274.

DEUXIÈME NOTE SUR LA TRANSFORMATION DE TSCHIRNHAUSEN.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LVIII. (1861), pp. 263—269.]

À LA fin de ma première note sur ce sujet j'ai appliqué la transformation de Tschirnhausen à l'équation du troisième degré mise sous la forme

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=(a,\ b,\ c,\ d)(x,\ 1)^3=0.$$

En y substituant $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}c$ au lieu de b, c, cette équation se change en

$$ax^3+bx^2+cx+d=(a,\ b,\ c,\ d)(x,\ 1)^3=0,$$

et en même temps le résultat obtenu dans ma première note s'énonce de la manière suivante:

En calculant pour l'équation

$$(a,\ b,\ c,\ d)(x,\ 1)^3=0,$$

la transformée en

$$y=(ax+\tfrac{1}{3}b)\,T_0+(ax^2+bx+\tfrac{2}{3}c)\,T_1,$$

on obtient

$$\left.\begin{array}{l} y^3 \\ +\frac{1}{3}y\left\{\begin{array}{ll} T_0^2 & (3ac-b^2) \\ +T_0T_1 & (9ad-bc) \\ +T_1^2 & (3bd-c^2) \end{array}\right\} \\ +\frac{1}{27}\left\{\begin{array}{ll} T_0^3 & (\ \ 27a^2d-\ \ 9abc+2b^3) \\ +T_0^2T_1 & (\ \ 27abd-18ac^2+3b^2c) \\ +T_0T_1^2 & (-27acd+18b^2d-3bc^2) \\ +T_1^3 & (-27ad^2+\ \ 9bcd-2c^3) \end{array}\right\} \end{array}\right\}=0.$$

Je vais me servir de cette formule, pour en déduire l'équation qui d'une manière analogue est la transformée de l'équation du quatrième ordre

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e \between x,\ 1)^4 = 0.$$

J'écris d'abord

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e \between x,\ 1)^4 = 0,$$

$$y = (ax + \tfrac{1}{4}b)\, T_0 + (ax^2 + bx + \tfrac{1}{2}c)\, T_1 + (ax^3 + bx^2 + cx + \tfrac{3}{4}d)\, T_2,$$

et je remarque qu'en faisant $e = 0$, le système proposé se partage en deux, dont le premier est:

$$x = 0,$$

$$y = \tfrac{1}{4}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2),$$

et le second:

$$(a,\ b,\ c,\ d \between x,\ 1)^3 = 0,$$

$$y = (ax + \tfrac{1}{4}b)\, T_0 + (ax^2 + bx + \tfrac{1}{2}c)\, T_1 - \tfrac{1}{4}dT_2;$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(a,\ b,\ c,\ d \between x,\ 1)^3 = 0,$$

$$y + \tfrac{1}{12}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2) = (ax + \tfrac{1}{3}b)\, T_0 + (ax^2 + bx + \tfrac{2}{3}c)\, T_1.$$

Une circonstance analogue a lieu dans l'équation en y, résultat de l'élimination du système proposé. Pour $e = 0$ son premier membre se résout de même en deux facteurs qui égalés à zéro sont les résultats de l'élimination du premier et du second système ci-dessus écrits. Le premier de ces deux facteurs est donc

$$y - \tfrac{1}{4}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2);$$

et le second (en vertu de la formule donnée antérieurement)

$$\begin{aligned} &\{y + \tfrac{1}{12}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2)\}^3 \\ &+ \tfrac{1}{3}\,[(3ac - b^2)\, T_0^2 + \text{etc.}]\ \{y + \tfrac{1}{12}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2)\} \\ &+ \tfrac{1}{27}\,[(27a^2d - 9abc + 2b^3)\, T_0^3 + \text{etc.}]\,; \end{aligned}$$

donc en multipliant les deux facteurs, et en égalant à zéro leur produit, on a la transformée en y de la forme $(a,\ b,\ c,\ d,\ 0 \between x,\ 1)^4$. Or dans le cas général, où e est différent de zéro, les coefficients de la transformée en y sont des invariants des deux formes

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e \between \xi,\ \eta)^4, \quad (T_0,\ T_1,\ T_2 \between \eta,\ -\xi)^2.$$

Cette propriété permet de déduire leurs valeurs générales des valeurs particulières qu'ils ont pour $e = 0$. Je formerai de cette manière la transformée en y pour la forme $(a,\ b,\ c,\ d,\ 0 \between x,\ 1)^4$, je passerai de là à la forme $(a,\ b,\ c,\ d,\ 0 \between x,\ 1)^4$ (ce qui se fait en écrivant $4b$, $6c$, $4d$ au lieu de b, c, d), et enfin je complèterai les valeurs des coefficients en y introduisant e au moyen de la propriété que doivent posséder les coefficients d'être des invariants des deux formes

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e \between \xi,\ \eta)^4, \quad (T_0,\ T_1,\ T_2 \between \eta,\ -\xi)^2.$$

On obtient d'abord l'équation en y sous la forme

$$(1,\ 0,\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E} \between y,\ 1)^4 = 0,$$

où

$$
\begin{aligned}
8\mathfrak{C} = {} & T_0^2 (\ 8ac - 3b^2) \\
& + T_0T_1 (\ 24ad - 4bc) \\
& + T_1^2 (\ 8bd - 4c^2) \\
& + T_0T_2 (-\ 2bd) \\
& + T_1T_2 (-\ 4cd) \\
& + T_2^2 (-\ 3d^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8\mathfrak{D} = {} & T_0^3 (\ 8a^2d - 4abc + 1b^3) \\
& + T_0^2T_1 (\ 4abd - 8ac^2 + 2b^2c) \\
& + T_0T_1^2 (-16acd + 4b^2d) \\
& + T_1^3 (-\ 8ad^2) \\
& + T_0^2T_2 (-\ 4acd + 1b^2d) \\
& + T_0T_1T_2 (-12ad^2) \\
& + T_1^2T_2 (-\ 4bd^2) \\
& + T_0T_2^2 (-\ 1bd^2) \\
& + T_1T_2^2 (-\ 2cd^2) \\
& + T_2^3 (-\ 1d^3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
256\mathfrak{E} = {} & T_0^4 (\ 64a^2bd + 16ab^2c - 3b^4) \\
& + T_0^3T_1 (-128a^2cd - 80ab^2d + 64abc^2 - 8b^3c) \\
& + T_0^2T_1^2 (-128abcd + 64ac^3 - 48b^3d + 8b^2c^2) \\
& + T_0T_1^3 (\ 64abd^2 + 64ac^2d - 128b^2cd + 32bc^3) \\
& + T_1^4 (\ 128acd^2 - 64bc^2d + 16c^4) \\
& + T_0^3T_2 (-192a^2d^2 + 32abcd - 4b^3d) \\
& + T_0^2T_1T_2 (-288abd^2 + 64ac^2d + 8b^2cd) \\
& + T_0T_1^2T_2 (-160b^2d^2 + 48bc^2d) \\
& + T_1^3T_2 (+192ad^3 - 128bcd^2 + 32c^3d) \\
& + T_0^2T_2^2 (-\ 48acd^2 + 14b^2d^2) \\
& + T_0T_1T_2^2 (-144ad^3 + 8bcd^2) \\
& + T_1^2T_2^2 (-\ 48bd^3 + 8c^2d^2) \\
& + T_0T_2^3 (-\ 4bd^3) \\
& + T_1T_2^3 (-\ 1cd^3) \\
& + T_2^4 (-\ 8d^4).
\end{aligned}
$$

Ce calcul achevé et substituant la forme $(a, b, c, d, 0 \between \xi, \eta)^4$ au lieu de $(a, b, c, d, 0 \widetilde{\between} \xi, \eta)^4$ (ou $4b$, $6c$, $4d$ au lieu de b, c, d) on obtient tous les termes de l'équation cherchée, hormis ceux qui contiennent e: et ces derniers s'obtiennent au moyen de ce que les coefficients des différentes puissances de y se réduisent à zéro par l'opérateur

$$a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d + 4d\partial_e - T_2\partial_{T_1} - 2T_1\partial_{T_0}.$$

Cela ne présente pas de difficulté, je supprime donc les calculs intermédiaires et je donne le résultat final que voici : les équations

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e \between x,\ 1)^4 = 0,$$

$$y = (ax+b)\,T_0 + (ax^2+4bx+3c)\,T_1 + (ax^3+4bx^2+6cx+3d)\,T_2,$$

conduisent à la transformée :

$$(1,\ 0,\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E} \between y,\ 1)^4 = 0,$$

où l'on a

	T_0^2	T_0T_1	T_0T_2	T_1^2	T_1T_2	T_2^2
$\mathfrak{C}=2$	$ac+3$ b^2-3	$ad+6$ $bc-6$	$ae+2$ $bd-2$	$ae+1$ $bd+8$ c^2-9	$be+6$ $cd-6$	$ce+3$ d^2-3

	T_0^3	$T_0^2T_1$	$T_0^2T_2$	$T_0T_1^2$	$T_0T_1T_2$	T_1^3	$T_0T_2^2$	$T_1^2T_2$	$T_1T_2^2$	T_2^3
$\mathfrak{D}=4$	a^2d+1 $abc-3$ b^3+2	a^2e+1 $abd+2$ ac^2-9 b^2c+6	$abe+1$ $acd-3$ b^2d+2	$abe+4$ $acd-12$ b^2d+8	ad^2-6 b^2e+6	ad^2-4 b^2e+4	$ade-1$ $bce+3$ bd^2-2	$ade-4$ $bce+12$ bd^2-8	ae^2-1 $bde-2$ c^2e+9 cd^2-6	be^2-1 $cde+3$ d^3-2

	T_0^4	$T_0^3T_1$	$T_0^3T_2$	$T_0^2T_1^2$	$T_0^2T_1T_2$	$T_0T_1^3$	$T_0^2T_2^2$	$T_0T_1^2T_2$
$\mathfrak{E}=$	a^3e+1 a^2bd-4 ab^2c+6 b^4-3	a^2be+8 a^2cd-12 ab^2d-20 abc^2+36 b^3c-12	a^2ce+12 a^2d^2-12 ab^2e-8 $abcd+12$ b^3d+4	a^2ce-6 ab^2e+30 $abcd-48$ ac^3+54 b^3d-48 b^2c^2+18	$abce+60$ abd^2-72 ac^2d+36 b^3e-36 b^2cd+12	a^2de-4 $abce-12$ abd^2+16 ac^2d+36 b^3e+48 $b^2cd-192$ bc^3+108	a^2e^2+2 $abde-16$ ac^2e+36 acd^2-18 b^2ce-18 b^2d^2+14	a^2e^2-4 $abde+20$ ac^2e+36 b^2d^2-160 bc^2d+108

T_1^4	$T_0T_1T_2^2$	$T_1^3T_2$	$T_0T_2^3$	$T_1^2T_2^2$	$T_1T_2^3$	T_2^4
a^2e^2+1 $abde-16$ ac^2e-18 acd^2+48 b^2ce+48 bc^2d-144 c^4+81	$acde+60$ ad^3-36 b^2de-72 bc^2e+36 bcd^2+12	abe^2-4 $acde-12$ ad^3+48 b^2de+16 bc^2e+36 bcd^2-192 c^3d+108	ace^2+12 ad^2e-8 b^2e^2-12 $bcde+12$ bd^3-4	ace^2-6 ad^2e+30 $bcde-48$ bd^3-48 c^3e+54 c^2d^2+18	ade^2+8 bce^2-12 bd^2e-20 c^2de+36 cd^3-12	ae^3+1 bde^2-4 cd^2e+6 d^4-3

J'écris

$$U' = aT_0^2 + 4bT_0T_1 + c\,(2T_0T_2 + 4T_1^2) + 4dT_1T_2 + eT_2^2,$$

$$H' = (ac-b^2)\,T_0^2 + 2\,(ad-bc)\,T_0T_1 + (ae-2bd+c^2)\,T_0T_2 + 4\,(bd-c^2)\,T_1^2 + 2\,(be-cd)\,T_1T_2 + (ce-d^2)\,T_2^2,$$

et je représente par $4\Phi'$ la valeur qui vient d'être trouvée pour $\mathfrak{D}$. Ces expressions U', H', Φ' sont des invariants des deux formes $(a, b, c, d, e \between \xi, \eta)^4$, $(T_0, T_1, T_2 \between \eta, -\xi)^2$, on a de plus les invariants

$$ae - 4bd + 3c^2, \quad ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3,$$

que je représente comme à l'ordinaire par I, J, et l'invariant $T_0T_2 - T_1^2$ que je représente par Θ'. Cela posé on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C} &= 6H' - 2I\Theta', \\
\mathfrak{D} &= 4\Phi', \\
\mathfrak{E} &= IU'^2 - 3H'^2 + I^2\Theta'^2 + 12J\Theta'U' + 2I\Theta'H'.
\end{aligned}$$

La dernière de ces équations peut être vérifiée aisément, pour cela on a seulement besoin de remarquer qu'en posant $a = e = 1$, $b = d = 0$, $c = \theta$, elle devient

$$\begin{aligned}
&(1+3\theta^2)\left(T_0^2 + \theta(2T_0T_2 + 4T_1^2) + T_2^2\right)^2 \\
&- 3\left(\theta T_0^2 + (1+\theta^2)\,T_0T_2 - 4\theta^2T_1^2 + \theta T_2^2\right)^2 \\
&+ (1+3\theta^2)^2(T_0T_2 - T_1^2)^2 \\
&+ 12(\theta - \theta^3)(T_0T_2 - T_1^2)\left(T_0^2 + \theta(2T_0T_2 + 4T_1^2) + T_2^2\right) \\
&+ 2(1+3\theta^2)(T_0T_2 - T_1^2)\left(\theta T_0^2 + (1+\theta^2)\,T_0T_2 - 4\theta^2T_1^2 + \theta T_2^2\right) \\
= {} & T_0^4 \\
&+ T_0^3T_2(\ 12\theta) \\
&+ T_0^2T_1^2(-6\theta + 54\theta^3) \\
&+ T_0^2T_2^2(2 + 36\theta^2) \\
&+ T_0T_1^2T_2(-4 + 36\theta^2) \\
&+ T_1^4(1 - 18\theta^2 + 81\theta^4) \\
&+ T_1^2T_2^2(-6\theta + 54\theta^3) \\
&+ T_0T_2^3(\ 12\theta) \\
&+ T_2^4,
\end{aligned}$$

équation qui est identique. L'expression de l'invariant I (quadrinvariant) de la fonction $(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \between y, 1)^4$ est $\mathfrak{E} + 3(\tfrac{1}{6}\mathfrak{C})^2$, ou $\mathfrak{E} + 3(H' - \tfrac{1}{3}I\Theta')^2$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
IU'^2 - 3H'^2 + {}& I^2\Theta'^2 + 12J\Theta'U' + 2I\Theta'H' \\
+ 3H'^2 + {}& \tfrac{1}{3}I^2\Theta'^2 \qquad\qquad\qquad - 2I\Theta'H',
\end{aligned}$$

ou enfin

$$IU'^2 + \tfrac{4}{3}I^2\Theta'^2 + 12J\Theta'U',$$

ce qui est égal à

$$\frac{1}{I}\left[(IU' + 6J\Theta')^2 + \tfrac{4}{3}(I^3 - 27J^2)\,\Theta'^2\right].$$

La condition à remplir pour que cet invariant se réduise à zéro peut donc être présentée sous la forme

$$IU' + \left[6J \pm 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}(I^3 - 27J^2)}\right]\Theta' = 0,$$

ce qui s'accorde avec un résultat trouvé par M. Hermite.

Il doit y avoir, ce me semble, une équation identique de la forme

$$JU'^2 - IU'^2H' + 4H'^3 + M\Theta' = -\Phi'^2$$

qui servirait à exprimer le carré de Φ' au moyen des autres invariants U', H', Θ', I, J, mais en supposant que cette équation existe, la forme du facteur M, que je n'ai pas encore cherchée, reste à déterminer; l'invariant J (cubinvariant) de la forme $(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}\between y, 1)^4$ contient Φ'^2, et il faudrait employer l'identité dont je viens de parler pour réduire à sa forme la plus simple cet invariant; dans l'état actuel de la question je ne m'occupe donc pas de l'expression du cubinvariant de $(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}\between y, 1)^4$.

Pour passer au cas d'une équation du cinquième ordre, on devra faire usage de la formule qui se rapporte à la forme $(a, b, c, d, e\between x, 1)^4$. En faisant la substitution nécessaire on arrive à ce résultat que pour l'équation

$$(a, b, c, d, e\between x, 1)^4 = 0$$

la transformée en

$$y = (ax + \tfrac{1}{4}b)\,T_0 + (ax^2 + bx + \tfrac{1}{2}c)\,T_1 + (ax^3 + bx^2 + cx + \tfrac{3}{4}d)\,T_2$$

est la suivante

$$(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}\between y, 1)^4 = 0,$$

où

	T_0^2	T_0T_1	T_0T_2	T_1^2	T_1T_2	T_2^2
$\mathfrak{C} = \frac{1}{8}$	$ac\ +8$ $b^2\ -3$	$ad\ +24$ $bc\ -4$	$ae\ +32$ $bd\ -2$	$ae\ +16$ $bd\ +8$ $c^2\ -4$	$be\ +24$ $cd\ -4$	$ce\ +8$ $d^2\ -3$

	T_0^3	$T_0^2T_1$	$T_0^2T_2$	$T_0T_1^2$	$T_0T_1T_2$	T_1^3	$T_0T_2^2$	$T_1^2T_2$	$T_1T_2^2$	T_2^3
$\mathfrak{D} = \frac{1}{8}$	$a^2d\ +8$ $abc\ -4$ $b^3\ +1$	$a^2e\ +32$ $abd\ +4$ $ac^2\ -8$ $b^2c\ +2$	$abe\ +8$ $acd\ -4$ $b^2d\ +1$	$abe\ +32$ $acd\ -16$ $b^2d\ +4$	$ad^2\ -12$ $b^2e\ +12$	$ad^2\ -8$ $b^2e\ +8$	$ade\ -8$ $bce\ +4$ $bd^2\ -1$	$ade\ -32$ $bce\ +16$ $bd^2\ -4$	$ae^2\ -32$ $bde\ -4$ $c^2e\ +8$ $cd^2\ -2$	$be^2\ -8$ $cde\ +4$ $d^3\ -1$

	T_0^4	$T_0^3T_1$	$T_0^3T_2$	$T_0^2T_1^2$	$T_0^2T_1T_2$	$T_0T_1^3$	$T_0^2T_2^2$	$T_0T_1^2T_2$
$\mathfrak{E} = \frac{1}{256}$	$a^3e + 256$	$a^2be + 512$	$a^2ce + 512$	$a^2ce - 256$	$abce + 640$	$a^2de - 256$	$a^2e^2 + 512$	$a^2e^2 - 1024$
	$a^2bd - 64$	$a^2cd - 128$	$a^2d^2 - 192$	$ab^2e + 480$	$abd^2 - 288$	$abce - 128$	$abde - 256$	$abde + 320$
	$ab^2c + 16$	$ab^2d - 80$	$ab^2e - 128$	$abcd - 128$	$ac^2d + 64$	$abd^2 + 64$	$ac^2e + 256$	$ac^2e + 256$
	$b^4 - 3$	$abc^2 + 64$	$abcd + 32$	$ac^3 + 64$	$b^3e - 144$	$ac^2d + 64$	$acd^2 - 48$	$b^2d^2 - 160$
		$b^3c - 8$	$b^3d - 4$	$b^3d - 48$	$b^2cd + 8$	$b^3e + 192$	$b^2ce - 48$	$bc^2d + 48$
				$b^2c^2 + 8$		$b^2cd - 128$	$b^2d^2 + 14$	
						$bc^3 + 32$		

T_1^4	$T_0T_1T_2^2$	$T_1^3T_2$	$T_0T_2^3$	$T_1^2T_2^2$	$T_1T_2^3$	T_2^4
$a^2e^2 + 256$	$acde + 640$	$abe^2 - 256$	$ace^2 + 512$	$ace^2 - 256$	$ade^2 + 512$	$ae^3 + 256$
$abde - 256$	$ad^3 - 144$	$acde - 128$	$ad^2e - 128$	$ad^2e + 480$	$bce^2 - 128$	$bde^2 - 64$
$ac^2e - 128$	$b^2de - 288$	$ad^3 + 192$	$b^2e^2 - 192$	$bcde - 128$	$bd^2e - 80$	$cd^2e + 16$
$acd^2 + 128$	$bc^2e + 64$	$b^2de + 64$	$bcde + 32$	$bd^3 - 48$	$c^2de + 64$	$d^4 - 3$
$b^2ce + 128$	$bcd^2 + 8$	$bc^2e + 64$	$bd^3 - 4$	$c^3e + 64$	$cd^3 - 8$	
$bc^2d - 64$		$bcd^2 - 128$		$c^2d^2 + 8$		
$c^4 + 16$		$c^3d + 32$				

En m'appuyant sur ce résultat j'espère être à même de trouver la formule pour l'équation du cinquième ordre.

Londres, 11 *Mai* 1860.