Szkic propedeutyki gieometrji.

Naszkicowany tu program propedeutyki gieometrji, różniący się w rysach zasadniczych od stosowanych obecnie sposobów nauczania, jest jedynie pomysłem, niewypróbowanym w praktyce i nawet nieopracowanym w szczegółach, a przeto nie mogę twierdzić, że dałby się on przeprowadzić w rzeczywistości. Do ogłoszenia go drukiem skłania mnie ta okoliczność, że propedeutyka gieometrji pozostaje jeszcze w fazie tworzenia się, a więc nawet pomysły o charakterze utopijnym mogą być pod pewnemi względami użyteczne.

Należy odróżniać propedeutykę od elementarnego kursu gieometrji, jaki bywa wykładany w szkołach ludowych, rzemieślniczych i t. d. W takim kursie elementarnym należy liczyć się bardzo ściśle z przyszłemi potrzebami praktycznemi uczniów; należy dać im pewien całokształt wiedzy gieometrycznej, zawierający wiadomości najniezbędniejsze dla rolnika lub rzemieślnika.

Propedeutyka oczywiście może istnieć tylko w tych szkołach, w których po niej następuje kurs systematyczny gieometrji; kurs ten uwzględnia, lub powinien uwzględniać, w dostatecznej mierze wymagania, które stawia szkole życie praktyczne, a zatym propedeutyka może wcale nie liczyć się z takiemi wymaganiami.

Nie jest również rzeczą konieczną ani nawet wskazaną wzorować się w propedeutyce na tradycyjnym kursie systematycznym, opartym na Elementach Euklidesa. Zasadniczo odmienne zadanie powinno być rozwiązane w zasadniczo odmienny sposób, a zadaniem tym jest nie udzielenie uczniowi pewnych określonych wiadomości, lecz stopniowe kształcenie jego władz umysłowych, wszczepianie w jego organizm umysłowy pewnych prostych pojęć i skojarzeń pojęciowych, odgrywających w gieometrji rolę zasadniczą, wreszcie wzbudzenie w nim zamiłowania do tej gałęzi nauki.

Sądzę, że w propedeutyce, pojętej według niniejszego programu, połączenie całkowite (fuzja) gieometrji płaszczyzny z gieometrją przestrzeni byłoby niepraktyczne.

W początkach nauki uczeń jeszcze nie jest zdolny do myślenia pojęciami ogólnemi, a przytym wyobraźnia jego jest jeszcze bardzo słaba; dla tego też przedmiotem poznawania może być dla niego tylko figura konkretna, narysowana, a środkiem poznawania — dostrzeganie bezpośrednie, zmysłowe. Stąd wynika, że na pierwszym stadjum nauki główną rolę powinno odgrywać doświadczenie czyli rysunek. Uczeń rysuje figurę, czyniącą zadość warunkom, dokładnie określonym w zadaniu, i spostrzega, że figura ta posiada pewną właściwość nieoczekiwaną, w owych warunkach niewymienioną. Oczywistą jest rzeczą, że ten tryb nauczania nadaje się przedewszystkim do gieometrji płaszczyzny.

Z czasem uczeń przyzwyczai się do pojęć ogólnych. Gdy będzie mowa o trójkącie, to już będzie myślał nie o trójkącie konkretnym, wykreślonym na papierze, lecz o określonym rodzaju figur, posiadających pewne własności spólne. Zrozumie on przytym, że własności figur można wykrywać zapomocą rozumowania, a jednocześnie rozwinie się jego wyobraźnia przestrzenna. Wtedy dopiero czas jest przystąpić do gieometrji przestrzeni, posługując się przytym w dużym zakresie świeżo zdobytemi środkami poznawania.

Z uwag powyższych wynika, że metody dydaktyczne w gieometrji płaszczyzny i gieometrji przestrzeni powinny być różne, a zatym i zakresy nauki w obu tych działach nie będą analogiczne. Dla tego też sądzę, że najlepiej rozłożyć cały kurs na dwa działy, z których pierwszy będzie poświęcony wyłącznie gieometrji płaszczyzny, drugi zaś przeważnie gieometrji przestrzeni.

Szkic niniejszy dotyczy jedynie działu pierwszego.

Z uwag powyższych wynika, że w dziale tym głównym środkiem do poznawania prawd gieometrycznych powinno być spostrzeganie bezpośrednie i doświadczenie, które czyni uczeń, wykreślając figury; dopiero stopniowo w umyśle jego powstawać będzie idea, że do tych samych prawd prowadzi i inna droga, droga rozumowania, pewniejsza, a zarazem dogodniejsza i krótsza dlatego, kto umie po niej chodzić. Stąd wynika, że przedewszystkim uczeń musi zdobyć pewną wprawę w kreśleniu, i na to wypadnie poświęcić sporo czasu i pracy.

Od samego początku uczniowie powinni kreślić przy pomocy cyrkla i ekierek na papierze, rozpiętym na tablicy rysunkowej. Rysunki mogą być wykonane w ołówku, ale trzeba wszelkich . starań dołożyć, aby były możliwie dokładne i aby przytym swym wyglądem zewnętrznym sprawiały przyjemne wrażenie. Tylko przy porządnej robocie i pewnej dbałości o stronę estetyczną rysunku uczniowie mogą polubić czynności kreślenia.

Jakkolwiek głównym celem początkowej części propedeutyki ma być wprawa w kreśleniu, to jednak, dobierając odpowiednio ćwiczenia, można osiągnąć przytym inne, a raczej dalsze cele, a mianowicie można doprowadzić uczniów do zrozumienia, że w tworach gieometrycznych zachodzi pewna jednostajność, czy prawidłowość, można zaostrzyć ich ciekawość i wzbudzić chęć do bliższego poznania owej prawidłowości. Nauka kreślenia byłaby nudną pracą, gdyby nie odsłaniała uczniowi—przynajmniej w oddali—nowych horyzontów.

Pracę kreślenia można rozłożyć na pewne czynności lub działania elementarne, i, jak sądzę, będzie najprościej wprowadzać działania te po kolei, przerabiając na każde z nich odpowiednie ćwiczenia, podobnie jak w nauce rachunków przechodzi się po kolei dodawanie, odejmowanie i t. d. Według mego widzenia rzeczy kreślenie daje się w sposób naturalny rozłożyć na cztery takie działania; omówię je po kolei, przytaczając jednocześnie przykłady odpowiednich ćwiczeń.

Działanie pierwsze. Wykreślanie prostych przez dane punkty i stycznych do koła z punktów zewnętrznych.

W kreśleniu szkolnym zwykle przeprowadza się styczną z punktu do koła przy pomocy innego koła, którego średnicą jest odcinek, zawarty pomiędzy danym punktem i środkiem koła danego. Konstrukcja ta jednak jest użyteczna tylko w tym razie, gdy chodzi o wyznaczenie punktu zetknięcia, wykreślanie zaś samej stycznej jest w zasadzie takim samym działaniem, jak łączenie linją prostą punktu danego z innym punktem danym, i może być wykonane z wielką dokładnością bez żadnej konstrukcji pomocniczej. Zresztą, uważając punkt za koło o promieniu zero, mamy prawo uważać drugie z tych działań za szczególny wypadek pierwszego. Z tych względów łączę te obydwa działania w jedno.

Odpowiednie ćwiczenia na to działanie mamy w różnych konstrukcjach linjowych gieometrji rzutowej; mogą one, jak sądzę, w wysokim stopniu zaciekawić uczniów, a przytym każde z nich zawiera w sobie próbę dokładności rysunków. Przytoczę dwa takie ćwiczenia.

1. Poprowadź dwie dowolne proste, « i 6, i oznacz ich punkt przecięcia literą *O.* Przez inny punkt dowolny *P* poprowadź trzy nowe dowolne proste i oznacz punkty przecięcia pierwszej z *a* i *b* od-

powiednio przez A_1 i B_{lf} drugiej—przez T_3 i B_{2y} i trzeciej—przez yf_3 i B_3. Wyznacz następnie punkt przecięcia df prostych A_tB_2 i A_2B_t a także punkt przecięcia *N* prostych A_2B_3 i A_3B_2. Próba. Punkty *M, N* i *O* powinny leżeć na linji prostej.

2. Na okręgu koła obierz sześć dowolnych punktów A_y *B, C,* D_y *E* i *F,* i wyznacz punkt przecięcia *M* prostych *AB* i *DE,* punkt przecięcia *N* prostych *BC* i *EF,* wreszcie punkt przecięcia *0* prostych *CD* i *FA.* Próba. Punkty df, *N* i *O* powinny leżeć na linji prostej.

Dobrych ćwiczeń tego samego typu dostarczają twierdzenia Desargues'a, twierdzenie Brianchona i inne.

Działanie drugie. Odkładanie odcinków o danej długości na prostej i łuków o danej cięciwie na okręgu (lub wogóle na krzywej).

Niektóre sposoby wykreślania krzywych, czy to jako miejsc gieometrycznych, czy to jako obwiedni, będą tutaj odpowiedniemi i interesuj ącemi ćwiczeniami. Oto przykłady.

1. Poprowadź dwie dowolne proste *a* i 6, przecinające się w punkcie *O;* na prostej *a* odetnij 10 równych odcinków OA_{ly} A_tA_2, $J._2J._3...T_9T_{1O}$, a także odetnij na prostej *b* 10 równych odcinków OB_{iy} $B_1B_{2)}$ B_2 B_3 ... *Bg* B_{lo} , i wreszcie poprowadź proste A_t B_{lo}, A_2B_9, d-g-Bg... $A_{10}B_l$.

Ostatecznie zarysuje się wyraźnie parabola, jako obwiednia tych wszystkich prostych.

2. Poprowadź dwie dowolne proste *a* i 6, a także obierz dowolny punkt M_y poprowadź następnie przez *M* kilka prostych, które przetną odpowiednio prostą a w punktach $A_{ly}A_{2y}A_3$... , zaś prostą *b*— w punktach $B_{iy}B_{2y}$ B_3... Odetnij na pierwszej w stronę punktu *M* odcinek B_1N_1, równy A_rM, na drugiej odcinek B_2N_2, równy A_2M i t. d.

Punkty $7V_1A^r{}_27V_3$...Jf zarysują tutaj gałęź hiperboli. Można dalej pokazać uczniom, jak zużytkować punkty N_{ly} N_2... do wyznaczania punktów dalszych, a także, jak przejść do drugiej gałęzi. Do działania tego daje się również zaliczyć ćwiczenie następujące:

3. Drabina, stojąca na podłodze i oparta o ścianę, zaczyna się zsuwać. Wykreślić 10 różnych położeń drabiny.

Obwiednią tych położeń będzie krzywa, zwana astroidą.

To samo zadanie można wyrazić w innej interesującej formie.

Do wieży o danej szerokości ma być wniesiona przez drzwi drabina danej długości. Jaką wysokość powinny mieć drzwi, aby to było możliwe.

Uczeń powinien wykreślić drabinę w pewnej liczbie położeń, tak aby astroida zarysowała się wyraźnie. Przecięcie tej krzywej z przednią ścianą wieży wyznacza najmniejszą możliwą wysokość drzwi.

Działanie trzecie. Dzielenie odcinka prostej lub luku koła na części równe.

Działanie to powinno być wykonywane przy pomocy szeregu prób, czyli przybliżeń stopniowych, jak się to robi w praktyce, i niema wcale potrzeby wprowadzać znanych konstrukcji, używanych w szkole; konstrukcje te są nieładne i dająnaogół wyniki niedokładne.

Ćwiczenie 1. Wykreślić trójkąt i jego środkowe. Próba. Środkowe powinny przejść przez jeden punkt.

2. Na bokach *AB, BC* i *CA* trójkąta wyznacz odpowiednio punkty Cj, **J.**$_1$ i B_1 tak, aby *AC^^AB*, BA_t=2*BC* i CB_r=^*CA*. Próba. Punkty C_t, A_1 i B_t powinny leżeć na linji prostej.

Odpowiednie ćwiczenia można układać, posiłkując się twierdzeniami Cevy i Menelaosa; dobrym ćwiczeniem będzie także budowanie wieloboków foremnych, wpisanych w koło, a także wykreślanie trochoid, a przedewszystkim cyklojdy i rozwijającej koła, jako obwiedni układu kół.

Działanie czwarte. Przeprowadzanie prostych równoległych i prostopadłych do danych.

Naturalnie działanie to powinno być wykonywane zapomocą przesuwania ekierki a nie zapomocą niepraktycznych konstrukcji, stosowanych w kreśleniu szkolnym.

Ćwiczenie 1. Wykreślić równoleglobok i jego przekątnie. Próba. Punkt przecięcia przekątnich powinien być środkiem każdej z nich.

2. Poprowadź proste *a* i 6, przecinające 'się w punkcie *O.* Na pierwszej z nich odetnij równe odcinki OA_1, A_1A_2, yf$_2$d$_3$..., przez punkty A_{lf} A_2, A_3... poprowadź proste równoległe i wyznacz ich punkty przecięcia B_n B_{2J} B_3... z prostą *b.* Próba. Odcinki CB_{ly} B_tB_2, B_2B_3... powinny być równe.

Dobremi ćwiczeniami będą również: wykreślanie elipsy przy pomocy clwuch kół spółśrodkowych, wykreślanie paraboli, jako miejsca gieometrycznego punktów, jednakowo odległych od ogniska i kierownicy i t. d.

W ciągu tej nauki znajdzie się dość sposobności, aby zapoznać uczniów z rozmaitemi nazwami, często używanemi w gieometrji, jak środkowa trójkąta, wysokość trójkąta, równoleglobok, romb, prostokąt, przekątnia i t. d.

Gdy uczniowie nabyli już pewnej wprawy w kreśleniu, i gdy wśród nich rozwinęło się pewne zaciekawienie do przedmiotu, czas jest przejść do drugiej części propedeutyki. ' Ta druga część posiada już charakter systematycznej nauki o własnościach figur gieometrycznych, jakkolwiek różni się całkowicie od trybu nauczania, opartego na Elementach Euklidesa.

Zaczynamy od pojęć, znanych uczniom z obserwacji codziennej, a mianowicie od symetrji osiowej i symetrji środkowej, następnie przechodzimy stopniowo do pojęć coraz ogólniejszych, jak pokrewieństwo, podobieństwo, a wreszcie kolineacja. Na tym tle wystąpią w sposób zupełnie naturalny różne właściwości trójkątów, czworoboków i kół, ale, wybierając materjał, nie należy zapominać ani na chwilę, że w propedeutyce chodzić powinno nie o pewną określoną sumę wiadomości,' lecz jedynie o kształcenie pewnych władz umysłowych.

Symetrja osiowa. Przedewszystkim wskazujemy uczniom przykłady symetrji w najbliższym otoczeniu (symetrja okna względem linji środka, symetrja liścia względem włókna środkowego i t. d.), następnie pokazujemy im, jak mając oś symetrji i punkt A_r, wyznaczyć punkt $2_„$, symetryczny do punktu 2_t, albo odpowiadający punktowi 2_P Dalsze twierdzenia o symetrji i wypływające z nich wnioski uczeń powinien poznawać głównie drogą własnego dostrzegania.

Zaczynamy od zadania następującego: wykreślić dowolny trójkąt $A_lB_lC_l$ i symetryczny doń trójkąt $A_2B_2C_2$ względem dowolnie obranej osi symetrji. Już to pierwsze proste zadanie zawiera obfity materjał kształcący. Tak więc uczeń powinien dać odpowiedź na szereg pytań, opierając się przytym na doświadczeniu rysunkowym, a także w pewnej części na własnej intuicji i wyobraźni. Przytoczę szereg takich pytań dla przykładu.

1. Gdyby trójkąt pierwszy był ruchomy, czy można byłoby tak przesunąć go w płaszczyźnie rysunku, aby przystał do trójkąta drugiego?

2. Czy można trójkąty symetryczne doprowadzić do przystania i jak?

3. Gdyby jedna strona papieru była biała a druga czarna, to czy możnaby wycięte trójkąty doprowadzić do przystawania tak, aby a) stykały się białe strony, b) aby stykały się czarne strony i c) aby czarna strona stykała się z białą?

4. Czy można wyciąć jeden z trójkątów, odwrócić go na drugą stronę i wstawić dokładnie w powstały otwór?*)

*) Przypuszczam, że uczniowie zdolniejsi (a może i wszyscy) będą mogli wskazać, w jakim wypadku szczególnym odwrócenie takie będzie możliwe. Dotyczy to również pytań poprzedzających.

5. Pragniemy tak odwrócić tablicę (lub zwierciadło), aby obecny brzeg prawy znalazł się po lewej stronie i odwrotnie. Jakie przeróbki potrzeba w tym celu uskutecznić?

6. Pragniemy (pewne określone) drzwi odwrócić w taki sposób, aby obecna strona zewnętrzna znalazła się wewnątrz. Jakie przeróbki są potrzebne?

7. Wyznaczyć punkty przecięcia odpowiadających sobie boków trójkątów $A_lB_lC_l$ i $A_2B_2C_2$. Próba: punkty szukane powinny leżeć na osi symetrji.

8. Gdzie leżą punkty, odpowiadające samym sobie, i dlaczego odpowiadające sobie proste przecinają się na osi?

9. Jakie proste odpowiadają samym sobie (promienie symetrji)?

10. Czy jest prosta, której wszystkie punkty odpowiadają samym sobie?

11. Wykreślić środkowe (lub wysokości) obu trójkątów, przechodzące odpowiednio przez wierzchołki A_x i A_2 i sprawdzić, czy te proste odpowiadają sobie.

12. Poprowadzić dowolną prostą m_i przez punkt A_1 i wyznaczyć odpowiadającą jej prostą m_2.

13. Obrać dowolny punkt M na boku BC i wyznaczyć odpowiadający mu punkt J/$_2$, posługując się tylko linjalem.

14. Wyznaczyć jedynie przy pomocy linjału prostą n_2, odpowiadającą danej prostej n_x, która nie przechodzi przez żaden z wierzchołków trójkąta $A_1B_1C_1$.

Przechodzimy następnie do wykreślania wieloboków symetrycznych i kół symetrycznych.

Przy wykreślaniu wieloboków uczeń powinien posługiwać się w równej mierze obiema zasadniczemi właściwościami figur symetrycznych; pierwsza z nich polega na tym, że dwa odpowiadające sobie punkty leżą na jednym promieniu symetrji, a druga — że dwie odpowiadające sobie proste przechodzą przez jeden punkt osi symetrji.

Zwrócę tu uwagę, że koło znowu nastręcza sposobność do licznych zagadnień, rozwijających intuicję gieometryczną i wyobraźnię przestrzenną ucznia. Przytoczę dwa dla przykładu.

1. W ogrodzie są urządzone dwa kląby okrągłe i symetryczne względem ścieżki. Naokoło jednego biegnie chłopiec w kierunku ruchu wskazówki zegara; naokoło drugiego klombu biegnie inny chłopiec, przyczym obaj przebiegają w każdej chwili przez odpowiadające sobie punkty. Czy drugi chłopiec obiega swój klomb w kierunku ruchu wskazówki zegara, czy w odwrotnym?

2. Dwa jednakowe zegarki położono tarczami jeden na drugim.

Czy wskazówki obracają się w zgodnych kierunkach, czy w odwrotnych? Jeżeli przystają, dajmy na to, godziny trzecie, to czy przystają i inne?

Gdy zasadnicze pojęcia teorji symetrji stały się już własnością umysłową ucznia, należy zastosować nabytą wiedzę do badania własności różnych figur. Tak np. uczeń łączy symetryczne punkty A_t i A_2 z punktem II, położonym na osi. Powstaje tym sposobem trójkąt równoramienny d.$_1$BT$_2$, odpowiadający sam sobie. Teraz już uczeń bez pomocy mierzenia, a więc drogą rozumowania lub intuicji odkryje zasadnicze właściwości takiej figury, a mianowicie że ramiona są równe, że wysokość jest zarazem środkową i dwusieczną i t. d.

Dalej uczeń wykreśla koło, którego środek leży na osi symetrji, i znajduje, że kolo takie odpowiada samemu sobie. Doprowadzi to odrazu do ważnych twierdzeń jak np., że promień, prostopadły do cięciwy, przechodzi przez jej środek, że styczna jest prostopadła do promienia, przechodzącego przez punkt zetknięcia i t. d.

Tą samą drogą uczeń dojdzie łatwo do poznania własności prostokąta, kwadratu, rombu i t. d.

Twierdzenia te uczeń powinien zdobywać, o ile można, samodzielnie, a pomoc nauczyciela będzie polegała głównie na stawianiu pytań i krytyce odpowiedzi. Z początku uczeń będzie opierał swe wnioski głównie na intuicji, lecz należy uświadamiać go stopniowo, że droga ta jest zawodna i że dopiero związek logiczny pomiędzy nowym twierdzeniem a poprzedzającemi, których prawdziwość nie ulega wątpliwości, może być dowodem dostatecznym.

Symetrja środkowa. Poświęciwszy dość czasu symetrji.
osiowej, mogę już pobieżniej traktować rozdziały dalsze, tymbardziej,
że bieg nauki we wszystkich będzie podobny do opisanego.

Naprzód więc uczeń wykreśla dwie figury symetryczne, przekonywa się doświadczalnie, że odpowiadające sobie proste są równoległe; łatwo będzie doprowadzić go do zrozumienia, że pomiędzy tym faktem i samym pojęciem symetrji środkowej zachodzi związek logiczny. Mianowicie punkt przecięcia dwuch prostych symetrycznych odpowiadałby sam sobie, gdy tymczasem oczywiście tylko środek posiada taką własność.

Potym następują pytania o przystawaniu figur symetrycznych, nadające się szczególnie do ćwiczenia wyobraźni przestrzennej np. w rodzaju następującego: która godzina na tarczy zegarowej odpowiada (w symetrji) piątej; która odpowiadałaby piątej, gdyby tarcza posiadała 24 podziałki i t. d.

Symetrja środkowa znowu doprowadzi ucznia do poznania właściwości pewnych figur, jak np. równoległoboku i koła.

Pokrewieństwo. Trzymając się zasady, aby przechodzić od wypadków szczególnych do coraz ogólniejszych, rozpocznieiny od pokrewieństwa prostokątnego, wskazując różnice pomiędzy tym pokrewieństwem a symetrja osiową. Dwa odpowiadające sobie punkty figur symetrycznych leżą w jednakowych odległościach od osi symetrji, gdy tymczasem każdy punkt jednej z figur pokrewnych jest 1'/$_2$, albo 2, albo 2^s/$_4$ i t. d. razy odleglejszy od osi pokrewieństwa niż odpowiadający punkt drugiej. Liczbę tę nazwiemy spółczynnikiem pokrewieństwa.

Uczniowie rozwiązują naprzód zadanie takie: dana jest oś pokrewieństwa, spółczynnik pokrewieństwa (np. P/.J i trójkąt $A_1B_1C_2$, wykreślić pokrewny trójkąt J.$_2$B$_2$U$_2$. Zadanie to ujawni odrazu ważny fakt, że odpowiadające sobie proste schodzą się na osi pokrewieństwa, i uczeń z łatwością zrozumie, że tak być musi, bo punkty osi odpowiadają same sobie.

Dalsze zadania należy już dawać w innej, dogodniejszej formie: dana jest oś pokrewieństwa, figura A_XB_XC\... a także punkt A_2 figury pokrewnej, odpowiadający punktowi A_{ly} wykreślić ową figurę pokrewną.

Pokrewieństwo prostokątne daje bardzo dobrą sposobność do zaznajomienia ucznia z elipsą i jej zasadniczemi właściwościami. Obiera on środek koła na osi pokrewieństwa i wyznacza pewną liczbę punktów, odpowiadających punktom okręgu, czyli punktów elipsy, a także pewną liczbę prostych, odpowiadających stycznym do koła, czyli stycznych do elipsy. Tych punktów i stycznych powinno być tyle, aby elipsa zarysowała się wyraźnie. W ćwiczeniu tym uczniowie poznają kształt elipsy, dowiedzą się o jej środku, średnicach i osiach, przekonają się z łatwością, że elipsa jest symetryczna względem środka i względem każdej osi, że duża oś jest najdłuższa ze wszystkich średnic, a mała oś najkrótsza i t. d.

Przypuszczam, że po tym wszystkim uczniowie dadzą już sobie radę z zadaniem takim: dane są obie osi elipsy i prosta «$_2$, wyznaczyć punkty przecięcia tej prostej z elipsą. Uczeń obiera dużą oś za oś pokrewieństwa, wykreśla koło, odpowiadające elipsie, i prostą a_1, odpowiadającą danej prostej «$_2$, i wreszcie wyznacza punkty M_2 i JV$_2$, odpowiadające punktom M_1 i N_x, w których prosta a_x przecina okręg.

W podobny sposób dadzą się rozwiązać różne inne zadania, dotyczące elipsy, gdy ta jest dana za pomocą osi; np. wykreślić styczne z danego punktu, wykreślić styczne, równoległe do prostej danej, wykreślić cięciwę, której środek leży w punkcie danym i t. d. W końcu należy zapoznać uczniów z pokrewieństwem ukośnym, w którym promienie pokrewieństwa nie są prostopadłe do osi.

Podobieństwo. Jak od symetrji osiowej przeszliśmy do pokrewieństwa, tak samo zupełnie od symetrji środkowej przejdziemy do podobieństwa (jednokładności). Uczeń, wykreślając odpowiadające sobie figury, poznaje, że odpowiadające sobie proste są równoległe, że trójkątowi równobocznemu odpowiada trójkąt równoboczny, kwadratowi — kwadrat i t. d.

Sądzę, że dopiero w tym miejscu należy wprowadzić pojęcie kąta i podać sposoby mierzenia kątów. Gdy uczeń przyswoi sobie w dostatecznej mierze pojęcie podobieństwa, to poczuje sam, że do zupełnego opisu właściwości figur podobnych potrzebny jest nowy wyraz. Tym sposobem wyraz zjawi się dopiero wtedy, gdy odpowiadające mu pojęcie zarysowało się już dość wyraźnie w umyśle ucznia. Wypowie on teraz sam ową właściwość zasadniczą figur podobnych, a mianowicie, że odpowiadające sobie kąty są równe.

Podobieństwo doprowadzi znowu do interesujących twierdzeń i zagadnień, jak np. zagadnienia, dotyczące spólnych stycznych do dwuch kół.

Kolineacja. Na początku wyjaśniamy, czym się różni kolineacja od pokrewieństwa i podobieństwa. Promienie pokrewieństwa były równoległe, gdy promienie kolineacji schodzą się w jednym punkcie — środku kolineacji; w podobieństwie odpowiadające sobie proste są równoległe, w kolineacji takie proste schodzą się na osi kolineacji.

Opierając się na tych wskazówkach, uczeń wykreśla figurę, odpowiadającą kwadratowi i foremnemu sześciobokowi i przy tej pracy poznaje drogą doświadczalną, że dwum równoległym prostym a_1 i 6_X odpowiadają przecinające się proste a_2 i 6_2, i że punkty przecięcia takich prostych, jak a_2 i b_2 leżą wszystkie na jednej prostej, równoległej do osi. Korzystając z tych twierdzeń, wykreśla dalej figurę, odpowiadającą sieci kwadratów albo sieci sześcioboków. Przy odpowiednim doborze danych wypadnie piękna perspektywa posadzki.

Uczniowie poczują sami, że pomiędzy kolineacja i obrazami perspektywicznemi, znanemi im z fotografji, rysunków i t. d. zachodzi ścisły związek, należy więc im opowiedzieć w ogólnych zarysach, jak postępuje malarz, aby osiągnąć dobrą perspektywę linjową, jak powstaje panorama okrągła, jak można osiągnąć perspektywę w płaskorzeźbie (fotografje płaskorzeźb Wita Stwosza mogą tu być doskonałemi ilustracjami), jak powinna być urządzona scena pod względem perspektywy i t. d.

Z tym wiążą się w sposób naturalny interesujące szczegóły z historji perspektywy, jak np. o braku zmysłu perspektywy u Egipcjan, o perspektywie w rzymskich malowidłach ściennych i nowoczesnych badaniach nad tą sprawą, o powstaniu perspektywy za czasów Odrodzenia i t. d.

Wszystkie te rzeczy, odpowiednio wyłożone, mogą, jak sądzę, w wysokim stopniu zainteresować ucznia, rozszerzyć jego widnokrąg umysłowy i dać mu świadomość tego, że gieometrja istotnie ułatwia zrozumienie otaczającego świata.

Z. Strasz&wicz.