306.

SUR LES CONIQUES QUI TOUCHENT DES COURBES D'ORDRE QUELCONQUE. EXTRAIT D'UNE LETTRE À M. CHASLES.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LIX. (*Juillet—Décembre*, 1864), pp. 224—225.]

En considérant l'expression

$$S_5\,(S_5 + S_4 + S_3 - 3S_2 + 3S_1)$$

que vous avez donnée (*Comptes Rendus*, t. LVIII. p. 223) pour le nombre des coniques qui touchent cinq courbes d'ordre quelconque, j'ai trouvé qu'elle peut s'écrire sous la forme que voici, savoir: en dénotant les ordres par (m, n, p, q, r), et en mettant $M = m^2 - m, \ldots$, de manière que (M, N, P, Q, R) seront les classes des cinq courbes, l'expression transformée est

$$(M, m)\,(N, n)\,(P, p)\,(Q, q)\,(R, r)\,\{1, 2, 4, 4, 2, 1\};$$

en représentant par cette notation abrégée la fonction

$$\begin{aligned} &1\,.\ MNPQR \\ &+2\Sigma\,(mNPQR) \\ &+4\Sigma\,(mn\,PQR) \\ &+4\Sigma\,(mn\,p\,QR) \\ &+2\Sigma\,(mn\,p\,qR) \\ &+1\,.\ \ mn\,p\,q\,r. \end{aligned}$$

En écartant les relations $M = m^2 - m, \ldots$, et en supposant seulement que (m, n, p, q, r) soient les ordres, et (M, N, P, Q, R) les classes des cinq courbes, la nouvelle formule s'applique aux courbes avec des points doubles ou de rebroussement; on peut même supposer que la courbe de la classe M et de l'ordre m se réduise à un système de M points et de m droites, et que les autres courbes se réduisent aussi à des systèmes de points et droites; et cela étant, on obtient une vérification immédiate de la formule. Car en choisissant dans le système qui remplace chaque courbe un élément (point ou droite) à volonté, on obtient

$$\begin{array}{rl} MNPQR & \text{systèmes } 5p, \\ \Sigma\, m\, NPQR & \text{systèmes } 4p,\ 1d, \\ \Sigma\, m\, n\, PQR & \text{systèmes } 3p,\ 2d, \\ \Sigma\, m\, n\, p\, QR & \text{systèmes } 2p,\ 3d, \\ \Sigma\, m\, n\, p\, q\, R & \text{systèmes } 1p,\ 4d, \\ m\, n\, p\, q\, r & \text{systèmes } \quad 5d. \end{array}$$

Or la condition par rapport à la première courbe se réduit à celle de passer par l'un quelconque des M points, ou de toucher l'une quelconque des m droites; et de même pour les autres courbes. Donc (en entendant par le mot *toucher* appliqué à un système de points et de droites, passer par les points et toucher les droites du système) la conique doit toucher l'un quelconque des systèmes ($5p$), ou ($4p$, $1d$), ou ($3p$, $2d$), ..., ou ($5d$); et pour un système de la forme

$$(5p),\quad (4p,\ 1d),\quad (3p,\ 2d),\quad (2p,\ 3d),\quad (1p,\ 4d),\quad \text{ou}\quad (5d),$$

le nombre des coniques est

$$1,\qquad 2,\qquad 4,\qquad 4,\qquad 2,\qquad \text{ou}\quad 1,$$

ce qui donne pour le nombre total des coniques l'expression ci-dessus écrite.

On peut supposer que la conique, au lieu de toucher les deux courbes m, n, ait avec la seule courbe m (1°) un contact du deuxième ordre; (2°) un contact double. Le nombre des coniques qui satisfont à l'une ou l'autre de ces conditions, et qui passent aussi par trois points donnés, a été trouvé par Steiner (Aufgabe und Lehrsätze, *Crelle*, t. XLIX. p. 273), savoir:

$$(1°)\text{ le nombre} = 3m(m-1);\ (2°)\text{ le nombre} = \tfrac{1}{2}(m^2-m)(m^2+3m-6);$$

j'ai vérifié d'une manière particulière ces deux résultats.

En supposant que la conique (au lieu de passer par les trois points donnés) touche les courbes p, q, r, je trouve pour les deux cas respectivement ces résultats,

1° le nombre $= 3(m^2-m) \times (P,\ p)(Q,\ q)(R,\ r)\{1,\ 2,\ 2,\ 1\}$,

2° le nombre $= \tfrac{1}{2}(m^2-m) \times$

$$(P,\ p)(Q,\ q)(R,\ r)\{m^2+3m-6,\ 2m^2+6m-16,\ 4m^2+4m-22,\ 4m^2-15\};$$

formules dans lesquelles la courbe m doit être une courbe sans singularités.

Grasmere, Westmoreland, 37 *Juillet*, 1864.