236.

NOTE SUR LA COMPOSITION DU NOMBRE 47 PAR RAPPORT AUX VINGT-TROISIÈMES RACINES DE L'UNITÉ.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (Crelle), tom. LV. (1858), p. 192.]

M. KUMMER a trouvé (*Journal de Liouville*, t. XII. [1847] p. 208) que le nombre 47 peut être décomposé en onze facteurs qui se déduisent du suivant $\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16}$, α désignant une racine $23^{\text{ème}}$ de l'unité, et on sait par la théorie générale qu'il doit y avoir une puissance 47^{3f} qui se décompose en vingt-deux facteurs. Le nombre 47^3 peut se décomposer en deux facteurs formés avec les demi-périodes des racines; il était donc naturel d'essayer si le facteur $(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16})^3$ pourrait se décomposer de même en deux facteurs, ce qui donnerait la décomposition de 47^3 en vingt-deux facteurs. Mais on démontre très-facilement que cette décomposition n'est pas possible. En effet en posant $\alpha^\lambda=1$ (λ étant un nombre premier) et en faisant

$$A+B\alpha+\ldots K\alpha^{\lambda-1}=(a+b\alpha+\ldots k\alpha^{\lambda-1})(a+b\alpha^{\lambda-1}+\ldots k\alpha),$$

on aura $A=a^2+b^2+\ldots k^2$. Le nombre qui forme le premier membre peut se réduire au moyen de l'équation $1+\alpha+\ldots\alpha^{\lambda-1}=0$ à la forme $B'\alpha+C'\alpha^2\ldots+K'\alpha^{\lambda-1}$ et l'on aura

$$B'\alpha+C'\alpha^2\ldots+K'\alpha^{\lambda-1}=(a+b\alpha+\ldots k\alpha^{\lambda-1})(a+b\alpha^{\lambda-1}+\ldots k\alpha)-(a^2+b^2+\ldots k^2)(1+\alpha+\ldots\alpha^{\lambda-1}),$$

équation qui subsiste lorsqu'on y fait $\alpha=1$, ce qui donne

$$B'+C'+\ldots K'=(a+b+\ldots k)^2-\lambda(a^2+b^2+\ldots k^2);$$

or, la fonction qui forme le second membre, prise avec le signe négatif peut se mettre sous la forme $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c^2)+$ etc.; donc la décomposition n'existe pas à moins que $B' + C' + \dots K'$ ne soit négatif. Mais, en réduisant seulement au moyen de l'équation $\alpha^{23} - 1 = 0$, on trouve la suivante

$$(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16})^3 =$$
$$\left.\begin{array}{l} 6+7\alpha\ +7\alpha^2+3\alpha^3+6\alpha^4+9\alpha^5+6\alpha^6+16\alpha^7+15\alpha^8+9\alpha^9\ +18\alpha^{10}+9\alpha^{11} \\ +7\alpha^{22}+7\alpha^{21}+3\alpha^{20}+6\alpha^{19}+9\alpha^{18}+6\alpha^{17}+16\alpha^{16}+15\alpha^{15}+9\alpha^{14}+18\alpha^{13}+9\alpha^{12} \end{array}\right\},$$

laquelle, en vertu de $1 + \alpha + \dots \alpha^{22} = 0$, se réduit à

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\alpha^2\ -3\alpha^3\ +3\alpha^5\ +10\alpha^7\ +9\alpha^8\ +3\alpha^9\ +12\alpha^{10}+3\alpha^{11} \\ +\alpha^{22}+\alpha^{21}-3\alpha^{20}+3\alpha^{18}+10\alpha^{16}+9\alpha^{15}+3\alpha^{14}+12\alpha^{13}+3\alpha^{12} \end{array}\right\},$$

où la somme des coefficients est positive; donc la décomposition ne peut pas s'effectuer. On pourrait sans beaucoup de peine essayer de la même manière les nombres $f = 2$ ou $f = 3$, mais je ne sais pas si l'on a une idée quelconque de la grandeur du nombre f.

Londres, le 10 *Mai*, 1857.