250.

SUR LA SURFACE QUI EST L'ENVELOPPE DES PLANS CONDUITS PAR LES POINTS D'UN ELLIPSOIDE PERPENDICULAIREMENT AUX RAYONS MENÉS PAR LE CENTRE.

[From the *Annali di Matematica pura ed applicata* (Tortolini), tom. II. (1859), pp. 3—14.]

La considération de la surface dont il s'agit me fut suggérée, il y a quelques années par le Prof. Stokes, mais il convient de remarquer que la courbe enveloppe des droites menées par les points d'une ellipse perpendiculaires aux rayons conduits par le centre, est mentionnée en passant dans le mémoire de M. Tortolini "Sulle relazioni ec." *Annali*, tom. VI. pp. 433—446, 1855 (voir p. 461), où il trouve que l'équation de la courbe est

$$[4(a^4+b^4-a^2b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)]^3$$
$$=[9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)]^2,$$

équation qui était trouvée en égalant à zéro le discriminant d'une fonction quadratique. L'auteur remarque que cette équation fut trouvée par lui en 1846 dans la *Raccolta Scientifica di Roma*, et il remarque que la courbe est connue sous le nom de la courbe de Talbot.

Selon ma méthode l'équation de la courbe est trouvée en égalant à zéro le discriminant d'une fonction cubique, et l'équation de la surface est trouvée en égalant à zéro le discriminant d'une fonction biquadratique. Comme on a besoin de la courbe pour la discussion de la surface, je commence par la considération de la courbe.

On voit sans peine qu'en s'imaginant un cercle passant par le centre de l'ellipse et touchant l'ellipse à l'un quelconque de ses points, le point correspondant de la courbe est situé à l'extrémité du diamètre du cercle, lequel diamètre passe par le centre de l'ellipse, ou ce qui est la même chose (prenant pour origine le centre de l'ellipse) les coordonnées du point de la courbe sont respectivement les doubles des coordonnées du centre du cercle. Prenez X, Y pour les coordonnées du point de l'ellipse, et x, y pour celles du point de la courbe, l'équation de l'ellipse sera

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

et, de la construction géométrique dont je viens de parler, on obtient sans peine

$$x=X\left(2-\frac{1}{a^2}(X^2+Y^2)\right), \quad y=Y\left(2-\frac{1}{b^2}(X^2+Y^2)\right)$$

lesquelles sont les expressions de x, y en X, Y.

Ces expressions font voir que les points selon lesquels l'ellipse est coupée par le cercle $X^2+Y^2=2a^2$ (c'est-à-dire les points

$$(b^2-a^2)\,X^2=a^2(b^2-2a^2), \qquad (b^2-a^2)\,Y^2=a^2b^2,$$

qui sont des points imaginaires de l'ellipse) donnent pour la courbe des points doubles sur l'axe des Y (ces points sont toujours imaginaires) et de même les points selon lesquels l'ellipse est coupée par le cercle $X^2+Y^2=2b^2$ (c'est-à-dire les points

$$(a^2-b^2)\,X^2=a^2b^2, \qquad (a^2-b^2)\,Y^2=b^2(a^2-2b^2),$$

qui sont des points réels de l'ellipse en supposant $a^2>2b^2$) donnent pour la courbe des points doubles sur l'axe des X. Les coordonnées de ces points doubles sont données par $a^2x^2=4b^2(a^2-b^2)$, $y^2=0$, et elles sont ainsi réelles, soit pour $a^2<2b^2$, soit pour $a^2>2b^2$, mais dans le premier cas les points doubles sont des points conjugués.

En formant les équations

$$dx=\left(2-\frac{1}{a^2}(3X^2+Y^2)\right)dX-\frac{2XY}{a^2}\,dY=0,$$

$$dy=-\frac{2XY}{b^2}\,dX+\left(2-\frac{1}{b^2}(X^2+3Y^2)\right)dY=0,$$

et en éliminant dX, dY, on obtient l'équation

$$\left(2-\frac{1}{a^2}(3X^2+Y^2)\right)\left(2-\frac{1}{b^2}(X^2+3Y^2)\right)-\frac{4X^2Y^2}{a^2b^2}=0,$$

laquelle au moyen de l'équation de l'ellipse se réduit à

$$-2(X^2+Y^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+3(X^2+Y^2)^2\frac{1}{a^2b^2}=0.$$

On voit que les points de l'ellipse lesquels donnent lieu à des points de rebroussement de la courbe doivent être situés sur la courbe donnée par l'équation dernièrement mentionnée. Cette équation se divise en deux facteurs: l'équation $X^2+Y^2=0$ combinée avec l'équation de l'ellipse donne les points $X^2=-\dfrac{a^2b^2}{a^2-b^2}$, $Y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2-b^2}$, lesquels sont des points imaginaires de l'ellipse; mais on peut se convaincre sans peine que ces points *ne donnent pas lieu* à des points de rebroussement de la courbe. L'autre facteur, savoir $X^2=Y^2=\frac{2}{3}(a^2+b^2)$, combiné avec l'équation de l'ellipse donne les points

$$(a^2-b^2)\,X^2=\tfrac{1}{3}\,a^2\,(2a^2-b^2),\qquad (a^2-b^2)\,Y^2=\tfrac{1}{3}\,b^2\,(a^2-2b^2),$$

lesquels pour $a^2>2b^2$ sont des points réels de l'ellipse, et qui donnent lieu à des points de rebroussement de la courbe. On trouve alors pour les coordonnées des points de rebroussement

$$(a^2-b^2)\,a^2x^2=\tfrac{4}{27}\,(2a^2-b^2)^3,\qquad (b^2-a^2)\,b^2y^2=\tfrac{4}{27}\,(2b^2-a^2)^3$$

lesquels sont aussi des points réels pour $a^2>2b^2$.

On trouve sans peine les points dans lesquels la courbe coupe l'ellipse; en effet ces points se dérivent des points où l'ellipse est coupée par le cercle

$$X^2+Y^2=\frac{3a^2b^2}{a^2+b^2},$$

lesquels sont des points réels de l'ellipse si $a^2>2b^2$, et les coordonnées sont données par

$$(a^4-b^4)\,X^2=a^2b^2\,(2a^2-b^2),\qquad (b^4-a^4)\,Y^2=a^2b^2\,(2b^2-a^2),$$

de là on obtient, pour les coordonnées des points où l'ellipse est coupée par la courbe,

$$(a^2+b^2)^3\,(a^2-b^2)\,x^2=a^2b^2\,(2a^2-b^2)^3,\qquad (a^2+b^2)^3\,(b^2-a^2)\,y^2=a^2b^2\,(2b^2-a^2)^3,$$

lesquels sont de même des points réels si $a^2>2b^2$. A présent il est facile d'apercevoir la forme de la courbe; en effet on voit d'abord que la courbe est symétrique par rapport à chacune des deux axes et qu'elle touche l'ellipse aux extrémités des deux axes: pendant que $a^2<2b^2$ (c'est-à-dire pendant que l'ellipse n'est pas trop excentrique) la courbe est une ovale située entièrement en dedans de l'ellipse. Seulement il y a deux points conjugués sur l'axe de x. En supposant $a^2=2b^2$, on n'a plus les deux points conjugués, mais l'apparence de la courbe n'est pas autrement changée: cependant les points aux extrémités de l'axe majeur de l'ellipse sont ici des points singuliers d'une espèce particulière; car chacun de ces points est formé par l'union et l'amalgamation de deux points de rebroussement et d'un point double. Mais, pour $a^2>2b^2$, la forme de la courbe est entièrement changée: aux extrémités de l'axe majeur, la courbe est située en dehors de l'ellipse, avec sa convexité dans le sens opposé à celle de l'ellipse; la courbe va de chaque côté jusqu'à un point de rebroussement où elle change de direction, et puis elle coupe l'ellipse, coupe aussi l'axe majeur dans un point en dedans de l'ellipse (ce point est l'intersection de deux branches de la courbe, et ainsi un point double), et enfin la courbe arrive à l'extrémité de l'axe mineur où elle se réunit avec la branche située de l'autre côté de l'axe mineur; la construction géométrique par points donne le moyen de tracer la courbe avec exactitude; et dans le cas $a^2 > 2b^2$ on pourrait aussi par les valeurs ci-devant données pour les coordonnées construire les points doubles, et les points de rebroussement. Pour trouver l'équation de la courbe il faut éliminer X, Y entre l'équation de l'ellipse, et les équations trouvées pour x, y; pour faire cela j'écris $X^2 + Y^2 = \theta$, on a

$$x = X\left(2 - \frac{\theta}{a^2}\right), \qquad y = Y\left(2 - \frac{\theta}{b^2}\right),$$

et l'équation $X^2 + Y^2 = \theta$ et l'équation de l'ellipse donnent alors

$$\theta = \frac{x^2}{\left(2 - \frac{\theta}{a^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(2 - \frac{\theta}{b^2}\right)^2}, \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2\left(2 - \frac{\theta}{a^2}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2\left(2 - \frac{\theta}{b^2}\right)^2},$$

entre lesquelles il faut éliminer θ; en multipliant la première équation par 2, et la seconde équation par $-\theta$ et en ajoutant, on trouve

$$\theta = \frac{x^2}{2 - \frac{\theta}{a^2}} + \frac{y^2}{2 - \frac{\theta}{b^2}},$$

et la seconde équation est l'équation dérivée de celle-ci par rapport à θ; c'est-à-dire l'équation de la courbe sera trouvée en éliminant θ entre cette équation et sa dérivée par rapport à θ: en écartant les dénominateurs, l'équation devient

$$\theta^3 - \theta^2(2a^2 + 2b^2) + \theta(a^2x^2 + b^2y^2 + 4a^2b^2) - 2a^2b^2(x^2 + y^2) = 0,$$

et le discriminant de cette fonction cubique de θ, égalé à zéro donne l'équation de la courbe.

Je représente la fonction cubique par

$$(A, B, C, D \between \theta, 1)^3,$$

de manière que

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ B &= -\tfrac{2}{3}(a^2 + b^2), \\ C &= \tfrac{1}{3}(a^2x^2 + b^2y^2 + 4a^2b^2), \\ D &= -2a^2b^2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

En représentant le discriminant par $\square$, dans le cas actuel où $A = 1$, il sera convenable de se servir de la forme

$$A^2\square = 4(AC - B^2)^3 - (3ABC - A^2D - 2B^3)^2 = 0;$$

l'on a

$$AC - B^2 = \tfrac{1}{9}(3a^2x^2 + 3b^2y^2 - 4a^4 + 4a^2b^2 - 4b^4),$$
$$AD - BC = \tfrac{2}{9}[(a^2 - 8b^2)\,a^2x^2 + (b^2 - 8a^2)\,b^2y^2 + 4\,(a^2 + b^2)\,a^2b^2],$$
$$BD - C^2 = -\tfrac{1}{9}[a^4x^4 + 2a^2b^2x^2y^2 + b^2y^4 - 4\,(a^2 + 3b^2)\,a^2b^2x^2 - 4\,(b^2 + 3a^2)\,a^2b^2y^2 + 16a^4b^4],$$

et de là

$$3ABC - A^2D - 2B^3 = 2B\,(AC - B^2) - A\,(AD - BC)$$
$$= -\tfrac{2}{27}[9\,(a^2 - 2b^2)\,a^2x^2 + 9\,(b^2 - 2a^2)\,b^2y^2 - 8a^6 + 12a^4b^2 + 12a^2b^4 - 8b^6],$$

et l'équation de la courbe est ainsi trouvée sous la forme

$$(3a^2x^2 + 3b^2y^2 - 4a^4 + 4a^2b^2 - 4b^4)^3$$
$$+ [9\,(a^2 - 2b^2)\,a^2x^2 + 9\,(b^2 - 2a^2)\,b^2y^2 - 8a^6 + 12a^4b^2 + 12a^2b^4 - 8b^6]^2 = 0$$

laquelle est en effet la forme ci-devant mentionnée; j'ajoute que l'on trouverait les expressions déjà données pour les coordonnées des points de rebroussement en égalant à zéro les deux fonctions quadratiques qui entrent dans l'équation.

Je considère à présent la surface qui est l'enveloppe des plans menés par les points d'un ellipsoïde perpendiculairement aux rayons conduits par le centre. En s'imaginant une sphère qui passe par le centre de l'ellipsoïde et touche l'ellipsoïde dans l'un quelconque de ses points, le point correspondant de la surface sera à l'extrémité d'un diamètre de la sphère, lequel diamètre passe par le centre de l'ellipsoïde: ou ce qui est la même chose (prenant le centre de l'ellipsoïde pour origine) les coordonnées du point de la surface sont respectivement les doubles des coordonnées du centre de la sphère. Prenez X, Y, Z pour les coordonnées du point de l'ellipsoïde, et x, y, z pour les coordonnées du point de la surface, l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

et la construction qui vient d'être mentionnée donne

$$x = X\left[2 - \frac{1}{a^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right], \quad y = Y\left[2 - \frac{1}{b^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right], \quad z = Z\left[2 - \frac{1}{c^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right],$$

pour les expressions de x, y, z en fonction de X, Y, Z.

La discussion de la surface peut être effectuée au moyen de ces expressions. Il y a un assez grand nombre de différentes formes de la surface; mais le seul cas que je vais considérer (lequel apparemment est celui qui présente le plus grand nombre des singularités réelles) est le cas où $a^2 > 2b^2$, $b^2 > 2c^2$; en effet dans ce cas, les courbes du sixième ordre, ou sextiques, correspondantes aux sections principales de l'ellipsoïde ont chacune des points doubles et des points de rebroussement.

Les courbes selon lesquelles l'ellipsoïde est coupé par les sphères concentriques

$$X^2+Y^2+Z^2=2a^2, \qquad X^2+Y^2+Z^2=2b^2, \qquad X^2+Y^2+Z^2=c^2,$$

donnent lieu dans la surface à des courbes *nodales* (courbes doubles) dans les plans yz, zx, xy respectivement. La première de ces courbes d'intersection, et la courbe nodale dans le plan de zy qui y correspond, sont l'une et l'autre imaginaires: les deux autres courbes d'intersection, et les courbes nodales dans les plans de zx et xy qui y correspondent, sont réelles; la courbe selon laquelle l'ellipsoïde est coupé par la sphère

$$X^2+Y^2+Z^2=2b^2,$$

laquelle courbe est une espèce d'ovale autour de l'extrémité de l'axe le plus grand de l'ellipsoïde (il va sans dire que les ovales dont je parle sont des courbes à double courbure), cette courbe d'intersection, je dis, donne lieu à une courbe nodale hyperbolique sur le plan de ZX. Pour en trouver l'équation on a

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1, \qquad X^2+Y^2+Z^2=2b^2,$$

$$x=2X\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right), \qquad y=0, \qquad z=2Z\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right),$$

et de là, en éliminant X, Y, Z, on trouve

$$\frac{a^2x^2}{4b^2(a^2-b^2)}-\frac{c^2z^2}{4b^2(b^2-c^2)}=1$$

pour l'équation de la courbe nodale hyperbolique dans le plan de zx; on s'assure sans peine que cette courbe passe par les points doubles de la courbe sextique dans le plan de xy.

De même la courbe selon laquelle l'ellipsoïde est coupé par le sphère

$$X^2+Y^2+Z^2=2c^2,$$

laquelle courbe est une espèce d'ovale autour de l'extrémité de l'axe le plus petit, donne lieu à une courbe nodale elliptique dans le plan de xy, et l'on a d'une manière semblable

$$\frac{a^2x^2}{4c^2(a^2-c^2)}+\frac{b^2y^2}{4c^2(b^2-c^2)}=1$$

pour l'équation de cette courbe nodale elliptique dans le plan de xy: cette courbe passe par les points doubles des courbes sextiques dans les plans de yz et zy respectivement. La section de la surface par un plan principal de l'ellipsoïde est composée de la courbe sextique donnée par la section principale de l'ellipsoïde et de la courbe nodale (ellipse hyperbole, ou conique imaginaire) considérée comme deux coniques coïncidentes; les sections principales de la surface sont ainsi des courbes de l'ordre 10, et (ce qui sera montré plus complètement dans la suite) la surface elle-même est de l'ordre 10.

A présent je vais chercher la courbe sur l'ellipsoïde laquelle donne lieu à une courbe *cuspidale* (courbe de rebroussement) sur la surface. Pour cela je forme les équations:

$$dx = \left\{2 - \frac{1}{a^2}(3X^2 + Y^2 + Z^2)\right\} dX \qquad - \frac{2XY}{a^2} dY \qquad - \frac{2XZ}{a^2} dZ = 0,$$

$$dy = \qquad - \frac{2YX}{b^2} dX + \left\{2 - \frac{1}{b^2}(X^2 + 3Y^2 + Z^2)\right\} dY \qquad - \frac{2YZ}{b^2} dZ = 0,$$

$$dz = \qquad - \frac{2ZX}{c^2} dX \qquad - \frac{2ZY}{c^2} dY + \left\{2 - \frac{1}{c^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\right\} dZ = 0,$$

et en éliminant dX, dY, dZ et réduisant au moyen de l'équation de l'ellipsoïde on trouve

$$4\left(\frac{X^2}{a^4} + \frac{Y^2}{b^4} + \frac{Z^2}{c^4}\right) - 2(X^2 + Y^2 + Z^2)\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right) + 3(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 \frac{1}{a^2b^2c^2} = 0,$$

laquelle est l'équation d'une surface du quatrième ordre qui coupe l'ellipsoïde suivant une courbe qui donne lieu à une courbe cuspidale sur la surface. La courbe sur l'ellipsoïde rencontre chacune des sections principales dans les points qui donnent lieu à la courbe sextique qui correspond à la section principale, et dans les points selon lesquels la section principale est coupée par la courbe qui donne lieu à une courbe nodale: ainsi les points d'intersection de la surface du quatrième ordre avec la section principale

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,\ Y = 0,$$

sont les points d'intersection de cette ellipse avec les courbes

$$X^2 + Z^2 = \tfrac{2}{3}(a^2 + c^2) \text{ et } X^2 + Z^2 = 2b^2,$$

lesquels points sont réels; les points d'intersection avec la section principale

$$\frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,\ X = 0,$$

sont les points d'intersection de cette ellipse avec le cercle

$$Y^2 + Z^2 = \tfrac{2}{3}(b^2 + c^2),$$

lesquels points sont réels, et avec le cercle

$$Y^2 + Z^2 = 2a^2,$$

lesquels points sont imaginaires; les points d'intersection avec la section principale

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,\ Z = 0,$$

sont les points d'intersection de cette ellipse avec le cercle

$$X^2 + Y^2 = \tfrac{2}{3}(a^2 + b^2),$$

lesquels points sont réels, et avec le cercle

$$X^2 + Y^2 = 2c^2,$$

lesquels points sont imaginaires. La courbe sur l'ellipsoïde qui donne lieu à la courbe cuspidale rencontre les courbes sur l'ellipsoïde qui donnent lieu aux courbes nodales, seulement dans les points où ces dernières courbes sont rencontrées par les sections principales respectivement; et les points où cela arrive sont des points de contact des courbes dont il s'agit; les seuls points réels de contact sont les points où la section principale

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,\ Y = 0,$$

est coupée par le cercle $X^2 + Z^2 = 2b^2$. Pour fixer les idées je suppose $a^2 + b^2 > 3b^2$, on a alors $2b^2 < \frac{2}{3}(a^2 + b^2)$ et les points dont je viens de parler sont situés plus près des extrémités de l'axe le plus petit que ne sont les points où cette même ellipse est coupée par le cercle

$$X^2 + Z^2 = \tfrac{2}{3}(a^2 + c^2).$$

La courbe sur l'ellipsoïde que donne lieu à la courbe cuspidale est composée de deux paires d'ovales: les ovales de l'une de ces paires sont situés autour des extrémités de l'axe le plus petit, et les ovales de l'autre paire autour des extrémités de l'axe le plus grand; et par la remarque déjà faite, les ovales de la première paire touchent la courbe sur l'ellipsoïde qui donnent lieu à la courbe hyperbolique nodale, les coordonnées des points de contact étant données par

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,\ X^2 + Y^2 = 2b^2,\ Y = 0,$$

les coordonnées des points correspondants sur la surface sont données par

$$x^2 = \frac{4(a^2 - b^2)(2b^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)}, \qquad y^2 = \frac{4(b^2 - c^2)(a^2 - 2b^2)}{c^2(a^2 - c^2)}.$$

Nous avons jusqu'ici parlé de la courbe nodale hyperbolique comme étant une hyperbole complète, mais il convient de remarquer que la courbe réelle entière sur l'ellipsoïde ne donne lieu qu'à des parties finies de cette hyperbole, savoir les parties finies comprises entre les points dont je viens de donner les coordonnées, et que pour ces parties de l'hyperbole la courbe nodale est une courbe nodale proprement dite, savoir il y a pour ces parties deux nappes réelles, mais pour les autres parties de l'hyperbole il n'y a aucune nappe réelle de la surface, ou autrement dit, la courbe nodale est une courbe conjuguée: les points dont il s'agit (lesquels pour plus de commodité je vais appeler les *points critiques*[1]) seront évidemment des points cuspidaux sur la courbe nodale (c'est-à-dire des points où les deux plans tangents deviennent identiques). Mais ces points sont ici des points d'une singularité plus élevée, savoir ils sont des

[1] Dans le mémoire anglais j'ai dit "points of cesser" ce qui était un terme plus expressif. A. C.

points de rebroussement sur la courbe cuspidale, et de plus la courbe nodale hyperbolique, la courbe cuspidale, et la courbe sextique dans le plan zx ont à chacun de ces points une tangente commune. Car, comme je l'ai auparavant mentionné, les courbes sur l'ellipsoïde qui donnent lieu à la courbe nodale hyperbolique et la courbe cuspidale respectivement, se touchent l'une l'autre aux points qui donnent lieu aux points critiques; de là il suit que la courbe nodale hyperbolique et la courbe cuspidale se touchent l'une l'autre aux points critiques, et par cela seulement que la tangente de la courbe cuspidale est, à l'un quelconque des points critiques, dans le plan de zx, (puisque la courbe cuspidale est symétrique par rapport à ce plan) on voit que le point critique sera un point de rebroussement sur la courbe cuspidale. Il ne reste qu'à montrer que la courbe nodale hyperbolique et la courbe sextique ont une tangente commune au point critique. La tangente de la courbe nodale hyperbolique est donnée par l'équation

$$\frac{a^2x\,dx}{a^2-b^2}-\frac{c^2z\,dz}{b^2-c^2}=0,$$

où

$$x=X\left[2-\frac{1}{a^2}(X^2+Y^2+Z^2)\right],\quad z=Z\left[2-\frac{1}{c^2}(X^2+Y^2+Z^2)\right],$$

et

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1,\quad X^2+Z^2=2b^2,\quad Y=0,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$x=\frac{2X}{a^2}(a^2-b^2),\qquad z=-\frac{2Z}{c^2}(b^2-c^2)$$

et l'équation devient ainsi $Xdx+Zdz=0$, ce qui fait voir que la tangente est perpendiculaire au rayon mené par le centre de l'ellipsoïde au point qui donne lieu au point critique, et ainsi la tangente de la courbe nodale hyperbolique coïncide avec celle de la courbe sextique dans le plan de zx. Et l'on peut à présent expliquer plus particulièrement la forme de la courbe cuspidale (le cas dont il s'agit est celui où l'on a non seulement $a^2>2b^2$, $b^2>2c^2$ mais aussi $a^2+c^2>3b^2$) en effet la courbe cuspidale est composée en premier lieu de deux ovales en forme d'œil situés symétriquement de chaque côté du plan de xy, et qui passent par les points critiques, et les points de rebroussement de la courbe sextique dans le plan de yz, et en second lieu de deux ovales ordinaires situés symétriquement de chaque côté du plan de yz, et qui passent par les points de rebroussement des courbes sextiques dans les plans de xy et zx respectivement: tous les ovales dont il s'agit étant, il va sans dire, des courbes à double courbure. Les relations des différentes courbes sur l'ellipsoïde seront mieux comprises au moyen de la figure 1ª, où les sections principales de l'ellipsoïde sont tracées, non pas en perspective, mais développées sur le plan de la figure; et les courbes qui donnent lieu aux courbes nodales et cuspidales respectivement sont seulement marquées par des courbes menées par les points dans les sections principales par lesquels points passent respectivement les courbes dont il s'agit. On aura une idée de la forme de la surface au moyen de la figure 2ª (laquelle est dessinée en perspective orthogonale au moyen de la première figure) et qui fait voir la forme des sections principales de la surface (y compris les courbes nodales) et la forme de la courbe cuspidale. Les numéros et lettres dans les deux figures font voir quels points des différentes courbes sur l'ellipsoïde donnent lieu respectivement aux points des différentes courbes sur la surface. En particulier il convient de remarquer que dans la figure 1ª le point 4 qui donne lieu à un point critique est situé entre les points 3 et 5 qui donnent lieu respectivement au point double et au point de rebroussement de la courbe sextique dans le plan de zx, et cela fait voir très évidemment dans quelle partie de la courbe sextique est située le point critique, où cette courbe est touchée par la courbe nodale hyperbolique. Je n'ai pas cherché à dessiner d'autres sections de la surface, cela donnerait trop de complication à la figure, et il serait encore plus difficile d'apercevoir la forme de la surface, laquelle peut à peine être représentée sinon par un modèle ou au moins une stéréographie. On peut trouver l'équation de la surface de la même manière que celle de la courbe sextique, à savoir il faut éliminer X, Y, Z entre l'équation

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1,$$

et les équations

$$x=X\left[2-\frac{1}{a^2}(X^2+Y^2+Z^2)\right],\ y=Y\left[2-\frac{1}{b^2}(X^2+Y^2+Z^2)\right],\ z=Z\left[2-\frac{1}{c^2}(X^2+Y^2+Z^2)\right],$$

qui donnent les points de la surface.

En écrivant $\theta=X^2+Y^2+Z^2$ on trouve

$$\theta=\frac{x^2}{\left(2-\frac{\theta}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(2-\frac{\theta}{b^2}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(2-\frac{\theta}{c^2}\right)^2},$$

$$1=\frac{x^2}{a^2\left(2-\frac{\theta}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2\left(2-\frac{\theta}{b^2}\right)^2}+\frac{z^2}{c^2\left(2-\frac{\theta}{c^2}\right)^2},$$

et en multipliant la seconde équation par 2, et la première équation par $-\theta$ et en ajoutant on trouve

$$\theta=\frac{x^2}{2-\frac{\theta}{a^2}}+\frac{y^2}{2-\frac{\theta}{b^2}}+\frac{z^2}{2-\frac{\theta}{c^2}}$$

laquelle a pour dérivée par rapport à θ la seconde équation. Cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\theta^4\\
&+\theta^3[-2(a^2+b^2+c^2)]\\
&+\theta^2[4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2]\\
&+\theta\ [-8a^2b^2c^2-2(b^2+c^2)a^2x^2-2(c^2+a^2)b^2y^2-2(a^2+b^2)c^2z^2]\\
&+\quad 4a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2)=0,
\end{aligned}$$

et l'équation de la surface sera trouvée en égalant à zéro le discriminant de cette fonction de θ. En représentant l'équation par

$$\tfrac{1}{6}(A,\ B,\ C,\ D,\ E)\ (\theta,\ 1)^4 = 0,$$

on aura

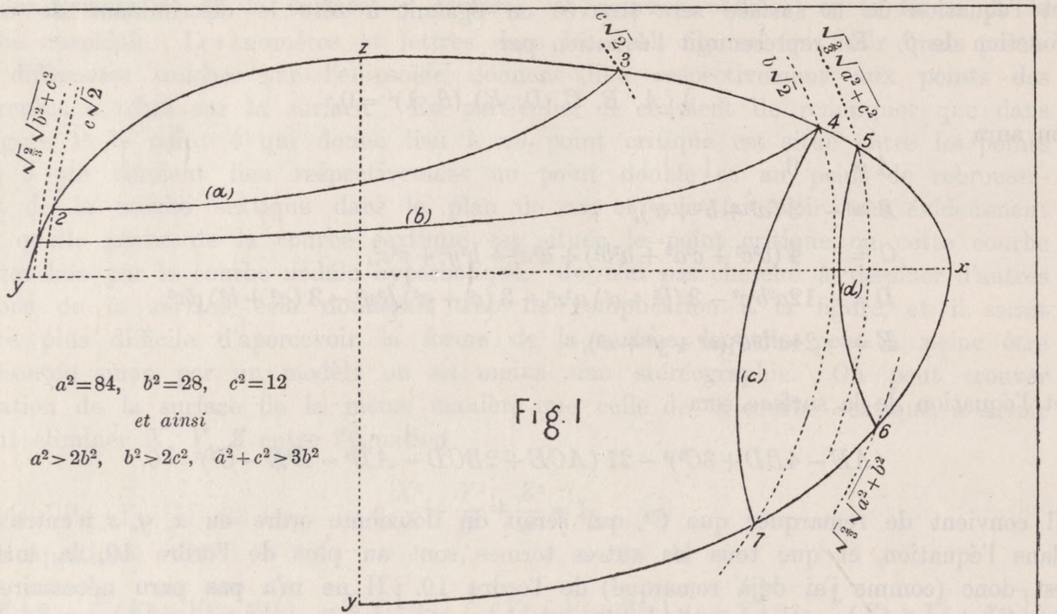
$$\begin{aligned}
A &= \quad 6,\\
B &= -\ 3\,(a^2+b^2+c^2),\\
C &= \quad 4\,(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,\\
D &= -\ 12a^2b^2c^2-3\,(b^2+c^2)\,a^2x^2-3\,(c^2+a^2)\,b^2y^2-3\,(a^2+b^2)\,c^2z^2,\\
E &= \quad 24a^2b^2c^2\,(x^2+y^2+z^2),
\end{aligned}$$

et l'équation de la surface sera

$$(AE-4BD+3C^2)^3-27\,(ACE+2BCD-AD^2-B^2E-C^3)^2=0.$$

Il convient de remarquer que C^6, qui serait du douzième ordre en x, y, z n'entre pas dans l'équation, et que tous les autres termes sont au plus de l'ordre 10, la surface est donc (comme j'ai déjà remarqué) de l'ordre 10. Il ne m'a pas paru nécessaire de développer plus complètement l'équation[1].

[1] Mi sia lecito di richiamare qui per un' istante in seguito alla bella ed elegante Memoria dell' illustre Geometra, come più volte questa superficie di decimo ordine derivata dall' ellissoide sia stato fin da molti anni per me il soggetto di ricerche relativo al calcolo integrale per ciò che riguarda specialmente la sua quadratura dipendente da trascendenti ellittici di prima e seconda specie; così in un breve articolo inserito nella *Raccolta Scientifica* di Roma Anno 2° No. 9 in data del 2 Aprile 1846 ritrovai le coordinate della nuova superficie in funzione delle coordinate corrispondenti dell' ellissoide, e determinai ancora l' integrale definito duplicato di forma razionale per la quadratura della stessa superficie: più estesamente mi occupai dello stesso argomento in una Memoria inserita nel tom. 34° del Sig. *Crelle* in data 15 Aprile 1846: più completamente poi risolvei la stessa questione in altro articolo pubblicato nella citata *Raccolta Scientifica* dello stesso Anno 2° No. 21 con la data del 23 Ottobre 1846. Infine ripresi a risolvere lo stesso problema con altri metodi in una Memoria *Sulla riduzione di alcuni integrali definiti ai trascendenti ellittici* inserita pel mese di Agosto e Settembre 1848 nel giornale arcadico di Roma, e precisamente nel No. 18 e seguenti. Sovente ancora nei privati miei studii tentai di giungere all' equazione algebrica della superficie, il che dipendeva da un' eliminazione, ma proponendomi la questione sotto un' aspetto complicato, mi trovava arrestato dalla lunghezza dei calcoli. Il maraviglioso ripiego analitico ritrovato dal Sig. Cayley riduce quest' eliminazione ad una simplicità inaspettata, e rende inutile qualunque altra ricerca, che si volesse intraprendere sullo stesso soggetto. Termino questa breve nota col fare i miei distinti ringraziamenti al chiarissimo Autore, che si è compiaciuto dietro un mio suggerimento comunicatogli dal Sig. D. *Hirst* fare la traduzione della Memoria per essere inserita negli *Annali*.—*B. T.*



$a^2=84, \quad b^2=28, \quad c^2=12$

et ainsi

$a^2>2b^2, \quad b^2>2c^2, \quad a^2+c^2>3b^2$

Fig. 1

(a) *Génératrice de la courbe nodale elliptique dans le plan de xy*

(b) *Génératrice d'une partie de la courbe cuspidale*

(c) *Génératrice de la courbe nodale hyperbolique dans le plan de zx*

(d) *Génératrice d'une partie de la courbe cuspidale*

Fig. 2.