224.

SUR UN THÉORÈME D'ABEL. NOTE.

[From the *Annali di Scienze Mathematiche e Fisiche* (Tortolini), vol. VIII. (1857), pp. 201—203.]

IL y a un petit mémoire d'Abel qui porte le titre "Ueber die Functionen welche der Gleichung $\phi(x)+\phi(y)=\psi(xf(y)+yf(x))$ genugthun" (*Crelle*, tom. II. (1827), pp. 386—394). La solution du problème est contenue dans les équations que voici, savoir $f(x)$ est une fonction définie par l'équation

$$\alpha^{2n}=(f(x)-nx)^{n+\alpha'}(f(x)+nx)^{n-\alpha'},$$

et on a alors

$$\phi(x)=\frac{1}{n+\alpha'}\log C(f(x)+nx),$$

et (en réduisant un peu l'expression donné dans le mémoire)

$$\psi(x)=\frac{1}{n+\alpha'}\log C^2\alpha\left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{nx}{\alpha}\right).$$

On a aussi pour $\phi(x)$ cette autre expression en forme d'intégrale indéfinie,

$$\phi(x)=\int\frac{dx}{f(x)+\alpha'x};$$

car le facteur $a\alpha$ par lequel dans le mémoire l'expression à côté droit est multiplié se réduit (comme on voit sans peine) à l'unité. En comparant les deux expressions de $\phi(x)$, on voit qu'il est permis de prendre l'intégrale depuis $x=0$, pourvu qu'on écrive $c=1$; cela donne

$$\int_0\frac{dx}{f(x)+\alpha'x}=\frac{1}{n+\alpha'}\log(f(x)+nx),$$

formule très simple pour l'intégration d'une expression algébrique laquelle ne peut pas s'exprimer à moyen de radicales.

On obtient une autre propriété de cette fonction $f(x)$ en substituant les valeurs des fonctions ϕ et ψ dans l'équation originale

$$\phi(x)+\phi(y)=\psi(xf(y)+yf(x))\,;$$

cela donne d'abord

$$\frac{1}{n+\alpha'}\log C^2\left(f(x)+nx\right)\left(f(x)-nx\right)=\frac{1}{n+\alpha'}\log C^2\alpha\left[f\left(\frac{xf(y)+yf(x)}{\alpha}\right)+\frac{n\,(xf(y)+yf(x))}{\alpha}\right]$$

et de là en réduisant on obtient l'équation fonctionnelle très simple

$$f(x)f(y)+n^2xy=\alpha f\left(\frac{xf(y)-yf(x)}{\alpha}\right).$$

Je remarque que l'on peut sans perte de généralité écrire $\alpha=1$, et $n=1$: je mets β au lieu de α', et j'écris aussi pour plus de simplicité $f(x)=X$, $f(y)=Y$. On a alors pour déterminer la fonction $X\,(=f(x))$, l'équation

$$(X-x)^{1+\beta}(X+x)^{1-\beta}=1$$

équation dans laquelle on pourrait remplacer les exposants $1+\beta$, $1-\beta$ par deux quantités quelconques.

La formule d'intégration devient

$$\int_0\frac{dx}{X+\beta x}=\frac{1}{1+\beta}\log(X+x)=-\frac{1}{1-\beta}\log(X-x)$$

formule que l'on peut vérifier sans peine à moyen de celle-ci,

$$(X+\beta x)\,X'=x+\beta X,$$

que l'on obtient en différentiant l'équation pour X. L'équation fonctionnelle sera

$$XY+xy=f(xY+yX),$$

c'est-à-dire en écrivant $xY+yX=z$, $XY+xy=Z$ on doit avoir

$$(Z-z)^{1+\beta}(Z+z)^{1-\beta}=1$$

et cela se vérifie tout de suite à moyen des équations

$$Z-z=(X-x)(Y-y),\quad Z+z=(X+x)(Y+y).$$

Je remarque aussi qu'en prenant le quotient des dérivées de cette équation par rapport à x et y on obtient

$$\frac{X'-Y'}{X'Y'-1}=\left(\frac{X}{x}-\frac{Y}{y}\right)\div\left(\frac{X}{x}\cdot\frac{Y}{y}-1\right),$$

laquelle est une propriété de la fonction X et sa dérivée X'.

Londres, 17 *Juillet*, 1857.