MÉTHODE

POUR

LA RÉSOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS

PAR LEUR

DÉCOMPOSITION SUCCESSIVE EN FACTEURS,

PAR

Eg. HANEGRAEFF.

BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE, RUE DE L'ORANGERIE, 16.

—

1854.

AVERTISSEMENT.

Les éléments de la méthode qui fait l'objet de ce mémoire ont été donnés par M. Wronski, dans son ouvrage intitulé : *Résolution générale des équations algébriques.* Paris, 1847.

Nous avons cherché à les présenter ici dans un ordre plus naturel, avec quelques simplifications, débarrassés d'une notation bizarre et rattachés à des principes généralement admis.

Nous aurions voulu, avant de publier cet essai, pouvoir consulter les auteurs qui se sont occupés également de cette question, tant en France qu'en Allemagne ; mais il nous a été impossible de nous procurer leurs écrits. Nous nous bornons donc à l'exposition pure et simple d'une méthode qui nous a paru offrir, sous le rapport de la généralité et de la facilité, des avantages assez remarquables.

En nous servant des travaux mathématiques de M. Wronski, nous croyons devoir déclarer que nous n'appartenons en aucune manière à l'école du Messianisme, dont nous sommes loin de partager les opinions et dont nous répudions les erreurs philosophiques.

MÉTHODE

POUR

LA RÉSOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS

PAR

LEUR DÉCOMPOSITION SUCCESSIVE EN FACTEURS.

Soit l'équation

$$z^m - Az^{m-1} + Bz^{m-2} - Cz^{m-3} + \text{etc.} \ldots, \pm M = o,$$

à décomposer en deux facteurs, nous pouvons toujours la transformer en une autre équation dont le dernier terme sera l'unité :

$$(1) \ldots \left\{ \begin{aligned} Fx &= x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-3} - p_3 x^{m-2} + \ldots \mp p_{m-1} x \pm 1 = o \\ &= \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right), \end{aligned} \right.$$

soit en posant

$$z = x\sqrt[m]{M},$$

soit en vertu de quelque autre relation.

Or, si nous formons l'équation aux racines réciproques :

$$(2) \ldots \left\{ \begin{aligned} fx &= x^m - p_{m-1} x^{m-1} + p_{m-2} x^{m-2} - \text{etc.} \ldots \mp p_1 x \pm 1 = o \\ &= (1 - x_1 x)\,(1 - x_2 x)\,(1 - x_3 x) \ldots (1 - x_m x), \end{aligned} \right.$$

et si nous divisons l'unité par fx, $\mathrm{F}x$,

$$\frac{1}{fx},\ \frac{1}{\mathrm{F}x},$$

nous aurons deux développements :

$$(3)\ldots\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{fx}=\dfrac{1}{(1-x_1x)\,(1-x_2x)\,\ldots.\,(1-x_mx)}\\[2ex] =1+p_1x+\begin{array}{l}p_1^2\\-p_2\end{array}\left|\begin{array}{l}x^2+\ \ p_1^3\\ \quad\ -2p_1p_2\\ \quad\ +\ p_3\\ \\ \\ \end{array}\right|\begin{array}{l}x^3+\ \ p_1^4\\ \quad\ -3p_1^2p_2\\ \quad\ +2p_1p_3\\ \quad\ +\ p_2^2\\ \quad\ -\ p_4\end{array}\left|\begin{array}{l}x^4+\text{etc.},\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\end{array}\right.$$

et

$$(4)\ldots\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\mathrm{F}x}=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x}{x_1}\right)\left(1-\dfrac{x}{x_2}\right)\ldots.\left(1-\dfrac{x}{x_m}\right)}\\[2ex] =1+p_{m-1}x+\begin{array}{l}p_{m-1}^2\\-p_{m-2}\end{array}\left|\begin{array}{l}x^2+\ \ p_{m-1}^3\\ \quad\ -2p_{m-1}\,p_{m-2}\\ \quad\ +\ p_{m-3}\\ \\ \\ \end{array}\right|\begin{array}{l}x^3+\ \ p_{m-1}^4\\ \quad\ -3p_{m-1}^2\,p_{m-2}\\ \quad\ +2p_{m-1}\,p_{m-3}\\ \quad\ +\ p_{m-2}^2\\ \quad\ -\ p_{m-4}\end{array}\left|\begin{array}{l}x^4+\text{etc.},\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\end{array}\right.$$

ou bien, par la formule de Maclaurin :

$$(3_1)\ \ldots\ldots\ \frac{1}{fx}=\varphi^{(0)}+x\varphi^{(1)}+x^2.\varphi^{(2)}+x^3.\varphi^{(3)}+x^4.\varphi^{(4)}+\text{etc.}$$

$$(4_1)\ \ldots\ldots\ \frac{1}{\mathrm{F}x}=\psi^{(0)}+x\psi^{(1)}+x^2\psi^{(2)}+x^3\psi^{(3)}+x^4\psi^{(4)}+\text{etc.},$$

en convenant que

$$\varphi^{(\mu)}=\frac{d^{\mu}\,\dfrac{1}{fx}}{1.2.3\,\ldots\,\mu dx^{\mu}}\qquad(x=o),$$

$$\psi^{(\mu)}=\frac{d^{\mu}\,\dfrac{1}{\mathrm{F}x}}{1.2.3\,\ldots\,\mu dx^{\mu}}\qquad(x=o).$$

Remarque. Le développement (3_1) sera convergent pour $x = 1$, lorsque les valeurs des racines x_1, x_2, x_3 … x_m seront moins grandes que l'unité. Lorsqu'au contraire, ces valeurs seront plus grandes que l'unité, ce sera le développement (4_1) qui convergera, en y faisant $x = 1$.

przy wtedy $1 - x_1 x = 1 - x_1 < 1$
$1 - x_2 x = 1 - x_2 < 1$

przy wtedy $1 - \frac{x}{x_1} < 1$, $1 - \frac{x}{x_2} < 1$ co potrzebne dla uzyskania zbieżności

Ces préliminaires étant posés, supposons que l'équation à résoudre

$$x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - p_3 x^{m-3} + \ldots \pm 1 = o,$$

n'ait qu'une seule racine plus grande que l'unité; nous éliminerons cette racine du développement (3_1) en multipliant par

$$1 - x_1 x,$$

ce qui donnera

$$\varphi^{(0)} + (\varphi^{(1)} - x_1 \varphi^{(0)}) x + (\varphi^{(2)} - x_1 \varphi^{(1)}) x^2 + (\varphi^{(3)} - x_1 \varphi^{(2)}) x^3 + \text{etc.}$$

Or, ce développement, ne contenant plus que des racines inférieures à l'unité, sera convergent. Nous aurons donc pour un indice μ suffisamment grand :

$$\varphi^{(\mu)} - x_1 \varphi^{(\mu-1)} = o, \quad \varphi^{(\mu+1)} - x_1 \varphi^{(\mu)} = o, \quad \varphi^{(\mu+2)} - x_1 \varphi^{(\mu+1)} = o, \text{ etc.},$$

c'est-à-dire,

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} = \frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu)}} = \frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu+1)}} = \text{etc.} = x_1.$$

Donc, si l'équation proposée ne contient qu'une seule racine plus grande que l'unité, il faudra que le rapport d'un coefficient au coefficient précédent, dans le développement (3_1), tende vers une valeur constante qui n'est autre que cette racine.

Si, au contraire, l'équation proposée ne contenait qu'une seule racine
x_2 plus petite que l'unité $\cancel{x_2}$, on éliminerait de même $\frac{1}{x_2}$ du développement (4_1), ce qui donnerait :

$$\psi^{(0)} + (\psi^{(1)} - \frac{1}{x_2} \psi^{(0)}) x + (\psi^{(2)} - \frac{1}{x_2} \psi^{(1)}) x^2 + (\psi^{(3)} - \frac{1}{x_2} \psi^{(2)}) x^3 + \text{etc.},$$

et ce développement, ne contenant plus que des racines moins grandes que l'unité, serait convergent pour $x = 1$. On aurait donc pour un indice convenable :

$$\psi^{(\mu)} - \frac{1}{x_2}\psi^{(\mu-1)} = o,\quad \psi^{(\mu+1)} - \frac{1}{x_2}\psi^{(\mu)} = o,\quad \psi^{(\mu+2)} - \frac{1}{x_2}\psi^{(\mu+1)} = o, \text{ etc.},$$

d'où l'on tirerait :

$$(6)\quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} = \frac{\psi^{(\mu)}}{\psi^{(\mu+1)}} = \frac{\psi^{(\mu+1)}}{\psi^{(\mu+2)}} = \text{etc.} = x_2.$$

Donc, si l'équation proposée ne contient qu'une seule racine plus petite que l'unité, il faudra que le rapport d'un coefficient au coefficient suivant, dans le développement (4_1), converge vers une valeur constante qui n'est autre que cette racine.

Réciproquement, si, après avoir formé avec une équation quelconque, mise sous la forme (1), les développements (3_1) et (4_1), il y avait, à partir d'un certain terme, un rapport constant entre les coefficients de l'un ou de l'autre de ces deux développements, ce rapport serait nécessairement une racine.

En effet, admettons que, dans le développement (3_1), nous ayons, à partir de $\varphi^{(\mu)}$,

$$\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu)}} = \frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu+1)}} = \frac{\varphi^{(\mu+3)}}{\varphi^{(\mu+2)}} = \text{etc.} = \gamma,$$

nous pourrons remplacer $\varphi^{\mu+1}$, $\varphi^{\mu+2}$, $\varphi^{\mu+3}$, etc., par leurs valeurs tirées des égalités précédentes, et le développement (3_1) deviendra :

$$\varphi^{(0)} + x\varphi^{(1)} + x^2\varphi^{(2)} + x^3\varphi^{(3)} + \text{etc.}$$
$$+ x^{\mu}.\varphi^{(\mu)} + x^{\mu+1}.\gamma\varphi^{(\mu)} + x^{\mu+2}.\gamma^2\varphi^{(\mu)} + \text{etc.}$$

Or, si nous multiplions ce développement par

$$(1 - x_2x)\,(1 - x_3x)\ldots(1 - x_mx) = \frac{fx}{1 - x_1x},$$

il viendra :

$$\frac{1}{1-x_1x} = 1 + xx_1 + x^2x_1^2 + x^3x_1^3 + \text{etc.}$$
$$+ x^{2\mu-1} \quad (\gamma - x_2)(\gamma - x_3) \ldots (\gamma - x_m)\varphi^{(\mu)}$$
$$+ x^{2\mu}\,\gamma \quad (\gamma - x_2)(\gamma - x_3) \ldots (\gamma - x_m)\varphi^{(\mu)}$$
$$+ x^{2\mu+1}\gamma^2 (\gamma - x_2)(\gamma - x_3) \ldots (\gamma - x_m)\varphi^{(\mu)}$$
$$\text{etc.}$$
$$= 1 + xx_1 + x^2x_1^2 + x^3x_1^3 + \text{etc.}$$
$$+ x^{2\mu-1}.\,C + x^{2\mu}.\,\gamma C + x^{2\mu+1}.\,\gamma^2 C + \text{etc.},$$

en posant :

$$(\gamma - x_2)(\gamma - x_3) \ldots (\gamma - x_m)\varphi^{(\mu)} = C.$$

Mais

$$\frac{1}{1-x_1x} = 1 + xx_1 + x_2x_1^2 + x^3x_1^3 + \text{etc.}$$
$$+ x^{2\mu-1}\,x_1^{2\mu-1} + x^{2\mu}.\,x_1^{2\mu} + x^{2\mu+1}.\,x_1^{2\mu+1} + \text{etc.}$$

Ainsi, il faudrait, pour que γ ne fût pas une racine, qu'une fonction pût être développée en série ordonnée suivant les puissances de la variable, de deux manières différentes : ce qui est impossible. Donc, etc....

Il en serait de même pour le développement (4_1). Nous pouvons donc conclure de ce qui précède que, quand les rapports

$$(7) \ldots \ldots \quad \frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}},\ \frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu)}},\ \frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu+1)}},\ \text{etc.},$$

ou les rapports

$$(8) \ldots \ldots \quad \frac{\psi^{(\mu)}}{\psi^{(\mu-1)}},\ \frac{\psi^{(\mu+1)}}{\psi^{(\mu)}},\ \frac{\psi^{(\mu+2)}}{\psi^{(\mu+1)}},\ \text{etc.},$$

deviendront constants, l'équation (1) se décomposera en deux facteurs, l'un du premier, l'autre du $(m-1)^{\text{me}}$ degré.

L'équation du premier degré est donnée immédiatement par

$$(9) \ldots \ldots \quad x - \frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} = o,$$

ou

$$(9_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x - \frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} = o.$$

Quant à l'équation du $(m-1)^{me}$ degré, on sait que l'équation

$$x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - \text{etc.} \ldots \pm 1 = o,$$

divisée par une racine, donne :

$$o = x^{m-1} + (x_1 - p_1)\, x^{m-2} + (x_1^2 - p_1 x_1 + p_2)\, x^{m-3}$$
$$+ (x_1^3 - p_1 x_1^2 + p_2 x_1 - p_3)\, x^{m-4} + \text{etc.}$$

Remplaçons x, x_1^2, x_1^3, x_1^4, etc., par leurs valeurs tirées de (5),

$$\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} = x_1, \quad \frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}} = x_1^2, \quad \frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}} = x_1^3, \text{ etc.},$$

nous aurons pour le facteur du $(m-1)^{me}$ degré :

Pr. pierwiastki urojone < 1

$$(10) \ldots \left\{ \begin{aligned} o = x^{m-1} &+ \left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} - p_1\right) x^{m-2} + \left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}} - p_1 \frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} + p_2\right) x^{m-3} \\ &+ \left(\frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}} - p_1 \frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}} + p_2 \frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} - p_3\right) x^{m-4} + \text{etc.}, \end{aligned} \right.$$

dans le cas où la condition (5) a lieu. Pour la condition (6), on aurait :

Pr. pierwiastki urojone > 1

$$(10_1) \ldots \left\{ \begin{aligned} o = x^{m-1} &+ \left(\frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} - p_1\right) x^{m-2} + \left(\frac{\psi^{(\mu-2)}}{\psi^{(\mu)}} - p_1 \frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} + p_2\right) x^{m-3} \\ &+ \left(\frac{\psi^{(\mu-3)}}{\psi^{(\mu)}} - p_1 \frac{\psi^{(\mu-2)}}{\psi^{(\mu)}} + p_2 \frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} - p_3\right) x^{m-4} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant que, dans l'équation (1)

$$x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - \ldots \pm 1 = o,$$

il y ait deux racines plus grandes ou moins grandes que l'unité, les rapports (7) et (8) resteront variables, et l'équation (1) se décomposera non plus en deux facteurs, l'un du premier, l'autre du $(m-1)^{me}$ degré, mais en un facteur du second degré et un facteur du $(m-2)^{me}$.

Admettons d'abord que l'équation (1) contient deux racines plus grandes que l'unité; et soient x_1, x_3, ces deux racines, si nous multiplions le développement (3_1) par

$$(1 - x_1 x)(1 - x_3 x),$$

il viendra :

$$\varphi^{(0)} + [\varphi^{(1)} - (x_1 + x_3)\varphi^{(0)}]x + [\varphi^{(2)} - (x_1 + x_3)\varphi^{(1)} + x_1 x_3 \varphi^{(0)}]x^2$$
$$+ [\varphi^{(3)} - (x_1 + x_3)\varphi^{(2)} + x_1 x_3 \varphi^{(1)}]x^3 + [\varphi^{(4)} - (x_1 + x_3)\varphi^{(3)} + x_1 x_3 \varphi^{(2)}]x^4 + \text{etc.}$$

Or, ce développement ne contiendra plus que des racines moins grandes que l'unité; il convergera pour $x = 1$, et nous aurons avec telle approximation que l'on voudra :

$$\varphi^{(\mu+1)} - (x_1 + x_3)\varphi^{(\mu)} + x_1 x_3 \varphi^{(\mu-1)} = o,$$
$$\varphi^{(\mu+2)} - (x_1 + x_3)\varphi^{(\mu+1)} + x_1 x_3 \varphi^{(\mu)} = o,$$
$$\text{etc.},$$

Au moyen de deux de ces équations, nous obtiendrions en fonction de φ, les coefficients du facteur du second degré; mais il est plus commode d'éliminer par différentiation. Ainsi en divisant la première de ces équations par $\varphi^{\mu-1}$, nous aurons :

$$\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}} - (x_1 + x_3)\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} + x_1 x_3 = o,$$

?

dont la dérivée donnera la somme des racines

$$\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' : \left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' = x_1 + x_3.$$

Divisée par $\varphi^{(\mu)}$ et différentiée, la même équation nous eût donné le produit des racines :

$$-\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)' : \left(\frac{\varphi^{(\mu-1)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)' = x_1 x_3.$$

Donc le facteur du second degré sera :

$$(11). \quad . \quad . \quad x^2 - \left[\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' : \left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'\right] x - \left[\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)' : \left(\frac{\varphi^{(\mu-1)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)'\right] = o,$$

ou bien en exécutant les calculs indiqués :

$$(11_1) \quad . \quad x^2 - \frac{\varphi^{(\mu+1)}\,\varphi^{(\mu)} - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+2)}}{(\varphi^{(\mu)})^2 - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+1)}} \cdot x + \frac{(\varphi^{(\mu+1)})^2 - \varphi^{(\mu)}\,\varphi^{(\mu+2)}}{(\varphi^{(\mu)})^2 - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+1)}} = o.$$

Quant à l'équation du $(m-2)^{me}$ degré, que l'on obtiendrait en divisant l'équation (1) par la précédente, elle nous sera donnée immédiatement par la différentiation de l'équation du $(m-1)^{me}$ degré (10). En effet, cette équation reste variable, pour des indices μ différents, à cause de la seconde racine plus grande que l'unité qu'elle contient. Or, en la différentiant, nous annulons la propriété qu'elle a de varier avec μ, et nous éliminons, par conséquent, cette racine. Ainsi la dérivée de l'équation (10), divisée par $\left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'$, donnera :

$$(12). \quad . \quad . \left\{\begin{aligned} o = x^{m-2} &+ \left[\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' : \left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' - p_1\right] x^{m-3} \\ &+ \left[\left(\frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' : \left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' - p_1 \left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' : \left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' + p_2\right] x^{m-4}, \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}\right.$$

ou bien en développant les calculs :

$$(12_1) \quad . \quad . \left\{\begin{aligned} o = x^{m-2} &+ \left[\frac{\varphi^{(\mu+1)}\,\varphi^{(\mu)} - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+2)}}{(\varphi^{(\mu)})^2 - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+1)}} - p_1\right] x^{m-3} \\ &+ \left[\frac{\varphi^{(\mu+2)}\,\varphi^{(\mu)} - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+3)}}{(\varphi^{(\mu)})^2 - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+1)}} - p_1\,\frac{\varphi^{(\mu+1)}\,\varphi^{(\mu)} - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+2)}}{(\varphi^{(\mu)})^2 - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+1)}} + p_2\right] x^{m-4}. \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Si, au lieu de deux racines plus grandes que l'unité, l'équation (1) avait renfermé deux racines moins grandes que l'unité x_2, x_4, on aurait fait usage du développement (4_1), dont les racines sont réciproques ; et après avoir fait disparaître par multiplication les deux racines plus grandes que l'unité $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_4}$, nous aurions eu, en vertu de la convergence de ce développement :

$$\psi^{(\mu)} - \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_4}\right)\psi^{(\mu-1)} + \frac{1}{x_2 x_4}\psi^{(\mu-2)} = o,$$

etc.,

ou bien

$$\psi^{(\mu-2)} - (x_2 + x_4)\ \psi^{(\mu-1)} + x_2 x_4\ \psi^{(\mu)} = o,$$

et à l'aide de cette équation et de l'équation (10_1), nous aurions obtenu, par un calcul analogue, deux autres équations :

$$(13)\ldots\quad x^2 - \left[\left(\frac{\psi^{(\mu-2)}}{\psi^{(\mu)}}\right)' : \left(\frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}}\right)'\right] x - \left(\frac{\psi^{(\mu-2)}}{\psi^{(\mu-1)}}\right)' : \left(\frac{\psi^{(\mu)}}{\psi^{(\mu-1)}}\right)' = o$$

et

$$(14)\ldots\quad \left\{\begin{aligned} o = x^{m-2} &+ \left[\left(\frac{\psi^{(\mu-2)}}{\psi^{(\mu)}}\right)' : \left(\frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}}\right)' - p_1\right] x^{m-3} \\ &+ \left[\left(\frac{\psi^{(\mu-3)}}{\psi^{(\mu)}}\right)' : \left(\frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}}\right)' - p_1 \left(\frac{\psi^{(\mu-2)}}{\psi^{(\mu)}}\right)' : \left(\frac{\psi^{(\mu-1)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)' + p_2\right] x^{m-4} + \text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Ainsi, nous pourrons conclure de ce qui précède qu'une équation quelconque réduite à la forme (1), se décompose en deux facteurs, l'un du second, l'autre du $(m-1)^{me}$ degré, pourvu que

$$(15)\ldots\quad \frac{\varphi^{(\mu+1)}\,\varphi^{(\mu)} - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+2)}}{(\varphi^{(\mu)})^2 - \varphi^{(\mu-1)}\,\varphi^{(\mu+1)}} = \frac{\varphi^{(\mu+\nu+1)}\,\varphi^{(\mu+\nu)} - \varphi^{(\mu+\nu-1)}\,\varphi^{(\mu+\nu+2)}}{(\varphi^{(\mu+\nu)})^2 - \varphi^{(\mu+\nu-1)}\,\varphi^{(\mu+\nu+1)}},$$

ou

$$(15_1)\ldots\quad \frac{\psi^{(\mu)}\,\psi^{(\mu-1)} - \psi^{(\mu-2)}\,\psi^{(\mu+1)}}{(\psi^{(\mu)})^2 - \psi^{(\mu-1)}\,\psi^{(\mu+1)}} = \frac{\psi^{(\mu+\nu)}\,\psi^{(\mu+\nu-1)} - \psi^{(\mu+\nu-2)}\,\psi^{(\mu+\nu+1)}}{(\psi^{(\mu+\nu)})^2 - \psi^{(\mu+\nu-1)}\,\psi^{(\mu+\nu+1)}},$$

c'est-à-dire, pourvu que ces rapports [qui ne sont que les premiers coefficients des équations (11) et (13)] ne changent plus de valeur à partir d'un certain indice μ. Ces conditions sont analogues aux conditions (7) et (8). — Nous aurions pu aussi bien prendre pour condition la constance des seconds coefficients de ces mêmes équations (11) et (13).

Si ni l'une ni l'autre des conditions (15), (15_1) n'était remplie, ou bien, ce qui est la même chose, s'il y avait dans l'équation (1) une troisième racine plus grande ou moins grande que l'unité, on multiplierait d'abord (dans le cas d'une troisième racine plus grande) le développement (3_1) par :

$$(1 - x_1 x)\,(1 - x_3 x)\,(1 - x_5 x),$$

ce qui donnerait, en posant pour abréger,

$$(x_1 + x_3 + x_5) = q_1,$$
$$(x_1 x_3 + x_1 x_5 + x_3 x_5) = q_2,$$
$$x_1 x_3 x_5 = q_3,$$
$$\varphi^{(0)} + [\varphi^{(1)} - q_1\varphi^{(0)}]\,x + [\varphi^{(2)} - q_1\varphi^{(1)} + q_2\varphi^{(0)}]\,x^2$$
$$+ [\varphi^{(3)} - q_1\varphi^{(2)} + q_2\varphi^{(1)} - q_3\varphi^{(0)}]\,x^3 + [\varphi^{(4)} - q_1\varphi^{(3)} + q_2\varphi^{(2)} - q_3\varphi^{(1)}]\,x + \text{etc.},$$

et cette série étant convergente pour $x = 1$, on aurait :

$$\varphi^{(\mu+2)} - q_1\varphi^{(\mu+1)} + q_2\varphi^{(\mu)} - q_3\varphi^{(\mu-1)} = o,$$

etc.

Or, cette équation divisée par $\varphi^{(\mu-1)}$ et différentiée, donne:

$$\left(\frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' - q_1\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' + q_2\left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)' = o,$$

Divisons-la de nouveau par $\left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'$ et différentions une seconde fois, nous aurons pour le premier coefficient du facteur du 3me degré :

$$q_1 = \left\{\frac{\left(\frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}\right\}' : \left\{\frac{\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}\right\}';$$

on trouverait de même :

$$q_2 = -\left\{\frac{\left(\frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}\right\}' : \left\{\frac{\left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}\right\}',$$

$$q_3 = \left\{\frac{\left(\frac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)'}{\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)'}\right\}' : \left\{\frac{\left(\frac{\varphi^{(\mu-1)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)'}{\left(\frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu)}}\right)'}\right\}'.$$

Ainsi le facteur du 3^{me} degré serait

$$(16) \ldots\ldots\ldots \quad x^3 - q_1 x^2 + q_2 x - q_3 = o.$$

Quant au facteur du $(m-3)^{me}$ degré, nous l'obtiendrons directement en différentiant l'équation (12) du $(m-2)^{me}$ degré. Ce qui donne :

$$(17). \ldots \quad o = x^{m-3} + \left[\left\{ \frac{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'} \right\}' : \left\{ \frac{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'} \right\}' - p_1 \right] x^{m-4}$$

$$+ \left[\left\{ \frac{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu+3)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'} \right\}' : \left\{ \frac{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'} \right\}' - p_1 \left\{ \frac{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'} \right\}' : \left\{ \frac{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'} \right\}' + p_2 \right] x^{m-5} + \text{etc.}$$

En opérant de la même manière sur

$$\psi^{\mu-3} - q'_1 \psi^{\mu-2} + q'_2 \psi^{\mu-1} - q'_3 \psi^{\mu} = o,$$

et sur l'équation (14), nous aurions obtenu des formules analogues pour le cas de trois racines moins grandes que l'unité.

D'où nous pouvons conclure qu'une équation quelconque, ramenée à la forme (1), se décompose en deux facteurs, l'un du 3^{me}, l'autre du $(m-3)^{me}$ degré, si l'un des coefficients conserve une valeur constante, à partir d'un certain indice (μ). Si le premier coefficient, par exemple :

$$(18). \ldots\ldots \quad \left\{ \frac{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu+2)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'} \right\}' : \left\{ \frac{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}}\right)'} \right\}' = \text{const.},$$

ou bien

$$(18_1) \ldots \quad \left\{ \frac{\left(\dfrac{\psi^{(\mu-3)}}{\psi^{(\mu)}}\right)'}{\left(\dfrac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}}\right)'} \right\}' : \left\{ \frac{\left(\dfrac{\psi^{(\mu-2)}}{\psi^{(\mu)}}\right)'}{\left(\dfrac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}}\right)'} \right\}' = \text{const.}$$

En continuant ainsi cette décomposition, jusqu'à ce qu'on obtienne un facteur du degré $\frac{m}{2}$, si m est pair, ou un facteur du degré $\frac{m-1}{2}$, si m est impair, on épuiserait tous les cas possibles. Ce qui prouve qu'une équation quelconque ramenée à la forme (1), se décompose nécessairement en deux facteurs, l'un du n^{me}, l'autre du $(m-n)^{me}$ degré.

Cependant, il y a une exception pour l'équation du second degré, lorsque ses racines sont imaginaires. Cela devait être, les racines imaginaires n'étant pas directement comparables avec l'unité, et le degré de l'équation ne permettant pas, d'ailleurs, de considérer leur somme ou leur produit, comme nous avons vu que cela se pratique pour les équations d'un degré supérieur au second.

La méthode est encore en défaut pour les équations du deuxième degré dépourvues de second terme, le calcul des fonctions φ et ψ étant alors illusoire. Mais dans ce cas, on peut toujours restituer ce second terme à l'équation au moyen d'une transformation convenable.

Il se peut aussi que des coefficients se présentent sans la forme $\frac{0}{0}$. Alors, c'est une preuve que l'équation proposée se décompose d'une manière plus simple que celle que l'on a en vue. Supposons, par exemple, que, cherchant à vérifier la condition (15), nous obtenions :

$$\frac{\left(\dfrac{\varphi(\mu+1)}{\varphi(\mu-1)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi(\mu)}{\varphi(\mu-1)}\right)'} = \frac{0}{0},$$

il s'ensuivrait naturellement que

$$\frac{\varphi(\mu+1)}{\varphi(\mu-1)} = \text{const.} \quad \frac{\varphi(\mu)}{\varphi(\mu-1)} = \text{const.}$$

Or, c'est là précisément la condition requise pour qu'une équation se décompose en un facteur du premier et en un facteur du $(m-1)^{me}$ degré (5).

Nous allons maintenant éclaircir ce qui précède par quelques applications. Mais auparavant nous devons montrer comment on calcule les coefficients des développements (3_1) et (4_1). Or, l'inspection seule de ces développements (3) et (4) suffit pour reconnaître que l'on a, quel que soit l'indice μ,

$$(a1.)\quad \varphi^{(\mu)} - p_1\,\varphi^{(\mu-1)} + p_2\,\varphi^{(\mu-2)} - p_3\,\varphi^{(\mu-3)} + \text{etc.} \pm \varphi^{(\mu-m)} = o,$$

$$(a2.)\quad \psi^{(\mu-m)} - p_1\,\psi^{(\mu-m+1)} + p_2\,\psi^{(\mu-m+2)} - \ldots \pm \psi^{(\mu)} = o,$$

d'où

$$\varphi^{(\mu)} = p_1\,\varphi^{(\mu-1)} - p_2\,\varphi^{(\mu-2)} + \text{etc.} \ldots \mp \varphi^{(\mu-m)}$$

$$\psi^{(\mu)} = p_{m-1}\,\psi^{(\mu-1)} - p_{m-2}\,\psi^{(\mu-2)} + \text{etc.} \quad \mp \psi^{(\mu-m)}.$$

Or, en tenant compte des valeurs des fonctions φ et ψ pour l'indice zéro :

$$\varphi^{(0)} = \psi^{(0)} = 1,$$

et des valeurs pour des indices négatifs :

$$\varphi^{(-\mu)} = \psi^{(-\mu)} = o,$$

nous tirerons de $(a1.)$ et $(a2.)$, par des substitutions successives les valeurs de

$$\varphi^{(\mu)},\quad \psi^{(\mu)},$$

pour un indice quelconque.

Soit maintenant à résoudre

$$z^3 - 2z - 5 = o.$$

Nous la ramènerons à la forme (1) en posant

$$z = 2 + \frac{1}{x};$$

ce qui nous donnera

$$x^3 - 10x^2 - 6x - 1 = o.$$

Or, en vertu de la formule (a1.), nous aurons, pour calculer les fonctions φ

$$(a.3) \qquad \varphi^{(\mu)} = 10\varphi^{(\mu+1)} + 6\varphi^{(\mu-2)} + \varphi^{(\mu-3)},$$

et il viendra :

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)} &= 1 \\
\varphi^{(1)} &= 10 \\
\varphi^{(2)} &= 10 \times 10 + 6 = 106 \\
\varphi^{(3)} &= 106 \times 10 + 6 \times 10 + 1 = 1121 \\
\varphi^{(4)} &= 1121 \times 10 + 6 \times 106 + 10 = 11856 \\
\varphi^{(5)} &= 11856 \times 10 + 6 \times 1121 + 106 = 125392 \\
\varphi^{(6)} &= 1336177 \\
\varphi^{(7)} &= 14125978 \\
\varphi^{(8)} &= 149402234 \\
\varphi^{(9)} &= 1580114375 \\
\varphi^{(10)} &= 16711683132 \\
\varphi^{(11)} &= 176746919804.
\end{aligned}$$

Voyons maintenant si la condition (5) est remplie,

$$\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} = \text{const.}$$

$$\begin{aligned}
\log \varphi^{(\mu)} - \log \varphi^{(\mu-1)} &= \log \text{const.} \\
\log \varphi^{(9)} - \log \varphi^{(8)} &= 1{,}0243315 \\
\log \varphi^{(10)} - \log \varphi^{(9)} &= 1{,}0243316 \\
\log \varphi^{(11)} - \log \varphi^{(10)} &= 1{,}0243316
\end{aligned}$$

La constance a lieu, donc

$$\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} = \frac{\varphi^{(11)}}{\varphi^{(10)}} = 10{,}57625.$$

et nous aurons pour facteur du premier degré :

$$x - 10{,}57625 = o.$$

Le facteur du second degré sera, en vertu de la formule (10) :

Premier coefficient

$$\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} - p_1 = 10{,}57625 - 10 = 0{,}57625;$$

Deuxième coefficient

$$P_2 = \frac{\varphi^{(\mu+1)}}{\varphi^{(\mu-1)}} - p_1 \frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} + p_2.$$

Ce coefficient pourra s'abréger. En effet, multiplions par $\varphi^{(\mu-1)}$

$$P_2\,\varphi^{(\mu-1)} = \varphi^{(\mu+1)} - p_1\,\varphi^{(\mu)} + p_2\,\varphi^{(\mu-1)},$$

et tirons la valeur du second membre de l'équation précédente, de l'équation $(a.3)$, après y avoir augmenté tous les indices μ d'une unité :

$$\varphi^{(\mu+1)} - 10\varphi^{(\mu)} - 6\varphi^{(\mu-1)} = \varphi^{(\mu-2)},$$

il viendra

$$P_2 = \frac{\varphi^{(\mu-2)}}{\varphi^{(\mu-1)}}$$

ou

$$P_2 = \frac{\varphi^{(10)}}{\varphi^{(11)}} = \frac{1}{10{,}57625} = 0{,}09455,$$

et nous aurons pour facteur du second degré :

$$x^2 + 0{,}57625\,x + 0{,}09455 = o.$$

Soit à décomposer en deux facteurs :

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = o,$$

$$\varphi^{(\mu)} = -\varphi^{(\mu-1)} - \varphi^{(\mu-2)} + 2\varphi^{(\mu-3)} - 2\varphi^{(\mu-4)} - \varphi^{(\mu-5)},$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)} &= 1\\
\varphi^{(1)} &= -1\\
\varphi^{(2)} &= 0\\
\varphi^{(3)} &= +3\\
\varphi^{(4)} &= -7\\
\varphi^{(5)} &= +5\\
\varphi^{(6)} &= +9\\
\varphi^{(7)} &= -34\\
\varphi^{(8)} &= +46\\
\varphi^{(9)} &= +3
\end{aligned}$$

ce qui n'offre pas de rapport constant

$$\frac{\varphi^{(\mu)}}{\varphi^{(\mu-1)}} = \frac{\varphi^{(\mu+\nu)}}{\varphi^{(\mu+\nu-1)}}.$$

Formons donc les fonctions ψ

$$(a.4) \qquad \psi^{(\mu)} = -2\psi^{(\mu-1)} + 2\psi^{(\mu-2)} - \psi^{(\mu-3)} - \psi^{(\mu-4)} - \psi^{(\mu-5)},$$

nous aurons :

$$\begin{aligned}
\psi^{(0)} &= 1 \\
\psi^{(1)} &= -2 \\
\psi^{(2)} &= +6 \\
\psi^{(3)} &= -17 \\
\psi^{(4)} &= +47 \\
\psi^{(5)} &= -133 \\
\psi^{(6)} &= +373 \\
\psi^{(7)} &= -1048 \\
\psi^{(8)} &= +2739 \\
\psi^{(9)} &= -7861 \\
\psi^{(10)} &= +22008 \\
\psi^{(11)} &= -61802 \\
\psi^{(12)} &= +173890 \\
\psi^{(13)} &= -488270 \\
\psi^{(14)} &= +1371975 \\
\psi^{(15)} &= -3854586 \\
\psi^{(16)} &= +10829304 \\
\psi^{(17)} &= -30425375 \\
\psi^{(18)} &= +85480239 \\
\psi^{(19)} &= -240157921 \\
\psi^{(20)} &= +674726977 \\
\psi^{(21)} &= -1895653964 \\
\psi^{(22)} &= +5325864939.
\end{aligned}$$

$$\frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} = \text{const.}$$

$$\begin{aligned}
\log \psi^{(\mu-1)} - \log \psi^{(\mu)} &= \log \text{const.} \\
\log \psi^{(17)} - \log \psi^{(18)} &= \dot{9}.\ 5513703 \\
\log \psi^{(18)} - \log \psi^{(19)} &= \dot{9}.\ 5513688 \\
\log \psi^{(19)} - \log \psi^{(20)} &= \dot{9}.\ 5513688 \\
\log \psi^{(20)} - \log \psi^{(21)} &= \dot{9}.\ 5513690 \\
\log \psi^{(21)} - \log \psi^{(22)} &= \dot{9}.\ 5513689.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\log \psi^{(\mu-1)} - \log \psi^{(\mu)} = \dot{9},5513689,$$

ou passant aux nombres :

$$\frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} = -0,3559335,$$

et le facteur du premier degré sera :

$$x + 0,3559335 = o.$$

Quant à l'équation du $(m-1)^{me}$ degré, nous aurons, d'après $(\mathbf{10}_1)$:

Premier coefficient

$$\frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} - p_1 = -0,3559335 + 1 = 0,6440665.$$

Deuxième coefficient

$$\frac{\psi^{(\mu-2)}}{\psi^{(\mu)}} - p_1 \frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} + p_2 = 0,1266886 - 0,3559335 + 1$$
$$= 0,7707551.$$

Troisième coefficient

$$P_3 = \frac{\psi^{(\mu-3)}}{\psi^{(\mu)}} - p_1 \frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} + p_2 \frac{\psi^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}} - p_3;$$

mais nous aurons une expression plus simple en multipliant les deux membres par ψ^{μ}

$$P_3\, \psi^{(\mu)} = \psi^{(\mu-3)} - p_1\, \psi^{(\mu-2)} + p_2\, \psi^{(\mu-1)} - p_3\, \psi^{(\mu)},$$

et en remplaçant le second membre par sa valeur tirée de $(a.4)$, après y avoir augmenté tous les indices (μ) de deux unités :

$$P_3\, \psi^{(\mu)} = -\psi^{(\mu+2)} - 2\psi^{(\mu+1)}$$

$$P_3 = -\frac{\psi^{(\mu+2)}}{\psi^{(\mu)}} - 2\,\frac{\psi^{(\mu+1)}}{\psi^{(\mu)}},$$

ou bien en faisant $\mu = 20$

$$P_3 = -\frac{\psi^{(22)}}{\psi^{(20)}} - 2.\,\frac{\psi^{(21)}}{\psi^{(20)}} = -7.89336 - 2 \times -2,809513$$
$$= -2.274334.$$

Le quatrième coefficient, en opérant de même sa simplification, sera :

$$P_4 = p_5 \frac{\psi^{(\mu+1)}}{\psi^{(\mu)}} = -\frac{\psi^{(21)}}{\psi^{(20)}} = 2{,}809513,$$

ainsi l'équation du $(m-1)^{me}$ degré sera :

$$x^4 + 0{,}644066\, x^3 + 0{,}770755\, x^2 - 2{,}274334\, x + 2{,}80951 = o.$$

Soit à résoudre

$$x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 = o.$$

Posons

$$(a5.) \qquad \varphi^{(\mu)} = -\varphi^{(\mu-1)} - 4\varphi^{(\mu-2)} - \varphi^{(\mu-4)}:$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi^{(16)} &= -\ 5325 \\ \varphi^{(17)} &= +\ 92341 \\ \varphi^{(18)} &= -\ 78821 \\ \varphi^{(19)} &= -\ 267850 \\ \varphi^{(20)} &= +\ 588459 \\ \varphi^{(21)} &= +\ 390600 \\ \varphi^{(22)} &= -\ 2665615. \end{aligned}$$

Ces fonctions ni les fonctions ψ ne donnent de rapport constant. Cette équation se décomposera donc en deux facteurs du second degré.

En effet, formons les fonctions composées, et prenons pour condition le second coefficient de l'équation (11_1) comme plus facile à calculer

$$\frac{(\varphi^{(\mu+1)})^2 - \varphi^{(\mu)}\ \varphi^{(\mu+2)}}{(\varphi^{(\mu)})^2 - \varphi^{(\mu-1)}\ \varphi^{(\mu+1)}} = \text{const.}$$

il viendra :

$$\begin{aligned}
a &= (\varphi^{(17)})^2 - \varphi^{(16)}\varphi^{(18)} = 81071391.10^2 & \log a &= 9.9088676 \\
b &= (\varphi^{(18)})^2 - \varphi^{(17)}\varphi^{(19)} = 30946268.10^3 & \log b &= 10.4906083 \\
c &= (\varphi^{(19)})^2 - \varphi^{(18)}\varphi^{(20)} = 11812656.10^4 & \log c &= 11.0723476 \\
d &= (\varphi^{(20)})^2 - \varphi^{(19)}\varphi^{(21)} = 4509063.10^5 & \log d &= 11.6540863 \\
e &= (\varphi^{(21)})^2 - \varphi^{(20)}\varphi^{(22)} = 17211723.10^5 & \log e &= 12.2350243.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log b - \log a &= 0{,}5817407 \\
\log c - \log b &= 0{,}5817393 \\
\log d - \log c &= 0{,}5817387 \\
\log e - \log d &= 0{,}5817380,
\end{aligned}$$

dont les trois dernières ne diffèrent que dans la dernière décimale. Ces rapports peuvent donc être considérés comme constants, et l'équation proposée se décompose en deux facteurs du second degré (11_1), dont les coefficients sont, d'abord,

$$\frac{\varphi^{(21)}\,\varphi^{(20)} - \varphi^{(19)}\,\varphi^{(22)}}{(\varphi^{(20)})^2 - \varphi^{(19)}\,\varphi^{(21)}} = -\,1{,}073688,$$

et

$$\frac{(\varphi^{(21)})^2 - \varphi^{(20)}\,\varphi^{(22)}}{(\varphi^{(20)})^2 - \varphi^{(19)}\,\varphi^{(21)}} = -\,3{,}817139.$$

La première équation sera, par conséquent :

$$x^2 + 1{,}073688\,x + 3{,}817139 = o.$$

La seconde aura pour premier coefficient, d'après la formule (12_1),

$$-\,1{,}073688 + 1 = -\,0{,}073688,$$

et pour second coefficient, en changeant son expression (12_1) en une autre plus simple tirée de la dérivée de l'équation ($a.5$) divisée par $\varphi^{(\mu-3)}$:

$$\frac{(\varphi^{(20)})^2 - \varphi^{(19)}\,\varphi^{(21)}}{(\varphi^{(21)})^2 - \varphi^{(20)}\,\varphi^{(22)}} = 0{,}2619762;$$

elle sera donc :

$$x^2 - 0{,}073688\,x + 0{,}2619762 = o.$$

Nous observerons, en terminant, que le succès de la méthode que nous venons d'exposer, dépend surtout de la convergence plus ou moins rapide des développements (3_1) et (4_1) multipliées par un, deux, trois, etc., binômes. Il conviendra donc, dans le cas où les racines sont peu différentes entre elles et de l'unité, de hâter cette convergence, en posant, par exemple,

$$x^2 = z + k.$$

Toutefois cette modification sera inutile, lorsque les coefficients manifesteront la loi de leur formation; ainsi :

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = o$$

$$\varphi^{(\mu)} = -2\varphi^{(\mu-1)} - 3\varphi^{(\mu-2)} - 2\varphi^{(\mu-3)} - \varphi^{\mu-4},$$

qui donne en général :

$$\begin{aligned} \varphi^{(3\mu)} &= \quad (\mu+1) \\ \varphi^{(3\mu+1)} &= -2(\mu+1) \\ \varphi^{(3\mu+2)} &= \quad (\mu+1). \end{aligned}$$

Nous aurons donc, d'après (11_1)

$$\frac{\varphi^{(3\mu+2)}\ \varphi^{(3\mu+1)} - \varphi^{(3\mu)}\ \varphi^{(3\mu+3)}}{(\varphi^{(3\mu+1)})^2 - \varphi^{(3\mu)}\ \varphi^{(3\mu+2)}} = \frac{3(\mu+1)^2 + (\mu+1)}{3(\mu+1)^2} = 1,$$

pour μ infini;

$$\frac{(\varphi^{(3\mu+2)})^2 - \varphi^{(3\mu+1)}\ \varphi^{3\mu+3}}{(\varphi^{(3\mu+1)})^2 - \varphi^{(3\mu)}\ \varphi^{(3\mu+2)}} = \frac{3(\mu+1)^2 + (\mu+1)}{3(\mu+1)^2} = +1,$$

pour μ infini.

Ainsi le facteur du second degré sera :

$$x^2 + x + 1 = o.$$

FIN.