516.

SUR UNE SURFACE QUARTIQUE APLATIE.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* tom. LXXIV. (*Janvier—Juin,* 1872), pp. 1393—1395.]

Il y a évidemment pour les surfaces une théorie analogue à celle des courbes aplaties: la pénultième d'une surface $P^\alpha Q^\beta \ldots = 0$ est, pour ainsi dire, composée des surfaces $P=0$, $Q=0$, &c., *plus* des lignes courbes ou *arêtes,* lesquelles correspondent aux sommets d'une courbe aplatie[1]; par exemple une surface quadrique peut se réduire à $P^2=0$, un plan deux fois, *plus* une conique qui est l'arête de la surface aplatie. Pour les surfaces quartiques, un exemple assez intéressant se rencontre dans le beau Mémoire de M. Casey, "On cyclides and spheroquartics," (*Phil. Trans.*, vol. CLXI. pp. 585—721, 1871). L'auteur, d'après M. Darboux, nomme *cyclide* la surface quartique générale qui a pour ligne double le cercle à l'infini (*surface quartique anallagmatique* de M. Moutard), et *spheroquartic* la courbe d'intersection d'une sphère par une surface quadrique quelconque; et il est conduit à considérer la sphéroquartique comme cas particulier de la cyclide. J'aime mieux dire qu'il y a une cyclide aplatie ayant pour arête une courbe sphéroquartique.

Voici comment on y arrive: la cyclide est l'enveloppe des sphères dont chacune a son centre sur une surface quadrique nommée *focale,* et coupe orthogonalement une sphère fixe, nommée *sphère d'inversion,* disons la sphère S. Cela étant, en envisageant la focale comme une surface réglée, chaque droite sur la surface donne lieu à une infinité de sphères, qui passent toutes par un même cercle. En supposant que la droite coupe la sphère S aux points O, O', ce cercle est ce que j'appelle l'*anticircle* des points O, O', savoir, le plan du cercle est perpendiculaire à la corde OO' au point central M, et le rayon en est égal à $i\,OM\,(=i\,O'M)$, de manière que le cercle est réel ou imaginaire, selon que les points O, O' sont imaginaires ou réels: toute

[1] Voir *Comptes Rendus,* t. LXXIV. p. 708, [515].

sphère ayant son centre sur la droite OO', et coupant orthogonalement la sphère S, passe par le cercle dont il s'agit, disons le cercle L. On voit sans peine que chaque point du cercle L est situé sur la cyclide. Il y a donc sur la cyclide une série infinie single de cercles L qui correspondent un à une aux directrices de la surface focale; il y a de même une série infinie single de cercles L' qui correspondent un à une aux génératrices de la surface focale. La cyclide est le lieu des cercles de l'une ou l'autre série; chaque cercle de la première série coupe en deux points opposés chaque cercle de l'autre série, mais deux cercles de la même série ne se rencontrent pas, &c.

Or, en supposant avec M. Casey que la surface focale se réduise à un cône, les deux séries de cercles se réduisent à une seule série de cercles L, dont chacun est situé sur la sphère, centre le sommet du cône, qui coupe orthogonalement la sphère S, disons la sphère T. On a sur la sphère T la série des cercles L, lesquels ont pour enveloppe une courbe sphérique, la sphéroquartique de M. Casey. Les points des différents cercles L ne remplissent pas la surface sphérique entière, mais seulement une partie de cette surface, limitée par la courbe sphéroquartique. Cela étant, on pourrait dire que la surface cyclide se réduit à la sphère T deux fois, mais il vaut mieux la considérer comme une cyclide aplatie ayant pour arête la courbe sphéroquartique.

La sphéroquartique, considérée comme courbe sur une sphère T, est donnée (comme le remarque M. Casey) par une construction tout à fait analogue à celle pour la cyclide comme surface dans l'espace, savoir (en considérant toujours les courbes sphériques sur une même sphère), la sphéroquartique est l'enveloppe des cercles qui ont leurs centres sur une sphéro-conique et qui coupent orthogonalement un cercle fixe. Le cône, sommet le centre de la sphère, qui passe par la sphéroquartique, est de l'ordre 4, avec deux droites doubles (la classe est donc $=8$); j'ajoute qu'il touche quatre fois la sphère-cône $x^2+y^2+z^2=0$, ayant le même sommet (1).

M. Casey dit que le cône quartique a 16 droites focales: cela a besoin d'explication. Le cône quartique et le sphère-cône ont en commun $8\times 2=16$ plans tangents, y compris les plans tangents selon les 4 droites de contact, chacun deux fois; hormis ceux-ci, il y a donc 8 plans tangents communs. L'intersection de deux quelconques de ces 8 plans est droite focale du cône quartique: donc $\frac{1}{2}(8\times 7)$, $=28$ droites focales. Mais je trouve que les 8 plans tangents forment deux systèmes de 4 plans chacun: les 4 points de l'un de ces systèmes coupent les 4 plans de l'autre système dans 16 droites, lesquelles sont les droites focales de M. Casey; il y a de plus $6+6$ droites, dont chacune est l'intersection de deux plans du même système. Je n'ai pas cherché les distinctions qui doivent exister entre ces différents systèmes de droites focales.

1 En général, en considérant une courbe quelconque sur une surface S, et un point O quelconque, les deux cônes, sommet O, dont l'un passe par la courbe et l'autre est circonscrit à la surface, se touchent partout où ils se rencontrent: autrement dit, ils n'ont que des droites d'intersection doubles ou de contact.