27.

SUR LES DEUX MÉTHODES, CELLE DE HAMILTON ET CELLE DE L'AUTEUR, POUR RÉSOUDRE L'ÉQUATION LINÉAIRE EN QUATERNIONS.

[*Comptes Rendus*, XCIX. (1884), pp. 473—476, 502—505.]

Un célèbre quaternioniste m'ayant demandé de lui expliquer la portée de ma solution de l'équation linéaire en matrices sur la solution du même problème en quaternions, il me semble désirable de donner explicitement le moyen de passer d'une solution à l'autre. Préalablement, il sera bon cependant de remarquer que, faute d'un examen suffisamment attentif de la forme du résultat obtenu ou plutôt indiqué par Hamilton (*Lectures on Quaternions*, pp. 559—561), on pourrait attribuer à sa solution une propriété qu'elle ne possède pas, celle de fournir le moyen de trouver la solution de l'équation linéaire en quaternions *sous une forme réduite* semblable à celle que fournit ma méthode: mais, en effet, l'examen d'un seul terme de m (voir au bas de la page 561), par exemple $SrJr^2$, suffit à montrer que le dénominateur m de Hamilton est du douzième degré dans les éléments des quaternions (b et a) de son équation $\Sigma bqa = c$ (p. 559), tandis que le degré pour la forme réduite n'est que huit. Il s'ensuit que le numérateur (si l'on avait la patience de le déduire des formules de Hamilton), aussi bien que le dénominateur obtenu par ce moyen, serait affecté d'un facteur étranger à la question, du quatrième degré, dans les éléments nommés.

J'ajoute qu'il est parfaitement possible de donner la valeur de x dans l'équation $\Sigma pxp' = T$ comme fonction seulement des p et p' et des coefficients des *deux formes associées* sans aucune irrationnalité. Car le déterminant du nivellateur $\Sigma p(\ )p'$, disons N, étant obtenu sous la forme $\Omega_2 + \surd(\Omega_4)$, le déterminant du nivellateur

$$\Sigma p(\ )p' + \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \ (\ ) \ \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & N \end{matrix}$$

(disons FN) sera aussi exprimé sous une forme semblable à celle-là, disons $\Phi_2 + \surd(\Phi_4)$.

Or, au lieu de l'équation identique $FN = 0$, on peut se servir d'un multiple quelconque de cette équation pour obtenir l'inverse de N comme fonction de puissances positives de N. Ainsi l'on peut, dans ce but, se servir de l'équation $\Phi_2^2 - \Phi_4^4 = 0$, au lieu de $FN = 0$, et, avec l'aide de cette équation, on obtiendra x exprimé en fonction des p et p' et de fonctions rationnelles des coefficients des deux formes associées ; mais alors, au lieu d'être obtenu sous sa forme la plus simple, son numérateur et son dénominateur contiendront un facteur commun qui sera une fonction du huitième degré des éléments des p et des p'.

Je passe à la règle pour traduire ma solution de l'équation en matrices $\Sigma pxp' = T$ en solution de cette même équation quand les p, les p' et le T, au lieu d'être matrices, sont donnés comme quaternions. Évidemment tout ce qui est nécessaire, c'est de connaître l'équation qui serait identique pour $\Sigma p(\ )p'$; je vais donner la règle pour l'obtenir.

Sous le signe Σ, je suppose compris $p, q, r, \ldots, p', q', r', \ldots$.

Écrivons la forme symbolique $[Nx + (p)\,y + (q)\,z + \ldots]^2$, disons X ; les coefficients de $xy, xz, \ldots$, symboliquement écrits, sont

$$2\,(p)\,N,\ 2\,(q)\,N,\ \ldots;$$

à $(p), (q), \ldots$ il *faut substituer* $Sp, Sq, \ldots$; le coefficient de y^2 est $(p)^2$ auquel il faut substituer Tp^2 ; finalement le coefficient de yz est $(p)(q)$, auquel il faut substituer $S\,(Vp\,.\,Vq)$*.

De même, on construit et l'on interprète la forme

$$[-x' + (p')\,y' + (q')\,z' + \ldots]^2$$

(disons X').

On calcule† la valeur de $\dot{X}'^2 X^2 - 4\,(\dot{X}'X)^2$. Ce résultat (une fonction du quatrième degré en N) (disons ΩN) sera une partie de la fonction qui doit être identiquement zéro. Le reste de cette fonction (disons $64\Omega_1 N$) sera

$$[\Sigma S\,(Vp\,Vq\,Vr)\,S\,(Vp'\,Vq'\,Vr')]\,N - \Sigma SpSp'\,S\,(Vp\,Vq\,Vr)\,S\,(Vp'\,Vq'\,Vr'),$$

et je dis que $$\Omega N + 64\Omega_1 N = 0$$

sera l'équation identique en N, et servira pour trouver la valeur de x, c'est-à-dire $N^{-1}T$ comme fonction du quaternion T, des quaternions $p, q, \ldots, p', q', \ldots$ et des symboles S, V, T ; de plus la valeur ainsi obtenue sera x *sous sa forme réduite.*

Il y a encore une petite observation à ajouter à mes remarques sur la solution de Hamilton de l'équation $\Sigma bqa = c$ (*Lectures*, p. 559). Il divise q en deux parties, le scalar w et le vecteur ρ.

C'est cette dernière quantité (ρ) qu'il exprime sous la forme $\frac{R}{m}$; alors $w = \frac{S(c) - S\eta'\rho}{\Sigma S\,(ab)}$, de sorte que, à défaut d'avoir recours à des réductions

[* See first note on p. 191 below.] [† See p. 181 above and p. 202 below.]

ultérieures, le dénominateur de q contiendra, non seulement le facteur étranger du quatrième degré dans les éléments des a et des b dont j'ai déjà parlé, mais encore le facteur étranger $\Sigma S(ab)$.

On remarquera que, dans cette solution, on aura des combinaisons des b avec des a et des fonctions quaternionistiques de ces combinaisons, tandis que, dans la solution infiniment plus simple que je donne du problème, il ne se trouve nulle part des mélanges de cette nature, mais seulement des fonctions quaternionistiques de combinaisons des a entre eux-mêmes et des b entre eux-mêmes. Le vice fondamental de la méthode de Hamilton, c'est la réduction du problème donné à un autre, où, au lieu de q, il n'entre que sa partie vectorielle. Néanmoins le travail de Hamilton (quoique sa raison d'être ne subsiste plus) méritera toujours d'être regardé comme un monument du génie de son grand et admirable auteur.

C'est là, pour la première fois dans l'histoire des Mathématiques, qu'on rencontre la conception de l'équation identique (voir *Lectures*, pp. 566, 567) qui est la base de tout ce qu'on a fait depuis et de tout ce qui reste à faire dans l'évolution de la Science vivante et remuante de la quantité multiple, c'est-à-dire l'*Algèbre universelle*, née à peu près 250 ans après l'organisation définitive de sa sœur aînée l'*Arithmétique universelle*, dans le Mémoire de M. Cayley sur les matrices, dans les *Philosophical Transactions*, vol. 148.

Dans une Note précédente, on a vu que dans la nouvelle et seule *bonne* méthode pour résoudre, par rapport à x, l'équation en quaternions

$$pxp' + qxq' + rxr' + sxs' + \ldots = \Gamma,$$

on fait trois opérations. La première, à laquelle on peut donner le nom de *nivellation*, consiste à trouver le nivellant, c'est-à-dire le déterminant de la matrice du quatrième ordre appartenant à un nivellateur donné du second ordre. La seconde, qu'on peut appeler *déduction*, consiste à obtenir l'équation identique, à laquelle un nivellateur correspond au moyen d'un autre nivellateur qu'on obtient du nivellateur donné en y adjoignant un couple de plus de la forme $-N(\ )\,\delta s$, ou, ce qui revient au même, le couple $\sqrt{(-N)}(\ )\sqrt{(-N)}$, où N est considéré comme un *scalar*. Finalement, on arrive à la dernière opération, que je nommerai *substitution et réduction*, et qui consiste à substituer à l'inverse du nivellateur sa valeur en fonction rationnelle du troisième ordre de lui-même, puis à faire des réductions dont je parlerai tout à l'heure.

Au moyen de ces opérations, on arrive à la valeur de l'inconnue de l'équation sous sa forme réduite la plus simple qu'elle puisse prendre.

Pour obtenir la forme de l'équation identique, voici ce que j'ai trouvé en appliquant la méthode indiquée dans la Note précédente.

Pour plus de simplicité, je me sers de la notation suivante, qui s'applique à des lettres quelconques, accentuées ou non, représentant des quaternions.

Je pose

$$Sp=(p), \quad Tp^2=p_2, \quad S(VpVq)=(pq), \quad S(VpVqVr)=(pqr).$$

Alors, en écrivant

$$p(\ )p'+q(\ )q'+r(\ )r'+s(\ )s'+\ldots=N,$$

on aura

$$\begin{aligned}
&N^4-4\Sigma(p)(p')N^3+\Sigma[4(p)^2p'_2+4(p')^2p_2-2p_2p'_2]N^2\\
&\quad -\Sigma\{4(p)(p')p_2p'_2\\
&\qquad +8[(p)(q')(pq).p'_2+(p')(q)p'q'.p_2]-4(p)(p')q_2q'_2\\
&\qquad +4[(q)(p')p_2q'_2+(p)(q')p'_2q_2]-8pp'(qr)(q'r')\\
&\qquad +8[(p)(q')(qr)p'r'+(p')(q)(q'r')(pr)]+8\Sigma(pqr)(p'q'r')\}N\\
&\quad +\Sigma\{p_2{}^2p'_2{}^2-2p_2p'_2.q_2q'_2\\
&\qquad +4[p_2q_2(p'q')^2+p'_2q'_2(pq)^2]-4p_2p'_2pq.p'q'\\
&\qquad +4p_2p'_2qr.q'r'+8[p_2(qr)(p'q')(p'r')+p'_2(q'r')(pq)(pr)]\\
&\qquad +8[pq.rs.p'r'.q's'+p'q'.r's'.pr.qs]-8(p)(p')(qrs)(q'r's')\}=0,
\end{aligned}$$

où le dernier terme de la partie fonctionnelle de l'équation est le nivellant de N.

Quant à la substitution, si, dans l'équation précédente

$$N^4-AN^3+BN^2+CN-D=0\ *,$$

on remplace $N^{-1}\Gamma$ par la fraction

$$\frac{N^3\Gamma-AN^2\Gamma+BN\Gamma-C\Gamma}{D},$$

tous les termes du numérateur de cette fraction seront des multiples connus de la forme $P\Gamma P'$, où P est de l'une des formes suivantes : p^3; p^2q, pqp, qp^2; p^2, pq; p; ..., et où de même P' a des types semblables avec des lettres accentuées. Il ne reste plus qu'à réduire chaque P à sa forme la plus simple, c'est-à-dire à l'exprimer comme fonction linéaire de 1, p, q, $pq-qp$, et de même pour P'. Alors le numérateur de x ne contiendra plus que des termes dont les arguments seront tous d'un des types suivants (je remplace la moitié de $pq-qp$ par $[pq]$) :

$$\Gamma,\ p\Gamma,\ \Gamma p',\ p\Gamma p',\ p\Gamma q',$$
$$[pq]\Gamma,\ \Gamma[p'q'],\ p\Gamma[p'q'],\ [pq]\Gamma p',\ [pq]\Gamma[p'q'];$$

il faut y ajouter le type $pqr\Gamma r'q'p'$, qui est déjà sous sa forme la plus simple et n'exige aucune formule de réduction.

* D est le déterminant de la matrice qui appartient au nivellement N. Quand $D=0$, la solution de l'équation $Nx=\Gamma$ devient ou *idéale* (ce qui a lieu en général), ou (ce qui a lieu pour des cas particuliers) *actuelle*, mais indéterminée.

Je n'entreprendrai pas pour le moment de calculer les coefficients de ces arguments, mais j'indiquerai du moins les formules de réduction qui seules sont nécessaires pour effectuer ce calcul. Ce travail, bien digne d'attirer l'attention de quelque jeune géomètre, peut très probablement amener à des résultats qui, à l'aide d'une notation symbolique, pourront être présentés sous une forme d'une simplicité tout à fait inattendue et pour ainsi dire providentielle. J'en ai eu l'expérience pareille dans d'autres recherches du même genre, dans la solution de certains cas d'équations quaternionistiques du second degré.

Voici toutes les formules de réduction dont on aura besoin :

$$p^2 = 2(p)p - p_2, \quad p^3 = [4(p)^2 - p_2]p - 2(p)p_2,$$

$$pq = [pq] + (p)q + (q)p - (pq),$$

$$qp = -[pq] + (p)q + (q)p - (pq),$$

$$p^2q = 2(p)[pq] + 2(p)(q)p + (2p^2 - p_2)q - 2(p)(pq),$$

$$pqp = 4(p)[pq] + [8(p)(q) - 2(pq)]p$$
$$- [4(p)^2 + p_2]q - [2(q)p_2 + 4(p)(pq)];$$

dans les formules on peut, au lieu de $[pq]$, écrire $V(VpVq)$.

Remarque.—Quand un nivellateur devient *symétrique*, c'est-à-dire quand $p = p'$, $q = q'$, ..., alors les *deux formes associées* coïncident en une seule dont le nivellant devient un *invariant orthogonal*.

Qu'il me soit permis, avant de conclure, d'ajouter encore une petite réflexion sur l'importance de la question traitée ici. Elle constitue, pour ainsi dire, un canal qui, comme celui de Panama, sert à unir deux grands océans, celui de la théorie des invariants et celui des quantités complexes ou multiples: dans l'une de ces théories, en effet, on considère l'action des substitutions sur elles-mêmes, et dans l'autre, leur action sur les formes; de plus, on voit que la théorie *analytique* des quaternions, étant un cas particulier de celle des matrices, cesse d'exister comme une science indépendante; ainsi, de trois branches d'analyse autrefois regardées comme étant indépendantes, en voilà une abolie ou absorbée, et les deux autres réunies en une seule de substitution algébrique.