# 301.

## SUR LES CÔNES DU SECOND ORDRE QUI PASSENT PAR SIX POINTS DONNÉS.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* tom. LII. (*Janvier—Juin,* 1861), pp. 1216—1218.]

Dans un Mémoire par feu M. Weddle "On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane" (*Camb. and Dubl. Math. Journ.*, t. V. 1850, voir la Note p. 69), on trouve à propos d'un théorème de M. Chasles la remarque que le lieu du sommet d'un cône du second ordre qui passe par six points donnés est une surface du quatrième ordre qui contient la courbe cubique en espace par les six points. Voici comment je démontre ce théorème:

En prenant $(X, Y, Z, U)$ pour les coordonnées courantes, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)\ldots(\alpha_6, \beta_6, \gamma_6, \delta_6)$ pour les coordonnées des six points donnés, et $(x, y, z, u)$ pour ceux du sommet, je pose l'équation

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc}
., & X^2, & Y^2, & Z^2, & U^2, & YZ, & ZX, & XY, & XU, & YU, & ZU \\
\lambda & 2x & . & . & . & . & z & y & u & . & . \\
\mu & . & 2y & . & . & z & . & x & . & u & . \\
\nu & . & . & 2z & . & y & x & . & . & . & u \\
\rho & . & . & . & 2u & . & . & . & x & y & z \\
\cdot & \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta & \alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta
\end{array}\right| = 0,$$

où la dernière ligne dénote les six lignes qu'on obtient en écrivant successivement $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)\ldots(\alpha_6, \beta_6, \gamma_6, \delta_6)$ au lieu de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, de manière que la fonction au côté gauche est un déterminant de l'ordre onze: les coefficients $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ sont des quantités arbitraires et les points $(\cdot)$ dénotent des zéros.

Cette équation est évidemment celle d'une surface du second ordre qui passe par les six points, et il ne faut qu'une seule condition pour que cette surface soit un cône: la condition sera

$$\begin{vmatrix} 2x, & ., & ., & ., & ., & z, & y, & u, & ., & . \\ . & 2y & . & . & z & . & x & . & u & . \\ . & . & 2z & . & y & x & . & . & . & u \\ . & . & . & 2u & . & . & . & x & y & z \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta & \alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta \end{vmatrix} = 0,$$

où la fonction à côté gauche est de même un déterminant de l'ordre dix; cette équation, laquelle est de l'ordre quatre par rapport à $(x, y, z, u)$, sera celle du lieu du sommet.

En effet, pour que la surface du second ordre soit un cône ayant pour sommet le point $(x, y, z, u)$, il faut et il suffit que les équations dérivées par rapport à chacune des coordonnées $(X, Y, Z, U)$, soient satisfaites en y écrivant $(x, y, z, u)$ au lieu de $(X, Y, Z, U)$. Je forme l'équation dérivée par rapport à $X$, et j'y écris $(x, y, z, u)$ au lieu de $(X, Y, Z, U)$; l'équation est

$$\begin{vmatrix} ., & 2x, & ., & ., & ., & ., & z, & y, & u, & ., & . \\ \lambda & 2x & . & . & . & z & y & u & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

Or on ne change pas la valeur du déterminant en substituant pour la première ligne cette même ligne moins la seconde ligne; l'équation devient ainsi:

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & ., & ., & ., & ., & ., & ., & ., & ., & ., & . \\ \lambda & 2x & . & . & . & z & y & u & . & . & \\ \vdots & & & & & & & & & & \end{vmatrix} = 0;$$

et le déterminant se réduit à $-\lambda$ multiplié par le déterminant de l'ordre dix; donc, en supposant que ce dernier déterminant se réduise à zéro, l'équation dérivée par rapport à $X$ sera satisfaite; et de même, les équations dérivées par rapport à $Y, Z, U$, en substituant toujours $(x, y, z, u)$ au lieu de $(X, Y, Z, U)$, seront toutes satisfaites si le déterminant de l'ordre dix se réduit à zéro. C. Q. F. D.

Il convient de remarquer que l'on peut sans perte de généralité réduire à zéro trois quelconques des quantités $\lambda, \mu, \nu, \rho$; de là on obtient l'équation du cône en substituant, au lieu de l'une quelconque des premières quatre lignes du déterminant de l'ordre dix, la ligne

$$| X^2, Y^2, Z^2, U^2, YZ, ZX, XY, XU, YU, ZU |.$$

En considérant la courbe cubique par les six points, on peut supposer que les équations de cette courbe soient

$$yu - z^2 = 0, \quad zy - xu = 0, \quad xz - y^2 = 0;$$

cela étant, on aura

$$\beta\delta - \gamma^2 = 0, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = 0, \quad \alpha\gamma - \beta^2 = 0$$

pour l'un quelconque des points $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1), \dots (\alpha_6, \beta_6, \gamma_6, \delta_6)$ ; et de là, au moyen des propriétés des déterminants, et en écrivant

$$\square = 4\,(yu - z^2)\,(xz - y^2) - (zy - xu)^2,$$

on exprime l'équation de la surface comme fonction linéaire par rapport à $x$, $y$, $z$, $u$ et par rapport à $d_x\square$, $d_y\square$, $d_z\square$, $d_u\square$ ; ces dernières fonctions se réduisent à zéro en vertu des équations

$$yu - z^2 = 0, \quad zy - xu = 0, \quad xz - y^2 = 0,$$

et ainsi, comme cela doit être, la surface passe par la courbe cubique.

Je prends l'occasion de remarquer que le théorème que j'ai donné par rapport aux six droites en involution de M. Sylvester [300], peut s'exprimer dans une forme encore plus simple comme suit :

Soit donnée une courbe cubique en espace, et prenons un point quelconque de la courbe pour sommet d'un cône du second ordre, d'ailleurs arbitraire ; un plan tangent du cône rencontre la courbe en deux points, et par ces deux points on peut mener une droite : les droites qui correspondent de cette manière à six plans tangents quelconques du cône sont des droites en involution. Je dois remarquer que l'idée de rattacher ces droites à une surface du quatrième ordre est due à M. Sylvester.

A propos de ce sujet, j'ai considéré le problème de trouver le lieu du sommet d'un cône du second ordre qui touche à six droites données : ce lieu est une surface du huitième ordre ; et en représentant les coordonnées de l'une quelconque des droites par $(a, b, c, f, g, h)$, savoir les coordonnées de la première droite, etc., sont

$$(a_1, b_1, c_1, f_1, g_1, h_1), \dots (a_6, b_6, c_6, f_6, g_6, h_6),$$

les coefficients de l'équation seront des fonctions linéaires des déterminants du sixième ordre formés au moyen de la matrice $(a, b, c, f, g, h)^2$, à six lignes et vingt et une colonnes.