56.

SUR UNE CLASSE SPÉCIALE DES DIVISEURS DE LA SOMME D'UNE SÉRIE GÉOMÉTRIQUE.

[*Comptes Rendus*, CVI. (1888), pp. 446—450.]

En l'honneur du grand et surprenant Fermat, dont j'ai vu avec une émotion indicible gravés sur le buste au musée de Toulouse les mots qui lui étaient adressés par Blaise Pascal : "Au plus grand homme de l'Europe," je me propose de nommer la fonction fondamentale de la haute Arithmétique $\Theta^M - 1$ le *fermatien* à la *base* Θ et à l'*indice M.*

De plus, je nommerai la fonction $\frac{\Theta^M - 1}{\Theta - 1}$, qui n'est autre chose que la somme d'une série géométrique dont la raison est un entier, le *fermatien réduit.* M (bien entendu) est un entier positif quelconque, mais Θ un entier positif ou *négatif.*

Les nombres premiers qui divisent un nombre quelconque, je les nomme ses *éléments.*

On sait, d'après Euler, que tout diviseur d'un fermatien sera de la forme $x\mu + 1$, où μ est M ou bien un diviseur quelconque de M. Parmi ces diviseurs, il y a une classe toute spéciale qui correspond aux cas de $\mu = 1$ et de $\mu = -1$. Le caractère spécial de ces diviseurs du fermatien, c'est qu'ils doivent nécessairement être (comme on verra immédiatement) en même temps diviseurs de son indice. Je remarque préalablement que, $\Theta^{p^\alpha} - 1$ (où p est un nombre premier) étant, par rapport au module p, congru à $\Theta - 1$, afin que ce fermatien contienne p, il faut que $\Theta - 1$ le contienne.

(1) Soit $M = p$ un nombre premier *impair* : je dis que le fermatien réduit $\frac{\Theta^p - 1}{\Theta - 1}$ contiendra p, mais non pas p^2. Car, en mettant $\Theta = kp + 1$, on voit que le fermatien réduit $\frac{\Theta^p - 1}{\Theta - 1}$, envisagé comme la somme d'une série géométrique, sera congru par rapport au module p^2 à $p + k\frac{p^2 - p}{2}p$, c'est-à-dire à p.

(2) Soit M la puissance d'un nombre premier impair p^a. En supposant toujours que $\Theta - 1$ contient p, $\Theta^x - 1$ le contiendra.

Conséquemment, puisque $\frac{\Theta^{p^a} - 1}{\Theta - 1} = \frac{\Theta^{p^a} - 1}{\Theta^{p^{a-1}} - 1} \frac{\Theta^{p^{a-1}} - 1}{\Theta^{p^{a-2}} - 1} \cdots \frac{\Theta^p - 1}{\Theta - 1}$, il suit comme conséquence de ce qui précède que $\frac{\Theta^{p^a} - 1}{\Theta - 1}$ sera divisible par p^a, mais non pas par p^{a+1}.

(3) Soit $M = Np^a$, où N est premier à p ; on a

$$\frac{\Theta^{Np^a} - 1}{\Theta - 1} = \frac{\Theta^{Np^a} - 1}{\Theta^N - 1} \frac{\Theta^N - 1}{\Theta - 1};$$

le premier facteur peut être envisagé comme fonction de Θ^N et par le cas précédent sera divisible par p^a, mais non pas par p^{a+1}. Le second facteur, envisagé comme la somme d'une série géométrique, sera congru à N par rapport à p (quel que soit N pair ou impair) et conséquemment ne contiendra pas p. Donc $\frac{\Theta^{Np^a} - 1}{\Theta - 1}$ sera divisible par p^a, mais non par p^{a+1}.

Ainsi, si p est un élément quelconque impair de $\Theta - 1$ et p^a la plus haute puissance de p contenu dans M, le fermatien réduit $\frac{\Theta^M - 1}{\Theta - 1}$ contiendra p^a, mais ne contiendra pas p^{a+1} et, comme conséquence particulière, ne contiendra nul élément de $\Theta - 1$ qui n'est pas un diviseur de M.

On peut aussi supposer que $\Theta - 1$ contient chaque élément de M, et l'on obtient le théorème suivant:

Un fermatien réduit à indice impair, dont le dénominateur est divisible par chaque élément de son indice, sera lui-même divisible par cet indice, et de plus le quotient qui résulte de la division de l'une de ces quantités par l'autre sera premier relatif à l'indice.

C'est dans les recherches sur la possibilité de l'existence de nombres parfaits autres que ceux d'Euclide que se rencontre cette théorie des fermatiens réduits qui y joue un rôle indispensable. Comme exemple de son utilité, je vais faire voir qu'un nombre de la forme $3N \pm 1$ à 7 éléments ne peut pas être un nombre parfait.

Remarquons que, si g est un des nombres gaussiens 3, 5, 17, 257, ..., c'est-à-dire un nombre premier de la forme $2^n + 1$, g ne peut pas diviser un fermatien réduit à indice impair s'il ne divise pas le dénominateur; car, afin que cela eût lieu, $g - 1$ par le théorème déjà cité d'Euler devrait contenir un facteur impair.

Donc un tel fermatien réduit sera de la forme $\frac{(gx+1)^{\mu g} - 1}{(gx+1) - 1}$.

Or nous avons vu, dans la Note précédente [p. 604, above], qu'un nombre $3N \pm 1$ à 6 éléments ne peut pas être un nombre parfait, et que, si un tel nombre à 7 éléments est un nombre parfait, le plus grand d'entre eux ne peut pas excéder 37.

Il est facile de voir que ce nombre doit contenir 5, parce que

$$\frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} < 2;$$

en effet, ce produit est moindre que 1,69.

Soit donc, s'il est possible, $3N \pm 1$ un nombre parfait à 7 éléments.

Les nombres premiers de la forme $4x+1$ pas plus grands que 37 sont 13, 17, 29, 37. Mais 17 ne peut pas être l'élément exceptionnel de $3N \pm 1$ parce que la somme des diviseurs du component* qui répond à 17 sera la somme d'un nombre pair de termes de la série $1 + 17 + 17^2 + 17^3 + \ldots$, laquelle nécessairement contient 3. La même chose est évidemment vraie pour un nombre quelconque, comme $2q$, qui est de la forme $12x + 5$.

Donc le component exceptionnel aura pour élément ou 13 ou 37; mais ni $13^2 - 1$ ni $37^2 - 1$ ne contient 5. Il faut donc que la somme des diviseurs du component ou à l'élément 11 ou sinon à l'élément 31 soit respectivement de la forme $\dfrac{11^{5\mu} - 1}{11 - 1}$ ou $\dfrac{31^{5\nu} - 1}{31 - 1}$, car 11 et 31 sont les seuls nombres pas plus grands que 37 de la forme $5x + 1$. Conséquemment tous les diviseurs d'une au moins des deux quantités $\dfrac{11^5 - 1}{11 - 1}$ ou $\dfrac{31^5 - 1}{31 - 1}$ seront compris parmi les éléments de $3N \pm 1$.

Selon notre théorème, les diviseurs ni de l'un ni de l'autre de ces deux fonctions ne peuvent contenir 5 et conséquemment par le théorème d'Euler seront de la forme $10x + 1$.

Or, puisque 11 n'est pas un résidu quadratique de 31, $11^5 - 1$ ne peut pas contenir 31; donc les diviseurs de $\dfrac{11^5 - 1}{11 - 1}$ sont compris parmi les nombres 41, 61, 71, 101, ...

$\dfrac{31^5 - 1}{31 - 1}$ contiendra 11, mais ne peut pas être une puissance de 11, car au module 11^2

$$4^5 (31^5 - 1) \equiv 3^5 - 4^5 \equiv 1 - 4^3 \equiv -1023,$$

c'est-à-dire $\qquad -11 \,.\, 93,$

de sorte que $31^5 - 1$ n'est pas divisible même par 11^2.

Donc les diviseurs de $\dfrac{31^5 - 1}{31 - 1}$ sont aussi compris parmi les nombres 41, 61, 71, 101, ...

* La plus haute puissance d'un élément d'un nombre qu'il contient se nomme un *component* de ce nombre.

Conséquemment il y aura au moins un élément du nombre parfait $3N \pm 1$ qui n'est pas moindre que 41; cette conclusion est contradictoire à l'existence de la limite supérieure 37 à la grandeur des éléments. Donc on peut affirmer en toute sûreté qu'un nombre non divisible par 3 qui contient moins que 8 facteurs premiers distincts ne peut pas être un nombre parfait.

Il y a une méthode un peu plus expéditive pour parvenir au résultat dernièrement acquis; mais, tout de même, supprimer la première méthode serait un procédé mal avisé, puisque son principe est applicable à d'autres cas où celui dont je vais faire usage se trouverait en défaut; par exemple en combinant les deux méthodes, c'est-à-dire en tenant compte en même temps des conséquences de la présence de 17 quand il figure comme élément, et de la présence de l'élément 5 dans le cas où 17 manque, je crois avoir démontré qu'un entier $3N \pm 1$ à 8 éléments ne peut pas être un nombre parfait.

Remarquons que, puisque le produit suivant, à 7 termes, où 17 manque dans le numérateur, $\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{19}{18}\frac{23}{22}\frac{29}{28}$, est moindre que 1,988, un nombre parfait à 7 éléments non divisible par 3 ne peut pas exister sans l'élément 17. Supposons qu'un tel nombre existe. Soit η un de ses éléments (autre que 17). La somme des diviseurs du *component* qui y correspond sera de la forme $\frac{\eta^{2i+2}-1}{\eta-1}$ si η est un élément ordinaire, et de la forme $\frac{(\eta^2)^{2j+1}-1}{\eta^2-1}(\eta+1)$ si η est l'élément exceptionnel.

Dans l'un et dans l'autre cas, cette somme ne peut contenir 17 que sous la condition que η^2-1 soit divisible par 17.

Donc, puisque le produit des sommes des diviseurs des components d'un nombre parfait doit contenir tous ses éléments, il existe au moins un élément η tel que η^2-1 contient 17, c'est-à-dire il y a un élément qui est un nombre premier compris dans l'une ou l'autre des formules $17x+1$, $17x-1$; mais le plus petit nombre premier contenu dans ces formules est 67*. Ainsi, puisque

$$\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\frac{67}{66} < (1{,}95)\left(1+\frac{1}{66}\right) < 1{,}98,$$

l'existence d'un nombre parfait $3N \pm 1$ à 7 éléments est impossible.

* On pourrait facilement prouver (s'il était nécessaire pour les besoins de la démonstration du théorème) que η doit être un nombre premier de la forme $17x+1$ ou un nombre premier en même temps de la forme $17x-1$ et $12y+1$, c'est-à-dire de la forme $204x+169$, et ainsi il y aurait au moins un élément plus grand que 103.