Das Raumproblem

DONADT

215

1782

1782

DAS MATHEMATISCHE RAUMPROBLEM UND DIE GEOMETRISCHEN AXIOME.

VON

Dr. ALFRED DONADT.

EX·UMBRA·IN·SOLEM

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1881.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

MEINEN LIEBEN ELTERN

ALS

ZEICHEN DER DANKBARKEIT

GEWIDMET.

Wie jeder Gegenstand unserer Erkenntniss kann die Anschauungsform des Raumes in vierfacher Hinsicht Gegenstand wissenschaftlichen Forschens sein. Insofern sie überhaupt ein Gegenstand unseres Denkens sein kann, gehört sie in das Gebiet der Logik im engeren Sinne, welche namentlich ihre Beziehungen zu anderen Objecten unseres Denkens zu untersuchen hat. Sie ist Grundlage einer Einzelwissenschaft der Geometrie, wenn sie ein Gegenstand unseres besonderen Denkens wird. Die Geometrie hat ihre allgemeinen Merkmale zu untersuchen und zugleich auf ihre specifischen Einzelbestimmungen näher einzugehen. Fragt man nach dem Ursprunge der Raumvorstellung, namentlich nach den subjectiven Bedingungen, unter denen sie zu Stande kommt, so wird sie Object der Psychologie und endlich gehört sie in das Gebiet der Erkenntnisstheorie, sofern man die Frage nach ihrer realen Bedeutung in den Vordergrund stellt d. h. die Frage, welches die objectiven Bedingungen ihres Entstehens sind. Zwar lässt sich nicht leugnen, dass alle vier Probleme, welche die Raumvorstellung anregt, in innigem Zusammenhange miteinander stehen, so namentlich auf der einen Seite das logische und mathematische, auf der andern Seite das psychologische und erkenntnisstheoretische Problem, allein ihr qualitativer Unterschied ist sehr zu betonen. Dadurch dass diese Probleme nicht genug auseinandergehalten wurden, hat man sich Schlüsse aus dem einen auf das andere erlaubt, deren Berechtigung stark in Zweifel gezogen werden muss.

Die folgende Arbeit stellt sich die Aufgabe das logisch-mathematische Raumproblem zu behandeln, wie es durch die neueren Richtungen der speculativen Mathematik in Anregung gebracht worden ist. Es handelt sich dabei um die Raumanschauung als Gegenstand des logisch-mathematischen Denkens, unabhängig von der Frage nach ihrem Ursprunge und ihrer realen Bedeutung, wiewohl auch diese in gewisser Weise mit in Betracht gezogen werden muss.

Der erste Theil gibt eine kurze Uebersicht über die geschichtliche Entwickelung des Themas, sowie über die leitenden Motive, die bei der Behandlung desselben zu Grunde gelegt worden sind. Im zweiten Theile werden die Grundbegriffe und deren Anordnung, auf welchen die Mathematiker die Geometrie aufbauen wollen, kritisch geprüft, während der letzte Theil unter Zugrundelegung der Definition des Raumes die logisch-mathematischen Axiome aufzustellen versucht, die die Grundlage jeder Geometrie bilden müssen.

Was die Litteratur im Allgemeinen anlangt, so verweise ich auf eine Zusammenstellung derselben von Halstedt im American Journal of Mathematics pure and applied, vol. I. S. 261 ff., in der freilich auch Abhandlungen aufgezählt sind, die mit dem Raumproblem selbst direct Nichts zu thun haben. Leider sind mir einige Abhandlungen von Clifford und Monro (flexure of spaces) in den Proceedings of London Math. Soc. unzugänglich gewesen.

Die erste wissenschaftliche Darstellung der Geometrie rührt bekanntlich von Euklid her. So grosse Bewunderung derselben auch von allen Seiten gezollt wird, so sind ihr doch verschiedene Vorwürfe gemacht worden, die nach und nach eine skeptische Richtung in der Mathematik hervorgerufen haben, welche heute in voller Blüthe steht. Der eine Vorwurf, der uns bei der jetzigen Aufgabe nicht näher interessiren wird, ist rein pädagogischer Natur; er richtet sich gegen die dogmatische Darstellungsweise Euklids: man verlangt die heuristische Methode. Die andern Vorwürfe dagegen sind mehr sachlich und sind namentlich gegen die Fundamente gerichtet, auf denen Euklid das stolze Gebäude der Mathematik aufgebaut hat. Euklid basirt seine Darstellung der Geometrie, wie bekannt, auf die Nominaldefinitionen der einfachsten Constructionsbegriffe im Raume, auf welche die sogenannten Axiome bezogen werden. In den letzteren sind aber, wenn wir von den neun Grössenaxiomen absehen, die wesentlichsten Bestimmungen unserer Raumanschauung enthalten. Sie lauten:

10) Alle rechten Winkel sind gleich.

11) Wenn eine gerade Linie, die zwei Gerade schneidet, bewirkt, dass die inneren auf derselben Seite liegenden Winkel kleiner als zwei Rechte sind, so treffen sich die beiden Geraden, hinreichend verlängert, auf der Seite, wo die beiden Winkel sind, die kleiner sind als zwei Rechte.

12) Zwei gerade Linien schliessen keinen Raum ein.

Von den Fundamenten einer Wissenschaft verlangt man aber zweierlei: 1) dass sie die nothwendigen und hinreichenden Grundlagen für dieselbe sind und 2) dass sie miteinander zu einem einheitlichen systematischen Ganzen verbunden sind. Beides wird an der Zusammenstellung der Axiome bei Euklid vermisst. Ist die geometrische Wissenschaft die Einzelwissenschaft vom Raume, so müssen ihre Fundamente die wesentlichen Prädicate bestimmen, die den Inhalt unserer Raumvorstellung bilden. „In den allgegemeinen Definitionen und Axiomen muss die Geometrie den Raum so zu bestimmen suchen, dass alles Einzelne, was in ihm gegeben sein kann, allgemein gültigen Beziehungen unterworfen wird.“[1]) Die Grundsätze der Geometrie müssen die Grundeigenschaften des Raumes aussagen, wie sie unserer ursprünglichen Vorstellung mit gegeben sind. Dies thun aber die Axiome Euklids nicht: sie sagen nicht sowohl die Eigenschaften der Raumanschauung selbst als vielmehr einzelner bestimmter einfacher Raumanschauungen, der geraden Linie und des Winkels, aus und treten so in Verbindung mit den Definitionen der einfachsten Constructionen.[2]) Dadurch entsteht denn der weitere Fehler, dass Grundsätze über Prädicate, die der Raumvorstellung specifisch eigenthümlich sind, übergangen und später stillschweigend gebraucht werden, so die Ausgedehntheit nach drei Dimensionen, und dass auf der andern Seite Grundsätze aufgestellt werden, die in Wirklichkeit keine eigentlichen Grundsätze sind. Wenngleich sich zur Entschuldigung Euklids sagen lässt, dass „jene allgemeinen Prädicate (die der Raumvorstellung als solcher) mittelbar in diesen besonderen Eigenschaften der Constructionsbegriffe enthalten sind, sofern sie das Fundament derselben bilden, und die Form der Darstellung dem specielleren Bedürffnisse der geometrischen Constructionen angepasst ist“, (Erdmann) auch Euklid vielleicht

1) Wundt, Logik I. p. 440.

2) Vergl. Erdmann, die Axiome der Geometrie, p. 33 u. 34.

mit Absicht von mehr praktischen Bedürfnissen geleitet jene allgemeinen Definitionen und Axiome vermeidet, weil sie mehr abstracter und begrifflicher Natur sind, während er selbst die ganze Geometrie auf die concrete Anschauung zu beziehen sucht, so ist doch für eine rein wissenschaftliche Darstellung der Geometrie die Erfüllung jener Forderung unerlässlich. „Die Grundsätze Euklids gewähren in ihrer Gesammtheit den Eindruck eines Aggregats von möglichst klaren Sätzen, welche behufs möglichst bequemer Beweisführung zusammengestellt sind“[1]), bilden aber nicht das nothwendige und hinreichende Fundament der Geometrie. Damit ist zu gleicher Zeit jene zweite logische Forderung nicht erfüllt: die Axiome Euklids stehen in keinem systematischen Zusammenhange. Dieser zweite Einwand gegen Euklid ist schon in sehr früher Zeit gemacht worden, während der erstere in der neueren Zeit entstand, zumal man einsah, dass aus einem scharf festgestellten Begriffe des Raumes sich die Axiome für die speciellen praktischen Bedürfnisse entwickeln lassen. Früher glaubte man dem zweiten Einwande dadurch vorbeugen zu können, dass man die Axiome auf die einfachsten und elementarsten Anschauungsverhältnisse zurückzuführen suchte, um dadurch zugleich die Frage zu entscheiden, ob sie wirklich Axiome d. h. an und für sich evident wären, ohne eines Beweises zu bedürfen noch eines solchen überhaupt fähig zu sein. Dabei richteten sich die Bemühungen namentlich auf das 11. Axiom, da schon der Commentator des Euklid, Proclus erkannt hatte, dass es mit dem Lehrsatze Euklids, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte betrage, identisch sei. Man versuchte deshalb das 11. Axiom theils auf einfachere Sätze zu reduciren theils mit den andern Axiomen in näheren Zusammenhang zu bringen. Die Litteratur über diesen Gegenstand ist ins Ungeheure gewachsen.[2]) Meistens wurde es durch das andere ersetzt: „durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich zu derselben nur eine einzige Parallele ziehen.“ Am scharfsinnigsten

1) Grassmann, die lineale Ausdehnungslehre. (1844) § 22.

2) Vergl. hierzu den 1. Excurs in der Ausgabe des Euklid von Camerer und Hauber (G. Reimer, Berlin 1824), den Artikel „Parallele Linien“ in Klügels mathematischem Wörterbuche und den von Sohncke bearbeiteten Titel „Parallel“ in der Encyclopädie der mathem. Wissenschaften von Ersch und Gruber.

behandelte Legendre[1]) das Problem. Er wies zuerst die Identität des 11. Axioms mit dem Lehrsatze von der Winkelsumme im Dreieck streng nach und suchte es auf das Axiom von der geraden Linie zurückzuführen, welches er in der Form aufstellte:

> „Von einem Punkte lässt sich nur eine einzige Gerade zu einem andern Punkte ziehen.“

Er glaubte die Schwierigkeit in der ungenügenden Definition der geraden Linie gefunden zu haben und hat sich sehr bemüht das 11. Axiom zu beweisen. Seine eigenen verschiedenen Versuche hat er in der citirten Abhandlung charakterisirt und gesteht dort selbst ein, dass er die Begründung in den Elementen der Geometrie öfters gewechselt habe. Es findet sich a. a. O. die Angabe des Beweises in der 2. Auflage der Elemente; in der 9. kehrt er zu Euklids Demonstration zurück und gibt endlich in der 12. Auflage den Beweis, den er definitiv für richtig hält, dem aber, wie er zum Theil selbst sagt und wie später mehrfach, so z. B. von Baltzer, hervorgehoben ist, ebenfalls eine neue Hypothese zu Grunde liegt.[2]) Auch Lagrange hat sich mit dieser Frage beschäftigt. Er hatte die Unabhängigkeit der Formeln der sphärischen Trigonometrie vom Parallelenaxiom erkannt und glaubte aus ihnen einen Beweis für dasselbe zu erhalten. Alle andern Versuche hielt er für ungenügend.[3]) Viel tiefer drang Gauss in das Wesen des 11. Axioms ein. Sein mathematischer Scharfblick erkannte, dass alle Bemühungen das 11. Axiom auf die andern zurückzuführen und zu beweisen daran scheitern mussten, dass durch das 11. Axiom den übrigen Axiomen in der That eine neue Voraussetzung hinzugefügt würde, die mit ihnen nicht nothwendigerweise verbunden sein musste. Er schloss daraus, um mit seinen eigenen Worten zu reden, dass es „nur eine ungerechtfertigte Gewöhnung sei, die Euklid'sche Geometrie für streng wahr zu halten.“ Denn sehr nahe lag für ihn der Gedanke das 11. Axiom fallen zu lassen, resp. an seine Stelle ein anderes zu setzen,

---

1) Reflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles, Mém. de l'acad. des sciences. T. XII. (1833) p. 367.

2) Ueber Legendre's verschiedene Beweisversuche vergl. noch J. Delboeuf, Prolégomènes philosophiques de la Géometrie, Liège 1860. p. 206 ff.

3) Vergl. seine durch Lefort mitgetheilten Gespräche mit Biot.

dass nämlich die Winkelsumme im Dreieck kleiner sei als zwei Rechte, weil der von Legendre mit Hülfe des Axioms von der geraden Linie — ihre Unendlichkeit vorausgesetzt — geführte Beweis, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht grösser als zwei Rechte sein könne, unanfechtbar ist. Gauss hat sich mit diesem Gedanken einer „Nicht-Euklidischen Geometrie“ viel beschäftigt, doch besitzen wir von ihm hierüber nur gelegentliche Bemerkungen in seinem Briefwechsel mit Schumacher und Bessel und mündliche Aeusserungen, die uns Sartorius von Waltershausen aufbewahrt hat. Ob Gauss den inneren Grund erkannt hat, weshalb das Parallelenaxiom den übrigen etwas Neues hinzufüge, erfahren wir aus diesen Stellen nicht, vielmehr scheint es mir, als ob er es aus den fruchtlosen Bemühungen das 11. Axiom auf die übrigen zurückzuführen und aus der Möglichkeit eine Nicht-Euklidische Geometrie aufzubauen geschlossen habe. Denn er selbst hat sich viele Mühe gegeben das Parallelenaxiom zu beweisen[1]) und spricht sich an einer andern Stelle[2]) dahin aus, es wäre der Wissenschaft viel würdiger offen zu bekennen, dass sie nicht im Stande sei jene Lücke im Anfange der Geometrie auszufüllen, als sich immer mit unnützen Versuchen abzuquälen. Neben Gauss beschäftigten sich mit derselben Frage Lowatschewsky[3]) und die beiden Bolyai.[4]) Der ältere Bolyai kannte als Jugendfreund von Gauss dessen Ansichten über eine Nicht-Euklidische Geometrie. Sie suchten eine „in sich wiederspruchsfreie“ Geometrie auf der Hypothese aufzubauen, dass die Winkelsumme im Dreieck kleiner sei als zwei Rechte. Dabei stellte sich im Laufe ihrer Untersuchungen heraus, dass diese Differenz von 180^0 um so grösser sei, je grösser das Dreieck sei, und Lowatschewsky berechnete in der

---

1) Briefe an Bolyai vom Ende des Jahres 1799 und an Bessel im Jahre 1829. Vergl. Schering, Gauss' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr. (1877) p. 7 ff.

2) Göttinger gelehrte Anzeigen 1816.

3) Im Kasan'schen Boten 1829. — Schriften der Universität Kasan 1836/38. — Géometrie imaginaire in Crelles Journal Bd. 17 (1837). — Geometrische Untersuchungen (Berlin 1840). — Pangéometrie 1855.

4) W. Bolyai, tentamen juventutem in elementa matheseos etc. (1832) und Anhang dazu von J. Bolyai. Vergl. Frischauf, absolute Raumlehre (Leipzig 1872) und Elemente der absoluten Geometrie. (Ebend. 1876).

Meinung, die Frage könne so entschieden werden, die Winkelsumme der grösstmöglichen auf astronomischen Messungen beruhenden Dreiecke, wobei sich natürlich herausstellte, dass eine Abweichung von 180^0 nicht Statt findet, dass vielmehr die Beobachtungen genau der Euklid'schen Hypothese entsprechen. Mit den Worten: „l'hypothèse de la somme des angles d'un triangle moindre que deux angles droites ne peut avoir d'application que dans l'Analyse, puisque les mesures directes ne nous montrent pas dans la somme des angles d'un triangle la moindre déviation de deux angles droites“ gibt er zugleich einer philosophischen Richtung Ausdruck, die wir unten besprechen müssen, wobei es sich zugleich um den Nachweis handeln wird, inwiefern jene Untersuchungen neben der Geometrie Euklids überhaupt Bedeutung haben und den Namen „Geometrie“ im eigentlichen Sinne verdienen.

Dies war der Stand der Frage als die epochemachenden Arbeiten von Riemann und Helmholtz über die Axiome der Geometrie erschienen. Es sind dies bekanntlich die Riemann'sche Habilitationsvorlesung: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“[1]) und drei Abhandlungen von Helmholtz „Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie“ in den Heidelberger Jahrbüchern für 1868 Nr. 46 und 47; — „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“ in den Göttinger Nachrichten für 1868 Nr. 9; — und „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ in den populären Vorträgen Heft III p. 21. Der Zweck der Untersuchungen der beiden Gelehrten ist ein dreifacher:

1) den inneren Grund aufzudecken, warum alle bisherigen Bemühungen das 11. Axiom Euklid's auf die andern zurückzuführen und zu beweisen, vergeblich waren;
2) aus einer allgemeinen Betrachtung des Raumes selbst die nothwendigen und hinreichenden Voraussetzungen aufzustellen, aus denen die Geometrie ohne weitere Axiome über die Constructionsbegriffe hergeleitet werden kann;
3) die Frage zu discutiren, woher wir unsere Ueberzeugung

---

1) Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen, Bd. 13. Riemann's Werke, herausgegeben von H. Weber, p. 254.

von der Wahrheit der geometrischen Axiome schöpfen und inwieweit diese Ueberzeugung berechtigt ist, und so aus den Folgerungen der mathematischen Raumtheorie neues Licht auf das allgemeine Problem der Raumanschauung zu werfen.

Zur Beantwortung dieser drei Fragen glaubt Riemann durch eine genügende Definition des Raumes gelangen zu können. Diese Definition muss die allgemeinen Eigenschaften des Raumes angeben und ihn zugleich von gleichartigen Begriffen unterscheiden. Diese Unterscheidung gelang, wenn der allgemeine Gattungsbegriff aufgestellt war, dem der Raum als specielle Art untergeordnet ist. Allgemeine Eigenschaften aber, welche eine Zusammenstellung mit andern Begriffen möglich machen, hat die Raumanschauung, wie sie uns gegeben ist, zwei: der Raum ist dreifach ausgedehnt und continuirlich. Beide Merkmale der dreifachen Ausdehnung und Continuität kommen auch andern Begriffen zu. So findet Riemann ein Analogon zum Raum in dem System der Farbenempfindungen, welches ebenfalls eine „dreifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit“ ist. Auf diese Analogie weist Helmholtz noch viel mehr hin. In dem System der Farbenempfindungen erscheinen uns vom psychologischen Standpunkte aus die einzelnen Farbeneindrücke als continuirlich zusammenhängend, wenn auch physikalisch und physiologisch kein stetiger Zusammenhang Statt findet. Jede Farbenempfindung ist ferner durch drei Veränderliche bestimmt, „denn so unendlich mannigfach die objective Zusammensetzung des farbigen Lichtes auch variiren mag, so unzweifelhaft dasselbe deshalb der physikalischen Betrachtung im Allgemeinen als eine Function unendlich vieler Variabeln erscheinen muss, so reducirt sich diese Mannigfaltigkeit für die Empfänglichkeit unseres Auges überall auf drei Grössen.“ (Erdmann.) Diese drei Grössen sind erstens der Farbenton, zweitens die Lichtstärke und drittens der Sättigungsgrad der betreffenden Farbe. Somit kann das System der Farbenempfindungen als eine stetige dreifach ausgedehnte Grösse angesehen werden, wenn dreifach ausgedehnt bedeutet, dass jede einzelne Farbenempfindung von drei unabhängigen Veränderlichen abhängt. Eine ebensolche Grösse ist der Raum. In der analytischen Geometrie wird gezeigt, dass zufolge der dreifachen Ausdehnung des Raumes jeder Punkt durch drei voneinander unabhängige Veränderliche bestimmt ist. Bei dieser Gleichartigkeit des Raumes mit dem System der Farbenempfindungen finden doch zwischen beiden wesentliche Unterschiede statt. Diese bestehen darin, dass beim Farbensystem die veränderlichen Coordinaten nicht vertauscht werden können, wohl aber beim Raum. Beim Farbensystem besteht ein qualitativer Unterschied betreffs der Richtungen, beim Raum nicht oder mit andern Worten, wir können beim Raum die Entfernung zweier Punkte auf der x-Axe vergleichen mit der Entfernung zweier Punkte auf der y-Axe, während der Unterschied zweier Farbenempfindungen von gleicher Farbe und gleicher Lichtstärke, aber von verschiedenem Sättigungsgrade mit dem Unterschiede zweier Farbenempfindungen von gleicher Lichtstärke und gleichem Sättigungsgrade, aber von verschiedener Farbe durchaus nicht vergleichbar ist. Auch ist der Raum in unserer Anschauung unbegrenzt, das System der Farbenempfindungen aber begrenzt. Raum und Farbensystem sind also Unterarten einer stetigen dreifach ausgedehnten Grösse. Der Analogie wegen weist Helmholtz weiter auf das System der Tonempfindungen hin als eine stetige zweifach ausgedehnte Grösse, da jede Tonempfindung von der Klangfarbe abgesehen durch die Tonhöhe und die Intensität des Tones bestimmt ist. Aber auch bei ihm findet jener qualitative Unterschied betreffs der Richtungen statt.

So war für den Raum als allgemeinerer Begriff die stetige dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit gefunden. Beachtete man, dass sich in der analytischen Geometrie die krummen Oberflächen dem Begriffe der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten unterordnen, so lag es nahe als allgemeineren Begriff für die zwei- und dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten die stetige n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit durch unbestimmte Erweiterung der Zahlen 2 und 3 zu bilden und man glaubt in der That in diesem Begriff der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit den allgemeinen Gattungsbegriff gefunden zu haben, dem der Raum subordinirt ist.

Von diesem Begriffe der stetigen n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit geht nun Riemann in seiner Abhandlung aus, nachdem er sie vorher von der unstetigen oder discreten unterschieden hat, und stellt sich als nächste Aufgabe die nähere Bestimmung der stetigen Mannigfaltigkeit. Er zeigt, dass das Wesen der n-fachen Ausdehnung darin bestehe, dass jede Ortsbestimmung durch n

Grössenbestimmungen ersetzt werden kann, oder analytisch ausgedrückt, eine stetige n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist dadurch bestimmt, dass jedes ihrer Elemente — Riemann nennt sie bei stetigen Mannigfaltigkeiten „Punkte“ — durch n von einander unabhängige Veränderliche bestimmt wird. Der Raum ist also eine stetige dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, da jeder Punkt durch drei von einander unabhängige Coordinaten bestimmt ist. Um aber zu unterscheidenden Gesichtspunkten für die n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu gelangen, unterscheidet Riemann zunächst solche, bei denen eine Vertauschung der Coordinaten gestattet und solche, bei denen diese Vertauschung nicht gestattet ist. Dadurch unterscheidet sich ja der Raum von dem System der Farbenempfindungen. Weitere Unterscheidungsmerkmale für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, bei der sich die Veränderlichen vertauschen lassen, findet Riemann in ihren inneren Maassverhältnissen. Gleich im Anfange seiner Abhandlung macht er darauf aufmerksam, dass es bei der Begriffsbestimmung der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten auf zweierlei hinauskomme, auf die Ausdehnungs- und auf die Maassverhältnisse. Jene beziehen sich auf die Anzahl der Dimensionen, d. h. der unabhängigen Veränderlichen und die Abhängigkeitsbestimmung der einzelnen Elemente von diesen Veränderlichen. Für die n-fach angedehnte Mannigfaltigkeit ist n die Anzahl der Dimensionen und die Abhängigkeitsbestimmung eine zweifache, je nachdem die Veränderlichen vertauscht werden können oder nicht. Die inneren Maassverhältnisse aber beziehen sich auf ein und dieselbe Mannigfaltigkeit und untersuchen die innere Art der Abhängigkeit der Elemente von den einzelnen Veränderlichen, wodurch die unterscheidenden Gesichtspunkte für die Mannigfaltigkeiten gleicher Dimensionenzahl gefunden werden. Was die Maassbestimmungen im Allgemeinen anlangt, so bemerkt Riemann: „Maassbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Grössen vom Ort, die in mehr als einer Weise Statt finden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, dass die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede messbar sei.“ Um aber Linien zu messen, muss er für dieselben einen mathematischen Ausdruck haben. Denselben findet er unter folgenden Annahmen: Bezeichnet man die n Grössen, von denen jedes Element der n-fach ausgedehnten

Mannigfaltigkeit abhängt, mit $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, so setzt er erstens voraus, beim Fortgange auf einer Linie ändern sich die Zunahmen $dx_1, \ldots\ldots, dx_n$ stetig, so dass in dem Linienelement ds die Verhältnisse der Grössen dx als constant angesehen werden, wodurch sich das Linienelement ds als Function der Grösse x und der Differentiale dx darstellt. Die zweite Annahme, die Riemann macht, besteht darin, „dass die Länge des Linienelementes, von Grössen zweiter Ordnung abgesehen, ungeändert bleibt, wenn sämmtliche Punkte desselben dieselbe unendlich kleine Ortsänderung erleiden, worin zugleich enthalten ist, dass, wenn sämmtliche Grössen dx in demselben Verhältniss wachsen, das Linienelement sich ebenfalls in demselben Verhältniss ändert.“ Auf Grund dieser beiden Hypothesen ergiebt sich nun als einfachste Form für das Linienelement: ds gleich der Quadratwurzel aus einer immer positiven ganzen homogenen Function zweiten Grades der Differentiale dx, deren Coefficienten stetige Functionen der x sind. Der nächst einfache Fall ist nach Riemann der, dass ds gleich der vierten Wurzel aus einem Differentialausdrucke vierten Grades ist. Riemann adoptirt aber den ersten, weil in unserm Raume speciell in rechtwinkligen Coordinaten die Formel gilt $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$, erklärt jedoch ausdrücklich, dass diese Annahme nur eine Annahme ist. Hier füge ich den Inhalt der beiden ersten Abhandlungen von Helmholtz an, in denen derselbe versucht, den Riemann'schen hypothetischen Ausdruck für das Linienelement als Folgerung aus viel weniger beschränkten Annahmen herzuleiten. Namentlich in dem in den Göttinger Nachrichten erschienenen Aufsatze behandelt er diese Aufgabe. Seinen Ausgangspunkt bilden die Congruenzbedingungen unserer Geometrie. Diese fordert nämlich, „dass alle Congruenz unabhängig sei vom Orte, von der Richtung der sich deckenden Raumgebilde und von dem Wege, auf dem sie zu einander übergeführt worden sind.“ Eine genaue Betrachtung dieser drei Forderungen aber lehrt, dass die erste mit der Behauptung identisch ist, dass eine Ortsveränderung das Verhältniss der linearen Dimensionen eines Körpers nicht ändere, dass also dem Körper ein bestimmter Grad von Festigkeit zukomme, die analytisch gesprochen, darin besteht, dass die einzelnen Punkte bei jeder Ortsveränderung dieselben Entfernungsverhältnisse behalten. Dabei können aber, wie Erdmann ausführlich erörtert, drei Fälle ein-treten: Die Dimensionen des Körpers können beim Uebergange von einer Lage in eine andere ganz ungeändert bleiben, zweitens können ihre Verhältnisse constant wachsen oder abnehmen; auch würden die Congruenzbedingungen drittens noch bestehen bleiben, wenn die Verhältnisse des Wachsens und Abnehmens zweier Dimensionen constant wären. In unserer Geometrie nehmen wir nach Helmholtz aus unserer physikalischen Kenntniss der Körperwelt das erstere an. Die zweite Forderung, dass die Congruenz unabhängig von der Richtung der sich deckenden Raumgebilde sei, involvirt die Bedingung, dass die Körper frei beweglich sind; zwei Körper sollen sich nicht nur an jedem beliebigen Orte, sondern auch in jeder beliebigen Lage congruent sein. Die dritte Annahme zeigte sich für Helmholtz noch nothwendig, als er die analytischen Bedingungen der Congruenz aufstellen wollte; sie äquivalirt mit der folgenden, dass ein Körper, nachdem er um die als Rotationsaxe angenommene Verbindungslinie zweier beliebiger fester Punkte des Körpers eine volle Umdrehung gemacht hat, in seine Anfangslage zurückkehrt. Auf Grund dieser Annahmen, die sich leicht analytisch ausdrücken lassen, gelingt es nun Helmholtz den von Riemann hypothetisch angenommenen Ausdruck für das Linienelement abzuleiten.

Ich fahre jetzt mit der Inhaltsangabe der Riemann'schen Abhandlung fort. Um die Mannigfaltigkeiten nach ihren inneren Maassbeziehungen zu unterscheiden, stützt sich Riemann auf die Gaussische Abhandlung Disquisitiones generales circa curvas superficies, in der Gauss die Flächen nicht als Grenzen von Körpern, sondern als selbständige Raumgebilde betrachtet, wie man die Curven zu betrachten gewohnt war. Schon längst hatte man die Curven mit dem Kreise in Beziehung gesetzt, indem man sich durch jeden Curvenpunkt denjenigen Kreis gezogen dachte, der sich in diesem Punkte der Curve am meisten anschliesst. Den reciproken Werth des Radius dieses Kreises nannte man bekanntlich das Krümmungsmaass der Curve in dem betrachteten Punkte. Gauss legt sich nun in jener Abhandlung die Frage vor, ob es bei den Flächen etwas Aehnliches wie das Krümmungsmaass bei den Curven gebe und stützt sich bei seinen Untersuchungen auf die folgende Bemerkung. Denkt man sich ausser der gegebenen Curve einen Einheitskreis d. h. einen Kreis mit dem Radius Eins gezogen, errichtet man ferner in den Endpunkten eines Curvenelements ds die Normalen zu der Curve und construirt zu diesen parallel zwei Radien des Einheitskreises, welche auf ihm das Element ds abschneiden, so wird die Krümmung der Curve in dem betrachteten Curvenelement dargestellt durch den Quotienten $d\sigma : ds$. Diese Definition des Krümmungsmaasses überträgt nun Gauss auf die Flächen. Er denkt sich auf der Fläche ein Flächenelement ds ausgeschnitten, rings auf der Grenze desselben die Flächennormalen errichtet und auf einer Hülfskugel mit dem Radius Eins ein correspondirendes Element $d\sigma$ durch die den Flächennormalen parallel gezogenen Radien begrenzt: das Verhältniss der beiden Elemente $d\sigma : ds$ nennt er das Krümmungsmaass (curvatura differentialis) der Fläche an der betreffenden Stelle. Er zeigt weiter, dass diese Definition mit der folgenden analytisch identisch ist. Legt man durch die Normale einer Fläche in einem bestimmten Punkte unendlich viele Ebenen, so schneiden diese auf der Fläche Curven aus, deren jede in dem Punkte einen gewissen Krümmungsradius besitzt. Unter diesen Krümmungsradien gibt es ein Maximum und ein Minimum; bezeichnet man sie resp. mit ϱ_1 und ϱ_2, so ist $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ das Krümmungsmaass der Fläche in jenem Punkte. Zwar ist diese Gaussische Benennung vielfach angegriffen worden, so z. B. von Sophie Germain, welche dafür namentlich aus physikalischen Gründen die Summe $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ setzen wollte, allein die Gaussische Bezeichnung ist jetzt allgemein adoptirt, erstens weil sie die Krümmung der Curven als Specialfall enthält und zweitens weil gerade in dem Ausdrucke $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ das Charakteristische der betreffenden Fläche liegt. Gauss zeigt nämlich, dass sich der Werth $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ durch die im Linienelement $ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$ auf der Fläche vorkommenden Constanten bestimmt. Eine Folge dieser Eigenschaft ist, dass bei jeder Biegung einer Fläche ohne Dehnung das Krümmungsmaass und damit die geometrischen Eigenschaften der Fläche ungeändert bleiben. Hieraus folgt unmittelbar weiter, dass bei Flächen mit constantem Krümmungsmaasse ein beliebig begrenztes Stück einer Fläche willkürlich verschoben werden kann, ohne irgend eine Dehnung zu erleiden, dass dies aber nicht bei Flächen der Fall ist, welche variabeles Krümmungsmaass besitzen, wie z. B. beim Ellipsoid. In einer Erweiterung des Ausdrucks für das Krümmungsmaass findet nun Riemann den innern Eintheilungsgrund für die Mannigfaltigkeiten überhaupt. Was die mathematische Seite der Riemann'schen Erweiterung des Gaussischen Krümmungsmaasses und die mathematischen Details der Riemann'schen Schrift überhaupt anlangt, so komme ich weiter unten ausführlicher auf sie zurück. Für jetzt gebe ich nur die leitenden Gesichtspunkte. Nach Riemanns Eintheilung zerfallen die Mannigfaltigkeiten zunächst in zwei grosse Classen: solche mit variabelem und solche mit constantem Krümmungsmaasse; der Werth des letzteren kann positiv, Null oder negativ sein und so erhalten wir folgendes Eintheilungsschema:

Die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

Die n Variabeln sind

a) nicht vertauschbar, b) vertauschbar. Der Werth des Krümmungsmaases ist

variabel — constant

positiv; — Null; — negativ.

In dieser Weise ergibt sich, dass der Raum ein Specialfall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist, deren Krümmungsmaass sowohl variabel als constant, im letzteren Falle wieder positiv, negativ oder Null sein kann, woraus als nothwendige Folge hervorgeht, dass der Raum und seine Eigenschaften sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass, wie Riemann fortfährt, „diejenigen Eigenschaften, durch die sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten unterscheidet, nur aus der Erfahrung genommen werden können.“ Nach Riemann handelt es sich also darum an der Hand der Erfahrung zu entscheiden, zunächst ob das Krümmungsmaass des Raumes variabel oder constant sei. Beachtet man den Unterschied, der zwischen den Flächen constanten und variabelen Krümmungsmaasses herrscht, so folgt aus den beobachteten Congruenzbeziehungen der Körper, dass der Raum ein constantes Krümmungsmaass besitzt. Die weitere Frage, ob das Krümmungsmaass positiv, negativ oder Null ist, wird von Riemann kurz zu Gunsten des letzteren Werthes entschieden, indem er sagt, dass alle Erfahrung bis jetzt darauf hinweist. Ausführlicher hat Helmholtz diese Frage discutirt. Seine Betrachtungen gehen von den sinnlichen Eindrücken aus, die fingirte zwei-dimensionale Wesen haben würden, je nachdem sie auf einer Ebene, einer sphärischen oder pseudosphärischen Fläche lebten. Die sphärische Fläche hat bekanntlich constantes positives, die pseudosphärische constantes negatives Krümmungsmaass. Es stellt sich heraus, dass die Bewohner der Ebene die Euklid'sche Geometrie, die der pseudosphärischen Fläche, wie Beltrami[1]) gezeigt hat, die Lowatschewsky-Bolyai'sche Geometrie aufstellen würden. Nach Analogie erweitert Helmholtz diese Eindrücke für den „sphärischen, pseudosphärischen und ebenen Raum" und gelangt so zu dem Satze, dass alle unsere Erfahrungen darauf hinweisen, dass unser Raum ein ebener Raum ist. „Der Raum ist eine ebene dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit."

So scheint der innere Grund gefunden zu sein, weshalb das 11. Axiom nicht auf die übrigen zurückführbar ist: er liegt in dem besonderen Werthe des Krümmungsmaasses unseres Raumes. Lässt man das Parallelenaxiom fallen, behält aber die übrigen Axiome bei, so erhält man die Geometrie des pseudosphärischen Raumes. Das nothwendige und hinreichende Axiomensystem für die Geometrie überhaupt ergibt sich daher aus der Definition:

> „Der Raum ist eine stetige dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren Krümmungsmaass einen constanten Werth hat."

Will man das Axiom von der geraden Linie festhalten, so muss man noch hinzufügen, dass dieser Werth nur negativ oder Null sein kann, um endlich das Axiomensystem Euklid's zu erhalten, hat man sich nur für den letzten Werth zu entscheiden. In der Definition:

> „Der Raum ist eine stetige dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren Krümmungsmaass den constanten Werth Null hat,"

ist also das Axiomensystem für die Euklidische Geometrie d. h. für unsere eigenthümliche Anschauung enthalten und zugleich der innere Zusammenhang der Axiome gegeben. Dies sind die Resultate, zu denen Riemann und Helmholtz in Bezug auf die beiden ersten der Fragen gelangen, deren Beantwortung oben als Motiv ihrer Abhandlungen hingestellt wurde. Was die dritte Frage nach

1) Saggio di interpretazione della Geometria non-euklidea. Giornale di Mathematiche. 1868.

den Gründen, auf denen unsere Ueberzeugung von der Wahrheit der Geometrie beruht, anbetrifft, so sind Riemann und Helmholtz der Ansicht, dass die Kriterien, nach denen das Krümmungsmaass des Raumes für unsere Anschauung sich als constant Null ergeben hat, auf der Erfahrung basiren. Dass der Raum den besonderen Werth Null des Krümmungsmaasses habe, sei nicht allein in der Natur unseres Bewusstseins begründet, sondern müsse in den objectiven Beziehungen der Dinge seinen Grund haben. Da wir selbst im Stande seien uns die Welt anschaulich vorzustellen, die der sphärische und der pseudosphärische Raum bieten, müsse alle Geometrie abhängig sein von dem Wohnraume. Nicht jede objective Erfahrung d. i. Art der Einwirkung der von uns verschiedenen Dinge würde uns zur Bildung gerade unserer Raumanschauung veranlassen. Aus der Erfahrung stamme Alles, was wir uns anders vorstellen können, daher könne die Raumanschauung mit ihren besonderen Eigenschaften nicht wie Kant meine a priori in unserm Bewusstsein liegen, sondern „sowohl für die Ausdehnung unseres Raumes nach drei Dimensionen und seine Unbegrenztheit als auch für seine Stetigkeit, sowie endlich für den besonderen Werth seines Krümmungsmaasses müssen besondere Anlässe in den Erregungen liegen, welche die psychische Entwickelung der Raumvorstellung hervorrufen. Unsere Anschauungsform der von uns verschiedenen Dinge würde eine andere sein, sobald die gegenseitigen, von ihrer besonderen Beschaffenheit unabhängigen Beziehungen der Dinge, die dieser Form entsprechen, sich verändern würden. Unsere Raumvorstellung ist daher nicht unabhängig von den Dingen, sondern mit den Beziehungen derselben auf ebenso enge Weise verknüpft, wie mit der Natur unseres Bewusstseins.“ „Dass die Beweise hinfällig sind, welche die Raumvorstellung als eine nothwendige Eigenschaft aller denkenden Intelligenzen darzustellen suchen, folgt unmittelbar aus der Möglichkeit, dass wir die Wahrnehmungsreihen, welche ein sphärischer oder pseudosphärischer Raum darbieten würde, anschaulich entwickeln können.“[1]) Unsere Ueberzeugung von der Wahrheit der geometrischen Axiome haben wir daher auf dem Wege der Erfahrung gewonnen, diese Ueberzeugung ist daher auch nur so lange berechtigt, als keine ihr widersprechenden Erfahrungsthatsachen gegeben sind. Die Raum-

1) Erdmann, a. a. O. p. 97 u. 115.

anschauung ist daher empirisch und nicht reine Anschauung a priori. Mit diesen Argumentationen beantworten Riemann und Helmholtz die dritte der oben aufgestellten Fragen; in sehr ausführlicher Weise hat Erdmann dieselben in seinem Buche reproducirt.

Ich habe in dem Vorhergehenden eine kurze Skizze des Inhalts und des Gedankengangs der Arbeiten von Riemann und Helmholtz gegeben. Ich hätte auf dieselbe ganz verzichten und auf die viel ausführlichere Darstellung Erdmanns im zweiten Capitel seiner mehrerwähnten Schrift, in dem er einen sehr schätzenswerthen Commentar zu der im Allgemeinen schwer verständlichen Abhandlung Riemanns gibt, verweisen können, allein ich hielt eine kurze Darstellung der leitenden Gesichtspunkte für nothwendig, um für den folgenden Versuch einer Kritik der erhaltenen Resultate wie des Weges, auf dem sie gefunden wurden, einen festen Anhalt zu haben.

Dieser kritische Versuch hat zuerst den Fundamentalpunkt zu prüfen, auf dem die vorhin dargestellten Untersuchungen basiren: Derselbe besteht in der Unterordnung des Raumes unter den Gattungsbegriff der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Wir haben einmal zu prüfen, ob diese Unterordnung überhaupt eine philosophisch berechtigte ist und ob die mathematischen Principien, durch welche diese Unterordnung geschieht, überall übereinstimmend und richtig sind. Wenden wir uns zunächst dem ersten Punkte zu. Die Unterordnung des Raumes unter einen Gattungsbegriff setzt als etwas Selbstverständliches voraus, dass der Raum selbst als Begriff aufgefasst werden könne. Dieses letztere haben wir demnach zunächst zu prüfen.

Ob der Raum Begriff ist oder nicht, diese Frage wird in den Abhandlungen von Riemann und Helmholtz ganz unberücksichtigt gelassen, dagegen kommt Erdmann ausführlich auf sie zurück. Gestützt auf die analytische Geometrie weist derselbe zunächst nach, dass die Raumgebilde, mit denen sich die Geometrie beschäftigt, auch als Grössenbegriffe aufgefasst werden können. Ohne sich auf eine Widerlegung dieser Ansicht einzulassen, wirft Weissenborn[1])

1) Ueber die neueren Ansichten vom Raume und den geometrischen Axiomen; Vierteljahrsschr. f. wissensch. Philosophie, herausgeg. v. Avenarius. Bd. II, p. 222.

die Frage auf, ob sich dieselbe neben der Kantischen, dass die Raumformen der Geometrie Raumanschauungen wären, halten lasse, und sucht zu zeigen, dass in allen Sätzen der Geometrie die Grössenverhältnisse schliesslich auf Anschauung hinauskommen. Dass dies wahr ist, folgt unmittelbar aus der Ueberlegung, dass der Begriff Grösse, wie alle Begriffe überhaupt, in der Anschauung wurzelt und aus ihr erst durch Abstraction verstanden werden kann. Aber eine analytische Geometrie würde nicht möglich sein, wenn die Raumgebilde der Geometrie nicht wirkliche Grössenbegriffe sein könnten, da alle arithmetischen Operationen nur mit Grössenbegriffen vorgenommen werden können. Dazu kommt weiter, dass nicht allein die analytische Geometrie die Raumgebilde als Grössenbegriffe benutzt, sondern dass auch ein sehr wesentlicher Theil der Planimetrie auf der Möglichkeit beruht die Raumgebilde als Grössenbegriffe aufzufassen, nämlich die Lehre von der Aehnlichkeit. Denn von einer Aehnlichkeit kann nur die Rede sein, wenn sich jede Beziehung zwischen Strecken auf eine Zahlbeziehung reduciren und durch dieselbe ersetzen lässt. Auf dieser in der Euklidischen Geometrie vorhandenen Thatsache basirt überhaupt die Anwendbarkeit der algebraischen Sätze und Operationen auf die Geometrie, und weil dadurch die Gebilde der Geometrie zugleich Grössenbegriffe werden, hat Euklid den geometrischen Axiomen die allgemeinen Grössenaxiome vorausschicken zu müssen geglaubt. Wie nun in der analytischen Geometrie Linien, Flächen und Körper als Grössenbegriffe betrachtet werden, so lehren die mathematischen Speculationen den Raum selbst durch eine einfache Erweiterung der Formeln nach Analogie als Begriff auffassen. Diese durch die mathematischen Untersuchungen bewiesene Thatsache scheint aber in Widerspruch mit der Ansicht Kants zu stehen, nach welcher der Raum Anschauung sei und kein Begriff. Ja Wundt sagt geradezu, dass durch dieselbe in die philosophische Theorie Kants eine Bresche gelegt würde, denn „dass der Raum Anschauung sei und kein Begriff, weder ein empirischer noch ein a priori gegebener, gilt Kant als ein feststehender Satz.“[1]) Diese Behauptung bedarf um so mehr einer Prüfung, als Caspari[2]) ihr gegenüber

1) Logik. p. 448.

2) Das Raumproblem. Mit Rücksicht auf die speculativen Richtungen der Mathematik. Im „Ausland“ 1880. Nr. 23 und 24.

einwendet, dass Kant nur der Ansicht sei, der Raum sei kein blosser Begriff. Es scheint in der That auf den ersten Blick die Ansicht berechtigt zu sein, dass Kant nie behauptet haben würde, der Raum könne nicht als Begriff aufgefasst d. h. gedacht werden. Denn es ist ein grosser Unterschied, ob ich sage, der Raum ist Begriff oder der Raum kann als Begriff gedacht werden. Die mathematische Untersuchung weist nur das Letztere nach. Zur Rechtfertigung dieser Ansicht über Kant könnte man zunächst folgende Stelle der Kritik der reinen Vernunft citiren:[1]) „Der Raum wird als eine unendliche gegebene Grösse vorgestellt. Nun muss man zwar einen jeden Begriff als eine Vorstellung denken, die in einer unendlichen Menge von verschiedenen möglichen Vorstellungen (als ihr gemeinschaftliches Merkmal) enthalten ist, mithin diese unter sich enthält; aber kein Begriff als ein solcher kann so gedacht werden, als ob er eine unendliche Menge von Vorstellungen in sich enthielte. Gleichwohl wird der Raum so gedacht (denn alle Theile des Raumes ins Unendliche sind zugleich). Also ist die ursprüngliche Vorstellung vom Raume Anschauung a priori und kein Begriff.“ Soll der Raum nicht als Begriff aufgefasst werden können, so möchte in den Anfangsworten ein Widerspruch liegen. Denn „vorgestellt“ in demselben kann nur heissen „gedacht“, weil man sich etwas Unendliches nur begrifflich denken, nicht vorstellen kann. Und so bedeuten jene Worte: der Raum wird als eine unendliche gegebene Grösse gedacht, oder da unendliche Grösse ein Begriff ist, der Raum wird als ein gewisser gegebener Begriff gedacht, d. h. durch Denken einem gewissen Begriffe, dem der unendlichen Grösse untergeordnet. Kant beweise so mit jenen Worten nur, dass die ursprüngliche Vorstellung vom Raume Anschauung sei und kein Begriff. Dass Kant nur der Ansicht gewesen, der Raum sei kein blosser Begriff, könnte auch aus andern Schriften zur Genüge dargethan werden. In der 1768 erschienen Schrift: „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume“, sowie den 1783 erschienenen „Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik“ weist er an Beispielen — namentlich an dem Verhältnisse der rechten und linken Hand eines beliebigen Gegenstandes zu seinem Spiegelbilde — nach,

1) I. § 2. 4. (2. Aufl.)

„dass in der Beschaffenheit der Körper Unterschiede angetroffen werden können, die sich lediglich auf den absoluten und ursprünglichen Raum beziehen, die wir aber durch keinen Begriff verständlich machen, sondern nur durch Anschauung nachweisen können,“ hebt aber stets hervor, dass zum Zustandekommen unserer Raumanschauung der Verstand, d. h. das Denken mitwirken müsse. Wenn Wundt noch aus andern Stellen Kants nachweisen will, dass ihm (Wundt) der Raum auch Begriff sei, z. B. aus den Worten „man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, dass kein Raum sei, obgleich man sich ganz wohl denken kann, dass keine Gegenstände darin angetroffen werden,“ in denen „denken“ heisse „begrifflich denken“, da man sich einen Raum ohne Gegenstände nicht vorstellen könne, so ist er damit in vollem Rechte und scheint trotzdem guten Grund zu der Behauptung zu haben, dass die mathematischen Speculationen von dieser Seite in die philosophische Raumtheorie Kants eine Bresche legen. Allerdings scheint die obige Argumentation richtig zu sein und in der That geht aus Kants eigenen Worten hervor, dass der Raum (d. h. die reine Raumanschauung) nur begrifflich gedacht werden kann. Aber dies nur dann, wenn man Begriff in einem ganz andern Sinne nimmt als Kant selbst. Für Kant gilt als Merkmal des Begriffs, dass er selbst als Merkmal in den unter ihm enthaltenen Vorstellungen gedacht werden könne. Nun weist er nach, dass der Raum kein Merkmal der einzelnen räumlichen Dinge sei, also ist er für ihn auch kein Begriff. Wir können uns nach Kant zwar Begriffe von einzelnen Raumgebilden, ja sogar von Räumen überhaupt bilden, aber nicht von dem Raume, denn „der allgemeine Begriff von Räumen überhaupt beruht lediglich auf Einschränkungen.“ Dass für Kant die sogenannte Unendlichkeit des Raumes keine Instanz für, sondern gegen die begriffliche Natur des Raumes (d. h. der reinen Raumanschauung) ist, geht noch deutlicher aus der ersten Auflage der Kritik der reinen Vernunft hervor, wo es heisst: „5. der Raum wird als eine unendliche Grösse gegeben vorgestellt. Ein allgemeiner Begriff vom Raum, der sowohl einem Fusse als einer Elle gemein ist [d. h. nur in Bezug auf das eingeschränkt Räumliche möglich ist] kann in Anschauung der Grösse Nichts bestimmen. Wäre es nicht die Grenzenlosigkeit im

Fortgange der Anschauung, so würde kein Begriff von Verhältnissen ein Principium der Unendlichkeit derselben bei sich führen.“ Kürzer und treffender noch heisst es bei der Zeit: „Die Unendlichkeit der Zeit bedeutet nichts weiter, als dass alle bestimmte Grösse der Zeit nur durch Einschränkungen einer einigen zu Grunde liegenden Zeit möglich sei.“ Fasst man den Begriff genau im Kantischen Sinne, so kann eine einige, d. h. einzelne Vorstellung niemals zugleich als Begriff gefasst werden. Wenn man daher behauptet, Kant wolle nur beweisen, dass der Raum kein blosser Begriff sei, so beruht dies auf einer Verwechslung der bei Kant noch herrschenden scholastischen Wortbedeutung des „Begriffs“ von unserer heutigen Auffassungsweise. Aus der „Grenzenlosigkeit im Fortgange der Anschauung“ kann nach Kants Auffassung die Idee der Unendlichkeit hervorgehen (welche kein eigentlicher Begriff ist) aber nicht der Begriff des unendlichen Raumes, weil es nur einen unendlichen Raum gibt, während es nach ihm zum Wesen des Begriffs gehört, dass er eine Mehrheit von Vorstellungen unter sich enthält. Die Worte dagegen: „Lasset von eurem Erfahrungsbegriffe eines Körpers Alles, was daran empirisch ist, nach und nach weg: die Farbe, die Härte, die Weiche, die Schwere, die Undurchdringlichkeit, so bleibt doch der Raum übrig, den er (welcher nun ganz verschwunden ist) einnahm und den könnt ihr nicht weglassen“[1]) sagt Kant nicht, um zu beweisen, dass der Raum Anschauung sei, sondern, dass der Raum nicht empirisch, aus der äussern Erfahrung genommen sei, sondern als reine Anschauung a priori in uns gegeben.

Die Worte Wundts[2]): „Nur weil er ein Begriff ist, kann der Raum definirt werden“ möchte ich lieber umdrehen und in der Form aussprechen: nur weil er definirt werden kann, ist der Raum Begriff, oder allgemeiner, der Raum ist ein Begriff, weil er selbständiges Object des logischen Denkens sein kann. Denn es ist ein Hauptmerkmal des logischen Denkens, dass es begriffliches Denken ist. Hieraus folgt auch unmittelbar die von Wundt mit andern Argumentationen bewiesene Thatsache,

---

1) Vergl. zu dieser Stelle die fast wörtlich gleichlautende in Descartes' Principien II, 11 und eine ähnliche bei Hobbes, de corp. Cap. VII.

2) Logik p. 450.

dass Kants reine Anschauung keine Anschauung, sondern Begriff ist: denn der Begriff der reinen Anschauung ist das Product eines logischen Denkprocesses. Mit diesen Ausführungen ist nun freilich nicht, wie Caspari (a. a. O.) polemisirend gegen Wundt behauptet, der Raum selbst von der Anschauung ganz emanicipirt und zu einem wirklich reinen Begriff erhoben, sondern es ist nur der Unterschied bewiesen, der zwischen dem Raum der logisch-mathematischen Untersuchung und dem der Psychologie und Erkenntnisstheorie besteht. Der mathematischen Untersuchung ist der Raum ein real gegebenes in sich fertiges und völlig bestimmtes Continuum, das dem Denken als selbständiges Bild und Begriff gegenübersteht, mögen nun Psychologie, Erkenntnisstheorie und Metaphysik beweisen, dass der Raum real gegeben, fertig und continuirlich sei oder nicht: für das mathematische Problem ist das ganz gleichgültig. „Es muss daran festgehalten werden, dass die analytische Theorie des Raumes den letzteren in einem Sinne auffasst, der weder mit der empirischen Raumerfüllung oder mit dem Raume als Phänomenon noch mit dem Raume als einem Objecte erkenntnisstheoretischer und metaphysischer Betrachtung irgend etwas unmittelbar zu schaffen hat.“[1]) Kurz und treffend hebt Baumann[2]) den in Rede stehenden Unterschied hervor mit den Worten: „Der Raum in mathematischer Hinsicht rein als Vorstellung unseres Geistes gefasst stellt sich, wenn er mit dem Raum draussen verglichen, bald als ein Wesen sui generis heraus; in ihm ist Allgemeines und Besonderes mit einem Schlage gegeben, wir entwerfen ihn zugleich im Bilde und finden ihn in uns selbst entworfen, wir durcheilen ihn und verfügen über ihn ohne Hinderniss; ganz anders finden wir es bei dem Raume, der ausser uns sich uns empfindbar macht; der Schluss von einem auf den andern ist so durch die Sache selbst verboten.“ Aus der Nichtbeachtung dieser Thatsache allein ist das Fehlerhafte in der Raumtheorie Descartes' entsprungen; auf ihr beruht ebenfalls die ganze Polemik Caspari's gegen Wundt, die sich hiernach von selbst hinfällig zeigt.

---

1) Witte in der Recension des Erdmannschen Buches über die Axiome der Geometrie. Philos. Monatshefte. XIII. p. 438.

2) Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. 2 Bde. (Berlin 1868/69.) Bd. I. p. 101.

Ist sonach die Auffassung des Raumes als Begriff durchaus gerechtfertigt, so ist es zweitens unsere Aufgabe das Verhältniss dieses Begriffs zu dem allgemeinen Gattungsbegriffe der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu untersuchen. Der Grund den Raum unter einen Gattungsbegriff subsumiren zu wollen fand seine Berechtigung in der Forderung eine Definition des Raumes aufzustellen, um aus ihr das einfachste und vollständige System von Axiomen zu erhalten. Denn nach Erdmann kann diese „geforderte Definition unserer Raumanschauung nur gebildet werden, wenn wir im Stande sind den Gattungsbegriff zu finden, dem wir dieselbe subsumiren müssen, und die specifischen Merkmale zu bestimmen, die sie von den anderen möglichen oder etwa wirklichen coordinirten Arten dieses Gattungsbegriffs unterscheidet.“[1]) Dieser Gattungsbegriff scheint nun von Riemann und Helmholtz in der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gefunden zu sein, als deren wesentliches Merkmal sie den Umstand angeben, „dass ihre Elemente von n von einander unabhängigen, reelen stetigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen, so dass zu jedem Element der Mannigfaltigkeit ein zulässiges Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$, aber auch umgekehrt zu jedem zulässigen Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein gewisses Element der Mannigfaltigkeit gehört.“ In einem „Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ hat G. Cantor[2]) gezeigt, dass dabei stillschweigend noch eine andere Voraussetzung zu Grunde liege, dass nämlich „die Correspondenz der Elemente der Mannigfaltigkeit und des Werthsystems $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine stetige sei, so dass jeder unendlich kleinen Aenderung des Werthsystems $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine unendlich kleine Aenderung des entsprechenden Elementes und umgekehrt einer unendlich kleinen Aenderung des Elementes eine ebensolche Werthänderung seiner Coordinaten entspricht.“ Der Autor zeigt in diesem Aufsatze ferner, dass die Elemente einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit sogar durch eine einzige reelle Coordinate eindeutig und völlig bestimmbar sind, falls man die letzte Voraussetzung fallen lässt, während die Definitionen, welche Riemann und Helmholtz für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit geben, in der (von ihnen freilich nicht genug hervorgehobe-

1) a. a. O. p. 36.
2) Crelle-Borchradt's Journal. Bd. 84.

nen) Forderung besteht, dass wenigstens n Grössenbestimmungen nöthig sind. In der That haben weiter verschiedene Mathematiker wie Lüroth, Tobias Mayer, Jürgens, Netto zu zeigen versucht, dass diese Forderung unerlässlich ist: Eine m-fache Mannigfaltigkeit lässt sich in stetiger Weise nicht auf eine $n$fache abbilden.

Thatsächlich ist diese Voraussetzung bei unserem Raume erfüllt und insofern ordnet sich der Raum dem allgemeinen Begriffe der stetigen n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit unter. Wenn man aber häufig die Ansicht findet, dass die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit wirklich der allgemeine Gattungsbegriff für den Raum sei, so ist dieselbe unrichtig. Denn, wie ich jetzt nachweisen werde, haben wir es bei dem Verhältnisse des Raumes zur stetigen n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gar nicht mit einem Verhältniss zwischen Gattung und Art im eigentlichen logischen Sinne zu thun. Erdmann selbst bemerkt: „Der allgemeinste Gattungsbegriff, der Begriff der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit überhaupt, ist kein höchster Begriff in dem Sinne der gewöhnlichen logischen Forderungen. Jene Begriffe entstehen durch Abstraction von immer neuen Merkmalen, dieser ging aus der unbestimmten Erweiterung eines besonderen Merkmales hervor“[1]), und ist trotzdem der Ansicht, dass sich aus diesem Gattungsbegriff die Eigenschaften des Raumes analytisch entwickeln lassen. — Im Allgemeinen ist die logische Berechtigung zur Bildung des Verhältnisses von Gattung und Art nur in dem Falle vorhanden, wo mehrere Arten zugleich gegeben sind, welche gewisse gemeinsame Merkmale besitzen: Die Zusammenfassung dieser Merkmale gibt die Gattung. So ist es z. B. vollkommen berechtigt als allgemeinen Gattungsbegriff für die Curven die einfach ausgedehnte, für die Flächen die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zu bilden; denn alle Curven haben die Eigenschaften der einfachen Ausdehnung und der Continuität, alle Flächen die der zweifachen Ausdehnung und Stetigkeit gemeinsam. Wenn man aber weiter als allgemeinen Gattungsbegriff für den Raum die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit setzt, so sind jene wesentlichen Erfordernisse zur Bildung dieses Begriffes nicht mehr vorhanden, denn uns sind nicht mehrere coordinirte Arten, son-

---

1) a. a. O. p. 133.

dern nur der eine Raum unserer Anschauung gegeben. Vollends für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist uns nicht einmal eine einzige Art gegeben, sie ist nur durch eine Erweiterung der Zahl hervorgegangen.

Ich muss hier einige Einwände berücksichtigen, die man gegen das Letzere erheben könnte. Erstens könnte man sagen, dass wenigstens die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit den Charakter eines wahren Gattungsbegriffes besitze, da uns in der That mehrere coordinirte Arten gegeben sind, die gemeinsame Merkmale besitzen, nämlich neben dem Raume noch mindestens das System der Farbenempfindungen: Das Gemeinsame ist ja die Dreizahl der Dimensionen und die Continuität. Allein dieser Einwand ist sofort hinfällig. Er geht aus einer falschen Auffassung des Begriffs „Dimension" hervor; für jetzt genügt es nur den gewaltigen Unterschied hervorzuheben, der zwischen den Dimensionen des Raumes und denen des Farbensystems besteht. Betrachten wir nämlich eine einzelne Farbenempfindung, so hat dieselbe unabhängig von den andern einen Farbenton, einen gewissen Sättigungsgrad und eine gewisse Lichtstärke, so dass diese drei Veränderlichen Eigenschaften jeder einzelnen Farbenempfindung und mit derselben unzertrennlich verbunden sind. (Das Gleiche gilt natürlich von dem „zweidimensionalen" Gebiet der Tonempfindungen.) Ganz anders ist das Verhältniss des Raumpunktes zu den Dimensionen des Raumes. Ein Element des Raumes, der Punkt, hat an und für sich mit den Dimensionen gar Nichts zu thun; die Dimensionen sind durchaus nicht Eigenschaften des Raumpunktes oder mit ihm untrennbar verbunden: Der Punkt ist dimensionslos. Die Dimensionen bezeichnen im gewöhnlichen Sinne nur die Anzahl der Coordinaten, die zur Bestimmung der Lage eines Punktes erforderlich sind, so dass von Dimensionen nur die Rede sein kann, wenn man einen Punkt mit andern in Beziehung setzt. Diese Unabhängigkeit des Punktes selbst von den Dimensionen gibt auch die Möglichkeit die Lage eines und desselben Punktes auf unzählige Weise durch ganz von einander unabhängige Coordinatensysteme zu bestimmen. Dem, was man Dimension beim System der Farbenempfindungen genannt hat, entspricht auch beim Punkte etwas, sobald man ihn als Elementarbestandtheil der Körperwelt auffasst: Als Dimensionen eines Punktes könnte man dann etwa die in ihm vorhandene Dichtigkeit, Temperatur und elektrische Spannung bezeichnen. Dies wären dann mit dem Punkte unzertrennlich verbundene Eigenschaften und den Dimensionen des Farbensystems analog. Kurz lässt sich der näher auseinander gesetzte Unterschied dahin aussprechen, dass die „Dimensionen" des Farbensystems intensive, die des Raumes extensive Grössen sind, beide also nicht in dieselbe Kategorie zusammengeworfen werden dürfen. Uebrigens würde das Farbensystem wohl auch nie als eine mit dem Raume coordinirte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit angesehen worden sein, wenn es nicht zur Versinnlichung räumlich dargestellt worden wäre. Denn dass der einzige Grund jener Auffassung in dieser graphischen Darstellung liegt, folgt sofort aus dem Umstande, dass nicht analytische Formeln wie $y = x_1 + x_2 + x_3$, $y = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$, $y = x_1 x_2 x_3$ und überhaupt alle symmetrischen Functionen dreier Veränderlichen zu den dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten gezählt werden und zwar zu den mit dem Raume gleichartigen, da in ihnen jedes y von drei von einander unabhängigen, mit einander beliebig vertauschbaren Görssen x_1, x_2, x_3, die sich stetig ändern können, abhängt. Auf einen speciellen Fall dieser Formeln hat schon Weissenborn in der oben citirten Abhandlung aufmerksam gemacht. Er fragt warum nicht auch Formeln wie die der Zinsrechnung $C = \frac{c.\ p.\ n.}{100}$ als dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten angesehen werden, da in ihnen das Capital C vom Grundcapital c, dem Zinsfuss p und der Anzahl n der Jahre in der Weise abhängt, dass alle drei sich stetig und unabhängig von einandern ändern und mit einander vertauscht werden können. Man sieht an diesem aus der Wirklichkeit genommenen Beispiele deutlich, dass nur die graphische Darstellung im Raume des Farbensystems der Grund gewesen es als dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zu betrachten. Die Hinfälligkeit dieses ersten Einwandes glaube ich dadurch zur Genüge dargethan zu haben. Man könnte aber zweitens einwenden, dass der allgemeine Gattungsbegriff, dem der Raum subsumirt werden soll, überhaupt gar nicht aus der einen Raumanschauung entstanden ist, sondern vielmehr aus der Betrachtung der Flächen. Unten den unendlich vielen krummen Flächen, den zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, werden nach Gauss' Vorgange die einzelnen Arten nach dem Werthe des Krümmungsmaasses unterschieden und so z. B. für die Ebene die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit als wirklicher Gattungsbegriff gefunden. Nach Analogie habe man nun die allgemeine dreidimensionale und in gleichem Uebergange die n-dimensionale Mannigfaltigkeit gebildet, und so sei der allgemeine Gattungsbegriff nicht aus der einen Raumanschauung, sondern aus der unendlich mannigfachen der krummen Oberfläche hervorgegangen. Allein die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bedeutet nur Flächen und es ist daher eine Tautologie die Flächen als Gattungsbegriff für die Flächen aufzustellen. Man kann höchstens behaupten, dass in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit sich auf dem Wege der Analogie ein Analogon zu einem Gattungsbegriffe herausgebildet habe. Nur ein mathematischer Nominalismus, wie ihn u. A. auch Erdmann vertritt, konnte in ihm einen wirklichen Gattungsbegriff sehen. Ich habe hervorgehoben, dass zur Bildung des Be gffs der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit uns nur der eine Raum unserer Anschauung gegeben ist, was allem Anschein nach mit der Ansicht mancher Mathematiker und Philosophen, nach der wir uns Räume, die anders als der unsrige gestaltet sind, vorstellen können, in Widerspruch steht und daher einiger rechtfertigender Worte bedarf. Namentlich hat sich Helmholtz bemüht jene Ansicht durch Einführung hypothetischer Wesen plausibel zu machen; so stellt er auf diese Weise z. B. die Geometrie dar, welche zweidimensionale Wesen, die auf einer ebenen oder einer pseudosphärischen Fläche leben, haben werden. Allein dadurch wird der eigentliche Hergang nur versteckt: es wird nicht die Anschauung jener Wesen dargestellt, sondern die Anschauung, welche wir mit unserer Raumvorstellung von den geometrischen Eigenschaften jener Flächen haben, wenn wir dabei von den übrigen Merkmalen abstrahiren. Wundt, der sich ebenfalls gegen diese Ansicht erklärt, bemerkt mit Recht:[1]) „Diejenigen Raumbeziehungen, von denen wir hierbei (bei der Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der Flächen) abstrahiren, befinden sich keineswegs ausserhalb unseres Vorstellens. Im Gegentheil wir bedürfen unserer völligen

1) Logik. p. 441.

Raumanschauung, nicht nur für die Vorstellung einer gekrümmten Oberfläche, sondern selbst für die Vorstellung einer Ebene und einer Geraden; denn wir können uns die Ebene ebensowenig wie die Gerade anders vorstellen als im Raume: wir stellen uns beide nicht vor als selbständige Räume, sondern als Gebilde im Raum". Schon Hume erklärt in seiner Abhandlung über die menschliche Natur[1]), dass wir uns Linien nicht anders vorstellen als in Flächen und diese nur in Körpern und diese wieder nur im Raume, wir abstrahiren nur von einer resp. zwei Abmessungen.

Wir sind durchaus nicht im Stande, wie Erdmann meint[2]), den Raum zu Körpern, Flächen, Linien zu verengen, wir können höchstens Flächen und Linien als Verengungen von Körpern auffassen, denn wir können uns Flächen und Linien nur als Grenzen von Körpern d. h. an Raumgebilden vorstellen. — Es leuchtet um so mehr ein, dass die so ausgemalte Geometrie die Geometrie unserer Anschauung ist, wenn man sich bemüht, durch Fiction von vierdimensionalen Wesen die Eigenschaften im vierdimensionalen Raume sich anschaulich vorzustellen. Helmholtz sagt:[3]) „Anschauungen, die man hat, sich wegdenken, ist leicht, aber Anschauungen, für die man kein Analogon hat, sich sinnlich vorstellen, ist sehr schwer." Dass dies nicht nur sehr schwer, sondern geradezu unmöglich ist, beweist schon Kant mit den Worten: „wir können von den Anschauungen anderer denkenden Wesen gar nicht urtheilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden seien, welche unsere Anschauungen einschränken und für uns allgemein gültig sind." Völlig rathlos stehe ich daher einer Stelle Erdmanns gegenüber, in der er sagt, dass im vierdimensionalen Raume in jedem Punkte vier aufeinander senkrecht stehende Linien construirbar sein **müssen.** Weitere berechtigte Einwürfe gegen die Hypostasirung solcher fingirter

1) Bd. I. part. II. sect. IV.

2) Vergl. p. 44 seiner mehrerwähnten Schrift. Wenn er daselbst sogar sagt, wir können uns einfach bestimmte Farbenempfindungen anschaulich vorstellen, weil sie nur Determinationen des gegebenen dreifach ausgedehnten Farbensystems sind, so möchte ich wohl fragen, wie man sich eine Farbenempfindung ohne Farbe z. B. nur mit einem gewissen Sättigungsgrade behaftet anschaulich vorstellen soll.

3) Vorträge III. p. 35.

Wesen und ihre Geometrie haben Weissenborn a. a. O. und Krause in seiner Schrift „Kant und Helmholtz“ (Lahr 1878) gemacht; ich verzichte jedoch auf eine Reproduction derselben.

Von einem Verhältniss der Gattung zur Art kann demnach zwischen der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit und dem Raume nicht die Rede sein: die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist kein Gattungsbegriff, sondern nur ein mathematischer Hülfsbegriff. Uebrigens hat Wundt in seiner Logik nachgewiesen, dass es zur Definition des Raumes durchaus nicht erforderlich ist, den Gattungsbegriff aufzusuchen, dem er untergeordnet ist. Diese Forderung entspringt nur aus einer falschen Auffassung des Wesens des Begriffs, das in der Möglichkeit der Subsumtion bestehen soll. Wundt weist nach, dass damit das Wesen des Begriffs viel zu eng gefasst ist, dass dieses vielmehr in den allgemeinen Beziehungen — von denen die Subsumtion nur ein besonderer Fall ist — zu anderen Begriffen besteht. Steht dieses fest, so muss es überhaupt Begriffe geben, die sich keinem Gattungsbegriffe unterordnen lassen, sondern die nur Begriffe sind, weil sie anderweitige allgemeine Beziehungen zu anderen Begriffen haben. Und fürwahr folgt aus dem unanfechtbaren Beweise Kant's, dass die Raumanschauung einzig in ihrer Art ist, dass für den Raumbegriff ein Gattungsbegriff im eigentlichen Sinne gar nicht existirt und überhaupt nicht existiren kann.

Nachdem ich im Vorhergehenden das Verhältniss der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu unserem Raume klar gelegt habe, gehe ich jetzt näher auf die n-fache Mannigfaltigkeit selbst und namentlich auf ihre mathematische Behandlung ein, soweit dieselbe direct mit unserm Problem zusammenhängt. Oben S. 27 habe ich im Anschluss an G. Cantor die Modification angegeben, welche man der Riemannschen Definition der Mannigfaltigkeit hinzufügen muss, damit in ihr jede Ortsbestimmung durch n Grössenbestimmungen ersetzt werden kann, so dass die äusseren Maassverhältnisse einer Mannigfaltigkeit bestimmt sind. Jetzt ist es unsere nächste Aufgabe, die Theorie der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten insofern zu prüfen, als für sie das Krümmungsmaass als inneres Maassverhältniss und als charakteristischer Eintheilungsgrund angenommen wird.

Soll die Theorie des Krümmungsmaasses auf demselben Wege, wie sie von Gauss ausgebildet ist, auf die n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten übertragen werden, so scheint es als durchaus nothwendig, dass man die n-fache Mannigfaltigkeit aus einer $(n+1)$-fachen, wie Riemann sagt, absolut gegebenen oder ebenen Mannigfaltigkeit ausgeschieden betrachtet, analog wie die Flächen aus dem Raume ausgeschieden angesehen werden. Dies kann in zweierlei Weise geschehen: man nimmt entweder eine Gleichung zwischen den $(n+1)$ Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$, welche den Ort in der $(n+1)$ fachen Mannigfaltigkeit bestimmen, an etwa

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) = 0$$

die man unter Bevorzugung einer Coordinate auch in der Form

$$x_{n+1} = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

schreiben kann, oder man denkt die $(n+1)$ Grössen x_i als Functionen von n Parametern gegeben:

$$x_i = F_i(t_1, t_2, \ldots . t_n). \qquad (i = 1, 2, \ldots n+1)$$

Soll jetzt auf die in einer dieser beiden Arten definirte Mannigfaltigkeit die Gaussische Krümmungstheorie übertragen werden, so muss man das Krümmungsmaass definiren entweder als das reciproke Product der n Hauptkrümmungshalbmesser oder als das Verhältniss eines Elementes der n-fachen Mannigfaltigkeit zu dem Elemente einer n-fachen kugelförmigen Mannigfaltigkeit, welche der gegebenen n-fachen genau so in Correspondenz gesetzt wird, wie Gauss den Flächen eine Kugelfläche zuordnet. Eine dieser beiden Definitionen muss dem Krümmungsmaass zu Grunde gelegt werden, falls es eine wirkliche Erweiterung des Gaussischen Krümmungsmaasses auf die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sein soll. In der That ist auf Grund beider Definitionen das Krümmungsmaass für die Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung abgeleitet worden. Die erstere Definition liegt der Arbeit Kroneckers zu Grunde, (vergl. Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1869), die zweite der Abhandlung von Beez „über das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.“[1]) Bevor ich die Arbeiten dieser beiden Mathematiker kannte, hatte ich durch unmittelbare Erweiterung der Formeln, welche Herr Prof. C. Neumann in seinen

1) Mathem. Annalen VII, p. 381. Vergl. ausserdem die Abhandl. von Beez in der Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. XX, p. 423; XXI, p. 373; XXIV, p. 1 und 65.

im Sommer-Semester 1879 „über einzelne Capitel der Geometrie“ zu Leipzig gehaltenen Vorlesungen entwickelt hatte, auf n Dimensionen beide Wege einzuschlagen versucht und war zu Resultaten gelangt, die ich hier kurz mit möglichster Vermeidung der Zwischenrechnungen mittheile.

Ist $$f(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) = 0$$
die gegebene Gleichung der Mannigfaltigkeit und definire ich $(n+1)$ Grössen α_i durch die Formeln

$$\alpha_i = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right)^2}} = \frac{f_i}{R}, \quad (i = 1, 2, .\, n+1),$$

so dass also α_i die Richtungscosinus der im Punkte $(x_1, \ldots x_{n+1})$ errichteten Normale — im Sinne von Flächen gesprochen — repräsentiren, so erhalte ich als Differentialgleichungen für die Krümmungscurven:

$$\begin{array}{l}
\left(\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - \dfrac{1}{\varrho}\right) dx_1 + \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\
\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} - \dfrac{1}{\varrho}\right) dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
\dfrac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_{n+1}} - \dfrac{1}{\varrho}\right) dx_{n+1} = 0
\end{array}$$

aus denen durch Elimination von $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n+1}$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - \dfrac{1}{\varrho} & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_{n+1}} \\
\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} - \dfrac{1}{\varrho} & \ldots & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_{n+1}} \\
- & - & - & - \\
\dfrac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_{n+1}} - \dfrac{1}{\varrho}
\end{vmatrix} = 0$$

hervorgeht. Dieselbe ist in Bezug auf ϱ vom $(n+1)$ten Grade, reducirt sich aber wegen der aus

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{n+1}^2 = 1$$

folgenden Relation

$$A \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{n+1}} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_{n+1}} \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix} \equiv \left| \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} \right| = 0$$

auf eine Gleichung n-ten Grades, deren n Wurzeln $\varrho_1, \dots \varrho_n$ die beiden Gleichungen erfüllen

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \cdot\cdot + \frac{1}{\varrho_n} = \sum\nolimits_k \frac{\partial\, \alpha_k}{\partial\, x_k}$$

$$\frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \cdot \cdot \varrho_n} = \Sigma_k A_k$$

wobei A_k diejenige Unterdeterminante von A ist, die man durch Weglassung der k-ten Horizontal- und der k-ten Verticalreihe erhält. Die erste dieser Formeln spielt eine besondere Rolle in der Theorie der Minimalflächen, sobald man diese auf n Dimensionen übertragen will,[1]) die zweite ist der Ausdruck für das Krümmungsmaass. Setzt man zur Abkürzung $f_{ik} \equiv \frac{\partial^2 f_i}{\partial\, x_i\, \partial\, x_k}$, so kann man, wenn R dieselbe Grösse bedeutet wie oben, nämlich

$$R = \sqrt{f_1^{\,2} + f_2^{\,2} + \cdot\cdot + f^2_{n+1}}$$

den Differentialgleichungen für die Krümmungscurven die Gestalt geben:

$$\left(f_{11} - \frac{R}{\varrho}\right) dx_1 + f_{12}\, dx_2 + - - - + f_{1,\,n+1}\, dx_{n+1} - f_1 \frac{dR}{R} = 0$$

$$f_{21}\, d\,x_1 \quad + \left(f_{22} - \frac{R}{\varrho}\right) dx_2 + - - - + f_{2\; n+1}\, dx_{n+1} - f_2 \frac{dR}{R} = 0$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$f_{n+1\;1}\, dx_1 + f_{n+1\;2}\, dx_2 + - - + \left(f_{n+1\, n+1} - \frac{R}{\varrho}\right) d\,x_{n+1} - f_{n+1} \frac{dR}{R} = 0$$

$$f_1\, dx_1 \;+\; f_2\, dx_2 \;+ - - + \quad f_{n+1}\, dx_{n+1} \quad = 0$$

(Die letzte hinzugefügte Gleichung sagt geometrisch aus, dass die

---

1) Vergl. Lipschitz, Crelle-Borchardt's Journal Bd. 74.

Tangente in $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ mit der Normale rechte Winkel bildet.) Aus diesen Gleichungen erhält man nun durch Elimination von $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n+1}, dR$

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n} = -\frac{1}{R^{n+2}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{1\,n+1} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2\,n+1} & f_2 \\ - & - & - & - & - \\ f_{n+1\,1} & f_{n+1\,2} & \cdots & f_{n+1\;n+1} & f_{n+1} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

für das Krümmungsmaass, welcher Werth mit dem von Kronecker a. a. O. angegebenen übereinstimmt.

Um eine Erweiterung des Gaussischen Krümmungsmaasses auf dem zweiten Wege zu erhalten, denke man sich zwei $(n+1)$fache Mannigfaltigkeiten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_i &= \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n+1) \\ x_k &= \psi_k(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}) \end{aligned}$$

in Correspondenz gesetzt und bezeichne ein Volumenelement der einen mit $d\sigma$, das entsprechende der andern mit ds, so findet man für das Verhältniss derselben unter Anwendung der schon oben gebrauchten abgekürzten Schreibweise für Determinanten sehr leicht die Beziehungen

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| \text{ und } \frac{ds}{d\sigma} = \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_k} \right|$$

Aus diesen Werthen finden wir weiter leicht die Verhältnisse zweier entsprechenden Elemente der correspondirenden n-fachen Mannigfaltigkeiten, wenn dieselben durch die Gleichungen

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) = 0$$
$$f(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n+1}) \equiv F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}) = 0$$

aus den $(n+1)$fachen ausgeschieden sind. Bezeichnen wir nämlich wie oben

$$f_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}; \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}$$

und setzen

$$a_k = \frac{f_k}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \cdot + f^2_{n+1}}}, \quad \alpha_k = \frac{F_k}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F^2_{n+1}}}$$

so erhält man für die Elemente dt und $d\tau$ zunächst die Gleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_k}\right| \cdot \frac{\alpha_1\, d\xi_1 + \ldots + \alpha_{n+1}\, d\xi_{n+1}}{a_1\, dx_1 + \ldots + a_{n+1}\, dx_{n+1}}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right| \cdot \frac{a_1\, dx_1 + \ldots + a_{n+1}\, dx_{n+1}}{\alpha_1\, d\xi_1 + \ldots + \alpha_{n+1}\, d\xi_{n+1}}$$

welche sich in Determinantenform schreiben lassen:

$$\frac{dt}{d\tau} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial\xi_1} & \alpha_1 \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial\xi_2} & \alpha_2 \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_{n+1}} & \ldots\ldots & \frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial\xi_{n+1}} & \alpha_{n+1} \\ a_1 & \ldots\ldots & a_{n+1} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial x_1} & a_1 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial x_2} & a_2 \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n+1}} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial x_{n+1}} & a_{n+1} \\ \alpha_1 & \ldots\ldots & \alpha_{n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

Bezeichnen wir das Krümmungsmaass mit K und ordnen der n-fachen Mannigfaltigkeit eine Kugel im $(n+1)$-fachen Raume in der von Gauss für Flächen angegebenen Weise zu, so ist das letztere Verhältniss das Krümmungsmaass. Die ξ_k sind dann die Coordinaten der Kugel, die partiellen Ableitungen sind genommen nach den Coordinaten der $(n+1)$fachen Mannigfaltigkeit. Legen wir in beiden Mannigfaltigkeiten die Coordinatenaxen parallel, so sind die $\alpha_k = a_k$ und wenn wir den Mittelpunkt der kugelförmigen Mannigfaltigkeit als Coordinatenanfang nehmen, so werden die $\alpha_k = \xi_k$ und wir erhalten

$$K = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n+1}} & \xi_1 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{n+1}} & \xi_2 \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_{n+1}} & \xi_{n+1} \\ \xi_1 & \cdots & \xi_{n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

Analytisch ist die Correspondenz beider Mannigfaltigkeiten durch die Formeln gegeben

$$\xi_k = \frac{f_k}{R}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n+1).$$

Setzen wir dies in die obige Determinante ein, so erhalten wir unter Anwendung der einfachsten Sätze über Umformung von Determinanten — Addition zweier Horizontal- oder Verticalreihen — das Resultat

$$K = - \frac{1}{R^{n+2}} \begin{vmatrix} f_{1\,1} & f_{1\,2} & \cdots & f_{1\;n+1} & f_1 \\ f_{2\,1} & f_{2\,2} & \cdots & f_{2\;n+1} & f_2 \\ - & - & - & - & - \\ f_{n+1\;1} & f_{n+1\;2} & \cdots & f_{n+1\;n+1} & f_{n+1} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

ein Ausdruck, der mit dem obigen übereinstimmt.

Ist die n-fache Mannigfaltigkeit dadurch gegeben, dass die $(n+1)$ Grössen x_k als Functionen von n Parametern p gegeben sind, so denken wir uns gegeben

$$\begin{aligned} x_k &= f_k(p_1, p_2, \ldots p_n) \\ & \qquad\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots n+1) \\ \xi_k &= \varphi_k(p_1, p_2, \ldots p_n) \end{aligned}$$

dann findet zwischen beiden Mannigfaltigkeiten Correspondenz statt. In welchem Zusammenhange stehen jetzt zwei Elemente dieser beiden n-fachen Mannigfaltigkeiten? Wir gehen von einem Punkte $(x_1, \ldots . x_{n+1})$ über zu einem andern

$$\left(x_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_1} dp_1, \ldots x_{n+1} + \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_1} dp_1\right),$$

indem wir nur p_1 wachsen lassen; die Entfernung beider Punkte sei dl_1; lassen wir alle Parameter einzeln wachsen, so erhalten wir der Reihe nach Grössen $dl_2, \ldots dl_n$, welche ein Volumenelement der n-fachen Mannigfaltigkeit (x) bestimmen. Errichten wir in $(x_1, \ldots x_{n+1})$ die Normale von der Länge $d\iota$ mit den Richtungscosinus $(a_1, \ldots a_{n+1})$, so erhalten wir ein Element der $(n+1)$-fachen Mannigfaltigkeit, dessen Seiten resp. die Projectionen haben:

$$a_1\, dl, \qquad a_2\, dl, \qquad \ldots, \qquad a_{n+1}\, dl$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_i} dp_i, \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_i} dp_i, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_i} dp_i,$$

dessen Inhalt also gegeben ist durch

$$P = dl . dp_1\, dp_2 \ldots dp_n . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n+1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_1} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_n} & \frac{\partial x_2}{\partial p_n} & \ldots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

Analog erhält man für das correspondirende Volumenelement

$$\Pi = d\lambda . dp_1 \ldots dp_n . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial p_1} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial p_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial p_n} & \ldots & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

Bezeichne ich die correspondirenden Elemente der n-fachen Mannigfaltigkeit mit p und π, so ist

$$p = P . dl, \quad \pi = \Pi . d\lambda$$

und ich erhalte für das Verhältniss $p:\pi$, wofür ich auch allgemeiner $ds:d\sigma$ setzen kann:

$$ds:d\sigma = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_{n+1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_1} \\ - & - & - \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial p_1} \\ - & - & - \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

Ordnen wir jetzt die ξ Mannigfaltigkeit genau wie oben der Mannigfaltigkeit (x) zu, so können wir setzen

$$\xi_k = \alpha_k = a_k$$

und wir erhalten für das Krümmungsmaass K den Werth

$$K = \begin{vmatrix} a_1 & \frac{\partial a_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial p_n} \\ - & - & - & - \\ a_{n+1} & \frac{\partial a_{n+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial a_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ - & - & - & - \\ a_{n+1} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

Nun ist aber

$$a_1 : a_2 : \dots : a_{n+1} = A_1 : A_2 : \dots : A_{n+1}$$

wobei die A_k definirt sind durch die Entwickelung

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_{n+1} x_{n+1} = A$$

der Determinante

$$A \equiv \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_{n+1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_1} \\ - & - & - \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

nach der ersten Horizontalreihe. Setzen wir

$$a_1 = \frac{A_1}{H}, \dots a_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{H},$$

so dass wegen

$$a_1{}^2 + \dots + a^2{}_{n+1} = 1$$

$$H^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + \dots + A^2{}_{n+1}$$

ist, so können wir den Werth von K auch schreiben:

$$K = \frac{1}{H^n} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial A_1}{\partial p_n} \\ - & - & - & - \\ A_{n+1} & \frac{\partial A_{n+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial A_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ - & - & - & - \\ A_{n+1} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{H^{n+2}} \begin{vmatrix} A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial A_1}{\partial p_n} \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial A_2}{\partial p_n} \\ - & - & - & - \\ A_{n+1} & \frac{\partial A_{n+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial A_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der folgenden

$$1 = \frac{1}{H^2} \begin{vmatrix} A_1 & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ - & - & - & - \\ A_{n+1} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

nach Maassgabe der bekannten Multiplicationsregeln für Determinanten, so erhält man der Reihe nach die Formeln:

$$K = \frac{1}{H^{n+4}} \begin{vmatrix} \Sigma A_k{}^2 & \Sigma A_k \frac{\partial A_k}{\partial p_1} & \dots & \Sigma A_k \frac{\partial A_k}{\partial p_n} \\ \Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_1} & \Sigma \frac{\partial A_k}{\partial p_1} \frac{\partial x_k}{\partial p_1} & \dots & \Sigma \frac{\partial A_k}{\partial p_n} \frac{\partial x_k}{\partial p_1} \\ - & - & - & - \\ \Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_n} & \Sigma \frac{\partial A_k}{\partial p_1} \frac{\partial x_k}{\partial p_n} & \dots & \Sigma \frac{\partial A_k}{\partial p_n} \frac{\partial x_k}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{H^{n+4}} \cdot \begin{vmatrix} H^2 & \Sigma A_k \frac{\partial A_k}{\partial p_1} & \dots & \Sigma A_k \frac{\partial A_k}{\partial p_n} \\ 0 & \Sigma \frac{\partial A_k}{\partial p_1} \frac{\partial x_k}{\partial p_1} & \dots & \Sigma \frac{\partial A_k}{\partial p_n} \frac{\partial x_k}{\partial p_1} \\ - & - & - & - \\ 0 & \Sigma \frac{\partial A}{\partial p_1} \frac{\partial x_k}{\partial p_n} & \dots & \Sigma \frac{\partial A_k}{\partial p_n} \frac{\partial x_k}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{H^{n+2}} \cdot \left| \Sigma_k \frac{\partial A_k}{\partial p_i} \frac{\partial x_k}{\partial p_j} \right| \quad (i, j = 1, 2, \dots n)$$

Nun ist wegen

$$\Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_i} = o$$

$$\Sigma_k \frac{\partial A_k}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial p_j} = - \Sigma A_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_i \partial p_j} = D_{ij},$$

mithin können wir schreiben

$$K = (-1)^n \cdot \frac{1}{H^{n+2}} \cdot |D_{ij}|.$$

Diese Form hat Beez angegeben; bei ihm fehlt nur der Factor $(-1)^n$.

Dass die aufgestellten Ausdrücke die analytisch einzig richtige Verallgemeinerung des Gaussischen Krümmungsmaasses sind, folgt sofort aus der Ueberlegung, dass sie für $n=1$ und $n=2$ das Krümmungsmaass der Curven resp. der Flächen darstellen.[1]) Sie sind entsprungen aus der Forderung entweder das Product der

1) Vergl. Baltzer, Determinanten § 13, 5 und 6.

n Hauptkrümmungshalbmesser oder das Verhältniss des Elementes der n-fachen Mannigfaltigkeit zu dem des zugehörigen Elementes der n-fachen kugelförmigen Mannigfaltigkeit darzustellen, und genügen auch diesen beiden Forderungen. Dieses ist in der That nothwendig, wenn man bedenkt, dass die Einwände gegen die Gaussische Bezeichnung des Ausdruckes $\frac{1}{r_1 r_2}$ als Krümmungsmaass einer Fläche u. A. hauptsächlich deshalb hinfällig sind, weil derselbe die naturgemässe Erweiterung des Curvenkrümmungsmaasses insofern ist, als er ebenso wie bei den Curven sich als Verhältniss eines Elementes zu dem conjugirten Elemente einer gewissen Einheitskugel darstellt. Ich erwähne das hier nochmals ausdrücklich, weil der von Riemann als das Krümmungsmaass einer n-fachen Mannigfaltigkeit bezeichnete Ausdruck von den obigen total verschieden ist und weil manche Geometer, u. a. auch Frischauf, diesen Unterschied zwischen einer wirklichen Verallgemeinerung des Gaussischen Krümmungsmaasses und der sogenannten Riemanns, die aber genau besehen keine ist, gar nicht zu kennen scheinen, obgleich dieser Unterschied für die Beurtheilung der Behandlungsweisen der Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung von fundamentaler Bedeutung ist. Auch Erdmann (vergl. S. 57 seiner Schrift) mengt beide Verallgemeinerungen durch einander, wie denn überhaupt sein Buch an ähnlichen mathematischen Gebrechen in Menge leidet. In einer Abhandlung: sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions[1]) schlägt Souvorof nach dem Vorgange Kronecker's vor, für die oben aufgestellten Ausdrücke das Wort „Dichtigkeitsmaass“ an Stelle des Wortes „Krümmungsmaass“ zu gebrauchen, weil sie von dem Gaussischen und Riemannschen Krümmungsmaasse abweichen. Von dem letztern weichen sie in der That ab, von dem ersteren aber sind sie die naturgemässe Erweiterung und es ist deshalb kein Grund vorhanden die Bezeichnung zu ändern. Dies leuchtet um so mehr ein, wenn wir den Riemannschen Ausdruck für das Krümmungsmaass etwas näher betrachten.

Aus Riemanns eigenen Worten scheint, wie schon Beez hervorgehoben hat, hervorzugehen, als habe er nicht einen wirklichen

1) Bulletin de sciences mathém. et astron. T. IV. p. 180.

Ausdruck für das Krümmungsmaass einer n-fachen Mannigfaltigkeit aufstellen, sondern nur behaupten wollen, dass „man die Maassverhältnisse derselben bestimmen könne, wenn das Krümmungsmaass in jedem Punkte nach $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen gegeben ist.“ Man kann nämlich in jedem Punkte einer n-fachen Mannigfaltigkeit sich $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen in der Weise construirt denken, dass jeder derselben je zwei der Hauptkrümmungshalbmesser als Krümmungsradien angehören, so dass nach unserer Bezeichnung $\frac{1}{\varrho_i \varrho_k}$ die Krümmung einer solchen Flächenrichtung darstellt. In der That liefert die Combination je zweier der n Grössen $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_n$ im Ganzen $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Flächenrichtungen. Sind die Krümmungsradien $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_n$ alle einander gleich, alle gleich ϱ so werden auch die Krümmungsmaasse der $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen einander gleich; den gemeinschaftlichen Werth desselben $\frac{1}{\varrho^2}$ bezeichnet dann Riemann mit dem Krümmungsmaasse der Mannigfaltigkeit und nennt eine solche Mannigfaltigkeit, für welche das Krümmungsmaass der Flächenrichtungen denselben Werth besitzt, und denselben Werth für alle Punkte der Mannigfaltigkeit behält, eine Mannigfaltigkeit mit constantem Krümmungsmaasse. Es folgt daraus unmittelbar, dass die Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit positivem constanten Krümmungsmaasse lediglich eine kugelförmige Mannigfaltigkeit ist; dieses Resultat hat Beez a. a. O. durch weitläufige Rechnungen gefunden, doch bedarf es derselben nicht.

Einen Grund aber, weshalb Riemann das Krümmungsmaass der Flächenrichtung direct als das Krümmungsmaass der Mannigfaltigkeit bezeichnet, gibt er nicht an; ebensowenig führt Beltrami in seiner nach dem Bekanntwerden der Riemannschen Schrift herausgegebenen und auf dieselbe sich stützenden Abhandlung „Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante“ [1]) irgend welche Argumente an, weshalb er den Riemannschen Ausdruck für das Krümmungsmaass einer Flächenrichtung als Krüm-

1) Annali di Mathematica Serio II. T. II.

mungsmaass der Mannigfaltigkeit selbst adoptirt. Frischauf hält es nicht einmal der Mühe werth, den Ausdruck „Krümmungsmaass des Raumes von n Dimensionen" irgend wie zu definiren: er verwechselt einfach, wie schon gesagt, eine wirkliche Verallgemeinerung des Gaussischen Krümmungsmaasses mit der Riemann'schen. Der Einzige, welcher ein Argument anführt, warum man das Krümmungsmaass einer Flächenrichtung auch als Krümmungsmaass des Raumes selbst bezeichnen kann, ist meines Wissens Killing in der Abhandlung: „Die Rechnung in den Nicht-Euklidischen Raumformen."[1]) Allein auch seine Argumentation hat nur Gültigkeit für Mannigfaltigkeiten mit constantem Krümmungsmaasse im Riemann'schen Sinne, d. h. für kugelförmige Mannigfaltigkeiten. Es muss dieses Letztere ganz besonders hervorgehoben werden, weil es scheinen möchte als könnte die kugelförmige n-fache Mannigfaltigkeit ebenso als Repräsentant für die Mannigfaltigkeiten mit positivem Krümmungsmaasse im Gaussischen Sinne angesehen werden, wie die Kugel als Repräsentant der Flächen mit constantem positiven Krümmungsmaasse angesehen wird. Dem ist jedoch nicht so: vielmehr bietet jede Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen in Bezug auf das Krümmungsmaass ein selbständiges Individuum dar. Zunächst hat nämlich Beez gezeigt, dass der Ausdruck für das Krümmungsmaass im allgemeinen Sinne d. h. der oben gefundene Werth

$$K = (-1)^n \cdot \frac{1}{H^{n+2}} \cdot |D_{ij}|$$

sich nicht durch die Coefficienten des Linienelementes

$$ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

ausdrücken lasse, dass also mit anderen Worten für Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen die Biegbarkeit ohne Dehnung nicht möglich sei. Dies wird von den Anhängern der Riemann'schen Theorie bestritten, doch lassen sich auch aus ihren Arbeiten die Resultate von Beez — wenigstens im Grossen und Ganzen — ohne weitere Rechnung ableiten, wie ich jetzt kurz angeben will. In der oben angeführten Abhandlung untersucht Souvorof, welches die Bedingungen dafür sind, dass ein homogener

1) Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 89, p. 265.

quadratischer Differentialausdruck zwischen drei Variabeln in einen solchen zwischen drei andern Variabeln übergeführt werden könne. Bekanntlich ist dies eine unmittelbare Erweiterung der Frage, welches die Bedingung dafür ist, dass

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \text{ und}$$
$$ds^2 = E' du'^2 + 2 F' du' dv' + G' dv'^2$$

gleich sind, welche durch die Forderung der Gleichheit des Gaussischen Krümmungsmaasses beantwortet wird. Man kann für höhere Mannigfaltigkeiten die Frage noch allgemeiner stellen und direct fragen, wieviel und welche Bedingungen nöthig sind, damit ein homogener quadratischer Differentialausdruck von n Variabeln in einen ebensolchen von n anderen Variabeln transformirt werden kann. Diese Frage ist in der That schon oft Gegenstand mathematischer Abhandlungen gewesen, von denen specieller mit unserm Problem zusammenhängend die von Christoffel[1]) und Lipschitz[2]) zu nennen sind. Die Anzahl der Bedingungen ergibt sich leicht durch blosses Abzählen zu $\frac{n(n-1)}{2}$; für den von Souvorof behandelten Fall ist dies gleich 3. Ich bemerke, dass man auf demselben Wege, den der letzgenannte Autor für drei Variabele eingeschlagen hat, das Problem für n Variabele behandeln kann und auch zu genau denselben Bedingungen gelangt. Ich begnüge mich daher zunächst mit drei Variabelen.

Es bestehen also drei Bedingungsgleichungen dafür, dass

$$ds^2 = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

in

$$ds^2 = \Sigma b_{ik}\, dv_i\, dv_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

transformirt werden kann. Diese drei Gleichungen sucht Souvorof geometrisch zu interpretiren und zwar findet er Folgendes. Bezeichnet man die drei Hauptkrümmungshalbmesser in einem Punkte mit r_1, r_2, r_3, die des entsprechenden Punktes der transformirten Mannigfaltigkeit mit r_1', r_2', r_3', so lauten die Bedingungsgleichungen:

$$r_1 r_2 = r'_1 r'_2; \quad r_2 r_3 = r'_2 r'_3; \quad r_1 r_3 = r'_1 r'_3.$$

1) Crelle-Borchardts Journal, Bd. 70.

2) Ebenda, Bd. 70, 71, 72, 74, 81, 82.

Dass aus diesen Gleichungen sich sofort ohne weitere Rechnung

$$r_1 = r'_1; \quad r_2 = r'_2; \quad r_3 = r'_3,$$

d. h. die Hauptkrümmungsradien müssen bei der Transformation ungeändert bleiben, ergibt, hat Souvorof nicht bemerkt. Mit anderen Worten lassen sich diese Resultate so aussprechen: es ergibt sich in der That als Bedingung für die Transformation zweier dreifachen Mannigfaltigkeiten die Gleichheit der Krümmungsmaasse nach drei Flächenrichtungen d. h. die Gleichheit des Riemannschen Krümmungsmaasses, aber auch mit dieser zugleich die Gleichheit der drei Hauptkrümmungsradien einzeln. Ganz genau dasselbe gilt nun bei n Variabeln; hier ergeben sich $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen, die einzeln alle die Form haben

$$\varrho_i \varrho_k = \varrho'_i \varrho'_k \quad (i \gtrless k) \; (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

wenn ϱ_i die Hauptkrümmungsradien der gegebenen, ϱ'_i die der transformirten Mannigfaltigkeit bedeuten. Aber aus diesen $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen folgt ebenso direct wie oben

$$\varrho_i = \varrho'_i \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

d. h. es bleiben bei der Transformation die einzelnen Hauptkrümmungshalbmesser ungeändert. Wenn daher Lipschitz beweist, dass die eigentliche Verallgemeinerung des Gaussischen Krümmungsmaasses

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n}$$

sich für gerade n als reine Function der Coëfficienten des Linienelementes, für ungerade n als die Quadratwurzel einer solchen Function darstellen lasse, und hieraus die Deformationsfähigkeit der Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung schliesst, so ist er mit dem ersteren im Rechte, das zweite aber ist unrichtig. Denn was das erstere anlangt, so bleibt nicht allein das Product $\varrho_1 . \varrho_2 \ldots \varrho_n$ bei einer Transformation ungeändert, sondern wie nachgewiesen jedes einzelne ϱ_i; das Auftreten der Quadratwurzel bei ungeradem n lässt sich ebenfalls direct erkennen. Aus den Gleichungen

$$\varrho_i \varrho_k = \varrho'_i \varrho'_k \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

folgt nämlich

entweder $\varrho_i = \varrho'_i$ oder $\varrho_i = -\varrho'_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$, so dass also das Quadrat von $\varrho_1 . \varrho_2 \ldots \varrho_n$ jedenfalls gleich dem Quadrate von $\varrho'_1 . \varrho'_2 \ldots \varrho'_n$ ist.

Es folgt also aus diesen Untersuchungen, dass bei einer Transformation einer mehr als zweifachen Mannigfaltigkeit nicht allein der Werth des Krümmungsmaasses, sondern auch jeder einzelne Hauptkrümmungshalbmesser ungeändert bleibt. Zu diesem Resultate gelangt Beez durch weitläufige Rechnungen, welche von denen von Souvorof und Lipschitz abweichen. Ich glaube gezeigt zu haben, dass es aus den Arbeiten der letzteren direct folgt. Beez beweist aber weiter noch — und dies lässt sich aus den Arbeiten von Lipschitz nicht direct folgern — dass nicht allein die Hauptkrümmungshalbmesser, sondern alle Krümmungsradien jedes einzelnen Normalschnittes ungeändert bleiben. Unter Anwendung der obigen Bezeichnungen finde ich für einen solchen den Werth:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\Sigma\, dx_i\, d\alpha_i}{ds^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots n+1)$$

welcher durch einige leichte Rechnungen in die von Beez angegebene Form[1])

$$\frac{1}{\varrho} = - \frac{\Sigma\, D_{ik}\, dp_i\, dp_k}{H . \Sigma\, a_{ik}\, dp_i\, dp_k}$$

verwandelt wird. Auf Grund dieser Thatsachen muss ich, Lipschitz gegenüber, Beez Recht geben, wenn er die Deformationsfähigkeit der Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung leugnet; denn bei einer Mannigfaltigkeit, bei der nicht nur das Krümmungsmaass in einem Punkte sondern auch die Krümmungsradien aller Normalschnitte in diesem Punkte, mögen sie Hauptschnitte sein oder nicht, ungeändert bleiben, wird Nichts deformirt. Danach sind auch die Auseinandersetzungen Erdmanns über die Biegbarkeit der n-fachen Mannigfaltigkeiten, die sich auf p. 57 seiner mehrerwähnten Schrift finden, zu modificiren.

Ich glaube durch die letzten Argumente genügend den oben gethanen Ausspruch gerechtfertigt zu haben, dass in Bezug auf das Krümmungsmaass die Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen selbständige Individuen sind oder dass mit anderen Worten der

1) a. a. O. XX. p. 374.

Werth des Krümmungsmaasses nicht Eintheilungsgrund für die n-fachen Mannigfaltigkeiten sein kann. Hiermit hängt noch eine andere in der neueren Zeit öfters discutirte Frage zusammen, die ich vorläufig nur erwähne, welche Geometrie nämlich als die des Raumes von positiver Krümmung anzusehen sei. Riemann und im Anschluss an ihn Frischauf — ebenso wie Erdmann — nehmen einfach und ohne Weiteres hierfür die Geometrie des kugelförmigen Raumes, während Felix Klein[1]) und nach ihm, aber unabhängig von ihm Newcomb[2]) eine andere Raumform als den Repräsentanten der Räume positiver Krümmung betrachten. Ihnen gegenüber will Killing[3]) darthun, dass beide Geometrien des dreifachen Raumes positiver Krümmung für sich Bedeutung haben und jede der anderen gleichberechtigt und selbständig gegenübersteht. Für diese Frage geht aus dem Gesagten nur hervor, dass sie durch Betrachtungen, die sich an die Theorie des Krümmungsmaasses anschliessen, nicht beantwortet werden kann, da von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet die Geometrien aller einzelnen verschiedenen Raumformen positiver Krümmung gleiche Bedeutung haben.

Das Krümmungsmaass kann also nicht als inneres Maassverhältniss der höheren Mannigfaltigkeiten angesehen werden. Gehen wir vom Krümmungsmaass der Curven aus, so zeigt sich, dass sein Werth für die Classification der Curven keinerlei Bedeutung hat. Eine sich darauf stützende Eintheilung würde unterscheiden: gerade Linie, Kreis, andere Curven. Auch bietet das Krümmungsmaass für die Curven nichts Charakteristisches, d. h. jede Curve lässt sich ohne Dehnung in eine andere überführen oder alle Curven sind auf die Gerade abwickelbar. Anders gestaltet sich die Sache bei den Flächen: hier hat in der That der Werth des Krümmungsmaasses eine wesentliche Bedeutung, insofern alle Flächen mit constantem Krümmungsmaasse je nach dem Werthe desselben auf die sphärische, pseudosphärische oder ebene Fläche abwickelbar sind und die wesentlichen Eigenschaften mit ihnen gemein haben. Geht man von den zweifach

1) Vergl. dessen später noch genauer zu erwähnenden Abhandlungen „über die Nichteuklidische Geometrie“ im 4. u. 6. Bde. der Math. Ann.

2) Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 83. p. 293.

3) Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 86. p. 72; Bd. 89 p. 265.

ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu den dreifach ausgedehnten über, so ist es misslich, durch einen einfachen Analogieschluss das Krümmungsmaass auch für diese letzteren von gleicher Bedeutung wie für die Flächen anzusehen. Dies hat nun Riemann und im Anschluss an ihn eine grosse Anzahl Geometer gethan. Gesetzt nun auch, es gelänge nachzuweisen, dass dies verallgemeinerte Gaussische Krümmungsmaass ein wirklicher Eintheilungsgrund für die Räume constanter Krümmung in sphärische, pseudosphärische und ebene Räume sei, so ist es doch durchaus falsch, diesen ebenen Raum für unsern Raum zu erklären, wie Helmholtz und Erdmann dies thun; letzterer sagt ausdrücklich[1]): „Der Raum ist eine stetige Grösse, deren Elemente durch drei unabhängige Variabeln bestimmt sind und deren Krümmungsmaass den constanten Werth Null besitzt.“ Definirt man das Krümmungsmaass einer Mannigfaltigkeit, so wie es Riemann thut, dann sind diese Worte in der That richtig; allein Erdmann verwechselt, wie schon hervorgehoben, die Riemann'sche Erweiterung des Gaussischen Krümmungsmaasses mit der eigentlich naturgemässen und erklärt sogar ausdrücklich, das Krümmungsmaass lasse sich als reciprokes Product der Hauptkrümmungshalbmesser darstellen. In diesem letzteren Falle aber ist unter der obigen Definition unseres Raumes nicht nur dieser allein, sondern eine grosse Anzahl anderer Räume enthalten. Denn der Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}$ wird nicht nur Null, wenn alle drei ϱ unendlich gross werden, sondern auch wenn ein ϱ oder zwei ϱ unendlich gross werden. Aber nur das Erstere meinen Riemann und Helmholtz, wenn sie unsern Raum einen „ebenen Raum“ nennen. Dass dies aber nicht der einzige ebene Raum ist, sondern dass es überhaupt eine grosse Anzahl ebener Räume gibt, unter ihnen nach der Helmholtz'schen Terminologie z. B. einen „conischen“, einen „cylindrischen Raum“ ist evident. Auch der Einwand, dass die verschiedenen ebenen Räume gleiche Geometrie haben — der allenfalls bei den ebenen Flächen gelten könnte, trotzdem in den Geometrien specieller abwickelbarer Flächen wesentliche Differenzen auftreten — ist nichtig, denn wie nachgewiesen worden ist, sind zwei höhere Mannigfaltig-

1) a. a. O. p. 82.

keiten nur als gleich im geometrischen Sinne anzusehen, wenn ihre einzelnen Hauptkrümmungshalbmesser gleich sind. Wie also die Theorie des Krümmungsmaasses überhaupt nicht die Grundlage einer Behandlungsweise höherer Mannigfaltigkeiten sein kann, so hat sie auch keine Bedeutung für den Aufbau der Geometrie unseres Raumes, wenn er als ebener Raum aufgefasst wird.

Was überhaupt die dreifach oder allgemeiner die $(2n+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten anlangt, so sei hier noch bemerkt, dass es bei ungeraden Mannigfaltigkeiten nur dann einen Sinn hat, von Mannigfaltigkeiten mit constanter negativer Krümmung zu sprechen, wenn man die Riemann'sche Definition des Krümmungsmaasses zu Grunde legt. Nimmt man dagegen die eigentliche Erweiterung des Gaussischen Ausdrucks an, so gibt es ein constantes negatives Krümmungsmaass bei einer ungeraden Mannigfaltigkeit ebensowenig, wie bei einer Curve, wenigstens kann man stets die positive Richtung so legen, dass man positives Krümmungsmaass erhält. Wie man bei mehr als zwei Dimensionen die positive Richtung zu fixiren hat, findet sich in der schon citirten Abhandlung Kronecker's „über Systeme von Functionen". Wenn man also unter Krümmungsmaass einer höheren Mannigfaltigkeit den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n}$ versteht, so gibt es einen pseudosphärischen Raum überhaupt nicht. Schon Beez hat dieses hervorgehoben, ich glaubte aber nochmals darauf hinweisen zu müssen.

Es ist oben gesagt worden, dass das Riemann'sche Krümmungsmaass für Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung mit den Untersuchungen über die Transformation des Linienelementes eng zusammenhängt. Es scheint mir daher aus dem Vorigen zu folgen, dass auch der Ausgang von der Formel des Linienelementes nicht geeignet ist, eine richtige und systematische Behandlungsweise der Mannigfaltigkeitslehre zu liefern. Ueberhaupt scheint mir die Art und Weise, auf welche Riemann die allgemeine Formel für das Linienelement ableitet, nicht ganz correct. Dass er damit überhaupt zu keinem sicheren Resultate gelangt, zeigt sich, da ausser der von ihm adoptirten Form noch viele andere ebenso gut möglich sind, er wählt aber die von ihm gebrauchte, gerade weil sie für den Raum speciell passt. Die Zweideutigkeiten, die sich bei

Riemanns analytischer Herleitung ergeben, sucht Helmholtz dadurch zu vermeiden, dass er aus anderen Annahmen den Ausdruck für das Linienelement ableitet. Seine Ableitung beschränkt sich zwar auf drei Dimensionen, und ist insofern von sehr grossem mathematischen Interesse, als sie aus den Congruenzbedingungen als Folge die bekannte Formel für das Linienelement liefert. Aber für die Erweiterung auf mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten lässt uns diese Entwickelung ebenfalls im Stiche. Denn Translocation und Rotation von festen Körpern im vierfach ausgedehnten Raume können nur analytisch definirt werden: erweitert man aber die für diese Beziehungen in unserem Raume geltenden Formeln durch Hinzufügen einer vierten Variabeln, so gelangt man selbstredend zu demselben Resultate, weil die Gleichungen von der Anzahl der Veränderlichen unabhängig sind. Die Versuche, den Ausdruck für das Linienelement abzuleiten, halte ich deshalb für überflüssig. Wenn Erdmann zu der Formel für das Linienelement bemerkt[1]): „Die Grundlage aller Maassbestimmung und aller Geometrie ist demnach ein Ausdruck, welcher die allgemeinste Formel des Pythagoreischen Lehrsatzes darstellt. Derselbe besitzt daher eine fundamentale Bedeutung, die in der Euklidischen Geometrie als solcher nicht zum Ausdruck kommt“, so lässt sich hierauf — abgesehen davon, dass die ersten Worte nach dem früheren unrichtig sind — erwidern, dass diese Bedeutung in der Euklidischen Geometrie gar nicht zum Ausdruck kommen kann, insofern sie neben Lagenbeziehungen die Gesetze der Grössenabhängigkeit im Allgemeinen bestimmt, d. h. dass Grössen von einander abhängig sind, aber nicht wie sie abhängig sind, während der Satz des Pythagoras der einzige Satz ist, in dem auch die Art der Abhängigkeit ausgesprochen ist. Er kann daher nur Fundament aller rechnenden Geometrie (Trigonometrie, analytischer Geometrie u. s. w.) sein.

Wenn ich also in dem Vorigen nachgewiesen habe, dass weder die Formel des Linienelementes noch ein Ausdruck für das Krümmungsmaass die eigentliche Grundlage für die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten sind, so sind die Untersuchungen Riemanns nach dieser Seite unvollständig. Eine Theorie der

---

1) a. a. O. p. 51.

Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung muss von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehen. Auch die Andeutungen, welche Grassmann bei Gelegenheit der zweiten Auflage (1878) seiner Ausdehnungslehre von 1844 im Anhang I unter dem Titel „Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre“ über die Behandlung der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten macht, scheinen auf eine Behandlungsweise mit Hülfe der Theorie des Krümmungsmaasses hinzuweisen. Felix Klein hat einzig und allein bis jetzt in den citirten Abhandlungen eine ganz andere Art der geometrischen Untersuchung der Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung angebahnt. Die Grundlage seiner Theorie bildet die projectivische Geometrie. Während er in der ersten Abhandlung zeigt, dass die sogenannte Cayley'sche Maassbestimmung ebenso geeignet sei die geometrischen Verhältnisse der Lowatschewsky-Bolyai'schen Geometrie darzustellen wie die der Euklidischen, gibt er in der zweiten Abhandlung (im 6. Bande der mathematischen Annalen) die Anfänge einer Theorie der Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung überhaupt. Seine Behandlungsweise unterscheidet sich zunächst äusserlich von denen, welche sich an die Theorie des Krümmungsmaasses anschliessen, dadurch dass die n-fache Mannigfaltigkeit nicht aus einer höheren $(n+1)$-fachen durch eine Gleichung ausgeschieden, sondern als für sich bestehend betrachtet wird. Die Behandlungsweise der Mannigfaltigkeit wird dann durch eine besondere Gruppe räumlicher Transformationen, die sogenannte Hauptgruppe, welche man der Mannigfaltigkeit adjungirt, gegeben. Die einer Mannigfaltigkeit zugeordnete Hauptgruppe der Transformationen könnte man wohl den Inhalt der Mannigfaltigkeit nennen. Klein zeigt in dem Aufsatze weiter, wie die Mannigfaltigkeiten mit constantem positiven und constantem negativen Krümmungsmaasse aus seinem Begriffe der allgemeinen projectivischen Mannigfaltigkeit entspringen. Auch er versteht unter Krümmungsmaass die Riemann'sche Bezeichnung. Die Anordnung der Hauptbegriffe ist zufolge dieser Behandlungsweise eine ganz andere als bei Riemann und Beltrami. Auf eine genauere Entwickelung derselben gehe ich jedoch nicht ein, sondern verweise auf die Klein'schen Abhandlungen. Nur Eines will ich hier in Bezug auf eine oben berührte Frage erwähnen. Wenn ich gezeigt habe, dass die Theorie des Krümmungsmaasses überhaupt nicht als Grundlage für eine geometrische Behandlung der Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung geeignet sei, und aus diesem Nachweise schloss, dass auch die Frage, welche Mannigfaltigkeit als der eigentliche Repräsentant der Mannigfaltigkeiten constanter positiver Krümmung anzusehen sei, auf diesem Wege keine Entscheidung finden könne, so halte ich jetzt die Frage zu Gunsten Klein's für entschieden. In einer Recension von Frischauf's Elementen der absoluten Geometrie hatte Klein es Frischauf als Fehler gerügt, dass er im Anschluss an Riemann lediglich die kugelförmige Mannigfaltigkeit für die Mannigfaltigkeit constanter positiver Krümmung angesehen habe. Nach ihm hatte Newcomb in der citirten Arbeit eine Raumform constanter positiver Krümmung untersucht, die auch Klein in dem ersten seiner beiden Aufsätze angegeben hatte. Gegen Newcomb und Klein sucht Killing die Riemann-Frischauf'sche Ansicht zu vertheidigen, indem er die beiden Raumformen als sich selbständig gegenüberstehend nachweisen will. Ich habe schon oben hervorgehoben, dass auf Grundlage der Krümmungstheorie alle verschiedenen Raumformen einander als Individuen gegenüberstehen, so dass es sich nur fragt, welche Raumform die einfachere sei. Diese Frage kann auf Grund der Krümmungstheorie ebensowenig beantwortet werden, wie alle anderen, wohl aber auf Grund der projectivischen Geometrie. Und auf Grund der letzteren ergibt sich der „einfach elliptische" Raum[1]) als der einfachere, so dass die Newcomb-Klein'sche Raumform in der That die einfachste Geometrie des elliptischen Raumes darstellt.

Wie ich es auf der einen Seite für falsch halte, den Untersuchungen von Riemann und Helmholtz jeden mathematischen Werth abzusprechen, wie dies u. A. Dühring und Tobias in schroffer Weise gethan haben, so kann ich ihnen doch auf der andern Seite nicht den hohen Rang einräumen, den Caspari ihnen vindicirt, wenn er sagt, sie hätten die Geometrie Euklid's als die alleinseligmachende gestürzt. Ihr mathematischer Werth ist ein zweifacher: einmal haben sie die Mathematik um neue Begriffe bereichert. Der Begriff einer n-fach ausgedehnten Mannig-

---

1) Vergl. über die Nomenclatur ausser den Abhandlungen von Klein eine Abhandlung Non-euclidean Geometry von Crystall.

faltigkeit findet sich zwar schon in Grassmann's Ausdehnungslehre von 1844, wenn auch in etwas anderer Form als System n-ter Stufe, allein erst die Untersuchungen Riemanns haben zu seiner näheren Betrachtung Veranlassung gegeben. Wenn auch bei räumlicher Anwendung stets auf drei Variabele zurückgegangen werden muss, so sind doch die Mittel der Analysis durch Erweiterung der Zahl bereichert und ausgedehnt worden. Zweitens haben sie Veranlassung gegeben die Frage nach den Axiomen der Geometrie immer aufs Neue in die Hand zu nehmen und von verschiedenen Gesichtspunkten zu beleuchten. Diese Untersuchungen nur als mathematische Schrullen zu bezeichnen, oder als „wunderliche Exemplification der alten Erkenntniss, dass die mathematische Analysis im Stande sei auch aus imaginären Voraussetzungen vollkommen berechtigte Consequenzen zu ziehen" ist ungerecht. Es spricht sich in ihnen nur das längst anerkannte Princip der formalen Mathematik aus: Alles, was sich ohne Widerspruch definiren lässt, darf dem Calcül unterworfen werden.

Dass aber jene Untersuchungen wirklich das geleistet haben, was sie leisten wollten, ist nicht ganz wahr. Denn eine Ableitung der geometrischen Axiome auf dem von Riemann und Helmholtz eingeschlagenen Wege leidet, wie gezeigt, an wesentlichen Mängeln.

Auch die erste der S. 11 aufgestellten Fragen ist noch nicht genügend beantwortet worden. Den wirklichen inneren Grund der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen haben Riemann und Helmholtz ebensowenig aufgedeckt, als Gauss denselben erkannt hatte. Denn wenn Helmholtz sagt: „Der Sinn des Parallelenaxioms konnte erst verstanden werden, nachdem von Gauss der Begriff der ohne Dehnung biegsamen Flächen entwickelt worden war",[1]) so findet er diesen Sinn ebenfalls in der aus dem Begriffe der ohne Dehnung biegsamen Flächen folgenden Möglichkeit eine in sich widerspruchsfreie Geometrie, die von jenem Axiom „unabhängig" ist, aufzubauen. Aus dieser Möglichkeit folgt aber höchstens nur die Unmöglichkeit eines Beweises des Axioms, aber der Grund dieser Unmöglichkeit

---

1) Vorträge, Heft III p. 35.

bleibt nach wie vor unerklärt. Wir gelangen aber zu demselben durch eine genaue Analyse der Axiome, welche der Bolyai-Lowatschewsky'schen oder pseudosphärischen Geometrie zu Grunde liegen. Wenn nämlich von dieser Geometrie behauptet wird, wie es Helmholtz und Erdmann geradezu thun, und wie allgemein als richtig angenommen zu sein scheint, dass sie das Axiom von den Parallelen „fallen" lasse und so von demselben „unabhängig" sei, so ist der wahre Sachverhalt schief ausgedrückt, und hierdurch die ganze Schwierigkeit, welche vermeintlich das Parallelenaxiom umgibt, versteckt. Jene Geometrie lässt das Parallelenaxiom in der Form, in der es Euklid gibt, allerdings fallen, aber nur dadurch, dass sie ein anderes an seine Stelle setzt, dass nämlich die Winkelsumme im Dreieck kleiner (oder besser nicht grösser) als zwei Rechte sei. Diese Annahme, die sie machen muss und auch macht, folgt ebensowenig aus den übrigen Axiomen wie die sogenannte „Hypothese" Euklids. Das Gemeinschaftliche beider ist aber eine bestimmte Annahme über die Grösse der Winkelsumme des Dreiecks: Euklid setzt dieselbe zwei Rechten gleich, die nichteuklidische Geometrie nimmt sie kleiner als zwei Rechte an. Der Grund der Nothwendigkeit einer solchen Annahme aber liegt in dem Umstande, dass die Geometrie zwei elementare Maassstäbe, die gerade Linie und den Winkel besitzt. Zwar möchte sich behaupten lassen, dass diese beiden Maassstäbe insofern auf einen einzigen reductibel sind, als man die gerade Linie durch Grösse und Richtung bestimmt ansieht und dann nur die so bestimmte gerade Linie als Maassstab hat. Allein nicht erst die gewöhnliche Geometrie lehrt, dass beide Maassstäbe zu trennen sind, sondern schon der Umstand, dass die durch sie zu messenden Grössen Entfernung und Richtung qualitativ ganz verschieden sind, macht es nothwendig sie begrifflich auseinander zu halten. Felix Klein hat in der ersten der oben erwähnten Abhandlungen über die nichteuklidische Geometrie die allgemeinen Eigenschaften beider Maassstäbe discutirt und namentlich ihre gemeinschaftlichen Merkmale, Addirbarkeit und freie Beweglichkeit im Raume, hervorgehoben. Allein er hat die Frage, wie beide miteinander verknüpft werden müssen, welche bei jeder Verknüpfung verschiedenartiger Grössen berücksichtigt werden muss, nicht berührt. Diese logisch nothwendige Verbindung beider aber wird durch das Parallelenaxiom hergestellt, mag dieses nun in der Euklidischen oder Nichteuklidischen Form ausgesprochen werden. Der innere Kern desselben ist also die für jede Geometrie — die über die gerade Linie hinausgeht[1]) — nothwendige Verbindung der beiden Elementarmaassstäbe Entfernung (gerade Linie) und Drehung (Winkel), die sich begrifflicherweise nicht aus einem der beiden, aus der Definition der geraden Linie ableiten lassen kann. Auf diese Weise lässt sich von vornherein zeigen, dass alle Versuche vergeblich sein mussten, welche das Parallelenaxiom auf die übrigen Axiome zurückführen wollten, und dass es nicht der nichteuklidischen Geometrie bedurfte, um zu untersuchen, „ob das Parallelenaxiom eine mathematische Folge der übrigen bei Euklid aufgeführten Axiome ist.“

Aus dem Vorhergehenden folgt nun auch, dass die von Helmholtz in den Göttinger Nachrichten gegebene Zusammenstellung der geometrischen Axiome für eine wirkliche Ausführung der Geometrie nicht hinreichend und vollständig ist, da unter ihnen ein Axiom über die Verbindung der geraden Linie und des Winkels fehlt. — Auf die nach meinem Dafürhalten am meisten der Sache entsprechende und naturgemässe Verknüpfung der Geraden und des Winkels, die sich schon bei Legendre findet, werde ich am Schlusse bei der Aufstellung der geometrischen Axiome und kurzen Andeutungen über den wissenschaftlichen Aufbau der Geometrie zurückkommen.

Vorher bleibt mir noch übrig, die Schlüsse zu betrachten, welche aus den mathematischen Speculationen über die Axiome der Geometrie für das Wesen und den Ursprung unserer Raumanschauung gezogen worden sind, also die philosophischen Ergebnisse, welche aus jenen Untersuchungen resultiren sollen, ins Auge zu fassen. Zwar folgt schon aus unserm Nachweise, dass der mathematische Raumbegriff als selbständiges Bild unserem Denken gegenübersteht und sich wesentlich von dem Raume der Psychologie und Erkenntnisstheorie unterscheidet, zur Genüge, dass jene

---

1) Hierdurch ist zugleich nachgewiesen, dass die projectivische Geometrie auf den Grundgebilden erster Stufe sich unabhängig von einer solchen Annahme aufbauen lassen muss. Vergl. hierüber die Aufsätze von Klein.

Schlüsse hinfällig sind, allein ein kurzes Verweilen bei ihnen wird nicht überflüssig sein.

Der Grund ihres Entstehens überhaupt liegt in der Voraussetzung, dass wir uns die Wahrnehmungsreihen, die von dem unsrigen verschiedenartig gestaltete Räume bieten würden, anschaulich vorstellen können, welche Voraussetzung das Helmholtz'sche Kriterium der Erfahrung anwendbar machen soll. Nun haben wir aber gesehen, dass jene vermeintliche Vorstellbarkeit auf einem Irrthum beruht, dass wir uns anders gestaltete Räume nur durch unsern Raum geometrisch interpretiren können, wenn eine solche Interpretation überhaupt möglich ist. Mit Recht bemerkt Frischauf[1]): „Die Untersuchung der Eigenschaften des Raumes wird vermittelst der Theorie der homogenen Differentialausdrücke (erster Ordnung) zweiten Grades erhalten. Diese (durch Gleichungen ausgedrückten und ursprünglich von jeder geometrischen Voraussetzung unabhängigen) Eigenschaften werden dann geometrisch interpretirt, zu welcher Interpretation die euklidische Geometrie deshalb verwendet wird, weil infolge des thatsächlichen Stattfindens dieser Form der Geometrie im Bereiche unserer (beschränkten) Erfahrung diese Gleichungen eine anschauliche Deutung finden.“ Diese Möglichkeit geometrischer Interpretation beruht aber lediglich auf unserem Vermögen von gewissen Eigenschaften unserer Raumvorstellung zu abstrahiren, jedoch von dieser Möglichkeit auf die Wirklichkeit zu schliessen ist ohne jede erkenntnisstheoretische Bedeutung. Dieser Schluss von der Möglichkeit auf die Wirklichkeit liegt auch dem Versuche Lowatschewsky's zu Grunde durch astronomische Messungen die Frage nach der Grösse der Winkelsumme im Dreieck entscheiden zu können, was ihn begreiflicherweise auf kein sicheres Resultat führen konnte. Mit der Voraussetzung, welche die Anwendung des Satzes: Alles, was wir uns anders vorstellen können, stammt aus der Erfahrung möglich machen soll, fallen alle jene Schlüsse, welche Helmholtz und im Anschluss an ihn namentlich Erdmann über die Natur unserer Raumvorstellung gezogen haben. Damit ist denn auch Riemann's Behauptung, dass diejenigen Eigenschaften, durch die sich der Raum von anderen denkbaren, dreifach ausgedehnten

1) Elemente der absoluten Geometrie, p. 122.

Mannigfaltigkeiten unterscheide, aus der Erfahrung genommen werden müssten, eben nur Behauptung, der die Begründung fehlt. Wenn Erdmann sagt[1]): „Unerklärlich bleibt noch die dreifache Ausdehnung unseres Raumes, aber auch hier ist keine Grenze unseres Erkennens, seitdem wir wissen, dass die analytischen Begriffe mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten nicht in sich widersprechend sind, so dass wir auch hier auf eine allmähliche Einsicht in die empirischen Bedingungen hoffen dürfen," so hat schon J. C. Becker in seinen „Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie" richtig bemerkt, dass die Frage nach dem Grunde der Dreizahl der Dimensionen falsch sei. Denn bedeute die Frage, was der Erkenntnissgrund für die Dreizahl sei, so laute die Antwort: „Die Anschauung überzeugt mich davon," frage man dagegen nach der Ursache, so sei die Frage unvernünftig, da die Dreizahl der Dimensionen unmöglich als Wirkung aufgefasst werden könne. Auch Wundt bemerkt, ebenso wie man nach dem Grunde der Dreizahl fragen könne, könne man fragen, warum es nicht unendlich viele Reihen ganzer und reeller Zahlen, oder warum es zu jedem Begriffe nur einen contradictorischen Gegensatz gebe, u. dergl. m. — Wie aus der Entstehung der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit folgt, die dem Raume zu Liebe geschaffen worden ist, dadurch dass Alles, was uns in dem Raumbegriff gegeben ist, in sie nur mit der nöthigen Erweiterung hineingelegt wurde oder werden sollte, ist jeder Schluss, der aus ihr wieder in Bezug auf den Raum gezogen wird, ein Zirkelschluss. Auf keinen Fall kann man aber mehr herausschliessen als man hineingelegt hat.

Ganz ohne Bedeutung für die Philosophie sind aber die mathematischen Untersuchungen nicht gewesen: einmal haben sie, wie Wundt zuerst hervorgehoben und wie oben schon eingehender besprochen ist, gegen Kant die Möglichkeit gezeigt, den Raum als Begriff aufzufassen und so die Kantische Theorie modificirt, dann aber haben sie zunächst darauf hingewiesen, die verschiedenen Raumprobleme streng auseinander zu halten und insofern speciell das logisch-mathematische Raumproblem gefördert, als sie die Nothwendigkeit einer strengen Definition des Raumes darthun,

1) a. a. O. p. 116.

die den Raum als selbständiges Object des Denkens und in diesem Sinne als Grösse auffasst. Eine solche Definition werde ich im Folgenden zu geben und aus ihr die nothwendigen Axiome für die Geometrie abzuleiten versuchen.

Für die jetzt zu behandelnde Aufgabe liegen mir nur zwei Versuche vor; der eine rührt von H. Grassmann her und findet sich in seiner 1844 erschienenen Ausdehnungslehre p. 35 ff, der andere ist von Wundt in seiner Logik gegeben worden. Grassmann stimmt, wie schon bemerkt, mit Riemann insofern überein, als er den Raum als Specialfall allgemeinerer Systeme auffasst. Er vermeidet aber die im vorigen Abschnitte nachgewiesenen Fehler, dadurch dass er nicht wie Riemann und Helmholtz, nachdem er den allgemeinen vermeintlichen Gattungsbegriff gefunden hat, von diesem aus auf den Raum schliesst, sondern umgekehrt den Raum als gegeben ansieht und von ihm Alles mit den nöthigen Erweiterungen auf die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit überträgt. Hierdurch sind seine Untersuchungen über den Raum von dem Begriffe der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ganz unabhängig. Dieselben haben auch, hiervon abgesehen, noch einen andern Vorzug vor der Helmholtzischen, dass er sie nicht von dem Verhalten der physikalischen Körper abhängig macht, sondern dass er nur das Verhalten der Constructionen betrachtet, für welche Wundt den Ausdruck „Raumgebilde" braucht. Ich ziehe im Folgenden den Grassmann'schen Ausdruck vor, weil in ihm zugleich angedeutet wird, dass wir die Constructionen machen, und dass ihnen im Uebrigen zunächst eine reale Bedeutung nicht zukommt. Die folgende Darstellung schliesst sich in ihren Hauptpunkten an die von Grassmann und von Wundt an.

Soll eine Definition des Raumes gegeben werden, so muss dabei zunächst die logische Forderung erfüllt sein, dass in diese Definition Nichts eingeführt wird, was uns erst durch den zu definirenden Begriff gegeben ist oder ihn voraussetzt. Bei einer Definition des Raumes „werden daher nur solche Begriffe brauchbar sein, die ausser für den Raum auch für andere von ihm unabhängige Fundamentalformen des Erkennens erforderlich sind" (Wundt).

Es darf in der Definition keine ursprüngliche Raumanschauung übergangen werden, die später stillschweigend angenommen wird und Nichts in ihr aufgestellt werden, was keine Grundanschauung des Raumes ausdrückt. Dass aber zu einer solchen Definition nicht, wie gewöhnlich angenommen wird, ein Gattungsbegriff nöthig ist, sondern dass es nur der allgemeinen Beziehungen bedarf, in welche der Raum mit anderen Begriffen treten kann, habe ich schon früher im Anschluss an Wundt bemerkt. Während Grassmann seine Definition auf die „Einfachheit“ und „relative Beschränktheit“ des Raumbegriffs gründet, untersucht Wundt das Verhältniss desselben zu den andern von ihm unabhängigen Fundamentalformen unseres Erkennens, mit denen er überhaupt in einem Verhältniss stehen kann. Diese letzteren sind Zeit, Zahl und Intensität der Empfindung; mit ihnen steht der Raum in Beziehung zu den Begriffen: 1. Grösse; 2. Richtung; 3. Stetigkeit; 4. Veränderung und endlich 5. zu der Zahl selbst, da diese zum Messen aller Grössen dient.

Als ersten der „relativen Beschränktheit“ des Raumes entsprechenden Satz stellt Grassmann auf:

„Der Raum ist ein System dritter Stufe.“

Achtet man auf die Terminologie Grassmanns, so liegt dieser Definition zunächst das Element des Raumes, der Punkt, zu Grunde, als der einfachste Bestandtheil, der nicht weiter zerlegt werden kann. Dann setzt diese Definition den Raum in Beziehung mit den Begriffen „Grösse“, „Richtung“ und „Stetigkeit“: diese drei liegen in dem gebrauchten Ausdrucke „System“; endlich bezeichnet „dritte Stufe“ die Beziehung zur Zahl. Spricht man die Grassmann'sche Definition mit Rücksicht auf diese Beziehungen aus, so lautet sie:

„Der Raum ist eine unendliche stetige Grösse, in der jedes Element durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt ist.“ (Wundt.)

Hierzu treten folgende Fundamentaldefinitionen:

„Das Element des Raumes heisst Punkt.“

„Die Bestimmung des Punktes durch drei Richtungen heisst seine Lage.“

Aus der „Einfachheit“ des Raumes ergibt sich Grassmann der Satz:

„Der Raum ist an allen Orten und nach allen Richtungen gleich beschaffen, d. h. an allen Orten und nach allen Richtungen können gleiche Constructionen vollzogen werden.“

Dieser Satz zerfällt sofort in drei Einzelsätze:

„Zwei Constructionen sind gleich, wenn sie in genau derselben Weise a) in gleicher Richtung an verschiedenen Orten, b) in verschiedener Richtung an demselben Orte, c) in verschiedener (namentlich auch entgegengesetzter) Richtung an verschiedenen Orten erfolgen.“

Grassmann formulirt diese Definitionen etwas anders; dass ich von ihm abgewichen bin, werde ich unten motiviren. Hier muss zunächst bemerkt werden, dass diesen Sätzen eine weitere Annahme zu Grunde liegt, dass nämlich überhaupt ganz beliebig Constructionen vollzogen werden können, welche Annahme Wundt direct in die Definition des Raumes hineinlegt, indem er sagt: „Jeder beliebige Theil des Raumes kann von dem übrigen Raum abgesondert gedacht werden. Ein solcher abgetrennter Theil des Raumes (ein zusammengesetztes Einzelnes) heisst ein Raumgebilde.“ Ferner fasst Wundt jene drei Sätze in einen einzigen zusammen: „Jedes Raumgebilde kann in veränderter Lage gedacht werden, ohne dass dadurch das wechselseitige Lageverhältniss beliebig in ihm angenommener Punkte verändert wird. Diese Eigenschaft des Raumes heisst Congruenz.“ Ich ziehe die vorhin gegebene Definition vor, weil durch sie die Constructionen unabhängig von dem Begriffe der Veränderung sind, mit jeder Veränderung aber Bewegung verbunden ist. Zwar schliesst das Denken in veränderter Lage, ebensowenig wie der Vollzug von Constructionen, an und für sich Bewegung ein, insofern kein continuirlicher Uebergang von einer Lage in eine andere angenommen zu werden braucht, allein der erste Ausdruck gibt wohl bei oberflächlicher Betrachtung eher Gelegenheit, den vielgeschmähten Begriff der Bewegung in die Definition des Raumes hineingelegt zu sehen. Noch verfänglicher in dieser Beziehung scheint der Ausdruck Grassmanns zu sein, wenn er den ersten jener Sätze dahin ausspricht, dass Gleichheit denkbar sei bei Verschiedenheit des Orts. Denn Gleichheit bedeutet im specifisch mathematischen Sinne Identität; identisch ist aber nur ein Gebilde mit sich selbst, so dass es ein und dasselbe Gebilde sein muss, welches nur an zwei verschiedene Orte durch Bewegung gebracht ist, wenn Identität zweier Gebilde an verschiedenen Orten stattfindet. Hierin liegt der Grund, weshalb ich die obigen Sätze etwas anders als Grassmann ausgesprochen habe. Von Wundts Fassung bin ich aber hauptsächlich deshalb abgewichen, weil es für den Aufbau der Geometrie zweckmässiger ist, den von Wundt aufgestellten allgemeineren Satz in die drei Fälle a., b. und c. zu specialisiren.

Wundt stellt unter die Definition des Raumes noch den folgenden Satz: „Zu jeder Richtung im Raum existirt eine entgegengesetzte Richtung von übereinstimmender Lage und die Lage zweier zusammengehöriger entgegengesetzter Richtungen heisst eine Gerade.“ Hierzu ist zunächet zu bemerken, dass in diesem Satze das Wort „Lage“ in doppelter Weise gebraucht ist. Wundt selbst definirt die Lage als „die Bestimmung irgend eines Einzelnen im Raum (eines Punktes) durch die drei unabhängigen Richtungen“, also genau so wie wir die Lage eines Punktes definirt haben und mit dieser Definition bleibt der erste Theil jener Worte im Einklang; denn der Ausdruck „zwei Richtungen von übereinstimmender Lage“ bedeutet, dass die beiden Richtungen von demselben Punkte ausgehen. Ganz andere Bedeutung hat aber „Lage“ in der zweiten Hälfte des obigen Satzes; ich werde deshalb die Definition der Geraden in etwas anderer Form aussprechen. Thatsächlich ist klar, dass eine Definition des Raumes nicht möglich ist, ohne dass man den Begriff der Geraden und des Punktes verwendet; ich habe in der gegebenen Definition des Raumes auch nur vermieden, die Namen für dieselben zu gebrauchen, diese Namen vielmehr in einer Fundamentaldefinition gegeben, weil ihnen noch eine weitere Definition hinzuzufügen ist, die ich sowohl bei Grassmann als auch bei Wundt vermisse, nämlich die des Winkels, welcher zwei verschiedene Richtungen an demselben Orte zusammenfasst. Die Nothwendigkeit diese Definition hinzuzufügen, zeigt sich sofort bei der Aufstellung der Axiome. Uebrigens hat Grassmann jene Eigenschaft des Raumes, dass zu jeder Richtung eine entgegengesetzte von übereinstimmender Lage existirt, ganz übersehen.

Fasse ich Alles zusammen, so definirt sich der Raum folgendermaassen:

1) Der Raum ist eine unendliche stetige Grösse, in der jedes Element durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt wird.

2) Im Raume lassen sich an allen Orten und nach allen Richtungen Constructionen vollziehen; zwei Constructionen sind gleich, wenn sie in genau derselben Weise a) in gleicher Richtung an verschiedenen Orten; b) in verschiedener Richtung an demselben Orte; c) in verschiedener Richtung an verschiedenen Orten erfolgen.

3) Zu jeder Richtung im Raume existirt eine entgegengesetzte Richtung von übereinstimmender Lage.

Hierzu treten die folgenden Fundamentaldefinitionen:

ad 1). Jedes Element des Raumes heisst Punkt; die Bestimmung des Punktes durch drei Richtungen heisst seine Lage.

ad 2) und 3). Die Construction, welche zwei entgegengesetzte Richtungen von übereinstimmender Lage zusammenfasst, heisst Gerade. Die Construction, welche zwei verschiedene Richtungen von übereinstimmender Lage zusammenfasst, heisst Winkel.

Grassmann begnügt sich in seinen Andeutungen über einen wissenschaftlichen Aufbau der Geometrie mit den Definitionen, indem er überhaupt der Ansicht ist, dass die Definitionen in der Mathematik genügen und Grundsätze gar nicht nöthig sind: der erste Beweis geschieht in ihr durch Aneinanderketten von Erklärungen, indem von keinem andern Fortschreitungsgesetz Gebrauch gemacht wird, als von dem allgemein logischen, dass nämlich, was von einer Reihe von Dingen in dem Sinne ausgesagt ist, dass es von jedem einzelnen derselben gelten soll, auch wirklich von jedem einzelnen, was jener Reihe angehört, ausgesagt werden kann. Allein da es nothwendiges Kennzeichen einer guten Definition ist, dass sie Alles enthält, was von dem Begriffe ausgesagt werden kann, so kann aus einer Definition unmittelbar Nichts geschlossen werden. Die Definitionen beschreiben, die Axiome dagegen bestimmen die Art und Weise, wie mit dem durch die Definition beschriebenen Begriffe operirt werden soll. Die Axiome können daher fürwahr etwas Neues nicht enthalten: zwischen Definitionen und Axiomen besteht nur der eben charakterisirte formale Unterschied. Zur Aufbauung der Geometrie ist daher ein Axiomensystem nothwendig, welches angibt wie mit dem Raumbegriff operirt werden soll. Aus den Definitionen erhält man aber das Axiomensystem durch Anwendung der logischen Axiome, welche durch das Identitätsgesetz, den Satz des Widerspruchs, den Satz des ausgeschlossenen Dritten und den Satz vom Grunde gebildet werden, auf die Definition des Raumbegriffs. Der Satz der Identität erfährt dabei eine Specialisirung, indem an Stelle des allgemeinen Begriffs, von dem das Identitätsgesetz gilt, nicht der Raumbegriff selbst, sondern dessen Element tritt und so den Satz gibt:

1) Jeder Raumpunkt ist dem andern gleich.

Der Grund dieser Specialisirung aber ist in dem Umstande zu suchen, dass nicht mit dem unendlichen Raume selbst, sondern nur mit dessen Elementen operirt wird. Der Satz vom Grunde liefert zunächst den Satz:

2) Die Lage eines Punktes im Raume ist durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt.

Aus der Definition der Geraden und des Axioms 1) folgt vermittelst der Sätze vom Widerspruch und vom Grunde:

3) Jede Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt oder zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich oder zwei Gerade können keinen Raum einschliessen.

Denn hätten zwei Gerade noch einen zweiten Punkt gemein, so wäre dieser anders beschaffen als die übrigen Raumpunkte, die in den beiden Geraden liegen; die beiden Geraden müssen dann zufolge des Axioms 1) alle Punkte gemein haben. Nach der Definition 2) ist jede Construction durch ihre Richtung und ihren Ort bestimmt, da aber beides durch eine Gerade angegeben wird, so liefert der Satz vom Grunde

4) Die Richtung und der Ort einer jeden Construction ist durch eine in ihr willkürlich angenommene Gerade bestimmt.

Ich vermeide es Richtung und Ort in den gemeinsamen Ausdruck „Lage“ zusammenzufassen, um stets in Congruenz mit der oben gegebenen Definition der „Lage eines Punktes“ zu bleiben. Verbinden wir ferner den sich aus dem Satze vom Grunde ergebenden Begriff der Bewegung mit der Definition 2), so folgt

5) Jede Construction bleibt ungeändert, wenn sie sich selbst parallel verschoben, wenn sie um eine in ihr angenommene Gerade gedreht gedacht wird, oder da beide Bewegungen zusammen Statt finden können: Eine Construction ist einer andern congruent, wenn sie nur durch Lagenveränderung aus derselben hervorgegangen gedacht werden kann.

Aus der Unendlichkeit des Raumes folgt endlich:

6) Jede Richtung kann als eine ins Unendliche zunehmende Grösse gedacht werden oder jede Gerade kann ins Unendliche verlängert gedacht werden.

Diese sechs aufgestellten Axiome weichen nur in unwesentlichen Punkten von den von Wundt gegebenen ab. Allein zu einem wirklichen Aufbau der Geometrie reichen sie nicht aus. Es sind dazu noch zwei nöthig, die ich allgemein in der folgenden Form ausspreche:

7) Die zwei Punkte verbindende Gerade misst deren Entfernung, der Winkel, den zwei verschiedene Richtungen an demselben Orte resp. die durch sie in demselben Punkte bestimmten Geraden bilden, misst deren Richtungsunterschied.

8) Die beiden Maassstäbe, Gerade und Winkel, müssen mit einander verknüpft werden.

Dem Axiom 7) liegt eine weitere Voraussetzung zu Grunde, die wohl in allen Lehrbüchern über Geometrie übergangen ist, dass nämlich jede räumliche Grösse in eine beliebige Anzahl gleicher Theile wirklich getheilt oder getheilt gedacht werden kann, denn diese Voraussetzung ist die Grundlage alles Messens.

Im 20. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik hat J. C. Becker unter dem Titel „Die Grundlagen der Geometrie“ den Weg zu einem wissenschaftlichen Aufbau der Geometrie angegeben, der im Allgemeinen auf dem obigen Axiomensystem beruht, wenn er es auch in etwas anderer Form ausspricht und das Axiom 8) ganz weglässt. Etwas anders ist bei ihm namentlich das Axiom der Geraden ausgedrückt. Die in dieser Abhandlung gegebenen Andeutungen hat er in einem selbständigen Werke: „Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage streng deductiv dargestellt“ (Berlin 1877) weiter ausgearbeitet. Mit

Hülfe des obigen Systems kann man genau den Becker'schen Weg einschlagen und gelangt zu seinen Resultaten. Nur in zwei Punkten möchte ich von ihm abweichen, die zum Schluss kurz angedeutet werden mögen: in der Definition der Ebene und der nach 8) nothwendigen Verbindung von gerader Linie und Winkel. Ich würde die Ebene definiren als die Gesammtheit der von einem Punkte ausserhalb einer Geraden zu derselben gezogenen geraden Linien. Hieran müsste sich der Nachweiss schliessen, dass jede Gerade, welche zwei Punkte mit der so definirten Ebene gemeinsam hat, ganz in diese Ebene fällt und als Folgerung hieraus der Satz: dass eine Gerade, welche die Begrenzung einer geschlossenen Figur einmal schneidet, hinreichend verlängert diese Begrenzung mindestens noch einmal schneiden muss. Die durch 8) vorgeschriebene Verbindung der Geraden mit dem Winkel, würde sich in unmittelbarem Anschluss hieran für die Euklidische Geometrie am Anschaulichsten durch die Annahme herstellen lassen, dass es jederzeit möglich ist, durch jeden Punkt in der Ebene eines Winkels zwischen den Schenkeln des Winkels eine Gerade so zu ziehen, dass sie beide Schenkel des Winkels schneidet. Unter dieser Annahme (vergl. S. 9) nämlich gelingt es Legendre[1]) nachzuweisen, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht kleiner als zwei Rechte sein kann. Und dieser Beweis kann dann in aller Strenge aufrecht erhalten werden.

---

1) Mém. de Paris, T. XII. p. 371; Géom. Note II.