228.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville.

[From the *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Liouville) vol. II. (1857), pp. 49—51.]

JE suppose que le lecteur ait sous les yeux la Note de M. Liouville (tome I. [1856] page 421). Cela étant, en rétablissant les valeurs de g, h et en écrivant $i-1$ au lieu de μ, la formule de M. Liouville devient

$$\int_0^1 \frac{t^{i-\frac{1}{2}}(1-t)^{i-\frac{3}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^i} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\sqrt{a+b-c}\;\Gamma(i)\,[2a+b+2\sqrt{a(a+b-c)}]^{i-\frac{1}{2}}}, \tag{1}$$

laquelle, en y posant

$$t = \frac{x}{1+x},$$

se transforme en celle-ci:

$$\int_0^\infty \frac{x^{i-1}\,dx}{[(a+b-c)\,x^2+(2a+b)\,x+a]^i} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\sqrt{a+b-c}\;\Gamma(i)\,[2a+b+2\sqrt{a(a+b-c)}]^{i-\frac{1}{2}}}; \tag{2}$$

et en mettant le dénominateur de l'intégrale sous la forme

$$[(a+b-c)(x+\lambda)(x+\mu)]^i,$$

la formule devient

$$\int_0^\infty \frac{x^{i-\frac{1}{2}}\,dx}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^i} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i)}\;\frac{1}{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^{2i-1}}: \tag{3}$$

formule qui se trouve dans mon Mémoire: "On certain formulæ for differentiation with applications to the evaluation of definite integrals," *Camb. and Dubl. Math. Journal*, tom. II., page 122, (1847), [41]. La démonstration que j'y ai donnée n'est cependant rigoureuse (à moins que l'on n'admette la théorie de la différentiation à indices quelconques) que pour le cas de $i+\frac{1}{2}$ égal à un entier positif; en effet, en écrivant

$$U_{k,\,i}=[(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}k}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i},$$

je suis parti de la formule

$$\frac{d}{dx}U_{k,\,i}=\tfrac{1}{2}k(\lambda-\mu)^2\,U_{k-2,\,i-1}-(k+i)\,U_{k-1,\,i},$$

pour en déduire l'expression générale de $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^s U_{0,\,i}$. Cette expression devient très-simple pour le cas $s=i+1$; on a alors

$$\frac{(-)^{i+1}}{i}\left(\frac{d}{dx}\right)^{i+1}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i}=\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}(\lambda-\mu)^{2i}\frac{1}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{i+\frac{1}{2}}},\tag{4}$$

formule de différentiation assez singulière. En y écrivant $i-\frac{1}{2}$, au lieu de i, et en intégrant $i+\frac{1}{2}$ fois par la formule

$$\int_0^\infty x^{i-\frac{1}{2}}fx\,dx=\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{(-)^{i+\frac{1}{2}}}\left(\int_\infty d\alpha\right)^{i+\frac{1}{2}}f\alpha,\qquad \alpha=0,$$

on obtient la formule intégrale ci-devant mentionnée. Il convient d'ajouter que cette formule, représentée sous la forme

$$\int_0^\infty\frac{x^{i-\frac{1}{2}}\,dx}{(ax^2+bx+c)^i}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i)}\,\frac{1}{(b+2\sqrt{ac})^{i-\frac{1}{2}}},\tag{5}$$

est comprise dans une formule générale donnée par M. Schlömilch: "Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie (*Crelle*, tom. XXXIII., page 268; 1847).

Je remarque aussi que M. Donkin, en comparant ses résultats concernant les fonctions de Laplace avec ceux de M. Boole sur le même sujet, a trouvé une identité, laquelle m'a conduit à cette autre formule de différentiation

$$\left\{\frac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^2}{2x+\lambda+\mu}\,\frac{d}{dx}\right\}^n\frac{(2x+\lambda+\mu)^{n+s-1}}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2n-2s}}$$

$$=\frac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n+1}}{(2x+\lambda+\mu)^{n-s+1}}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\frac{(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2s}}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}}},\tag{6}$$

formule que j'ai démontrée au moyen d'une analyse assez compliquée.