223.

NOTE SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL PAR RAPPORT À L'ÉLIMINATION.

[From the *Annali di Scienze Mathematiche e Fisiche* (Tortolini), vol. VII. (1856), pp. 454—458.]

Soient

$$\phi = (a,\ b\ ,\ c\ \ldots)(x,\ y)^n = 0,$$
$$\psi = (\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots)(x,\ y)^n = 0,$$

deux équations homogènes quelconques entre les variables x, y, et représentons par R la résultante des deux fonctions ϕ, ψ, de manière que $R=0$ sera la condition pour que les deux équations $\psi=0$, $\phi=0$ puissent avoir lieu. On sait depuis longtemps que les valeurs des variables x, y, qui satisfont à la fois aux deux équations $\psi=0$, $\phi=0$ sont données [1] par les conditions (équivalentes à une seule condition)

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} : \frac{dR}{dc} : \text{etc.} = x^m : mx^{m-1}y : \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}y^2 : \text{etc.}$$
$$\frac{dR}{d\alpha} : \frac{dR}{d\beta} : \frac{dR}{d\gamma} : \text{etc.} = x^n : nx^{n-1}y : \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}y^2 : \text{etc.};$$

ce qui suppose cependant que les coefficients $a, b, c, \ldots\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, sont des quantités absolument arbitraires: les conditions dont il s'agit peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} : \frac{dR}{dc} : \text{etc.} = \frac{d\phi}{da} : \frac{d\phi}{db} : \frac{d\phi}{dc} : \text{etc.}$$
$$\frac{dR}{d\alpha} : \frac{dR}{d\beta} : \frac{dR}{d\gamma} : \text{etc.} = \frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{d\beta} : \frac{d\psi}{d\gamma} : \text{etc.}$$

[1] Il va sans dire que ce n'est que la valeur de $x : y$ laquelle est déterminée; mais dans la théorie des fonctions homogènes les valeurs absolues n'importent rien, et on peut dire que les valeurs x, y sont déterminées, quand $x : y$ est déterminée: on évite par cette locution des longueurs très-ennuyantes.

Or M. Schläfli dans son excellent mémoire "Ueber die Resultante eines Systemes mehrerer algebraïscher Gleichungen," *Trans. de l'Acad. de Vienne,* tom. IV. (1852), a généralisé ce théorème de la manière que voici. En considérant un nombre quelconque d'équations $\psi=0$, $\phi=0$, $\chi=0,\ldots$ entre le même nombre de variables $x=0$, $y=0$, $z=0,\ldots$ et en supposant que a, b, c, etc. soient des quantités qui entrent d'une manière quelconque dans la fonction ϕ, sans entrer dans les autres fonctions ψ, χ, etc. (il n'est nullement nécessaire que le nombre des quantités a, b, $c\ldots$ soit tel que la fonction ϕ reste absolument arbitraire, le nombre des quantités a, b, c, etc. peut même se réduire à 2) M. Schläfli fait voir que l'on a dans ce cas

$$\frac{dR}{da}:\frac{dR}{db}:\frac{dR}{dc}:\text{etc.}=\frac{d\phi}{da}:\frac{d\phi}{db}:\frac{d\phi}{dc}:\text{etc.}$$

Voici en effet le raisonnement fort simple dont se sert M. Schläfli pour établir la proposition dont il s'agit. Les équations $\psi=0$, $\phi=0$, $\chi=0$, etc. seront satisfaites par de certaines valeurs de $x:y:z$, etc. en supposant seulement que les quantités, a, b, c, etc. satisfont à la condition $R=0$. Donc les équations $\psi=0$ $\phi=0$, $\chi=0$, etc. seront encore satisfaites en donnant des variations infiniment petites quelconques δa, δb, δc, etc. aux quantités a, b, c, etc. en supposant seulement que ces variations soient telles que l'on ait

$$\delta R=\frac{dR}{da}\delta a+\frac{dR}{db}\delta b+\frac{dR}{dc}\delta c+\text{etc.}=0.$$

Or les équations $\psi=0$, $\chi=0$, etc. qui ne contiennent pas les quantités a, b, c, etc. suffisent seules (c'est-à-dire sans l'aide de l'équation $\phi=0$) à déterminer les valeurs de $x:y:z$, etc. qui satisfont au système $\phi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$, (on suppose toujours l'équation $R=0$): donc les nouvelles valeurs de $x:y:z$, etc. seront les mêmes qu'auparavant, et l'on doit avoir

$$\delta\phi=\frac{d\phi}{da}\delta a+\frac{d\phi}{db}\delta b+\frac{d\phi}{dc}\delta c+\text{etc.}=0\,;$$

savoir cette équation aura lieu en vertu de l'équation $\delta R=0$ qui est la seule condition à laquelle on a assujetti les variations δa, δb, δc, etc., ce qui donne évidemment les conditions

$$\frac{dR}{da}:\frac{dR}{db}:\frac{dR}{dc}:\text{etc.}=\frac{d\phi}{da}:\frac{d\phi}{db}:\frac{d\phi}{dc}:\text{etc.}$$

Cela étant, on peut encore généraliser le théorème de M. Schläfli: pour cela je suppose que les quantités a, b, $c,\ldots$ entrent d'une manière quelconque dans les fonctions ϕ, ψ, χ, etc. Les équations $\phi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$, etc. impliquent l'équation $R=0$, et en donnant aux quantités a, b, c, etc. des variations infiniment petites quelconques δa, δb, δc, etc. qui satisfont à la condition $\delta R=0$, les équations $\phi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$, etc. seront satisfaites à la fois, cependant par des nouvelles valeurs des variables;

on peut représenter par δx, δy, δz, etc. les variations qu'il faut attribuer aux variables x, y, z, etc. Les équations $\phi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, etc. seront satisfaites en y variant à la fois les valeurs des variables x, y, z, etc. et des quantités a, b, c, etc.; les variations de ϕ, ψ, χ, etc. doivent donc s'évanouir: je représente de la manière que voici les conditions ainsi obtenues, savoir

$$\delta\phi + \frac{d\phi}{dx}\,\delta x + \frac{d\phi}{dy}\,\delta y + \frac{d\phi}{dz}\,\delta z + \text{etc.} = 0,$$

$$\delta\psi + \frac{d\psi}{dx}\,\delta x + \frac{d\psi}{dy}\,\delta y + \frac{d\psi}{dz}\,\delta z + \text{etc.} = 0,$$

$$\delta\chi + \frac{d\chi}{dx}\,\delta x + \frac{d\chi}{dy}\,\delta y + \frac{d\chi}{dz}\,\delta z + \text{etc.} = 0.$$

etc.

En prenant L, M, N, etc. des fonctions absolument arbitraires, et en prenant aussi

$$\delta u = - L\delta x - M\delta y - N\delta z - \text{etc.}$$

on aura l'équation identique

$$\delta u \quad + L\delta x + M\delta y + N\delta z + \text{etc.} = 0,$$

et en éliminant les variations δx, δy, δz, etc. on obtient une équation $\square = 0$; la partie de $\square$ qui contient le terme δu sera évidemment

$$\delta u \left| \begin{array}{llll} \dfrac{d\phi}{dx}, & \dfrac{d\phi}{dy}, & \dfrac{d\phi}{dz}, & \ldots \\ \dfrac{d\psi}{dx}, & \dfrac{d\psi}{dy}, & \dfrac{d\psi}{dz}, & \\ \dfrac{d\chi}{dx}, & \dfrac{d\chi}{dy}, & \dfrac{d\chi}{dz}, & \end{array} \right|$$

et le déterminant, facteur de cette expression, s'évanouit en vertu des équations $\phi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, etc. Cela est en effet un théorème de M. Hesse, lequel se démontre tout de suite en remarquant que l'on a

$$m\phi = x\frac{d\phi}{dx} + y\frac{d\phi}{dy} + z\frac{d\phi}{dz} + \text{etc.} = 0,$$

etc.

L'expression $\square$ ne contient donc pas de terme avec δu, et l'équation $\square = 0$, peut s'écrire comme suit:

$$\left| \begin{array}{llll} & L, & M, & N, \ldots \\ \delta\phi, & \dfrac{d\phi}{dx}, & \dfrac{d\phi}{dy}, & \dfrac{d\phi}{dz}, \\ \delta\psi, & \dfrac{d\psi}{dx}, & \dfrac{d\psi}{dy}, & \dfrac{d\psi}{dz}, \\ \delta\chi, & \dfrac{d\chi}{dx}, & \dfrac{d\chi}{dy}, & \dfrac{d\chi}{dz}, \end{array} \right| = 0$$

which may be written in the form

$$s\frac{ds}{dt}\,d\left(s\frac{ds}{dt}\right)=gs^2ds,$$

and the first integral is therefore

$$\frac{sds}{\sqrt{s^3-a^3}}=\sqrt{\frac{2g}{3}}\,dt,$$

where a is the length hanging over at the commencement of the motion. If $a=0$, then the equation is

$$\frac{ds}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{2g}{3}}\,dt,$$

and integrating from $t=0$, $2\sqrt{s}=\sqrt{\frac{2g}{3}}\,t$, or finally $s=\frac{1}{6}gt^2$, so that the motion is the same as that of a body falling under the influence of a constant force $\frac{1}{3}g$. It is perhaps worth noticing that the differential equation may be obtained as follows:— We have, in the first instance, a mass s moving with a velocity s', and after the particle $ds\,(=s'dt)$ has been set in motion, a mass $s+s'dt$ moving say with a velocity $s'+\delta s'$, whence neglecting for the moment the effect of gravity on the mass s, the momentum of the mass in motion will be constant, or we shall have

$$ss'=(s+s'dt)(s'+\delta s')=ss'+s'^2dt+s\delta s',$$

and therefore $s\delta s'=-s'^2dt$. Hence, adding on the right-hand side the term $gsdt$ arising from gravity, and substituting $\frac{d^2s}{dt^2}dt$ for $\delta s'$, we have the equation, $s\frac{d^2s}{dt^2}=gs-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, as before.