272.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE JACOBI PAR RAPPORT AU PROBLÈME DE PFAFF.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LVII. (1860), pp. 273—277.]

DANS le mémoire de Jacobi "Theoria novi multiplicatoris etc." (t. XXIX. de ce Journal, 1845) on trouve p. 253 le passage que voici: "Methodum ad solvendum problema Pfaffianum ab ipso auctore adhibitam, data occasione observo per plures et altiores procedere integrationes quam methodus vera et genuina poscat. Quam novam methodum pro exemplo simplice explicabo. Ad aequationem differentialem

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

per duas aequationes integrandam poscit Pfaffiana methodus...integrationem completam systematis trium aequationum differentialium primi ordinis inter quatuor variabiles ac deinde unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. Illius igitur systematis integrali uno invento, secundum illam methodum restat integratio completa duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles sive unius aequationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles ac deinde aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. At observo si integrali illo invento exprimatur x_4 per x_1, x_2, x_3, aequationem differentialem propositam abire in aliam linearem primi ordinis inter tres variabiles *conditioni integrabilitatis satisfacientem*; cujus integrationem vidimus (voir p. 246) absolvi posse per integrationes separatas duarum aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Unde in locum aequationis differentialis secundi ordinis, tantum integrandae sunt duae aequationes differentiales separatae primi ordinis, quae est reductio maxime insignis; integrationi autem aequationis differentialis primi ordinis postremo praestandae omnino supersedetur. Tractatio hujus rei gravissimae completa ac generalis alii commentationi reservanda est." Le théorème dont il s'agit est énoncé dans les mots "conditioni integrabilitatis satisfacientem," mais j'ai cité le passage en entier pour montrer l'importance qu'à bon droit Jacobi attachait à la théorie dont ce théorème fait partie. On sait que le problème de la solution d'une équation à différences partielles du premier ordre n'est qu'un cas particulier du problème de Pfaff et que la solution des équations différentielles de la Dynamique et celle d'autres systèmes est intimement liée avec la question de la solution de ce cas particulier: le problème de Pfaff est ainsi de la plus haute importance dans l'analyse. Jacobi a parlé autre part d'un mémoire sur la mécanique analytique dont il s'est beaucoup occupé, lequel aurait naturellement des rapports avec celui-là; malheureusement ni l'un ni l'autre de ces mémoires n'ont paru.

Pour démontrer le théorème, considerons l'expression différentielle

$$\nabla = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + X_4\,dx_4.$$

En supposant que $a = \phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ soit une intégrale des équations différentielles de Pfaff, si au moyen de cette équation on exprime x_4 en fonction de (x_1, x_2, x_3, a) l'expression ∇ prendra la forme

$$\nabla_1 = Y_1\,dx_1 + Y_2\,dx_2 + Y_3\,dx_3 + A\,da$$

et il s'agit de faire voir que l'équation

$$Y_1\,dx_1 + Y_2\,dx_2 + Y_3\,dx_3 = 0$$

à laquelle $\nabla_1 = 0$ se réduit, lorsqu'on fait $a =$ constante, sera intégrable au moyen d'un facteur, ou autrement dit, que l'expression $Y_1dx_1 + Y_2dx_2 + Y_3dx_3$ sera de la forme Udu, c. à d. qu'il existe une quantité u, fonction de x_1, x_2, x_3, a, telle qu'en traitant a comme une constante on a

$$Y_1\,dx_1 + Y_2\,dx_2 + Y_3\,dx_3 = U\,du.$$

Ainsi dans cette formule du dénote $\frac{du}{dx_1}dx_1 + \frac{du}{dx_2}dx_2 + \frac{du}{dx_3}dx_3$, et si l'on veut regarder a comme variable il faudrait y écrire $du - \frac{du}{da}da$ au lieu de du; on aurait ainsi $\nabla_1 = U\left(du - \frac{du}{da}da\right) + Ada$, ou en changeant la signification de A,

$$\nabla = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + X_4\,dx_4 = Udu + Ada,$$

où u, a, et de même U, A, seront des fonctions données de x_1, x_2, x_3, x_4; c'est en effet la forme à laquelle dans le problème de Pfaff il s'agit de réduire l'expression différentielle ∇.

Or les équations différentielles de Pfaff sont le système que voici, savoir en écrivant

$$12 = \frac{dX_1}{dx_2} - \frac{dX_2}{dx_1}, \text{ etc.},$$

ce qui implique $12 = -21$, $11 = 0$, etc., et en introduisant la variable auxiliaire t, qui doit être éliminée, le système est

$$\begin{aligned}
0 &= X_1dx_1 + X_2dx_2 + X_3dx_3 + X_4dx_4,\\
X_1dt &= \quad * \quad\ 12dx_2 + 13dx_3 + 14dx_4,\\
X_2dt &= 21dx_1 \quad * \quad + 23dx_3 + 24dx_4,\\
X_3dt &= 31dx_1 + 32dx_2 \quad * \quad + 34dx_4,\\
X_4dt &= 41dx_1 + 42dx_2 + 43dx_3 \quad * \quad,
\end{aligned}$$

lequel ne contient que quatre équations indépendantes. On donne à ce système une forme plus symétrique en écrivant x_0 au lieu de t, et en y mettant de plus

$$X_1 = 01 = -10, \text{ etc.}$$

les équations deviennent par ce moyen

$$\begin{aligned}
0 &= \quad * \quad\ 01dx_1 + 02dx_2 + 03dx_3 + 04dx_4,\\
0 &= 10dx_0 \quad * \quad + 12dx_2 + 13dx_3 + 14dx_4,\\
0 &= 20dx_0 + 21dx_1 \quad * \quad + 23dx_3 + 24dx_4,\\
0 &= 30dx_0 + 31dx_1 + 32dx_2 \quad * \quad + 34dx_4,\\
0 &= 40dx_0 + 41dx_1 + 42dx_2 + 43dx \quad * \quad,
\end{aligned}$$

et on déduit delà

$$dx_0 : dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 = 1234 : 2340 : 3401 : 4012 : 0123,$$

où 1234, etc. sont les fonctions de Jacobi que j'ai nommées "Pfaffiens," savoir on a

$$\begin{aligned}
1234 &= 12 \,.\, 34 + 13 \,.\, 42 + 14 \,.\, 23,\\
2340 &= 23 \,.\, 40 + 24 \,.\, 03 + 20 \,.\, 34, = \quad * \quad - X_2 34 - X_3 42 - X_4 23,\\
3401 &= 34 \,.\, 01 + 30 \,.\, 14 + 31 \,.\, 40, = \quad X_1 34 \quad * \quad + X_3 41 + X_4 13,\\
4012 &= 40 \,.\, 12 + 41 \,.\, 20 + 42 \,.\, 01, = -X_1 24 - X_2 41 \quad * \quad - X_4 12,\\
0123 &= 01 \,.\, 23 + 02 \,.\, 31 + 03 \,.\, 12, = \quad X_1 23 + X_2 31 + X_3 12 \quad * \quad.
\end{aligned}$$

Cette transformation se trouve en effet dans le mémoire de Jacobi "Ueber die Pfaffsche Methode etc." (t. II. de ce Journal p. 347 et suivantes, 1827), où cependant Jacobi ne s'est pas servi de l'algorithme $X_1 = 01 = -10$ etc. au moyen duquel la forme de la solution devient si simple.

Faisons attention à présent à ce que l'équation

$$a = \phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

est supposée être une intégrale des équations différentielles. On en déduit d'abord $x_4 =$ fonc. (x_1, x_2, x_3, a), et de là en traitant a comme constante

$$dx_4 = \frac{dx_4}{dx_1}dx_1 + \frac{dx_4}{dx_2}dx_2 + \frac{dx_4}{dx_3}dx_3,$$

équation qui doit être satisfaite par les valeurs qu'on vient de trouver pour $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$, et qui par conséquent donne :

$$0 = 0123 - \frac{dx_4}{dx_1}\,2340 - \frac{dx_4}{dx_2}\,3401 - \frac{dx_4}{dx_3}\,4012.$$

En y substituant pour 0123, etc. leurs valeurs, modifiées en sorte que tous les termes deviennent positifs (ce qui se fait à l'aide des relations $12 = -21$ etc.), on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_4}{dx_1}(\quad * \quad X_2 34 + X_3 42 + X_4 23) \\ +&\frac{dx_4}{dx_2}(X_1 43 \quad * \quad + X_3 14 + X_4 31) \\ +&\frac{dx_4}{dx_3}(X_1 24 + X_2 41 \quad * \quad + X_4 12) \\ +&\qquad (X_1 32 + X_2 13 + X_3 21 \quad * \quad) \end{aligned}\right\} = 0,$$

équation aux différences partielles à laquelle satisfait la variable x_4, lorsqu'au moyen de l'équation $a = \phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (qui est une intégrale des équations différentielles de Pfaff) elle est donnée en fonction de x_1, x_2, x_3. Nous allons voir que c'est cette dernière équation, dans laquelle est contenu le théorème dont la démonstration fait l'objet de cette note. En effet l'expression différentielle

$$\nabla = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + X_4\,dx_4$$

ayant été transformée en

$$\nabla_1 = Y_1\,dx_1 + Y_2\,dx_2 + Y_3\,dx_3 + A\,da$$

par la substitution de a au lieu de x_4, il s'en suit qu'on a les relations :

$$Y_1 = X_1 + X_4\frac{dx_4}{dx_1},$$

$$Y_2 = X_2 + X_4\frac{dx_4}{dx_2},$$

$$Y_3 = X_3 + X_4\frac{dx_4}{dx_3},$$

$$A = \qquad X_4\frac{dx_4}{da};$$

la variable x_4 contenue dans les quantités X_1, X_2, X_3, X_4 doit être remplacée par son expression en fonction de x_1, x_2, x_3, a.

Cela posé, la condition pour que l'équation

$$Y_1\,dx_1 + Y_2\,dx_2 + Y_3\,dx_3 = 0$$

soit intégrable par un facteur étant désignée par

$$Z = 0,$$

on sait que

$$Z = Y_1\left(\frac{dY_2}{dx_3} - \frac{dY_3}{dx_2}\right) + Y_2\left(\frac{dY_3}{dx_1} - \frac{dY_1}{dx_3}\right) + Y_3\left(\frac{dY_2}{dx_1} - \frac{dY_1}{dx_2}\right).$$

Mais d'après les relations que l'on vient d'établir on a

$$\frac{dY_2}{dx_3} = \frac{dX_2}{dx_3} + \frac{dX_2}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_3} + \left(\frac{dX_4}{dx_3} + \frac{dX_4}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_3}\right)\frac{dx_4}{dx_2} + X_4\frac{d^2x_4}{dx_2dx_3},$$

$$\frac{dY_3}{dx_2} = \frac{dX_3}{dx_2} + \frac{dX_3}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_2} + \left(\frac{dX_4}{dx_2} + \frac{dX_4}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_2}\right)\frac{dx_4}{dx_3} + X_4\frac{d^2x_4}{dx_2dx_3};$$

d'où l'on tire

$$\frac{dY_2}{dx_3} - \frac{dY_3}{dx_2} = 23 + 24\frac{dx_4}{dx_3} + 43\frac{dx_4}{dx_2},$$

et on trouve de même

$$\frac{dY_3}{dx_1} - \frac{dY_1}{dx_3} = 31 + 34\frac{dx_4}{dx_1} + 41\frac{dx_4}{dx_3},$$

$$\frac{dY_1}{dx_2} - \frac{dY_2}{dx_1} = 12 + 14\frac{dx_4}{dx_2} + 42\frac{dx_4}{dx_1};$$

donc en ajoutant ces équations après les avoir multipliées par $X_1 + X_4\frac{dx_4}{dx_1}$, $X_2 + X_4\frac{dx_4}{dx_2}$, $X_3 + X_4\frac{dx_4}{dx_3}$, les termes qui contiennent les produits $\frac{dx_4}{dx_1}\frac{dx_4}{dx_2}$, etc. se détruisent, et l'on obtient l'équation finale

$$Z = \left\{\begin{array}{ll} \frac{dx_4}{dx_1} & (\quad * \quad X_2 34 + X_3 42 + X_4 23) \\ + \frac{dx_4}{dx_2} & (X_1 43 \quad * \quad + X_3 14 + X_4 31) \\ + \frac{dx_4}{dx_3} & (X_1 24 + X_2 41 \quad * \quad + X_4 12) \\ + & (X_1 32 + X_2 13 + X_3 21 \quad * \quad) \end{array}\right\},$$

dont la seconde partie s'évanouit comme il a été démontré ci-dessus. Par conséquent la condition d'intégrabilité $Z = 0$ se trouve remplie, ce qu'il s'agissait de prouver.

Londres, 3 *Septembre* 1859