INTEGRATORY.

(Artykuł w „Ognisku", książce zbiorowej wydanej dla uczczenia 20-letniej pracy T. T. Jeża, Warszawa, 1882; str. 345—352).

Znajduję się w prawdziwie kłopotliwem położeniu. Przez lat kilka pisywałem popularne sprawozdania o różnych wynalazkach, i szła mi ta robota z łatwością. Tymczasem dziś, gdy chcę opisać mój własny wynalazek, który przecież znam, idzie mi to jak po grudzie. Wyprowadzam stąd wniosek, że łatwiej jest pisać o tem, czego się nie zna dokładnie. Pisząc o gruntownie poznanym i zbadanym przedmiocie, nie zna się tej własności wypowiadania ogólnych poglądów, którą daje nieznajomość trudności praktycznych i różnych wątpliwych punktów.

Ale pominąwszy tę trudność, spotykam jeszcze inną. Przyrządy, nazwane przezemnie Integratorami, są wprawdzie proste co do swej budowy, lecz, żeby działanie ich dobrze poznać, trzeba być oznajomionym z zasadami wyższego rachunku. Z tego więc względu rzecz się niebardzo nadaje do popularnego przedstawienia. Starałem się ten szkopuł ominąć, lecz sądzę, że zawsze przeczytanie mego sprawozdania wymagać będzie pilnego natężenia uwagi czytelnika, nie—specyalisty.

Kiedym na początku r. 1880 po raz pierwszy przedstawił mój przyrząd krakowskiej Akademii Umiejętności, nie spodziewałem się wcale, że integratory znajdą przez lat parę tak liczne i tak różnostronne zastosowania. Dziś już nie ja jeden pracuję nad tym przedmiotem, i integratory coraz bardziej wchodzą w praktykę powszednią.

Za pomocą przyrządów, zbudowanych na zasadzie przezemnie odkrytej, można obecnie robić różnego rodzaju pomiary, których rodzaj najlepiej zostanie zrozumianym z kilku przykładów.

I tak, jeśli odpowiednio zbudowany integrator połączymy w pewien sposób z machiną parową i zostawimy go w takiej pozycyi, dajmy na to, przez godzinę, to po upływie tego czasu możemy dokładnie odczytać na przyrządzie, wiele ta machina pracy wykonała.

Jeśli inny przyrząd, na tejże zasadzie urządzony, ustawimy w obwodzie elektrycznym, po którym prąd przebiega, to znajdziemy wiele elektryczności w danym czasie przez to miejsce przepłynęło. Integrator tworzy w tym wypadku rodzaj „elektromierza", działającego podobnie jak gazomierz, oznaczający ilość przepływającego przez rurę gazu.

Jako przyrząd matematyczny służyć on może, w formie, którą nazwałem integratorem, do mierzenia powierzchni, ograniczonych dowolnemi krzywemi liniami. Jest on w tym wypadku jednym z najdokładniejszych planimetrów.

Zestawienie kilku integratorów w jednym przyrządzie daje nam możność rozwiązywania równań numerycznych wyższego rzędu.

Inny przyrząd, który nazwałem integrografem, kreśli tak zwane krzywe całkowe, mające wielkie znaczenie przy obliczeniach z Mechaniki stosowanej [1]).

Opis przyrządu.

Zasadniczą część integratorów stanowią: walec i kółko. Gdy integrator jest w działaniu, wtedy albo kółko toczy się po powierzchni walca, albo też walec toczy się pod kółkiem.

Figura 1-sza przedstawia główne części wszystkich przyrządów. Ponieważ na tym rysunku niema żadnych akcesoryów, więc najłatwiej będzie można z niego poznać działanie integratora [2]).

---

1) Patrz „Inżynierya i Budownictwo" mój artykuł o Integratorze (wyszedł w osobnej odbitce). Wydanie niniejsze.

2) Rysunek ten wzięty z mojego artykułu, drukowanego w „Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris" 20 marca 1882 r. (Patrz wydanie niniejsze str.).

Po mosiężnych, prostolinijnych i równoległych szynach *RR*, toczy się wózek *H*, umieszczony na czterech kółkach oznaczonych literami *r*. Na wózku umieszczony jest walec *CC*, który z wielką łatwością może się obracać około osi *X*.

Do tej samej deski, do której przybite są szyny *RR*, przyśrubowana jest mosiężna podstawa, z której wychyla się aż po nad oś walca *CC* szyja *S*, jak to widać na rysunku. Szyja ta zakończona jest pionową rurką, w której mieści się oś pionowa *L*, rozszczepiona u dołu jak widełki, w celu umocowania osi kółka również pionowego *A*. Ta część jest podobnie zbudowana jak nogi na kółkach u fortepianu, albo też (co jeszcze bardziej do rzeczywistości jest podobnem) jak pierwsze koło u welocypedu.

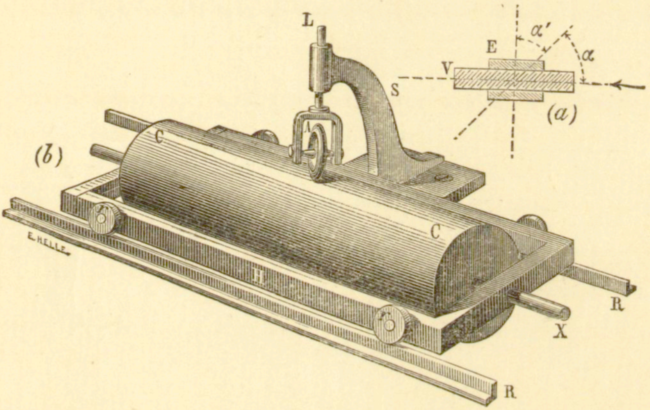

Fig. 1.

Kółko *A* jest stale przyciskane do powierzchni walca, za pomocą sprężyny cisnącej na oś *L*. Sprężyna ta została dla jasności usunięta z rysunku. Kółko dotyka do walca jednym tylko punktem, i dlatego też tarcie w tem miejscu zetknięcia jest tak małe, że z wielką łatwością, pomimo nacisku sprężyny, można obracać widełki wraz z kółkiem *A*, kręcąc oś *L*.

Ustawmy teraz oś *L* tak, żeby płaszczyzna kółka *A* przechodziła przez oś walca *X*. Jeśli wtedy ręką zaczniemy przesuwać wózek po szynach *RR*, w tył i naprzód, to zobaczymy, że kółko, przyciśnięte do walca, obraca się przez tarcie, ale że walec nie wykonywa żadnego obrotu, jeśli tylko kół-

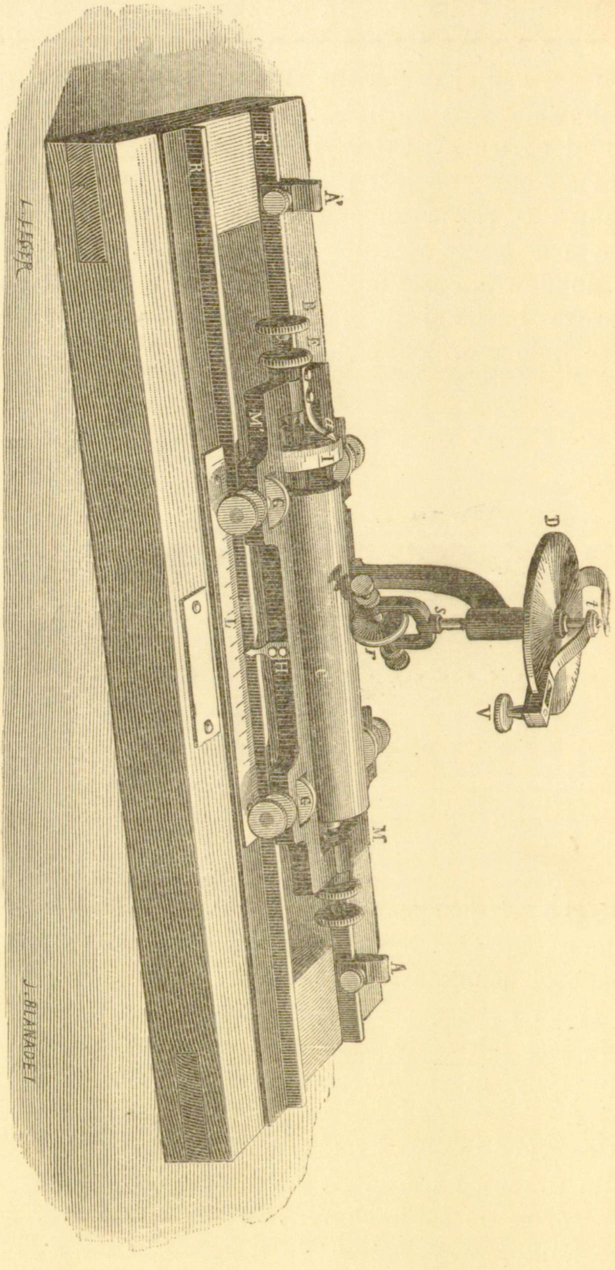

Fig. 2.

ko A było dobrze ustawione, jeśli jego płaszczyzna dokładnie przechodziła przez oś X.

Zupełnie inne zobaczymy zjawisko, gdy obróciwszy oś L, skręcimy płaszczyznę kółka tak jak na fig. 1, to jest ustawimy je pod kątem. Jeśli wtedy zaczniemy przesuwać wózek, to spostrzeżemy, że walec CC obraca się podczas przesuwania około osi X. Im bardziej odchylimy kółko od pierwotnego położenia, tym obrót stanie się prędszym i to w szybko rosnącym stosunku.

Rozpatrzmy położenie kółka takie, jak ono oznaczonem jest na fig. 1. Przymocujmy je w ten sposób, żeby tego położenia nie zmieniało, i przypuśćmy, że brzeg kółka posmarowany jest farbą. Wtedy po przesunięciu wózka w jednę stronę, znajdziemy na powierzchni walca ślad kółka, w kształcie regularnej wężownicy, Gdy jednak podczas przesuwania wózka zmieniać będziemy odchylenie kółka A, wtedy otrzymamy wężownicę nieregularną wprawdzie, lecz taka właśnie ma największe znaczenie dla integratorów [1]).

Z przyrządem takim jak na fig. 1 można jeszcze innego rodzaju zrobić doświadczenie. Dotąd przesuwaliśmy wózek pod kółkiem A, a walec CC się obracał. Jeżeli teraz zaczniemy obracać walec, to zobaczymy, że wózek zacznie się w jedne lub drugą stronę przesuwać po szynach RR. I w tym drugim wypadku otrzymamy na walcu krzywą odpowiedniej formy.

W integratorach moich największą zaletą ze względu na dokładność rezultatów jest to, że nigdy kółko się nie ślizga po powierzchni walca, a tylko toczy się po niej, jak welocyped po powierzchni drogi, zupełnie inaczej niż łyżwy po lodzie, które się przesuwają. Drugą ważną zaletą jest to, że dokładność funkcyonowania tych aparatów zależy jedynie od dokładności kształtu walca i od dokładnego ustawienia płaszczyzny kółka. Walec utoczyć dokładnie na dobrej tokarni nie jest rzeczą trudną, do ustawienia kółka posiadamy wygodne środki mechaniczne; więc zbudowanie integratora dobrego nie jest zbyt trudną rzeczą.

---

[1]) Jeśli kółko odchylone będzie według pewnego prawa przedstawionego wzorem $y = f(x)$, to nieregularna wężownica rozwinięta na płaszczyznie przedstawia tak zw. krzywą całkową, której równaniem jest $Y = \int f(x)\, d\, x$.

Z licznych doświadczeń na przyrządach zbudowanych przezemnie i przez pana C. V. Boysa (w Londynie) przekonałem się, że integratory działają zupełnie dokładnie i wygodnie i że je z wielką łatwością można budować.

Figura 2 [1]) jest zrobiona według fotografii z przyrządu, przedstawionego paryskiej Akademii Umiejętności. Z łatwością odróżnimy na niej te same zasadnicze części, któreśmy widzieli na fig. 1, mianowicie walec na wózku i kółko, umieszczone między widełkami. Lecz oprócz tego są i inne dodatki. Na oś pionową widełek ciśnie sprężyna *t*. Ilość obrotów walca mierzy się na podzielonym bębnie *I* za pomocą skazówki *a*. Przesunięcie wózka odczytuje się na podziałce *L*. Na podzielonem kole *D* odczytujemy nachylenia płaszczyzny kółka *r* względem osi walca. Całość umocowana jest na desce.

Sposób działania integratorów.

Integratory mają za zadanie: znajdować sumę nieskończenie wielu nieskończenie małych ilości. W jaki sposób to się dzieje, postaram się wytłómaczyć na prostym przykładzie. Zobaczymy, jak to należy pojmować takiego rodzaju dodawanie.

Przypuśćmy, że ze zbiornika, przez otwór, zrobiony u spodu, wypływa strumieniem woda. Jeśli zdołamy utrzymać ciągle jednakowe ciśnienie, to na sekundę ciągle wypływać będzie jednakowa ilość wody. Jeśli więc wiemy, ile wypływa na sekundę (co łatwo zobaczyć, zebrawszy przez ten czas wodę), to z łatwością możemy otrzymać, przez zwykłe mnożenie, wiele wypłynie przez godzinę, dobę i t. d.

Ale jeśli ciśnienie zmienia się ciągle, np. wskutek zniżającego się poziomu lub zmiennego zewnętrznego nacisku, to wtedy obliczenie ilości wody, która w pewnym czasie wypłynie, nie jest tak łatwem. Potrzeba do tego osobnych przyrządów „wodomierzów“, albo też trzeba znać stosunek, według którego w tym czasie ciśnienie się zmienia. Doświad-

---

[1]) Wyjęta z artykułu Marcela Deprez o moim integratorze w „Lumière léectrique“ Nr. 23 r. 1882.

czalnie poznaje się ciśnienie w danej chwili za pomocą tak zwanych manometrów, których skazówka odchyla się mniej lub więcęj, stosownie do ciśnienia. Ze skali umieszczonej pod skazówką możemy odczytać, jakiem ono jest w danej chwili.

Przypuśćmy, że skazówka stanęła na pewnej, oznaczonej kresce; gdyby od tej chwili skazówka stała ciągle na jednem miejscu, to znaczyłoby to, że woda przepływa odtąd ciągle w jednakowej ilości, bo ciśnienie jest stałem. Lecz jeśli się skazówka przesuwa się ciągle, to rzecz się ma inaczej. Jakże wtedy obliczyć ilość wody z ruchów skazówki manometru?

Żeby dojść do objaśnienia rzeczy, urządźmy w inny sposób nasze doświadczenie. Zmieniajmy ciśnienie nie bez przerwy, ciągle, lecz co sekundę, i postawmy sobie za zadanie znaleść w tych warunkach ilość wody, która wypłynie przez minutę. Skazówka nie będzie podczas tego doświadczenia w ciągłym ruchu, lecz będzie przeskakiwała z miejsca na miejsce, co sekundę. Z położenia tej skazówki będziemy wiedzieli wiele wody w każdej sekundzie przepływało. Dowiemy się, że w pierwszej przepłynęło a litrów, w drugiej b, w trzeciej c i t. d. Jeśli te ilości dodamy, to otrzymamy całkowitą ilość, która przepłynęła w 60 sekundach, równą $a+b+c$.....

Powtórzmy teraz tę samą operacyę, z tą tylko różnicą, że zmieniać będziemy ciśnienie co pół sekundy. Wtedy otrzymamy dwa razy większą ilość, ale dwa razy mniejszych ilości, do dodawania.

Następnie możemy to samo powtórzyć co $1/_{10}$ sekundy; wtedy będziemy mieli w przeciągu minuty 600 ilości do dodania, ale każda z nich będzie znacznie mniejsza.

Gdybyśmy taki podział posunęli do praktycznie niemożliwych granic, gdybyśmy obserwowali skazówkę manometru w odstępach czasu nieskończenie od siebie blizkich, to wtedy ilość składników stałaby się nieskończenie wielką, a natomiast ilości wody, którebyśmy mieli z sobą dodać, stałyby się nieskończenie małemi.

Lecz w tym wypadku już nie możemy sumy znaleść przez bezpośrednią obserwacyę manometru, nie możemy bowiem położenia jego skazówki odczytywać i zapisywać w odstępach czasu nieskończenie małych, a potem dodać nieskończenie wiele rezultatów, aby otrzymać całą ilość wody, która wypłynęła w ciągu minuty. Lecz integrator czyni to zupełnie wygodnie, a to w sposób następujący:

Skazówka manometru łączy się mechanicznie, w pewien sposób, z osią *L* (fig. 1) integratora, tak, że gdy się skazówka obraca, to i ta oś obraca się z nią razem (ruchy są w pewnym oznaczonym stosunku). Więc kółko *A* przyjmuje różne odchylenia, co chwila się zmieniające, zależne od ruchów skazówki manometru. W ten sposób wprowadza się do instrumentu to, co obserwator w poprzednich przykładach wprowadzał do rachunku, wpisując odchylenia.

Jednocześnie wózek z walcem posuwa się jednostajnie po szynach, poruszany za pomocą przyrządu zegarowego, a ponieważ w tym czasie kółko się odchyla, więc walec się obracał.

W rezultacie, jeśli po minucie zmierzymy ilość obrotów tego walca, to otrzymamy liczbę proporcyonalną do ilości wody, która w tej minucie wypłynęła.

Rzecz się tak dzieje, że odchylenie kółka zastępuje obserwowanie manometru, ruch wózka dodaje te obserwacye, a obrót walca daje ich sumę.

Dla łatwiejszego przedstawienia wzięliśmy przykład najprostszy: wodę wypływającą przez otwór w naczyniu. Właściwie w tym celu używanie integratorów jest zbytecznem, bo są daleko prostsze przyrządy, wykonywające tę samą czynność. Integratory moje znalazły natomiast zastosowanie do pomiarów praktycznych, daleko subtelniejszych i trudniejszych. Wyliczyliśmy niektóre z nich na początku niniejszego artykułu.

Dla tych, którym wyższy rachunek nie jest obcym, załączam krótką teoryę mego integratora, postawioną przez M a r c e l a D e p r e z [1]).

Jeśli oznaczymy przez

α — kąt, utworzony przez oś poziomą kółka *A* (fig. 1) i oś walca *C*;

dx — nieskończenie małą drogę, przebieżoną przez wózek *H* po szynach *RR*, w nieskończenie małym czasie dt;

---

1) Patrz: „Lumière électrique" Nr. 23 r. 1882.

dy — łuk linijny, opisany przez powierzchnię walca CC w tym czasie;

dz — łuk linijny elementarny, opisany przez punkt obwodu kółka A;

to łatwo wykazać, że pomiędzy temi czterema ilościami zachodzą dwa następujące stosunki:

$$dy = dx \,.\, \operatorname{tg} \alpha$$

$$dz = \frac{dx}{\cos \alpha}$$

Ten ostatni stosunek nie obchodzi nas ze względu na przedmiot, którym się zajmujemy, pierwszy zaś daje

$$y = \int dx \operatorname{tg} \alpha \,.$$

A więc jeżeli x, to jest droga, przebieżona poziomo przez wózek H, jest proporcyonalną do czasu t (co się utrzymuje za pomocą przyrządu zegarowego) i jeśli $\operatorname{tg} \alpha$ jest proporcyonalne do każdorazowej zmiennej, którą oznaczono przez η (a więc w powyższym przykładzie do ciśnienia wody), to mnożąc przez stałą K, zależną jedynie od budowy integratora, otrzymamy:

$$y = K \int \eta \, dx \,.$$