302.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES COURBES EN ESPACE.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LIV. (*Janvier—Juin*, 1862), pp. 55—60, 396—400, 672—678.]

SOIT une courbe donnée du $m^{ième}$ ordre; je suppose toujours que cette courbe soit une courbe propre, savoir qu'elle n'est pas composée de courbes d'ordres inférieurs. Si nous prenons pour sommet d'un cône qui passe par la courbe un point A *quelconque* qui n'est pas sur la courbe, ce cône sera de l'ordre m; cela est vrai *en général* quelle que soit la courbe; seulement si m est un nombre composé, alors pour de certaines courbes il peut y avoir des positions de A pour lesquelles le cône sera d'un ordre sous-multiple de m; mais en faisant abstraction de ces positions particulières, le cône sera de l'ordre m. Et, cela étant, une droite du cône ne contiendra en général qu'un seul point de la courbe. En employant quatre coordonnées (x, y, z, w) et en supposant qu'au point A on ait

$$x=0,\ y=0,\ z=0,$$

l'équation du cône sera $U=0$, où U est une fonction homogène de (x, y, z) de l'ordre m. On peut faire passer par la courbe une surface ayant pour équation

$$Qw-P=0$$

$\left(\text{ou } w=\dfrac{P}{Q}\right)$, où P, Q sont des fonctions homogènes de (x, y, z) des ordres p, $p-1$ respectivement. Et on peut supposer que p soit égal tout au plus à $m-1$: en effet, en prenant $p=m-1$, l'équation contiendrait

$$\tfrac{1}{2}(m-1)\,m+\tfrac{1}{2}\,m\,(m+1)-1,$$

c'est-à-dire m^2-1 constantes arbitraires; et en déterminant convenablement m^2-m+1 de ces quantités, la surface de l'ordre $m-1$ passera par m^2-m+1 points de la courbe de l'ordre m, c'est-à-dire cette surface contiendra la courbe entière. De cette manière, on obtiendrait toujours une surface de l'ordre $m-1$; mais si les fonctions P, Q

ainsi trouvées avaient un facteur commun, ce facteur devrait être écarté; il convient donc de supposer que les degrés de P, Q soient p, $p-1$ respectivement, p étant tout au plus égal à $m-1$. La surface $Qw-P=0$ a au point A un point conique du $(p-1)^{ième}$ ordre; en effet dans le voisinage de ce point l'équation se réduit à $Q=0$, laquelle appartient à un cône du $(p-1)^{ième}$ ordre. J'ajoute que la surface contient les $p(p-1)$ droites $P=0$, $Q=0$ qui passent chacune par le point A; toute autre droite par ce point rencontre la surface dans ce point (lequel compte pour $p-1$ points d'intersection) et encore dans un seul point donné par l'équation

$$w=\frac{P}{Q}.$$

On peut appeler *monoïde* une telle surface; le point A sera le sommet; le cône $P=0$ le cône supérieur; le cône $Q=0$, le cône inférieur; les droites d'intersection de ces deux cônes, les droites de la monoïde.

Or le cône circonscrit $U=0$ et la monoïde $Qw-P=0$ se coupent selon une courbe de l'ordre mp: si $p=1$, cette intersection des deux surfaces sera la courbe du $m^{ième}$ ordre, laquelle sera une courbe plane; mais, dans tout autre cas, la courbe d'intersection sera composée de la courbe du $m^{ième}$ ordre, et d'un autre système de l'ordre $m(p-1)$; ce système ne peut être autre chose que les droites d'intersection du cône circonscrit $U=0$, et du cône inférieur $Q=0$ de la monoïde; c'est-à-dire les équations

$$U=0,\quad Q=0$$

doivent donner $P=0$; car, cela étant, les droites $U=0$, $Q=0$ seront situées sur la monoïde; et ces droites, lesquelles forment un système de l'ordre $m(p-1)$, seront partie de l'intersection de la monoïde et du cône circonscrit $U=0$. Et il est nécessaire que cela soit ainsi, car autrement chaque droite du cône $U=0$ ne contiendrait sur la monoïde que le point A, et le point déterminé par l'équation $w=\dfrac{P}{Q}$, lequel est un point sur la courbe du $m^{ième}$ ordre; donc cette autre partie de l'intersection de la monoïde et du cône $U=0$ serait, non pas une courbe quelconque, mais le seul point A; ce qui est absurde.

Le cône circonscrit $U=0$ ne peut pas être un cône quelconque à moins que $p=1$; en effet si $p>1$, il est nécessaire que le cône ait au moins $(p-1)m$ droites doubles (en comprenant dans cette locution le cas où le cône a des singularités qui équivalent à $(p-1)m$ droites doubles), car en supposant pour un moment que le cône $U=0$ n'ait pas de singularités, le cône $P=0$ de l'ordre p devrait passer par les $(p-1)m$ droites d'intersection du cône $Q=0$ de l'ordre $(p-1)$ et du cône $U=0$ de l'ordre m; or m est au moins égal à $p+1$, de manière que le cône $P=0$ doit passer au moins par (p^2-1) droites du cône $Q=0$; mais p^2-1 est $>p^2-p$, à moins que $p=1$; donc ce cône $P=0$ serait composé du cône $Q=0$ et d'un plan $P'=0$ par le point A; c'est-à-dire $P=QP'$, et l'équation de la monoïde se réduirait à $w=P'$, ou l'on aurait $p=1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On obtiendra le même résultat à moins de supposer que le cône $Q=0$ passe par un certain nombre x de droites doubles du cône $U=0$; mais en faisant cette supposition, chacune de ces droites compte pour deux intersections des cônes $Q=0$, $U=0$; il y a encore $(p-1)m-2x$ droites d'intersection; et les $x+\{(p-1)m-2x\}$, c'est-à-dire $(p-1)m-x$ droites peuvent être comprises parmi les $p(p-1)$ droites de la monoïde si x est égal au moins à $(p-1)(m-p)$; c'est-à-dire le cône $U=0$ doit avoir au moins ce nombre de droites doubles. Je remarque que pour m impair, et $p=\frac{1}{2}(m+1)$, le nombre sera $\frac{1}{4}(m^2-2m+1)$, et pour m pair, et $p=\frac{1}{2}m$ ou $\frac{1}{2}m+1$, le nombre sera $\frac{1}{4}(m^2-2m)$; mais pour toute autre valeur de p, le nombre sera moins élevé.

Je résume comme suit:

Toute courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre est l'intersection d'un cône circonscrit $U=0$, du $m^{\text{ième}}$ ordre, et d'une surface monoïde $Qw-P$, de l'ordre $p=m-1$ au plus. L'intersection complète de deux surfaces est composée de la courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre et des $m(p-1)$ droites d'intersection du cône circonscrit $U=0$, et du cône inférieur $Q=0$ de la monoïde. Ces droites seront $(p-1)(m-p)+\alpha$ droites, chacune répétée deux fois, et $(p-1)(2p-m)-2\alpha$ droites, où α peut être égal à zéro; chacune des $(p-1)(m-p)+\alpha$ droites sera une droite double du cône $U=0$; et les $(p-1)(m-p)+\alpha$ droites et $(p-1)(2p-m)-2\alpha$ droites, ensemble $p(p-1)-\alpha$ droites, seront situées sur le cône supérieur $P=0$ de la monoïde.

Il y a deux circonstances qui empêchent que cette théorie ne conduise tout de suite à une classification des courbes en espace. D'abord, une droite double du cône $U=0$ peut correspondre ou à un point double réel, ou à un point double apparent de la courbe; et de même en supposant que la droite double devienne une droite de rebroussement, cette droite peut ou correspondre à un point de rebroussement (point stationnaire) de la courbe, ou la droite peut être une tangente ordinaire de la courbe, sans qu'il ait sur la courbe aucune singularité qui corresponde à cette droite de rebroussement (voir le Mémoire de M. Salmon: "On the classification of curves of double curvature," *Camb. et Dubl. Math. Journ.*, t. v. pp. 23—46, 1850).

Puis, étant donnée l'équation $U=0$ du cône circonscrit, la monoïde n'est pas une surface déterminée, et il n'est guère facile de voir quel doit être l'ordre de cette surface. En effet, cette équation étant $w=\dfrac{P}{Q}$, il peut y avoir des fonctions P', Q' telles que $PQ'-P'Q=MU$, et, cela étant, puisqu'il ne s'agit que de l'intersection avec le cône $U=0$, on pourrait remplacer l'équation $w=\dfrac{P}{Q}$ par celle-ci, $w=\dfrac{P'}{Q'}$, laquelle peut être d'un ordre inférieur.

Ces difficultés se présentent dès le commencement. En effet soit $m=3$. On a $p=1$ ou $p=2$, mais $p=1$ ne donne que la cubique plane; je suppose donc $p=2$. Le cône $U=0$ du troisième ordre aura une droite double, laquelle peut être une droite de rebroussement. L'équation de la monoïde sera $w=\dfrac{P}{Q}$, où $Q=0$ est l'équation d'un plan qui passe par le point double ou de rebroussement, et qui coupe ainsi le cône $U=0$ selon une autre droite; et $Qw-P=0$ est l'équation d'un cône du second ordre qui passe par ces deux droites. Mais soit que le cône $U=0$ ait une droite double, soit que cette droite soit de rebroussement, on n'obtient qu'une seule espèce de courbe cubique; au premier cas le sommet n'est pas situé, au deuxième cas ce sommet est situé, sur une tangente de la courbe cubique; voilà toute la différence.

Soit encore $m=4$; on peut avoir $p=1$, 2 ou 3; mais $p=1$ ne donne que les courbes planes du quatrième ordre, je suppose donc $p=2$ ou $p=3$; dans l'un ou l'autre cas, le cône $U=0$ du quatrième ordre doit avoir au moins deux droites doubles. Il peut donc y avoir seulement deux droites doubles; l'une de ces droites peut être une droite de rebroussement, ou toutes les deux peuvent être de telles droites. Ou encore, il peut y avoir trois droites doubles; l'une de ces droites peut être une droite de rebroussement, ou deux droites ou toutes les trois peuvent être de telles droites. Il y a donc un assez grand nombre de cas à considérer; mais on sait qu'il n'y a que quatre espèces en tout, savoir: 1° la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre qui ne se touchent pas, courbe que je nomme *quadriquadrique générale;* 2° les deux surfaces du second ordre peuvent se toucher; la courbe d'intersection sera une *quartique nodale;* 3° les deux surfaces peuvent avoir un contact singulier, la courbe d'intersection sera une *quartique cuspidale;* 4° il y a enfin la courbe du quatrième ordre qui n'est située que sur une seule surface du second ordre, et que l'on n'obtient qu'au moyen d'une surface du troisième ordre: ce sera la courbe *excubo-quartique.* Je remarque en passant que les quartiques nodale et cuspidale sont des sous-espèces tant de l'excubo-quartique que de la quadriquadrique. En supposant que le cône $U=0$ n'ait que deux droites doubles ou de rebroussement, et soit que $p=2$ ou $p=3$, on obtiendra par la théorie actuelle la quadriquadrique générale (cela est évident par les formules du Mémoire cité de M. Salmon). Si le cône $U=0$ a trois droites doubles ou de rebroussement, alors soit que $p=2$ ou $p=3$, on obtiendra, selon les circonstances, ou l'excubo-quartique, ou la quartique nodale, ou la quartique cuspidale (mais non pas cette dernière, à moins qu'il n'y ait au moins une droite de rebroussement). Mais il faudrait pour tout cela une discussion plus approfondie.

Je remarque qu'en prenant le point A sur la courbe du $m^{ième}$ ordre, l'on aurait eu, au lieu du cône $U=0$ du $m^{ième}$ ordre, un cône du $(m-1)^{ième}$ ordre, et l'ordre du cône se réduirait encore si le point A était un point multiple de la courbe. Peut-être il conviendrait de considérer de tels cônes au lieu du cône du $m^{ième}$ ordre.

En conclusion, je fais les réflexions que voici, savoir: Si $S=0$, $T=0$ sont des surfaces quelconques qui passent par la courbe du $m^{ième}$ ordre, alors en éliminant entre ces équations la coordonnée w, on obtient une équation

$$\Pi = UV = 0,$$

qui contient comme facteur l'équation $U=0$ du cône du $m^{ième}$ ordre. Mais il y a plus: la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques fait voir que les équations

$S=0$, $T=0$ donnent lieu à un assez grand nomore d'équations de la forme $w=\frac{P}{Q}$ (en représentant deux quelconques de ces équations par

$$w=\frac{P}{Q},\quad w=\frac{P'}{Q'},$$

on aura toujours $PQ'-P'Q=M\Pi$), c'est-à-dire on obtient par une telle élimination plusieurs surfaces monoïdes dont chacune coupe le cône $\Pi=UV=0$, selon la courbe d'intersection complète de deux surfaces $S=0$, $T=0$. Mais il ne s'ensuit pas (même en admettant que l'on ait de cette manière *toutes* les surfaces monoïdes qui passent par l'intersection complète), que l'on ait *toutes* les surfaces monoïdes qui passent par la courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre; en effet il peut y avoir des fonctions P', Q' lesquelles, sans donner $PQ'-P'Q=MUV$, donnent cependant $PQ'-P'Q=MU$, et, cela étant, $w=\frac{P'}{Q'}$ serait une surface monoïde qui passerait par la courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre.

P.S. On déduit sans peine la théorie des courbes situées sur une surface du second ordre (voir ma Note "On the curves situate on a surface of the second order," *Phil. Mag.*, July 1861, [314], et les savantes recherches que M. Chasles vient de publier dans les *Comptes Rendus*). En effet, en supposant que la monoïde soit une surface du second ordre (hyperboloïde) et que son équation soit $w=\frac{xy}{z}$, alors, puisque le cône $U=0$, du $m^{\text{ième}}$ ordre, doit rencontrer le plan $z=0$ selon les seules droites $x=0$, $y=0$, il faut que ces droites soient des droites multiples du cône $U=0$, et en prenant p, q des nombres tels que $p+q=m$, on peut supposer que les deux droites soient des droites multiples des ordres p et q respectivement; et cela arrivera si U (fonction homogène du $m^{\text{ième}}$ ordre en x, y, z) contient x^p pour la plus haute puissance de x, et y^q pour la plus haute puissance de y. Car en arrangeant selon les puissances descendantes de y, on aura

$$U=y^q\,(x,z)^p+y^{q-1}z\,(x,z)^p+\ldots,$$

ce qui fait voir que $x=0$, $z=0$ sera une droite multiple du $p^{\text{ième}}$ ordre, et de même $y=0$, $z=0$ sera une droite multiple du $q^{\text{ième}}$ ordre. On a donc selon la notation de M. Chasles

$$U=M(x^p,\ y^q),$$

en se souvenant qu'ici U contient aussi la coordonnée z.

Suite.—Courbes du quatrième ordre.

Toute surface du second ordre est une surface monoïde, et on peut prendre pour sommet un point quelconque de la surface. En effet, en considérant un point quelconque de la surface du second ordre, soient

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,$$

les équations de trois plans quelconques qui passent par ce point; l'équation de la surface sera satisfaite en y écrivant

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0\,;$$

donc cette équation ne contiendra pas de terme en w^2, et elle sera ainsi de la forme

$$wQ-P=0 \text{ ou } w=\frac{P}{Q},$$

P et Q étant des fonctions homogènes en x, y, z, du second ordre et du premier ordre respectivement; c'est-à-dire, la surface sera monoïde, ou, si l'on veut, monoïde quadrique.

Or, par une courbe du quatrième ordre (ou courbe quartique) quelconque en espace, on peut faire passer une surface du second ordre, ou monoïde quadrique. Selon la théorie générale, la surface monoïde est tout au plus du troisième ordre, ou monoïde cubique; j'avais tort de supposer que pour la courbe excubo-quartique la surface monoïde fût nécessairement une monoïde cubique. Il arrive comme suit, savoir: pour la courbe quadriquadrique, en prenant pour sommet un point quelconque de l'espace (on suppose toujours que le sommet de la monoïde n'est pas situé sur la courbe), on aura une monoïde quadrique; mais pour la courbe excubo-quartique, pour que la monoïde soit quadrique, il faut que le sommet soit situé sur la surface du second ordre (il n'y a qu'une seule surface) qui passe par la courbe; cela étant, la monoïde quadrique sera cette surface même du second ordre. Mais en prenant pour sommet un point quelconque qui n'est point situé sur la surface du second ordre, la monoïde sera nécessairement une surface cubique.

Ainsi, pour les courbes quartiques, il suffit de considérer ces courbes comme situées sur une monoïde quadrique; il est cependant assez intéressant de les considérer comme situées sur une monoïde cubique. Je suppose donc $U=0$, $w=\frac{P}{Q}$, où $U=0$ est un cône quartique et $w=\frac{P}{Q}$ une monoïde cubique avec le même point $x=0$, $y=0$, $z=0$ pour sommet.

Selon la théorie générale, les huit droites $Q=0$, $U=0$ doivent être comprises parmi les six droites $Q=0$, $P=0$. Or, pour cela, il faut que le cône $U=0$ ait des droites multiples; il y a trois cas à considérer: 1° Le cône passe par les six droites, et une de ces droites est une droite triple du cône; il y aura, comme cela doit être,

$$3+1+1+1+1+1=8$$

droites d'intersection de $Q=0$, $U=0$. 2° Le cône passe par les six droites; deux de ces droites étant des droites doubles, il y aura

$$2+2+1+1+1+1=8$$

droites d'intersection. 3° Le cône passe par cinq des six droites; trois de ces cinq droites étant des droites doubles, il y aura

$$2+2+2+1+1=8$$

droites d'intersection. Or, dans le premier et le second cas, le cône $U=0$ passe par les six droites d'intersection des cônes $P=0$, $Q=0$; il faut donc que l'on ait identiquement

$$U = PQ' - P'Q,$$

P', Q' étant des fonctions homogènes en x, y, z du second ordre et du premier ordre respectivement. Mais en vertu de l'équation

$$U = PQ' - P'Q = 0,$$

on a $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P'}{Q'}$, c'est-à-dire la courbe est située sur la monoïde quadrique $w = \dfrac{P'}{Q'}$. La courbe sera quadriquadrique ou excubo-quartique, selon les circonstances.

Reste à considérer le troisième cas. La monoïde cubique est une surface cubique ayant le sommet pour point conique; la théorie des droites sur une telle surface a été examinée par M. Salmon dans son Mémoire: "On the triple tangent planes of a surface of the third order," *Camb. and Dubl. Math. Journ.*, pp. 252—260 (1849). Il y a, en effet, les six droites par le point conique, savoir: les droites $P=0$, $Q=0$, qui comptent pour douze droites, et de plus quinze droites; $6 \times 2 + 15 = 27$. Chacune des quinze droites est donnée comme troisième intersection de la surface avec un plan qui passe par deux des six droites. Donc, en nommant 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six droites, on peut nommer 12 la droite dans le plan mené par les droites 1, 2; et de même pour les droites 13, 23, etc. La droite 1 est rencontrée par les droites 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 15, 16; la droite 12 par les droites 1, 2; 34, 56; 35, 64; 36, 45; et ainsi pour les autres droites.

Cela étant, je suppose que le cône $U=0$ passe par les droites 2, 3, 4, 5, 6, et que les droites 4, 5, 6 soient droites doubles du cône. Je dis que la courbe sera située sur une surface du second ordre qui passe par les droites 12, 13 (droites qui ne se coupent pas), savoir, ces deux droites et la courbe seront l'intersection complète de la monoïde cubique et de la surface du second ordre; cela fait voir que la courbe est une courbe excubo-cubique. Et, comme il est auparavant dit, en prenant pour sommet un point quelconque de la surface du second ordre, la courbe sera située sur une monoïde quadrique $w = \dfrac{P'}{Q'}$.

Donc, en partant de la monoïde cubique, on trouve toujours que la courbe du quatrième ordre est située sur une monoïde quadrique.

J'établis comme suit l'existence de la surface du second ordre qui passe par les droites 12, 13. Je remarque en général que l'équation $w = \dfrac{P}{Q}$ peut s'écrire sous la forme $w + L = \dfrac{P + LQ}{Q}$, où L est une fonction homogène linéaire quelconque de x, y, z; ou en changeant w, cette équation sera

$$w = \frac{P + LQ}{Q},$$

c'est-à-dire on peut remplacer le cône $P=0$ par un cône quelconque qui passe par les droites d'intersection des cônes $P=0$, $Q=0$. Donc, pour la monoïde cubique, on peut prendre pour $P+LQ=0$ un système de trois plans, et en prenant pour équations de ces plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, on peut prendre pour équations de la monoïde cubique

$$w=\frac{xyz}{Q}.$$

Comme les coordonnées x, y, z renferment chacune un multiplicateur indéterminé, on peut écrire

$$Q=x^2+y^2+z^2+\quad 2lyz+\quad 2mzx+\quad 2nxy,$$

ou, en posant $\alpha'=\frac{1}{\alpha}$, $\beta'=\frac{1}{\beta}$, $\gamma'=\frac{1}{\gamma}$, α, β, γ étant des quantités quelconques, on peut écrire

$$Q=x^2+y^2+z^2+(\alpha+\alpha')yz+(\beta+\beta')zx+(\gamma+\gamma')xy,$$

ce qui est la forme la plus commode pour mettre en évidence les droites d'intersection $xyz=0$, $Q=0$. On peut supposer que les équations de ces droites soient

$$\begin{array}{llll} (1) & x=0,\quad y+\alpha z=0, & (2) & x=0,\quad \alpha y+z=0, \\ (3) & y=0,\quad z+\beta x=0, & (4) & y=0,\quad \beta z+x=0, \\ (5) & z=0,\quad x+\gamma y=0, & (6) & z=0,\quad \gamma x+y=0. \end{array}$$

Donc, pour les plans 56, 34, 24, on aura les équations

$$(56)\quad z=0,\qquad (34)\quad y=0,\qquad (24)\quad x+\alpha\beta y+\beta z=0;$$

et de là l'équation

$$AQ^2+Qz\left[By+C(x+\alpha\beta y+\beta z)\right]+Dz^2y(x+\alpha\beta y+\beta z)=0$$

sera celle d'un cône du quatrième ordre qui passe par les droites 2, 3, 4, 5, 6 et a les droites 4, 5, 6 pour droites doubles; et comme cette équation contient les trois quantités arbitraires $A:B:C:D$, ce sera l'équation la plus générale qui satisfait aux conditions dont il s'agit: c'est-à-dire cette équation sera celle du cône $U=0$.

Les équations de la droite 12 sont $x=0$, $w=0$; pour obtenir celle de la droite 13, j'observe que l'équation du point 13 est

$$\alpha\beta x+y+\alpha z=0,$$

et je forme l'équation identique

$$Q=(\alpha\beta x+y+\alpha z)\left[(\gamma+\gamma'-\alpha\beta)x+y+\alpha' z\right]+\beta'(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')\,x(z+\beta x),$$

laquelle se vérifie sans peine. Donc, en écrivant

$$\alpha\beta x+y+\alpha z=0,\quad\text{ou}\quad y=-\alpha(z+\beta x),$$

l'équation $w=\frac{xyz}{Q}$ devient

$$w=\frac{-\alpha x(z+\beta x)z}{\beta'(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')\,x(z+\beta x)},=\frac{-\alpha\beta z}{(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$w(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')+\alpha\beta z=0,$$

laquelle et l'équation

$$\alpha\beta x+y+\alpha z=0$$

sont les deux équations de la droite 13.

Cela étant,

$$(Ax+Bw)(\alpha\beta x+y+\alpha z)+(Cx+Dw)[\alpha\beta z+(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')w]=0$$

sera l'équation d'une surface du second ordre qui passe par les deux droites 12, 13; et, en éliminant w au moyen de l'équation

$$w=\frac{xyz}{Q},$$

on obtient l'équation du cône du quatrième ordre. En effet, en substituant cette valeur de w, on obtient une équation du sixième ordre laquelle, divisée par $(\alpha\beta x+y+\alpha z)$, devient

$$AQ^2+ByzQ+(CQ+Dyz)z\frac{\alpha\beta Q+(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')xy}{\alpha\beta x+y+\alpha z}=0;$$

or

$$\frac{Q}{\alpha\beta x+y+\alpha z}=(\gamma+\gamma'-\alpha\beta)x+y+\alpha' z+\frac{\beta'(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')x(z+\beta x)}{\alpha\beta x+y+\alpha z},$$

donc la partie fractionnelle est

$$\frac{\alpha(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')x(z+\beta x)+(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')xy}{\alpha\beta x+y+\alpha z},$$

c'est-à-dire

$$(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')x\frac{\alpha(z+\beta x)+y}{\alpha\beta x+y+\alpha z},=(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')x,$$

et l'équation devient

$$AQ^2+ByzQ+(CQ+Dyz)z\left[\begin{array}{l}\alpha\beta(\gamma+\gamma'-\alpha\beta)x+\alpha\beta y+\beta z\\+(1-\alpha\beta\gamma)(1-\alpha\beta\gamma')x\end{array}\right],$$

ou enfin

$$AQ^2+ByzQ+(CQ+Dyz)z(x+\alpha\beta y+\beta z)=0,$$

ce qui est en effet l'équation ci-dessus trouvée pour le cône $U=0$.

Suite.—Courbes du cinquième ordre.

On pourrait assez bien dénoter les courbes des ordres un, deux, trois, comme suit, savoir :

Courbe du premier ordre, par	1
Courbe du second ordre, par	2
Courbes du troisième ordre, par	3 et 4 − 1,

c'est-à-dire que la courbe plane serait 3 et la courbe dans l'espace $4-1$. Mais pour le quatrième ordre, cette notation serait déjà en défaut, et l'on aurait besoin d'une notation telle que celle-ci:

Courbe plane	4.1
Courbe quadriquadrique .	2.2
Courbe excubo-quartique .	$2.3-1-1$.

Cela devient cependant trop complexe, et comme je ne cherche nullement une notation parfaite, il suffit pour le moment de dénoter la courbe plane (dont je n'ai guère à m'occuper) par 4*, la quadriquadrique par 4, et l'excubo-quartique par $6-2$. De même pour le troisième ordre, on peut dénoter la courbe plane par 3* et la courbe dans l'espace par 3.

Cela étant, pour les courbes du cinquième ordre, ou courbes quintiques, il y a cinq espèces, savoir:

			P. D. A.
Courbe plane	ou espèce	5	0
Courbe quadricubique	„	$6-1$	4
Courbe quadriquartique	„	$8-3$	6
Courbe cubicubique (deux espèces)	„	$9-3-1$	6
		$9-6+2$	5

où la colonne P. D. A. fait voir pour chaque espèce le nombre des points doubles apparents (voir le Mémoire de M. Salmon: "On the classification of Curves of double Curvature," *Camb. et Dubl. Math. Journ.*, t. v. 1850). Cette classification est au fond celle du Mémoire cité; seulement M. Salmon a énuméré trois sous-espèces qui n'existent pas, à savoir les sous-espèces quadriquadriques analogues à $V.7$, $V.8$, $V.9$ (p. 42, où M. Salmon parle des courbes algébriques correspondantes à $V.7$, $V.8$, $V.9$, $V.10$, sans attacher des numéros à ces quatre sous-espèces). Je vais à présent expliquer la théorie des cinq espèces.

Courbe plane, ou espèce 5.—Il va sans dire que cette courbe est l'intersection d'une surface quintique par un plan quelconque.

Courbe quadricubique, ou espèce $6-1$.—Cette courbe est l'intersection partielle d'une surface quadrique et d'une surface cubique qui ont en commun une seule droite. En supposant que les équations de la droite soient $x=0$, $y=0$, on peut prendre pour équation de la surface quadrique $xw-yz=0$, et pour celle de la surface cubique $xV-yU=0$, où $U=0$, $V=0$, sont des surfaces quadriques quelconques. Au lieu des deux équations

$$xw-yz=0,$$

$$xV-yU=0,$$

il est permis d'écrire

$$\left\|\begin{matrix} U, & x, & z \\ V, & y, & w \end{matrix}\right\|=0,$$

ce qui fait voir qu'il passe par la courbe cette nouvelle surface cubique,

$$zV - wU = 0,$$

laquelle a en commun avec la première surface cubique la courbe quadriquadrique $U = 0$, $V = 0$.

La courbe a 4 points doubles apparents; elle peut donc avoir 0, 1 ou 2 points doubles ou de rebroussement; cela donne les sous-espèces

$$V.1,\ V.2,\ V.3,\ V.4,\ V.5,\ V.6,$$

de M. Salmon.

Je remarque en passant qu'en supposant que la surface cubique $xV - yU = 0$ a en commun avec la surface quadrique $xw - yz = 0$, non-seulement la droite $x = 0$, $y = 0$, mais aussi une autre génératrice du même mode de génération, on aura, au lieu de la courbe quintique $6 - 1$, cette nouvelle droite, et une courbe excubo-quartique. C'est là le théorème qui donne une des constructions que M. Chasles a trouvées pour la courbe excubo-quartique.

J'ajoute que la courbe considérée comme courbe située sur une surface quadrique sera de l'espèce (3, 2), ou, selon la notation de M. Chasles, $M(x^3y^2)$. On connaît ainsi un grand nombre des propriétés de cette courbe, et aussi de la courbe d'espèce $8 - 3$ dont nous allons parler, laquelle, considérée comme courbe située sur une surface quadrique, est de l'espèce (4, 1) ou $M(x^4y)$.

Courbe quadriquartique, ou espèce $8 - 3$.—Une telle courbe est l'intersection partielle d'une surface quadrique et d'une surface quartique qui ont en commun trois droites qui ne se rencontrent pas: autrement dit, ces droites seront des génératrices du même mode de génération de la surface quadrique [1].

Soit $xw - yz = 0$ l'équation de la surface quadrique; on peut prendre pour les trois génératrices

$$(x - \lambda y = 0,\ \ \lambda w - z = 0),$$
$$(x - \mu y = 0,\ \ \mu w - z = 0),$$
$$(x - \nu y = 0,\ \ \nu w - z = 0);$$

et cela étant, l'équation de la surface quartique sera

$$(a, \ldots)(x - \lambda y,\ \lambda w - z)(x - \mu y,\ \mu w - z)(x - \nu y,\ \nu w - z) = 0,$$

en représentant de cette manière une fonction linéaire par rapport à $x - \lambda y$ et $\lambda w - z$, par rapport à $x - \mu y$ et $\mu w - z$, et par rapport à $x - \nu y$ et $\nu w - z$, les coefficients $a, \ldots$ étant des fonctions linéaires quelconques de x, y, z, w.

La courbe à 6 points doubles apparents; il n'y a donc pas d'autre singularité: c'est l'espèce analogue à

$$V.10$$

de M. Salmon.

[1] Dans le symbole $8 - 3$ on remarquera que 3 dénote non pas la cubique gauche, mais les trois droites; $8 - 1 - 1 - 1$ serait trop long, et je me suis servi exprès de la notation moins complète; et ainsi il est nécessaire en pareil cas d'expliquer la notation.

Courbe cubicubique, espèce $9-3-1$.—La courbe est l'intersection partielle de deux surfaces cubiques qui ont en commun une courbe cubique gauche et une droite qui ne rencontre pas la courbe cubique.

Soient p, q, r, s, t, u, P, Q des fonctions linéaires quelconques des coordonnées; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ des fonctions linéaires quelconques de P, Q (autrement dit, $\alpha=0, \beta=0$, etc., seront les équations de six plans quelconques qui passent par la droite $P=0, Q=0$). Cela étant, les surfaces cubiques

$$\begin{vmatrix} p, & s, & \alpha \\ q, & t, & \beta \\ r, & u, & \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} p, & s, & \alpha' \\ q, & t, & \beta' \\ r, & u, & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

auront en commun la courbe cubique

$$\left\| \begin{matrix} p, & q, & r \\ s, & t, & u \end{matrix} \right\| = 0$$

(ainsi les surfaces quadriques $pt-sq=0$, $pu-sr=0$ se rencontrent selon la droite $p=0$, $s=0$ et selon la courbe cubique dont il s'agit) et la droite $P=0$, $Q=0$. Il y aura donc encore une intersection qui sera la courbe quintique $9-3-1$.

La courbe a 6 points doubles apparents: il n'y a donc pas d'autre singularité: c'est l'espèce

$$V.\,10$$

de M. Salmon.

Je remarque en passant que cette courbe quintique $9-3-1$ a avec une certaine courbe sextique une relation semblable à celle qui existe entre la courbe excubo-quartique et la courbe quintique $6-1$. En effet, $p, q, r, s, t, u, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ étant à présent des fonctions linéaires quelconques des coordonnées, la courbe sextique sera donnée par les équations

$$\left\| \begin{matrix} p, & s, & \alpha, & \alpha' \\ q, & t, & \beta, & \beta' \\ r, & u, & \gamma, & \gamma' \end{matrix} \right\| = 0,$$

ou, ce qui revient à la même chose, elle sera l'intersection partielle des deux surfaces cubiques

$$\begin{vmatrix} p, & s, & \alpha \\ q, & t, & \beta \\ r, & u, & \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} p, & s, & \alpha' \\ q, & t, & \beta' \\ r, & u, & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

lesquelles ont en commun la courbe cubique

$$\left\| \begin{matrix} p, & q, & r \\ s, & t, & u \end{matrix} \right\| = 0.$$

Or, en prenant α, β, γ, α', β', γ' des fonctions lineaires de P et Q, nous avons, en effet, réduit la courbe sextique à la droite $P=0$, $Q=0$ et à la courbe quintique $6-3-1$.

Courbe cubicubique, espèce $9-6+2$.—Cette courbe est l'intersection partielle de deux surfaces cubiques qui ont en commun une courbe excubo-quartique. En supposant que cette courbe excubo-quartique soit l'intersection partielle d'une surface quadrique et d'une surface cubique qui ont en commun les deux droites $(x=0,\ y=0)$ et $(z=0,\ w=0)$, on peut prendre pour équation de ces deux surfaces

$$U = xw - yz = 0,$$

$$V = \begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} (x,\ y)(z,\ w) = 0,$$

en représentant de cette manière la fonction $axz + byz + cxw + dyw$, linéaire par rapport à x, y et par rapport à z, w, avec des coefficients a, b, c, d, lesquels sont des fonctions linéaires quelconques de x, y, z, w.

En écrivant d'abord

$$\begin{aligned} V &= (ax+by)\,z + (cx+dy)\,w, \\ U &= \quad\; -\; y\ z + \quad\;\; x\ w, \end{aligned}$$

on obtient

$$xV - (cx+dy)\,U = z\,[ax^2 + (b+c)\,xy + dy^2].$$

Et de même en écrivant

$$\begin{aligned} V &= (az+cw)\,x + (bz+dw)\,y, \\ U &= \quad\;\; w\ x - \quad\;\; z\ y, \end{aligned}$$

on obtient

$$zV + (bz+dw)\,U = x\,[az^2 + (b+c)\,zw + dw^2].$$

Or le premier de ces résultats fait voir qu'en supposant $U=0$, $V=0$, on obtient $ax^2+(b+c)\,xy+dy^2=0$, et le second, qu'en supposant $U=0$, $V=0$, on obtient de même $az^2+(b+c)\,zw+dw^2=0$. Les surfaces $U=0$, $V=0$ se coupent selon la courbe excubo-quartique et les droites $(x=0,\ y=0)$ et $(z=0,\ w=0)$; mais la surface $ax^2+(b+c)\,xy+dy^2=0$ ne passe que par la première, et la surface $az^2+(b+c)\,zw+dw^2=0$ ne passe que par la seconde de ces deux droites; donc les deux surfaces se coupent selon la courbe excubo-quartique, mais non pas selon l'une ou l'autre des deux droites, c'est-à-dire que les deux surfaces cubiques

$$\begin{aligned} ax^2 + (b+c)\,xy + dy^2 &= 0, \\ az^2 + (b+c)zw + dw^2 &= 0, \end{aligned}$$

se coupent selon la courbe excubo-quartique, et encore selon une courbe quintique $9-6+2$.

Les deux surfaces cubiques ont chacune une droite double, elles sont donc des surfaces réglées. La courbe est donc comprise parmi les courbes décrites sur une surface cubique réglée, pour lesquelles M. Chasles a trouvé dernièrement une construction géométrique très-élégante.

La courbe a cinq points doubles apparents; elle peut donc ne pas avoir d'autre singularité, ou avoir un point double ou de rebroussement: cela donne les trois sous-espèces

$$V.7, \quad V.8, \quad V.9$$

de M. Salmon.

On démontre sans peine que toute courbe quintique est plane, quadricubique, quadriquartique ou cubicubique; mais, pour faire voir qu'il n'existe que les cinq espèces ci-dessus mentionnées, il y a encore plusieurs cas à considérer. Par exemple, pour les courbes cubicubiques, on pourrait supposer que les deux surfaces cubiques avaient en commun une courbe quadriquadrique: si cela était, les équations des deux surfaces seraient de la forme $Vx-Uy=0$, $Vz-Uw=0$ (surfaces qui ont en commun la courbe quadriquadrique $U=0$, $V=0$), mais dans ce cas la courbe quintique serait située sur la surface quadrique $xw-yz=0$, et l'on ne fait que retrouver l'espèce quadricubique $6-1$. J'ai fait, après M. Salmon, cette revue des différents cas, et je me suis assuré qu'il n'y a que les cinq espèces. Il convient peut-être de remarquer que l'énumération des sous-espèces comprises dans celles-ci n'est pas tout à fait complète, parce que, en certains cas, la courbe peut avoir un point triple, ou autre singularité plus élevée que les points doubles ou de rebroussement. Cela ne présente pas de difficulté, et en effet je n'ai parlé des sous-espèces que pour rapprocher mes résultats de ceux de M. Salmon.

La longueur de cette communication m'empêche de faire voir à présent comment les cinq espèces peuvent se déduire de la théorie générale des courbes dans l'espace considérées comme situées sur une surface monoïde.