251.

SUR QUELQUES FORMULES POUR LA DIFFÉRENTIATION.

[From the *Annali di Matematica pura ed applicata* (Tortolini) tom. II. (1859), pp. 214—230. Traduction par l'auteur d'un mémoire présenté à la Société Royale de Londres le 26 Novembre, 1857.]

EN cherchant une formule dans la théorie des intégrales définies multiples je fus conduit il y a plusieurs années à chercher les coefficients différentiels successifs de l'expression $(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i}$, et les résultats que j'ai trouvés sont donnés dans le Mémoire "On certain formulæ for differentiation with applications to the evaluation of definite integrals," *Camb. and Dublin Mathematical Journal*, tom. II. pp. 122—128 (1847), [41]. J'ai depuis cherché les coefficients différentiels successifs de l'expression plus générale $[(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}k}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i}$, mais l'investigation n'était pas achevée. Mon attention fut rappelée à ce sujet par deux identités remarquables trouvées par le Prof. Donkin dans son Mémoire "On the equation of Laplace's functions etc." *Phil. Trans.* tom. CXLVII. (1857), pp. 43—57, au moyen de la comparaison de ses résultats avec ceux du Prof. Boole; identités qui appartenaient, je l'aperçus, à la classe des formules ci-dessus mentionnées: la première de ces deux identités se déduit en effet assez facilement d'une formule exposée dans mon mémoire; la démonstration de la seconde identité est beaucoup plus difficile, et je n'ai réussi à l'établir qu'en la faisant dépendre de l'établissement de l'égalité des coefficients numériques de deux expressions de la même forme. Je suis depuis revenu aux investigations incomplètes dont j'ai parlé ci-dessus et les résultats que j'ai trouvés sont donnés dans le présent mémoire. Je remarque qu'en écrivant pour abréger

$$P=2x+\lambda+\mu,\quad Q=\sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)},\quad R=(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^2,$$

le sujet auquel appartiennent tous les résultats est la différentiation de l'expression $P^\alpha Q^\beta R^\gamma$: l'expression ci-dessus mentionnée $[(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}k}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i}$ est de la forme dont il s'agit, et la question qui s'y rapporte est celle d'obtenir le développement de $D_x^\mu P^\alpha Q^\beta R^\gamma$, où $\alpha = 0$.

La question suggérée par la seconde identité du Prof. Donkin est celle d'obtenir le développement de $(P^{-1}Q^4 D_x)^\mu P^\alpha Q^\beta R^\gamma$, où $\alpha = \gamma - \beta$. Comme la démonstration de ces identités est l'un des objets de ce Mémoire, j'ai donné dans la première section la réduction des identités à la forme sous laquelle je les ai depuis considérées. La seconde section se rapporte au développement de l'expression $D_x^\mu P^\alpha Q^\beta R^\gamma$, où $\alpha = 0$; la troisième section à celui de l'expression $(P^{-1}Q^4 D_x)^\mu P^\alpha Q^\beta R^\gamma$, où $\alpha = \gamma - \beta$: enfin la quatrième section contient l'application des deux identités, et quelques autres applications des formules.

§ I.

1. La première des deux identités du Prof. Donkin est

$$(\sin\theta D_\theta \sin\theta)^n (\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta)^n = 1\,.\,3\,.\,5\,\ldots(2n-1)(\sin\theta)^{2n},$$

laquelle est l'équation (27) article No. 14, de son Mémoire[1].

En écrivant $\cot\theta = t$, l'équation devient

$$(-)^n D_t{}^n \frac{(\sqrt{1+t^2}-t)^n}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots(2n-1)}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

et en posant comme à l'ordinaire $i = \sqrt{-1}$ on obtient

$$\sqrt{1+t^2} - t = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{t+i} - \sqrt{t-i})^2,$$

et en écrivant aussi

$$1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1) = 2^n\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{5}{2}\ldots(n-\tfrac{1}{2}) = 2^n\,[n-\tfrac{1}{2}]^n,$$

la formule devient

$$D_t{}^n \frac{(\sqrt{t+i}-\sqrt{t-i})^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2^n\,[n-\frac{1}{2}]^n}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ceci est un cas particulier de

$$D_x{}^n \frac{(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2n}}{\sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}} = \frac{(-)^n (R-\mu)^{2n}\,[n-\frac{1}{2}]^n}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n+\frac{1}{2}}},$$

ou, en écrivant comme auparavant

$$P = 2x+\lambda+\mu, \quad Q = \sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}, \quad R = [\sqrt{x+\lambda} - \sqrt{x+\mu}]^2,$$

la formule est

$$D_x{}^n Q^{-1} R^n = (-)^n (\lambda-\mu)^{2n}\,[n-\tfrac{1}{2}]\,Q^{-2n-1}.$$

[1] Vedi la nota in fine. [This Note by the Editor, Professor Tortolini, relating merely to the transformation $(\sin\theta D_\theta \sin\theta)^n = (\sin\theta)^{-1}(\sin^2\theta D_\theta)^n \sin\theta$, is not here reproduced.]

2. [1] La comparaison mentionnée article No. 5 du Mémoire du Prof. Donkin donne

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta \sin\theta)^n \left\{ f\left[e^{\phi\sqrt{-1}} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta + F\left(\frac{e^{\phi\sqrt{-1}}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta}\right)\right]\right\}$$

$$= \mu^n \left(D_\mu \frac{1}{\mu}\right)^n \left\{ (\mu+\mu^2)^n f\left(\frac{\mu}{1+\mu}\ \frac{\sqrt{1-\mu'^2}}{\mu'}\, e^{\phi\sqrt{-1}}\right)\right.$$

$$\left. + (-)^n (\mu-\mu^2)^n F\left(\frac{\mu}{1-\mu}\ \frac{\sqrt{1-\mu'^2}}{\mu'}\, e^{\phi\sqrt{-1}}\right)\right\},$$

où $\mu=\cos\theta$, et après les différentiations $\mu'=\cos\theta$. Les parties qui contiennent les fonctions indéterminées f et F doivent être égales, chacune prise à part de l'autre. Les parties qui contiennent f seront égales, si cette égalité subsiste pour $fx = x^s$, où s est un indice quelconque; c'est-à-dire l'égalité subsistera si

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta\sin\theta)^n(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta)^s$$

$$= \mu^n\left(D_\mu\frac{1}{\mu}\right)^n (\mu+\mu^2)^n \frac{\mu^s}{(1+\mu)^s}\left(\frac{\sqrt{1-\mu'^2}}{\mu'}\right)^s,$$

$$= \mu^n\left(\frac{\sqrt{1-\mu'^2}}{\mu'}\right)^s \left(D_\mu\frac{1}{\mu}\right)^n (\mu+\mu^2)^n \frac{\mu^s}{(1+\mu)^s},$$

ou enfin en écrivant μ, au lieu de μ', si

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta\sin\theta)^n(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta)^s = \mu^{n-s}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left(D_\mu\frac{1}{\mu}\right)^n \mu^{n+s}(1+\mu)^{n-s},$$

où $\mu=\cos\theta$; c'est en effet la seconde des deux identités du Prof. Donkin. L'égalité des parties qui contiennent F dépend de la même manière de l'équation

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta\sin\theta)^n(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta)^s = (-)^n(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left(D_\mu\frac{1}{\mu}\right)^2 \mu^{n+s}(1-\mu)^{n-s},$$

laquelle se déduit de l'autre équation en y écrivant $180^\circ-\theta$ au lieu de θ.

3. La seconde identité (voir article No. 16) est

$$(\sin\theta)^{-n}(\sin\theta\, D_\theta\sin\theta)^n(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta)^s = \mu^{n-s}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\left(D_\mu\frac{1}{\mu}\right)^n \mu^{n+s}(1+\mu)^{n-s},$$

où comme auparavant $\mu=\cos\theta$. En écrivant $\cot\theta=t$, et en faisant attention que le côté gauche de l'équation peut s'écrire sous la forme

$$(\sin\theta)^{-n-1}(\sin^2\theta\, D_\theta)^n \sin\theta\,(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta)^n,$$

et que l'on a

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{1+t^2}-t,\quad \sin^2\theta\, D_\theta = -D_t,$$

[1] Le lecteur pourrait omettre cet article, qui ne fait que montrer qu'une certaine formule du Professeur Donkin se réduit à son identité seconde.

le côté gauche devient

$$(-)^n (1+t^2)^{\frac{1}{2}(n+1)} D_t{}^n \frac{(\sqrt{1+t^2}-t)^s}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Le côté droit peut s'écrire sous la forme

$$\mu^{n-s+1} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left(\frac{1}{\mu} D_\mu\right)^n \mu^{n+s-1} (1+\mu)^{n+s},$$

et en observant que

$$\mu = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \frac{1}{\mu} D_\mu = \frac{(1+t^2)^2}{t} D_t,$$

le côté droit devient

$$\frac{t^{n-s+1}}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \left(\frac{(1+t^2)^2}{t} D_t\right)^2 \frac{t^{n+s-1}}{(1+t^2)^{n-\frac{1}{2}} (\sqrt{1+t^2}-t)^{n-s}};$$

en comparant les deux expressions on obtient

$$(-)^n \frac{(1+t^2)^{n+1}}{t^{n-s+1}} D_t{}^n \frac{(\sqrt{1+t^2}-t)^s}{\sqrt{1+t^2}} = \left(\frac{(1+t^2)^2}{t} D_t\right)^n \frac{t^{n+s-1}}{(1+t^2)^{n-\frac{1}{2}} (\sqrt{1+t^2}-t)^{n-s}},$$

et de là, en écrivant comme auparavant $i=\sqrt{-1}$, et

$$\sqrt{1+t^2}-t = -\tfrac{1}{2} (\sqrt{t+i}-\sqrt{t-i})^2$$

la formule devient

$$\left(\frac{(1+t^2)^2}{2t} D_t\right)^n \frac{(2t)^{n+s-1}}{(1+t^2)^{n-\frac{1}{2}} (\sqrt{1+i}-\sqrt{t-i})^{2n-2s}} = \frac{(1+t^2)^{n+1}}{(2t)^{n-s+1}} D_t{}^n \frac{(\sqrt{t+i}-\sqrt{t-i})^{2s}}{\sqrt{1+t^2}},$$

laquelle est un cas particulier de

$$\left[\frac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^2}{2x+\lambda+\mu} D_x\right]^n \frac{(2x+\lambda+\mu)^{n+s-1}}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n-\frac{1}{2}} (\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2n-2s}}$$

$$= \frac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n+1}}{(2x+\lambda+\mu)^{n-s+1}} D_x{}^n \frac{(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2s}}{\sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}}$$

c'est-à-dire de

$$(P^{-1} Q^4 D_x)^n (P^{n+s-1} Q^{-2n+1} R^{-n+s}) = P^{-n+s-1} Q^{2n+2} D_x{}^n (Q^{-1} R^s).$$

§ II.

4. En écrivant comme auparavant

$$P = 2x+\lambda+\mu, \quad Q = \sqrt{(x+\lambda)(x+\mu)}, \quad R = (\sqrt{x+\lambda}) - \sqrt{x+\mu})^2,$$

on a $R = P - 2Q$, et en écrivant pour abréger $(\lambda-\mu)^2 = \Lambda$, on obtient aussi

$$\Lambda = P^2 - 4Q^2, \quad \frac{\Lambda}{R} = P + 2Q;$$

on trouve de plus

$$D_x P = 2, \quad D_x Q = \tfrac{1}{2}\frac{P}{Q}, \quad D_x R = -\frac{R}{Q}.$$

5. Les dernières formules donnent

$$D_x P^\alpha Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{2}\beta P^{\alpha+1} Q^{\beta-2} R^\gamma - \gamma P^\alpha Q^{\beta-1} R^\gamma + 2\alpha P^{\alpha-1} Q^\beta R^\gamma,$$

formule dont on pourrait se servir pour chercher $D_x{}^r P^\alpha Q^\beta R^\gamma$; on a par exemple

$$\begin{aligned} D_x{}^2 P^\alpha Q^\beta R^\gamma = {} & \tfrac{1}{4}\beta(\beta-2) P^{\alpha+2} Q^{\beta-4} R^\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma(2\beta-1) P^{\alpha+1} Q^{\beta-3} R^\gamma \\ & + [\beta(2\alpha+1)+\gamma^2] P^\alpha Q^{\beta-2} R^\gamma - 4\alpha\gamma P^{\alpha-1} Q^{\beta-1} R^\gamma + 4(\alpha-1)\gamma P^{\alpha-2} Q^\beta R^\gamma, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Et de même

$$P^{-1}Q^4 D_x P^\alpha Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{2}\beta P^\alpha Q^{\beta+2} R^\gamma - \gamma P^{\alpha-1} Q^{\beta+3} R^\gamma + 2\alpha P^{\alpha-2} Q^{\beta+4} R^\gamma,$$

et de là

$$\begin{aligned} (P^{-1}Q^4 D_x)^2 P^\alpha Q^\beta R^\gamma = {} & \tfrac{1}{4}\beta(\beta+2) P^\alpha Q^{\beta+4} R^\gamma - \tfrac{1}{2}(2\beta+3)\gamma P^{\alpha-1} Q^{\beta+5} R^\gamma \\ & + [2\alpha(\beta+2)+\gamma^2] P^{\alpha-2} Q^{\beta+6} R^\gamma - 2(2\alpha-1)\gamma P^{\alpha-3} Q^{\beta+7} R^\gamma \\ & + 4\alpha(\alpha-2) P^{\alpha-4} Q^{\beta+8} R^\gamma, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Mais il serait difficile d'obtenir de cette manière l'expression de la r-ième répétition de l'opération D_x, ou $P^{-1}Q^4 D_x$, sur $P^\alpha Q^\beta R^\gamma$ et je ne poursuis pas la question.

6. Je vais à présent chercher le développement de $D_x{}^r P^\alpha Q^\beta R^\gamma$ $(\alpha = 0)$ ou ce qui est la même chose $D_x{}^r Q^\beta R^\gamma$. On a

$$D_x Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{2}\beta P Q^{\beta-2} R^\gamma - \gamma Q^{\beta-1} R^\gamma,$$

ou en substituant pour P la valeur

$$P = \frac{\Lambda}{R} - 2Q,$$

on a

$$D_x Q^\beta R^\gamma = -(\beta+\gamma) Q^{\beta-1} R^\gamma - \tfrac{1}{2}\beta \Lambda Q^{\beta-2} R^{\gamma-1}.$$

La répétition de l'opération D_x donne évidemment une expression de la forme

$$\begin{aligned} D_x{}^r Q^\beta R^\gamma = {} & (-)^r \quad L_r \quad \Lambda^0 Q^{\beta-r} \quad R^\gamma \\ & \vdots \\ & + (-)^{r-\theta} \frac{1}{2^\theta} L_{r,\,\theta} \quad \Lambda^\theta Q^{\beta-r-\theta} R^{\gamma-\theta} \\ & \vdots \\ & + \qquad \frac{1}{2^r} L_{r,\,\mu r} \,.\, \Lambda^r Q^{\beta-2r} \quad R^{\gamma-r}, \end{aligned}$$

et on obtient pour $L_{r,\,\theta}$ l'équation aux différences

$$L_{r+1,\,\theta+1} - (\beta + \gamma - r - 2\theta - 2)\, L_{r,\,\theta+1} - (\beta - r - \theta)\, L_{r,\,\theta} = 0,$$

laquelle, avec les conditions particulières

$$L_{r,\,-1} = 0, \quad L_{r,\,r+1} = 0, \quad L_{0,\,0} = 1,$$

suffit pour déterminer les coefficients $L_{r,\,\theta}$ de la formule.

7. Avant d'aller plus loin, je vais considérer le cas particulier $\beta = 0$. L'équation aux différences est ici

$$L_{r+1,\,\theta+1} - (\gamma - r - 2\theta - 2)\, L_{r,\,\theta+1} + (r + \theta)\, L_{r,\,\theta} = 0,$$

et l'on satisfait à cette équation en posant

$$L_{r,\,\theta} = \frac{(-)^\theta\, [r+\theta-1]^{2\theta}\, [\gamma-\theta-1]^{r-\theta-1}}{2^\theta\, [\theta]^\theta},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$L_{r,\,\theta} = \frac{(-)^\theta\, 2^\theta \gamma\, [\theta - \tfrac{1}{2}]^\theta\, [r+\theta-1]^{r-\theta-1}\, [\gamma-\theta-1]^{r-\theta-1}}{[r-\theta-1]^{r-\theta-1}}.$$

En effet on déduit de la première expression

$$\begin{aligned} & L_{r+1,\,\theta+1} - (\gamma - r - 2\theta - 2)\, L_{r,\,\theta+1} \\ &= \frac{(-)^{\theta+1}\gamma}{2^{\theta+1}\,[\theta+1]^{\theta+1}}\,(r+\theta)\,[r+\theta-1]^{2\theta}\,[\gamma-\theta-2]^{r-\theta-2} \\ &\qquad \times [(r+\theta+1)(\gamma-r) - (\gamma-r-2\theta-2)(r-\theta-1)], \end{aligned}$$

et le facteur en [ ] est $2(\theta+1)(\gamma-\theta-1)$, de manière que l'expression devient

$$= \frac{-(-)^\theta\gamma}{2^\theta\,[\theta]^\theta}\,(r+\theta)\,[r+\theta-1]^{2\theta}\,[\gamma-\theta-1]^{r-\theta-1},$$

ce qui est

$$= -(r+\theta)\, L_{r,\,\theta}.$$

L'équation aux différences est donc satisfaite; les conditions pour les limites sont aussi satisfaites, et la valeur qui vient d'être donnée est donc celle de $L_{r,\,\theta}$ dans le cas particulier dont il s'agit où $\beta = 0$.

8. Il sera convenable d'écrire

$$\frac{(-)^\theta}{2^\theta\gamma}\, L_{r,\,\theta} = \frac{[r+\theta-1]^{2\theta}\,[\gamma-\theta-1]^{r-\theta-1}}{2^{2\theta}\,[\theta]^\theta} = \frac{[\theta-\tfrac{1}{2}]^\theta\,[r+\theta-1]^{r-\theta-1}\,[\gamma-\theta-1]^{r-\theta-1}}{[r-\theta-1]^{r-\theta-1}} = L'_{r,\theta},$$

et alors en observant que $L_{r,\,\theta}$, ou $L'_{r,\,\theta}$ se réduit à zéro pour $\theta = r$, on obtient

$$\frac{(-)^r}{\gamma}\, D_x{}^r R^\gamma = L'_{r,\,0}\, Q^{-r}\, R^\gamma \ldots + L'_{r,\,\theta}\, \Lambda^\theta\, Q^{-r-\theta}\, R^{\gamma-\theta} \ldots + L'_{r,\,r-1}\, \Lambda^{r-1}\, Q^{-2r+1}\, R^{\gamma-r-1}.$$

9. Cela est en effet sous une forme un peu modifiée la formule fondamentale de mon mémoire dans le *Camb. and Dub. Math. Journal*; la valeur qu'on y trouve du coefficient $K_{r,\theta}$ (en mettant γ au lieu de i est)

$$K_{r,\theta}=\frac{\Gamma(r-\frac{1}{2}-\theta)\,\Gamma(2r-1-\theta)\,\Gamma(\gamma-r-\theta-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\theta+1)\,\Gamma(2r-1-2\theta)\,\Gamma(\gamma-r+1)},$$

et le coefficient $L_{r,\theta}\,(\beta=0)$ du présent mémoire est lié avec $K_{r,\theta}$ par l'équation

$$\frac{(-)^{\theta}}{2^{\theta}\gamma}\,L_{r,\theta}=L'_{r,\theta}=K_{r,\,r-1-\theta}.$$

La valeur de $L'_{r,\,r-1}$ est $[r-\frac{3}{2}]^{r-1}$, et pour $r=\gamma+1$ le coefficient devient $[\gamma-\frac{1}{2}]^{\gamma}$, et tous les autres coefficients se réduisent à zéro: la formule devient donc tout simplement

$$\frac{(-)^{\gamma+1}}{\gamma}\,D_x{}^{\gamma+1}R^{\gamma}=[\gamma-\tfrac{1}{2}]^{\gamma}\,\Lambda^{\gamma}\,Q^{-2\gamma-1}.$$

10. Dans le cas $r>\gamma+1$ il convient de modifier la forme de l'équation. J'écris $r=\gamma+1+s$, puis en faisant attention que les coefficients $L'_{\gamma+1+s,\,\theta}$ se réduisent à zéro pour $\theta<\gamma$, on peut écrire $\gamma+\theta$ au lieu de θ, et dans la formule nouvelle étendre θ depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=s$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\frac{(-)^{\gamma+1+s}}{\gamma}\,D_x{}^{\gamma+1+s}R^{\gamma}=\;&L'_{\gamma+1+s,\,\gamma}\,\Lambda^{\gamma}\,Q^{-2\gamma-1-s}\,R^{0}\\&\vdots\\&+L'_{\gamma+1+s,\,\gamma+\theta}\,\Lambda^{\gamma+\theta}\,Q^{-2\gamma-1-s-\theta}\,R^{-\theta}\\&\vdots\\&+L'_{\gamma+1+s,\,\gamma+s}\,\Lambda^{\gamma+s}\,Q^{-2\gamma-1-2s}\,R^{-s},\end{aligned}$$

et dans cette équation le côté gauche peut s'exprimer sous la forme

$$L'_{\gamma+1,\,\gamma}\,\Lambda^{\gamma}\,(-)^{s}\,D_x{}^{s}\,Q^{-2\gamma-1}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}D_x{}^{s}\,Q^{-2\gamma-1}=\;&L''_{s,\,0}\,Q^{-2\gamma-1-s}\\&\vdots\\&+L''_{s,\,\theta}\,\Lambda^{\theta}\,Q^{-2\gamma-1-s-\theta}\,R^{-\theta}\\&\vdots\\&+L''_{s,\,s}\,\Lambda^{s}\,Q^{-2\gamma-1-2s}\,R^{-s},\end{aligned}$$

où $L''_{s,\theta}=(-)^{s}L'_{\gamma+1+s,\,\gamma+\theta}-L'_{\gamma+1,\,\gamma}$, et en substituant pour les coefficients L' leurs valeurs, et en faisant attention que $[-\theta-1]^{s-\theta}=(-)^{s-\theta}[s]^{s-\theta}$,

on trouve

$$L''_{s,\theta}=\frac{(-)^{\theta}\,[2\gamma+s+\theta]^{2\gamma+2\theta}\,[s]^{s-\theta}}{2^{2\theta}\,[2\gamma]^{2\theta}\,[\gamma+\theta]^{\theta}}=\frac{(-)^{\theta}\,[\gamma+\theta-\frac{1}{2}]^{\theta}\,[2\gamma+s+\theta]^{s-\theta}\,[s]^{s-\theta}}{[s-\theta]^{s-\theta}};$$

la formule qui vient d'être trouvée est donnée sous une forme différente dans mon mémoire déjà cité.

11. Je résume l'équation générale

$$L_{r+1,\,\theta+1}-(\beta+\gamma-r-2\theta-2)\,L_{r,\,\theta+1}-(\beta-r-\theta)\,L_{r,\,\theta}=0,$$

les conditions aux limites étant comme auparavant

$$L_{r,\,-1}=0,\quad L_{r,\,r+1}=0,\quad L_{0,\,0}=1.$$

On a en particulier

$$\begin{aligned}
&L_{r+1,\,0}-(\beta+\gamma-r\phantom{{}-2})\,L_{r,\,0} &&=0,\\
&L_{r+1,\,1}-(\beta+\gamma-r-2)\,L_{r,\,1}-(\beta-r\phantom{{}-1})\,L_{r,\,0} &&=0,\\
&L_{r+1,\,2}-(\beta+\gamma-r-4)\,L_{r,\,2}-(\beta-r-1)\,L_{r,\,1} &&=0,\\
&\;\vdots\\
&L_{r+1,\,r+1}\,\cdots\cdots\qquad\qquad\quad-(\beta-2r\phantom{{}-1})\,L_{r,\,r} &&=0.
\end{aligned}$$

De là on voit tout de suite que les valeurs de $L_{r,\,0}$, $L_{r,\,r}$ sont

$$L_{r,\,0}=[\beta+\gamma]^r,\quad L_{r,\,r}=[\beta,\,-2]^r,$$

où dans la dernière équation la notation au côté droit dénote une factorielle à différence -2.

12. Les autres coefficients $L_{r,\,1}$, $L_{r,\,2}$, etc. peuvent s'obtenir successivement par une intégration directe des équations; et quoiqu'on ne les obtienne pas de cette manière sous la forme la plus commode, cependant il convient de donner l'investigation. Pour $L_{r,\,1}$ on peut écrire

$$L_{r,\,1}=[\beta+\gamma-2]^r\,M_{r,\,1},$$

l'équation pour $M_{r,\,1}$ sera

$$M_{r+1,\,1}-M_{r,\,1}=\frac{(\beta-r)\,[\beta+\gamma]^r}{[\beta+\gamma-2]^{r+1}},=\frac{(\beta-r)\,(\beta+\gamma)\,(\beta+\gamma-1)}{(\beta+\gamma-r)\,(\beta+\gamma-r-1)\,(\beta+\gamma-r-2)},$$

laquelle peut aussi s'écrire

$$M_{r+1,\,1}-M_{r,\,1}=1+\frac{-\tfrac{1}{2}\,(r+2)\,(r+1)\,(\gamma-2)}{\beta+\gamma-r-2}+\frac{(r+1)\,r\,(\gamma-1)}{\beta+\gamma-r-1}+\frac{-\tfrac{1}{2}\,r\,(r-1)\,\gamma}{\beta+\gamma-r}.$$

Cette équation a une solution

$$M_{r,\,1}=r+\frac{A_r}{\beta+\gamma-r-1}+\frac{B_r}{\beta+\gamma-r},$$

cela donne en effet

$$M_{r+1,\,1}-M_{r,\,1}=1+\frac{A_{r+1}}{\beta+\gamma-r-2}+\frac{B_{r+1}-A_r}{\beta+\gamma-r-1}+\frac{-B_r}{\beta+\gamma-r},$$

et l'on doit ainsi avoir

$$A_{r+1}=-\tfrac{1}{2}\,(r+2)\,(r+1)\,(\gamma-2),\quad B_{r+1}-A_r=(r+1)\,r\,(\gamma-1),\quad -B_r=-\tfrac{1}{2}r\,(r-1)\,\gamma,$$

équations qui sont satisfaites par

$$A_r=-\tfrac{1}{2}\,(r+1)\,r\,(\gamma-2),\quad B_r=\tfrac{1}{2}r\,(r-1)\,\gamma.$$

Les conditions aux limites sont aussi satisfaites, et en formant l'expression de L_{r+1} on obtient

$$L_{r,\,1}=[\beta+\gamma-2]^r\left(r+\frac{-\tfrac{1}{2}\,(r+1)\,r\,(\gamma-2)}{\beta+\gamma-r-1}+\frac{\tfrac{1}{2}r\,(r-1)\,\gamma}{\beta+\gamma-r}\right).$$

13. La valeur de $L_{r,2}$ peut s'obtenir par un procédé semblable, et l'on a

$$L_{r,2} = [\beta+\gamma-4]^r \left(\tfrac{1}{2}r(r-1) + \frac{A_r}{\beta+\gamma-r-3} + \frac{B_r}{\beta+\gamma-r-2} + \frac{C_r}{\beta+\gamma-r-1} + \frac{D_r}{\beta+\gamma-r}\right),$$

où

$$\begin{aligned} A_r &= \tfrac{1}{48}(r+1)\,r\,((r^2+5r-6)\gamma^2 + (-11r^2-31r+42)\gamma + (24r^2+48r-72)),\\ B_r &= -\tfrac{3}{48}\,r(r-1)\,((r^2+3r-2)\gamma^2 + (-7r^2-13r+6)\gamma + 8r^2+16r),\\ C_r &= \tfrac{3}{48}(r-1)(r-2)\,((r^2+r)\gamma^2 + (-3r^2-3r)\gamma),\\ D_r &= -\tfrac{1}{48}(r-2)(r-3)\,((r^2-r)\gamma^2 + (r^2-r)\gamma), \end{aligned}$$

et l'on peut remarquer que les suites des coefficients numériques (1, 1, 1, 1), (5, 3, 1, −1), (−6, −2, 0, 0) ont respectivement les premières, secondes, et troisièmes différences égales à zéro, les suites (−11, −7, −3, 1), (−31, −13, −3, −1) ont respectivement les secondes, et troisièmes différences égales à zéro, et la suite (24, 8, 0, 0) a les troisièmes différences égales à zéro. Je remarque que pour $r=1$, $r=2$ les expressions de $L_{r,1}$, $L_{r,2}$ donnent

$$L_{1,1} = (\beta+\gamma-2)\left(1 - \frac{(\gamma-2)}{\beta+\gamma-2}\right), = \beta,$$

$$L_{2,2} = (\beta+\gamma-4)(\beta+\gamma-5)\left(1 + \frac{\gamma^2-8\gamma+15}{\beta+\gamma-5} + \frac{-\gamma^2+6\gamma-8}{\beta+\gamma-4}\right), = \beta(\beta-2),$$

lesquelles s'accordent avec les résultats donnés par l'expression générale de $L_{r,r}$.

14. L'expression de $L_{r,1}$ peut se transformer en

$$L_{r,1} = r\beta[\beta+\gamma-2]^{r-1} - \tfrac{1}{2}r(r-1)[\beta+\gamma-2]^{r-2},$$

et l'expression de $L_{r,2}$ peut de même, avec beaucoup plus de peine, se transformer en

$$L_{r,2} = \tfrac{1}{2}r(r-1)\left\{\begin{array}{l} \beta(\beta-2)[\beta+\gamma-4]^{r-2} \\ -\quad (r-2)\beta(\beta-1)[\beta+\gamma-4]^{r-3} \\ +\ \tfrac{1}{2}(r-2)(r-3)\,\tfrac{1}{2}(\beta+1)\beta[\beta+\gamma-4]^{r-4}, \end{array}\right.$$

et la forme de ces équations et d'autres considérations m'ont conduit à assumer en général

$$\begin{array}{rlll} L_{r,\theta} = & \dfrac{1}{[\theta]^\theta} & A_{\theta,0}\,[r]^\theta & [\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta} \\ & \vdots & & \\ & -\dfrac{1}{[\theta-1]^{\theta-1}[1]^1} & \tfrac{1}{2}A_{\theta,1}\,[r]^{\theta+1} & [\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta-1} \\ & \vdots & & \\ & +\dfrac{(-)^\sigma}{[\theta-\sigma]^{\theta-\sigma}[\sigma]^\sigma}\cdot\dfrac{1}{2^\sigma} & A_{\theta,\sigma}\,[r]^{\theta+\sigma} & [\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta-\sigma} \\ & \vdots & & \\ & \dfrac{(-)^\theta}{[\theta]^\theta} & A_{\theta,\theta}\,[r]^{2\theta} & [\beta+\gamma-2\theta]^{r-2\theta}. \end{array}$$

15. En posant pour plus de commodité $\theta - 1$ au lieu de θ dans l'équation aux différences, cette équation devient

$$L_{r+1,\,\theta} - (\beta + \gamma - r - 2\theta)\, L_{r,\,\theta} = (\beta - r - \theta + 1)\, L_{r,\,\theta-1},$$

et puis substituant dans cette équation la valeur assumée de $L_{r,\,\theta}$, et les valeurs correspondantes de $L_{r+1,\,\theta}$ et $L_{r,\,\theta-1}$, le terme général au côté gauche sera

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - \sigma]^{\theta-\sigma}}\, \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta+\sigma-1} [\beta + \gamma - 2\theta]^{r-\theta-\sigma} A_{\theta,\,\sigma}$$

$$\times [(r+1)(\beta + \gamma - r - \theta - \sigma) - (\beta + \gamma - r - 2\theta)(r - \theta - \sigma + 1)];$$

l'expression en [ ] est $(\theta + \sigma)(\beta + \gamma - 2\theta + 1)$, et en substituant cette valeur le terme général au côté gauche devient

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - \sigma]^{\theta-\sigma}} \cdot \frac{1}{2^\sigma} (\theta + \sigma) [r]^{\theta+\sigma-1} [\beta + \gamma - 2\theta + 1]^{r+1-\theta-\sigma} A_{\theta,\,\sigma}.$$

Le terme général au côté droit est

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - 1 - \sigma]^{\theta-1-\sigma}}\, \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta-1-\sigma} [\beta + \gamma - 2\theta + 1]^{r-\theta-\sigma} A_{\theta-1,\,\sigma}$$

$$\times (\beta - r - \theta + 1)(\beta + \gamma - 2\theta + 2),$$

dont le dernier facteur est égal à

$$(\beta + \gamma - r - \theta + 1 + \sigma)(\beta - 2\theta + 2 - \sigma) - (r - \theta + 1 - \sigma)(\gamma + \sigma);$$

et en substituant cette valeur le terme devient

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - 1 - \sigma]^{\theta-1-\sigma}}\, \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta-1+\sigma} [\beta + \gamma - 2\theta - 1]^{r-\theta-\sigma+1} (\beta - 2\theta + 2 - \sigma)\, A_{\theta-1,\,\sigma}$$

$$- \frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - 1 - \sigma]^{\theta-1-\sigma}} \cdot \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta+\sigma} [\beta + \gamma - 2\theta + 1]^{r-\theta-\sigma} (\gamma + \sigma) A_{\theta-1,\,\sigma}.$$

En écrivant dans la seconde ligne (ce qui est permis) $\sigma - 1$ au lieu de σ, cette ligne devient

$$- \frac{(-)^{\sigma-1}}{[\sigma - 1]^{\sigma-1} [\theta - \sigma]^{\theta-\sigma}} \cdot \frac{1}{2^{\sigma-1}} [r]^{\theta+\sigma-1} [\beta + \gamma - 2\theta + 1]^{r-\theta-\sigma+1} (\gamma + \sigma - 1)\, A_{\theta-1,\,\sigma-1},$$

et les deux lignes ensemble seront

$$\frac{(-)^\sigma}{[\sigma]^\sigma [\theta - \sigma]^{\theta-\sigma}}\, \frac{1}{2^\sigma} [r]^{\theta+\sigma-1} [\beta + \gamma - 2\theta + 1]^{r-\theta-\sigma+1}$$

$$\times [(\theta - \sigma)(\beta - 2\theta + 2 - \sigma)\, A_{\theta-1,\,\sigma} + 2\sigma (\gamma + \sigma - 1)\, A_{\theta-1,\,\sigma-1}],$$

ce qui est le terme général au côté droit. En comparant cela avec l'expression ci-dessus trouvée pour le terme général au côté gauche on obtient

$$(\theta+\sigma) A_{\theta,\sigma} = (\theta-\sigma)(\beta-2\theta+2-\sigma) A_{\theta-1,\sigma} + 2\sigma(\gamma+\sigma-1) A_{\theta-1,\sigma-1},$$

pour l'équation aux différences à laquelle doit satisfaire le coefficient $A_{\theta,\sigma}$; en y écrivant

$$A_{\theta,\sigma} = [\gamma+\sigma-1]^{\sigma} B_{\theta,\sigma},$$

on aura pour $B_{\theta,\sigma}$ l'équation

$$(\theta+\sigma) B_{\theta,\sigma} = (\theta-\sigma)(\beta-2\theta+2-\sigma) B_{\theta-1,\sigma} + 2\sigma B_{\theta-1,\sigma-1},$$

et on voit sans peine que les conditions aux limites sont

$$B_{\theta,-1}=0, \quad B_{\theta,\theta+1}=0, \quad B_{0,0}=1.$$

16. On a en particulier

$$B_{\theta,0} = (\beta-2\theta+2) B_{\theta-1,0}, \quad B_{\theta,\theta} = B_{\theta-1,\theta-1},$$

et de là

$$B_{\theta,0} = [\beta, -2]^{\theta}, \quad B_{\theta,\theta} = 1.$$

Les autres fonctions $B_{\theta,\sigma}$ sont des fonctions rationnelles et entières de β, du degré $\theta-\sigma$, données par l'équation aux différences; mais les coefficients numériques des différentes puissances de β n'admettent, à ce qu'il paraît, aucune expression simple; les fonctions $B_{\theta,\sigma}$ sont, pour ainsi dire, une espèce de transcendantes rationnelles propres pour exprimer la valeur de $L_{r,\theta}$, et il sera suffisant de tabuler les valeurs de $B_{\theta,\sigma}$ sans pousser plus loin la recherche de la loi de ces valeurs. On a en effet pour $B_{0,0}$, $B_{1,0}$, etc.... $B_{1,1}$ les valeurs

$$\begin{array}{lllll}
1, & \beta, & \beta(\beta-2), & \beta(\beta-2)(\beta-4), & \beta(\beta-2)(\beta-4)(\beta-6), \text{ etc. ...} \\
 & 1, & \beta-1, & \beta^2-4\beta+\frac{5}{2}, & \beta^3-9\beta^2+\frac{43}{2}\beta-\frac{21}{2}, \\
 & & 1\ , & \beta-2\ , & \beta^2-6\beta+7, \\
 & & & 1\ , & \beta-3, \\
 & & & & 1.
\end{array}$$

17. Puis en substituant pour $A_{\theta,\sigma}$ la valeur $[\gamma+\sigma-1]^{\sigma} B_{\theta,\sigma}$ on trouve

$$\begin{aligned}
L_{r,\theta} = {} & \frac{1}{[\theta]^{\theta}} \quad B_{\theta,0} \quad [r]^{\theta} \quad [\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta} \\
& + \frac{(-)}{[\theta-1]^{\theta-1}[1]^1} \ \frac{1}{2} B_{\theta,1} \ [\gamma]^1 [r]^{\theta+1} \quad [\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta-1} \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{(-)^{\sigma}}{[\theta-\sigma]^{\theta-\sigma}[\sigma]^{\sigma}} \ \frac{1}{2^{\sigma}} B_{\theta,\sigma} [\gamma+\sigma-1]^{\sigma} [r]^{\theta+\sigma} [\beta+\gamma-2\theta]^{r-\theta-\sigma} \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{(-)^{\theta}}{[\theta]^{\theta}} \ \frac{1}{2^{\theta}} B_{\theta,\theta} [\gamma+\theta-1]^{\theta} \ [r]^{2\theta} \ [\beta+\gamma-2\theta]^{r-2\theta},
\end{aligned}$$

ce qui est l'expression de $L_{r,\theta}$ dans la formule

$$
\begin{aligned}
D_x{}^r Q^\beta B^\gamma = (-)^{-r} \quad & L_{r,0} \quad Q^{\beta-\gamma} \quad R^\gamma \\
& \vdots \\
+ (-)^{r-\theta} & \frac{1}{2^\theta} L_{r,\theta} \Lambda^\theta Q^{\beta-r-\theta} R^{\gamma-\theta} \\
& \vdots \\
+ \quad & \frac{1}{2^r} L_{r,r} \Lambda^r Q^{\beta-2r} \quad R^{\gamma-r}.
\end{aligned}
$$

§ III.

18. Je passe à présent au développement de

$$(P^{-1} Q^4 D_x)^r P^\alpha \quad Q^\beta R^\gamma, \quad (\alpha = \gamma - \beta),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(P^{-1} Q^4 D_x)^r P^{\gamma-\beta} Q^\beta R^\gamma.$$

On a comme auparavant

$$P^{-1} Q^4 D_x P^\alpha Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{2}\beta P^\alpha Q^{\beta+2} R^\gamma - \gamma P^{\alpha-1} Q^{\beta+3} R^\gamma + 2\alpha P^{\alpha-2} Q^{\beta+4} R^\gamma,$$

et de là

$$
\begin{aligned}
P^{-1} Q^4 D_x P^{\gamma-\beta} Q^\beta R^\gamma &= \tfrac{1}{2}\beta P^{\gamma-\beta} Q^{\beta+2} R^\gamma - \gamma P^{\gamma-\beta-1} Q^{\beta+3} R^\gamma + 2(\gamma-\beta) P^{\gamma-\beta-2} Q^{\beta+4} R^\gamma, \\
&= \tfrac{1}{2}\beta (P - 2Q) P^{\gamma-\beta-1} Q^{\beta+2} R^\gamma - (\gamma-\beta)(P-2Q) P^{\gamma-\beta-2} Q^{\beta+3} R^\gamma,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$P^{-1} Q^4 D_x P^{\gamma-\beta} Q^\beta R^\gamma = \tfrac{1}{2}\beta P^{\gamma-\beta-1} Q^{\beta+2} R^{\gamma+1} - (\gamma-\beta) P^{\gamma-\beta-2} Q^{\beta+3} R^{\gamma+1}.$$

On peut donc écrire

$$
\begin{aligned}
(P^{-1} Q^4 D_x)^r P^{\gamma-\beta} Q^\beta R^\gamma = \quad & \frac{1}{2^r} N_{r,0} P^{\gamma-\beta-r} Q^{\beta+2r} R^{\gamma+r} \\
& \vdots \\
+ & \frac{(-)^\theta}{2^{r-\theta}} N_{r,\theta} P^{\gamma-\beta-r-\theta} Q^{\beta+2r+\theta} R^{\beta+r} \\
& \vdots \\
+ & (-)^r N_{r,r} P^{\gamma-\beta-2r} Q^{\beta+2r} R^{\gamma+r},
\end{aligned}
$$

et on trouve pour $N_{r,\theta}$ l'équation aux différences

$$N_{r+1,\theta+1} - (\beta + 2r + \theta + 1) N_{r,\theta+1} - (\gamma - \beta - r - \theta) N_{r,\theta} = 0,$$

laquelle avec les conditions aux limites

$$N_{r,-1} = 0, \quad N_{r,r+1} = 0, \quad N_{0,0} = 1,$$

détermine le coefficient $N_{r,\theta}$.

On a, en particulier

$$\begin{aligned}
N_{r+1,\,0} &= (\beta+2r)\qquad N_{r,\,0},\\
N_{r+1,\,1} &= (\beta+2r+1)\qquad N_{r,\,1}+(\gamma-\beta-r)\qquad N_{r,\,0},\\
N_{r+1,\,2} &= (\beta+2r+2)\qquad N_{r,\,2}+(\gamma-\beta-r-1)\,N_{r,\,1},\\
&\vdots\\
N_{r+1,\,r+1} &= (\gamma-\beta-2r)\,N_{r,\,r},
\end{aligned}$$

lesquelles donnent tout de suite

$$N_{r,\,0}=[\beta+2r-2,\,-2]^r,\quad N_{r,\,r}=[\gamma-\beta,\,-2]^r.$$

19. L'équation ressemble à celle pour $L_{r,\theta}$, et l'on pourrait croire que l'intégration s'accomplirait d'une manière semblable, mais cela n'est pas ainsi ; car en considérant la seconde équation de la suite, c'est-à-dire

$$N_{r+1,\,1}-(\beta+2r+1)\,N_{r,\,1}=(\gamma-\beta-r)\,[\beta+2r-2,\,-2]^r,$$

en y mettant

$$N_{r,\,1}=[\beta+2r-1,\,-2]^r\,M_{r,\,1},$$

on obtient

$$[\beta+2r+1,\,-2]^{r+1}\,(M_{r+1,\,1}-M_{r,\,1})=(\gamma-\beta-r)\,[\beta+2r-2,\,-2]^r,$$

et de là

$$M_{r+1,\,1}-M_{r,\,1}=\frac{(\gamma-\beta-r)\,[\beta+2r-2,\,-2]^r}{[\beta+2r+1,\,-2]^{r+1}};$$

mais les facteurs du numérateur, et du dénominateur ne sont pas ici (ce qui arrivait dans l'équation pour la quantité dénotée auparavant par le même symbole $M_{r,\,1}$) de la même forme, et il n'y a pas de simplification dans la forme de la fraction. En écrivant successivement $r-1,\ r-2,\ldots 2,\ 1,\ 0$ pour r on trouve

$$M_{r,\,1}=\gamma-\beta+\frac{(\gamma-\beta-1)\,\beta}{\beta+3}+\frac{(\gamma-\beta-2)\,(\beta+2)\,\beta}{(\beta+5)\,(\beta+3)}$$
$$\ldots+\frac{(\gamma-\beta-r+1)\,(\beta+2r-4)\ldots(\beta+2)\,\beta}{(\beta+2r-1)\ldots(\beta+5)\,(\beta+3)},$$

et de là

$$N_{r,\,1}=(\beta+2r-1)\ldots(\beta+5)\,(\beta+3)\left(\gamma-\beta+\frac{(\gamma-\beta-1)\,\beta}{\beta+3}+\frac{(\gamma-\beta-2)\,(\beta+2)\,\beta}{(\beta+5)\,(\beta+3)}\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(\gamma-\beta-r+1)\,(\beta+2r-4)\ldots(\beta+2)\,\beta}{(\beta+2r-1)\ldots(\beta+5)\,(\beta+3)}\right).$$

Il ne paraît pas que la suite en [ ] puisse être additionnée, et cela m'empêche de pousser plus loin la recherche de la forme des coefficients $N_{r,\,\theta}$; la solution, telle que je l'ai trouvée, est donc donnée par l'expression de $(P^{-1}\,Q^4\,D_x)^r\,P^{\gamma-\beta}\,Q^\beta\,R^\gamma$ en termes des coefficients numériques $N_{r,\,\theta}$, et par l'équation aux différences et conditions aux limites qui déterminent les coefficients $N_{r,\,\theta}$.

§ IV.

20. La première des identités du Prof. Donkin est

$$D_x{}^n Q^{-1} R^n = (-)^n \Lambda^n [n - \tfrac{1}{2}]^n Q^{-2n-1};$$

mais par une forme ci-dessus trouvée No. 9 en y écrivant n au lieu de γ on a

$$\frac{(-)^{n+1}}{n} D_x{}^{n+1} \quad R^n = \Lambda^n [n - \tfrac{1}{2}]^n Q^{-2n-1},$$

et, en remarquant que $D_x R^n = -nQ^{-1} R^n$, on voit que les deux formules sont identiques, et la vérité du théorème est ainsi démontrée.

21. La seconde des deux identités est

$$P^{-n+s-1} Q^{2n+2} D_x{}^n Q^{-1} R^s = (P^{-1} Q^4 D_x)^n P^{n+s-1} Q^{-2n+1} R^{-n+s}.$$

On a par la formule (No. 10) en y mettant s au lieu de γ et $n+1$ au lieu de r,

$$\begin{aligned} \frac{(-)^{n+1}}{s} D_x{}^{n+1} R^s = \quad & L'_{n+1,\,0} \quad Q^{-n-1} \quad R^s \\ & \vdots \\ + & L'_{n+1,\,\theta} \Lambda^\theta \; Q^{-n-1-\theta} R^{s-\theta} \\ & \vdots \\ + & L'_{n+1,\,n} \Lambda^n \, Q^{-2n-1} \quad R^{s-n}, \end{aligned}$$

où

$$L'_{n+1,\,\theta} = \frac{[\theta - \frac{1}{2}]^\theta \, [n+\theta]^{n-\theta} \, [s-\theta-1]^{n-\theta}}{[n-\theta]^{n-\theta}}.$$

22. En renversant l'ordre des termes et mettant aussi $L'_{n+1,\,\theta} = V_{n-\theta}$, de manière que

$$V_\theta = \frac{[n - \frac{1}{2} - \theta]^{n-\theta} \, [2n-\theta]^\theta \, [s-n+\theta-1]^\theta}{\lfloor \theta \rfloor^\theta},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{(-)^{n+1}}{s} D_x{}^{n+1} R^s = \quad & V_0 \, \Lambda^n \quad Q^{-2n-1} \quad R^{s-n} \\ & \vdots \\ + & V^\theta \, \Lambda^{n-\theta} \, Q^{-2n-1+\theta} \, R^{s-n+\theta} \\ & \vdots \\ + & V_n \qquad\quad Q^{-n-1} \quad R^s, \end{aligned}$$

et en remarquant que $D_x R^s = -sQ^{-1} R^s$, et que l'on a aussi $\Lambda = P^2 - 4Q^2$ et $R = P - 2Q$, de manière que $\Lambda R^{-1} = (P + 2Q)$, l'équation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} Q^{2n+2} P^{-n+s-1} D_x{}^n Q^{-1} R = (-)^n \times \quad & V_0 \, (P+2Q)^n \quad P^{-n+s-1} \, QR^s \\ & \vdots \\ + & V_\theta \, (P+2Q)^{n-\theta} \, P^{-n+s-1} \, Q^{1+\theta} \, R^s \\ & \vdots \\ + & V_n \qquad\qquad\quad P^{-n+s-1} \, Q^{1+n} \, R^s, \end{aligned}$$

et en développant les binomiels on obtient pour $Q^{2n+2} P^{-n+s-1} D_x{}^n Q^{-1} R^s$ la valeur $(-)^n \times$

$$(V_0) P^{s-1} QR^s + \left(\frac{[n]^1}{[1]^1} 2^1 V_0 + V_1\right) P^{s-2} Q^2 R^s + \left(\frac{[n]^2}{[2]^2} 2^2 V_0 + \frac{[n-1]^1}{[1]^1} 2^1 V_1 + V_2\right) P^{s-3} Q^3 R^s$$

$$\ldots + (2^n V_0 + 2^{n-1} V_1 \ldots + 2^1 V_{n-1} + V_n) P^{s-n-1} Q^{n+1} R^s.$$

Cela devrait être égal à

$$(P^{-1} Q^4 D_x)^n P^{n+s-1} Q^{-2n+1} R^{-n+s}$$

et le développement de cette dernière expression se déduit de celui (No. 18) de

$$(P^{-1} Q^4 D_x)^r P^{\gamma-\beta} \quad Q^\gamma \quad R^\beta$$

en y écrivant $n, -2n+1, -n+s$ au lieu de r, β, γ; la valeur sera ainsi

$$= \frac{1}{2^n} N_{n,\,0} P^{s-1} QR^s - \frac{1}{2^{n-1}} N_{n,\,1} P^{s-2} Q^2 R^s + \frac{1}{2^{n-2}} N_{n,\,2} P^{s-3} Q^3 R^s \ldots + (-)^n N_{n,\,n} P^{s-n-1} Q^{n+1} R^s,$$

laquelle a la même forme que le développement de la fonction au côté gauche de l'équation, et l'identité des deux expressions dépend des équations

$$\frac{1}{2^n} N_{n,0} = (-)^n \qquad V_0,$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} N_{n,1} = (-)^{n-1} \left(\frac{[n]^1}{[1]^1} 2^1 V_0 + V_1\right),$$

$$\frac{1}{2^{n-2}} N_{n,2} = (-)^{n-2} \left(\frac{[n]^2}{[2]^2} 2^2 V_0 + \frac{[n-1]^1}{[1]^1} 2^1 V_1 + V_2\right),$$

$$\vdots$$

$$N_{n,n} = (2^n V_0 + 2^{n-1} V_1 \ldots + 2 V_{n-1} + V_n);$$

mais comme on ne sait pas la forme générale des coefficients $N_{n,\,\theta}$ je n'ai pas pu vérifier complètement ces équations. On a cependant en mettant $n, -2n+1, -n+s$ pour r, β, γ

$$N_{n,\,0} = [-1, +2]^n, \; = (-)^n \; [2n-1, -2]^n, \; = (-1)^n \, 2^n \; [n-\tfrac{1}{2}]^n,$$

$$N_{n,\,1} = s\,[-3, +2]^{n-1}, \; = (-)^{n-1} s\,[2n-1, -2]^{n-1}, \; = (-)^{n-1} 2^{n-1} s\,[n-\tfrac{1}{2}]^{n-1},$$

et les deux premières équations seront

$$[n-\tfrac{1}{2}]^n = [n-\tfrac{1}{2}]^n; \quad s\,[n-\tfrac{1}{2}]^{n-1} = \frac{n}{1} 2\,[n-\tfrac{1}{2}]^n + [n-\tfrac{3}{2}]^{n-1} (2n-1)(s-n),$$

où dans la seconde équation l'expression au côté droit est

$$[2n + 2(s-n)]\,[n-\tfrac{1}{2}]^n = 2s\,[n-\tfrac{1}{2}]^n = s\,[n-\tfrac{1}{2}]^{n-1},$$

comme cela devrait être. La dernière équation de la suite est

$$N_{n,\,n} = 2^n V_0 + 2^{n-1} V_1 \ldots + 2 V_{n-1} + V_n$$

et comme on a $N_{n,\,n} = [n+s-1, -2]^n$, cette dernière équation peut aussi se vérifier.