A_1	8,773 7864	+	9,306 7466	+	9,454 8449	+			10,124 9387	+
„ A_2	8,986 8613	+	9,497 0818	+	9,630 9361	+			9,869 6662	+
„ A_3	9,119 7177	+	9,594 3926	+	9,705 0594	+			9,538 6730	—
„ A_4	9,210 9335	+	9,635 2022	+	9,710 6588	+			9,869 6662	—
„ A_5	9,275 3114	+	9,630 7329	+	9,652 3431	+			9,257 8464	—
„ A_6	9,319 9800	+	9,581 6766	+	9,514 1225	+			9,698 3739	+
„ A_7	9,348 7720	+	9,479 0568	+	9,226 6515	+			9,668 7514	+
„ A_8	9,363 8187	+	9,293 6498	+	7,227 8867	+			9,151 2015	—
„ A_9	9,366 2174	+	8,904 4992	+	9,165 9265	+			9,701 7778	—
„ A_{10}	9,356 3127	+	8,581 4945	—	9,403 6180	—			9:285 5399	—
„ A_{11}	9,333 8099	+	8,967 9222	—	9,482 7021	—			9,523 2145	+
„ A_{12}	9,297 6949	+	9,215 0292	—	9,468 3473	—			9,591 7026	+
„ A_{13}	9,245 9073	+	9,409 7472	—	9,361 7656	—				
„ A_{14}	9,174 8445	+								
„ A_{15}	9,078 0216	+								
„ A_{16}	9,046 9242	+								
„ A_{17}	8,998 6080	+								
„ A_{18}	8,785 8279	+								
„ A_{19}	8,348 8887	+								
„ A_{20}	8,182 6999	—								
„ A_{21}	8,702 9472	—								
„ A_{22}	8,915 2415	—								
„ A_{23}	9,039 9690	—								
„ A_{24}	9,119 7836	—								
„ A_{25}	9,170 3791	—								
„ A_{26}	9,198 9319	—								

ROZDZIAŁ V.

Odkształcenia ziemi wywołane przez ciśnienie nowo utworzonej koralowej wyspy.

Zadanie wymienione w tytule obecnego rozdziału nie może być traktowane za pomocą metod użytych w mojej dawniejszej pracy i w pierwszych czterech rozdziałach niniejszej. Wyspy koralowe są pospolicie bardzo małe, ale skoro rozmiary ciała, którego ciśnienie sprawia deformacyę, są małe [1]), to szeregi funkcyi kulistych stają się tak powolnie zbieżne, że trzeba obliczać po kilkadziesiąt, albo nawet po kilkaset wyrazów szeregu, aby otrzymać mniej więcej pewne liczbowe rezultaty. Już przy obliczeniu odkształceń, zależnych od ciśnienia mniejszych kontynentalnych lodowców europejskiego i syberyjskiego (patrz poprzedni rozdział) byliśmy zmuszeni obliczać po 26 wyrazów w szeregach funkcyi kulistych. Naturalnie metoda, która prowadzi do tak długich rachunków, jest niedogodną i, jeżeli tylko można, należy ją zastąpić przez inną.

Na szczęście, gdy rozmiary cisnącego ciała są bardzo małe w porównaniu z rozmiarami kuli, to możemy zamiast deformacyi kuli rozważać deformacye nieskończenie wielkiego ciała, zajmującego całą przestrzeń po jednej stronie pewnej płaszczyzny. Lamé, Clapeyron, Cerruti, Boussinesq zajmowali się odkształceniami takiego ciała, nie potrzebujemy więc rozwiązywać żadnego nowego matematycznego zadania, dość będzie skorzystać z gotowych wzorów. W danym razie zapożyczymy wzory u Boussinesqa, ale zapożyczymy je z drugiej ręki, mianowicie z książki Todhuntera i Pearsona pod tyt. „History of the Theory of Elasticity etc. . . . [2])“, prócz tego zmienimy znakowanie i wprowadzimy inne stałe t. j. zamiast stałych, użytych przez Boussinesqa, wprowadzimy te same stałe sprężystości n i m, któremi posługiwaliśmy się poprzednio.

Dla prostoty założymy, że wyspa ma kształt nizkiego walca o wysokości h i średnicy $2R_1$, przez ρ_s i ρ_m oznaczymy gęstość wyspy i gęstość wody morskiej a przez Δr przesunięcie powierzchni litosfery w kierunku pionowym (w górę). Otrzymamy wtedy następujące wzory: pod środkiem wyspy

$$\Delta r = -\frac{m+n}{2mn}(\rho_s - \rho_m)\, h\, R_1\,,$$

pod krawędzią,

$$\Delta r = -\frac{m+n}{2mn}(\rho_s - \rho_m)\, h\, \frac{2}{\pi} R_1\,.$$

---

[1]) Rozumie się małe w porównaniu z rozmiarami kuli.

[2]) Tom II, część II (Cambridge 1893 r.) str. 250—253.

Zewnątrz wyspy na odległości R od jej środka

$$\Delta r = -\frac{m+n}{2mn}(\rho_s - \rho_m)\, h \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{R_1^2}{R} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{R_1^4}{R^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{R_1^6}{R^5} + \ldots\right.$$

Połóżmy jak poprzednio

$m = 2n, \quad n = 800 \times 10^6$ gramów na cent. kwadr.,

dalej połóżmy:

$\rho_s - \rho_m = 1{,}1$

$h = 4000$ metrom [1])

$R_1 = 10$ kilometrom

$R = 100$ kilometrom

a otrzymamy: pod środkiem wyspy $\Delta r = -4{,}125$ m.

„ krawędzią „ „ $= -2{,}626$ „

zewnątrz wyspy na odległości 100 km. od jej środka „ $= -0{,}206$ „

Widzimy więc, że odkształcenia są w tym razie bardzo małe. Nic w tem dziwnego, bo rozmiary wyspy są małe. Naturalnie przesunięcia powierzchni ekwipotencyalnych δr_1, δr_2 a także względne przesunięcie poziomu morza Dr jest zupełnie nieznaczne.

Zupełnie co innego otrzymalibyśmy, gdybyśmy założyli, że ziemia jest absolutnie plastycznem ciałem; wtedy deformacya podlegałaby prawom hydrostatyki i wyspa osiadłaby na jakie tysiąc kilkaset metrów. Tyleż wyniosłoby względne przesunięcie poziomu wód, albowiem z powodu małych rozmiarów wyspy przesunięcia powierzchni ekwipotencyalnych δr_1 i δr_2 są zupełnie nieznaczne.

Rzeczywiste odkształcenia ziemi, wywołane przez ciśnienie nowoutworzonych wysp koralowych, są zapewne większe aniżeli te drobne odkształcenia, które przed chwilą obliczyliśmy ze wzorów Boussinesqa. Już kilkakrotnie była mowa o tem, że do powiększenia odkształceń może się przyczynić tak zwana „elastische Nachwirkung“. Prócz tego należy wspomnieć o pewnym innym czynniku, który acz nieznacznie, jednak także może się przyczynić do powiększenia odkształceń. Nowoutworzona wyspa i pokłady, złożone z jej własnych okruchów, otaczające podstawę wyspy, utrudniają odpływ ciepła z wnętrza ziemi, geoizotermy podnoszą się pod wyspą, temperatura pokładów a w następstwie ich plastyczność wzrasta. Ale ponieważ rozmiary wysp są zazwyczaj małe, więc wpływ ich na rozkład temperatur we wnętrzu ziemi jest dość ogra-

---

[1]) Ponieważ m i n są wyrażone w gramach na cent. kwadr., więc trzeba w rachunku wyrazić h w centymetrach, aby ciśnienie $(\rho_s - \rho_m)\, h$ było też wyrażone w gramach na centym. kwadr.

niczony i sięga nie głęboko, [zresztą należy pamiętać i o tem, że wszelkie zmiany w rozkładzie temperatur we wnętrzu ziemi odbywają się z nadzwyczajną powolnością], z drugiej strony zmiana temperatury pokładów o jakie kilka stopni nie może mieć wielkiego wpływu na współczynniki sprężystości, plastyczności i t. d. pokładów. Jednem słowem jest to czynnik niewielkiej wagi.

Te same wzory I mogą być zastosowane do obliczenia odkształceń, spowodowanych przez ciśnienie małych lodowców, trzeba tylko zamiast $\rho_s - \rho_m$ podstawić ρ_g t. j. gęstość lodu. Dla przykładu weźmy kragły lodowiec o grubości *1000* metrów i średnicy $2R_1 = 400$ kilometrów, a znajdziemy, że przesunięcie powierzchni litosfery pod środkiem takiego lodowca wynosi *30* metrów. Gdybyśmy zaś wzięli wielki lodowiec o grubości *2000* metrów i średnicy $2R_1 = 6666$ kilom., to znaleźlibyśmy, że przesunięcie powierzchni litosfery pod jego środkiem wynosi *562,5* metry. W pierwszym rozdziale[1]) w podobnym przypadku znaleźliśmy przesunięcie wynoszące *351* metrów. Tak znaczna różnica tłómaczy się najpierw tem, że metoda obecnego rozdziału nie daje się stosować do wielkich lodowców, po drugie tem, że przy tych samych rozmiarach cisnącego ciała odkształcenie jest większe, jeżeli rozmiary odkształcającego się ciała są większe.

P. S. Mówiąc o odkształceniach, wywołanych przez ciśnienie wysp koralowych nie uwzględniliśmy tego, że wyspy koralowe występują całemi grupami. Łatwo się domyślić, jaki to ma wpływ na odkształcenia, mianowicie od razu widzimy, że odkształcenia spowodowane przez wyspę A sumują się z odkształceniami spowodowanemi przez wyspy B, C itd. Jeżeli n. p. mamy trzy wyspy A, B i C, to wyspa A zapada się, dajmy na to, o x_2 metrów z powodu ciśnienia wyspy B, o x_3 metrów z powodu ciśnienia wyspy C a wreszcie o x_1 metrów z powodu swego własnego ciśnienia, razem o $x_1 + x_2 + x_3$ metrów. Gdyby więc wyspy znajdowały się bardzo blizko siebie a przytem tworzyły zwartą grupę, to zniżenie dna w środku grupy mogłoby być dość znaczne. O ile jednak chodzi o zastosowanie do warunków ziemskich, to w najlepszym razie otrzymalibyśmy zniżenia dna, dochodzące do jakich kilkudziesięciu metrów. Należy pamiętać, że ta uwaga odnosi się tylko do przypadku, w którym traktujemy ziemię jako ciało sprężyste. W razie, gdy zakładamy, że ziemia jest absolutnie plastyczna, wyspy zapadają się niezależnie jedna od drugiej, ale wtedy zapadają się o całe tysiące metrów.

[1]) W pierwszym rozdziale uważaliśmy ziemię jako kulę.