

C2 2691

Bildmessung und Luftbildwesen

Zeitschrift der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie e. V.

Beilage

zu

Heft 11/12 der Allgemeinen
Vermessungs-Nachrichten

vom 1. Juni 1942



Heft 1/2

XVII

Juni 1942

Verlag: Herbert Wichmann, Berlin-Grünwald

Bildmessung und Luftbildwesen

Zeitschrift der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie e. V.

XVII - 1942 - 1/2

Inhalt:

J. K r a m e s: Über die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftretenden „gefährlichen“ Flächen	Seite 1
G. F ö r s t n e r: Verteilung von Lagefehlern	Seite 18
R. B u r k h a r d t: Beispiele für die tatsächliche Verteilung von Lagefehlern	Seite 28
Hofrat Doležal 80 Jahre alt	Seite 36
Gedenktage	Seite 39
Hochschulnachrichten	Seite 40
Mitteilungen der Gesellschaft	Seite 40
Vereinsnachrichten	Seite 40

Bildmessung und Luftbildwesen erscheint viermal im Jahre.

Bezug durch die Deutsche Gesellschaft für Photogrammetrie e. V.

Berlin SW 29, Flughafen

oder als Beilage der Allgemeinen Vermessungs-Nachrichten

Verlag: Herbert Wichmann, Berlin-Grunewald, Rufnummer 97 19 93

Preis dieses Doppelheftes 4,- RM.



Bildmessung und Luftbildwesen

Zeitschrift

der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie e. V.

Schriftwalter: W. Gebner, Berlin SW 29, Flughafen

Verlag Herbert Wichmann, Berlin-Grunewald, Königsallee 21, Fernsprecher 971993

Nachdruck nur mit ausdrücklicher Genehmigung gestattet

Aufsätze und Fachberichte für das nächste Heft bitten wir bis zum 1. Sept. 1942 an Dir. Gebner zu senden

17. Jahrgang

Juni 1942

Heft 1/2

Professor Dr. von Gruber †

Während der Drucklegung dieses Heftes kam die Nachricht vom Tode Otto von Grubers. Professor Dr. phil. Otto von Gruber starb nach schwerer Krankheit am 3. Mai 1942 in Jena. Die Deutsche Gesellschaft für Photogrammetrie betrauert diesen schweren Verlust.

Eine umfassende Würdigung seiner Persönlichkeit und seiner Lebensarbeit folgt im nächsten Heft.

Ueber die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftretenden „gefährlichen“ Flächen

Von Josef K r a m e s in Wien.

Das Problem der sogenannten „gefährlichen“ Flächen ist für die theoretischen Voraussetzungen, auf denen die Luftphotogrammetrie aufgebaut wurde, von grundlegender Bedeutung. Darüber hinaus ist die Kenntnis der Eigenschaften dieser Flächen sowie ihrer geometrischen Zusammenhänge — schon wegen ihrer Auswirkungen auf die Handhabung der Orientierungsmaschinen und Auswerteverfahren — von großer praktischer Bedeutung¹.

1. Problemstellung.

Die Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie besteht bekanntlich darin, die aus dem Flugzeug aufgenommenen Geländebilder wieder in jene gegenseitigen Lagen zu bringen, die sie — abgesehen vom Maßstab — im Augenblick der Aufnahmen jeweils gehabt haben. Da es nun bisher nicht gelungen ist, die verschiedenen Lagen des Flugzeuges und der Aufnahmegeräte unmittelbar während des Fluges mit hinreichender Genauigkeit zu registrieren, hat man sich damit abgefunden, die gegenseitige wie auch die absolute Orientierung von Luftaufnahmen erst aus dem Bildinhalt selbst abzuleiten. Dabei wird bloß vorausgesetzt, daß je zwei aufeinanderfolgende Bilder sich zu einem gewissen Teil überdecken².

Die Abb. 1 erinnere nun vorerst an den Satz von A. Terrero³ aus dem Jahre 1862, wonach in zwei allgemeinen Aufnahmen eines Objektes die Punkte P' , P'' der einzelnen

¹ Die nachfolgenden Ausführungen decken sich zum Teil mit dem Inhalt zweier Vorträge „Über die geometrischen Grundlagen der Luftphotogrammetrie“, die der Verfasser im November 1941 in Wien und Linz im Rahmen von Veranstaltungen des NSBDT. gehalten hat.

² Siehe etwa K. Schwidersky, „Luft- und Erdbildmessung“, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1939, S. 54.

Oke. S. 1194/64

Objektpunkte P keineswegs regellos über die Bildpaare Π_1, Π_2 verteilt, sondern an entsprechende Strahlen der *projektiven Kernstrahlenbüschel* gebunden sind, und zwar ganz unabhängig von der Gestalt des aufgenommenen Objektes. Nach dem Vorschlag von *Guido Hauck*⁴, der auch die Bezeichnung *Kernstrahlen, Kernpunkte* (s. Abb. 1, K_1, K_2) usw. ein-

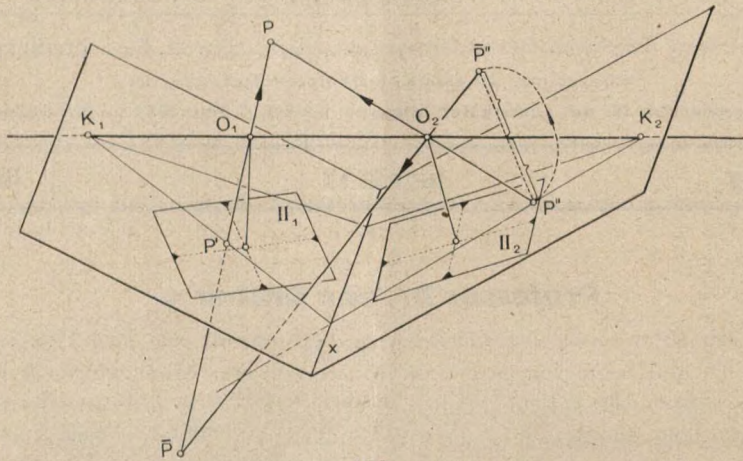


Abb. 1.

geführt hat, sollen je zwei Sehstrahlen, die von den beiden Zentren O_1, O_2 zu einem Objektpunkt P führen, einander „zugeordnet“ heißen. In der Photogrammetrie spricht man in neuerer Zeit anstatt von Sehstrahlen (Projektionsstrahlen) lieber von „Zielstrahlen“, und dies mit Recht, denn hier ist ja durch die Schichtseite der Platte immer auch die Richtung bestimmt, in der der Strahl vom Zentrum aus zum Objektpunkt (Zielpunkt) führt. So liegen z. B. bei Diapositivstellung der Bildplatte⁵ alle Objektpunkte auf jenen vom Zentrum ausgehenden Halbstrahlen, denen auch die Bildpunkte auf der Platte angehören. Durch die Punkte P eines aus zwei Zentren aufgenommenen Objektes ist demnach eine mehr oder minder große Anzahl von solchen Zielstrahlenpaaren bestimmt, und wir sprechen sodann kurz von zwei „zugeordneten Zielstrahlbündeln“⁶.

Liegen umgekehrt zwei Aufnahmen eines Objektes vor, deren *innere Orientierungen*, also deren Hauptpunkte und Bildabstände gegeben sind, so läßt sich bekanntlich mit Hilfe der Kernpunkte die gegenseitige Lage der Plattenebenen und Zentren leicht auffinden⁷. Hieraus erklärt sich die Wichtigkeit der Aufgabe, die Kernpunkte zweier Aufnahmen zu ermitteln, und die gründliche Bearbeitung, die dieses Problem in der Literatur gefunden hat. U. a. hat *E. Kruppa* (Wien) die Frage nach der Mindestzahl von Bildpunkten geklärt, die vorhanden sein müssen, damit die Hauptaufgabe überhaupt lösbar ist. In einer Abhandlung⁸ aus dem Jahre 1913 hat er vor allem gezeigt, daß bei gegebener innerer Orientierung

³ Vgl. Intern. Archiv für Photogrammetrie, 3 (1913), S. 236, und 6 (1923), S. 376.

⁴ *G. Hauck*, „Neue Konstruktionen der Perspektive und Photogrammetrie“, Crelle J. f. Math. 95 (1883), S. 1–35.

⁵ Siehe etwa *O. v. Gruber*, „Ferienkurs in Photogrammetrie“, Stuttgart 1930, S. 11.

⁶ Die Benennung „Zielstrahlen“ wird in der Folge beibehalten, obschon gelegentlich auch *Sehstrahlen* im üblichen geometrischen Sinn zu betrachten sind.

⁷ Vgl. z. B. *E. Müller - E. Kruppa*, Vorl. über darst. Geometrie, I. Bd.: „Die linearen Abbildungen“, Leipzig und Wien 1923, S. 154.

⁸ „Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven mit innerer Orientierung“, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. II a, 122 (1913), S. 1939–1948.

der beiden Aufnahmen fünf Bildpaare P' , P'' beliebig wählbar sind, wonach die Orientierungsaufgabe insgesamt 22, teils imaginäre Lösungen besitzt. Geht man jedoch von zwei wirklichen Lichtbildern eines Objektes aus, nicht von beliebig angenommenen Bildpunkten, so liegen praktisch gesprochen unbegrenzt viele Bildpaare vor (und diese sind durchaus widerspruchsfrei). Man kann dann verschiedene Gruppen von je fünf Bildpaaren herausgreifen, für diese einzeln die Hauptaufgabe lösen und die allen Gruppen gemeinsame Lösung aufsuchen. Namhafte Photogrammeter⁹ glaubten hieraus (oder aus anderen Überlegungen) den Schluß ziehen zu können, daß die richtige Orientierung immer dann erreicht ist, wenn jeder Zielstrahl von seinem zugeordneten geschnitten wird. Hierbei wurde bloß von trivialen Ausnahmen (z. B. von ebenen Objekten) abgesehen. Hingegen hat man die Fülle der allgemeinen Ausnahmefälle lange Zeit übersehen, von denen in der Folge hauptsächlich die Rede sein wird.

Das Kernpunktproblem hatte sich indessen für die Praxis als minder wichtig erwiesen. Denn für den Regelfall der ungefähr senkrecht nach abwärts aufgenommenen Luftbilder liegen ja Kernachse und Bildplatten immer nahezu waagrecht. Dabei fallen die Kernpunkte so weit außerhalb der eigentlichen Bildflächen, daß mit ihnen kaum erfolgreich operiert werden kann. Diese und viele andere Schwierigkeiten hat aber die moderne Photogrammetrie auf instrumentellem Weg überwunden. Man entwickelte Orientierungsmaschinen und Auswertegeräte, die die Hauptaufgabe und das Wiederherstellen der aufgenommenen Geländestreifen unter Verwendung von optisch-mechanischen Hilfsmitteln bewältigen¹⁰. Diese Geräte und die zugehörigen Auswerteverfahren wurden im Laufe der Zeit immer weiter vervollkommenet.

Nun ist man aber bei diesem mechanischen Verfahren gelegentlich auf Ungenauigkeiten gestoßen, die sich nicht auf normale Instrumentenfehler zurückführen ließen. Erst jetzt wurde die Frage aufgeworfen, ob es denn nicht auch möglich sei, daß einmal zwei zugeordnete Zielstrahlbündel auf mehr als eine Art in orientierte Lage kommen können¹¹, so zwar, daß die Schnittpunkte zugeordneter Zielstrahlen jedesmal eine andere Raumfigur ergeben. Als der Verfasser vor vier Jahren (in Graz durch H. Koppmair) auf diese Fragestellung aufmerksam gemacht wurde, konnte er sie alsbald vollständig beantworten, und zwar — wie nebenbei hervorgehoben sei — ausschließlich auf Grund von rein geometrischen Überlegungen. Die damaligen Untersuchungen sind aus äußerlichen Gründen erst im Jahre 1941 veröffentlicht worden, und zwar in den Monatsheften für Mathematik und Physik¹², wo auch alle näheren Einzelheiten und Beweisführungen nachzulesen wären. Im folgenden sollen die erzielten Ergebnisse vor allem anschaulich klargemacht werden.

2. Auftreten verschiedener Lösungen der Hauptaufgabe.

Sind zwei Zielstrahlbündel mit den Scheiteln O_1 , O_2 in orientierter Lage gegeben, so erhält man bekanntlich eine neue solche Lage, wenn man auf eines der Bündel, etwa auf das mit dem Scheitel O_2 , eine halbe Umdrehung um die Kernachse ausübt (Abb. 1). Jeder Zielstrahl wird hernach immer noch von seinem zugeordneten geschnitten, und die Schnittpunkte \bar{P} zugeordneter Zielstrahlen erfüllen sodann eine gewisse räumlich-kollineare Ver-

⁹ S. Finsterwalder, „Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie“, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 6 (1899), S. 1—44; O. v. Gruber, a. a. O., S. 24, und K. Schwidofsky, a. a. O., S. 15, usw.

¹⁰ Siehe etwa K. Schwidofsky, a. a. O., S. 86 ff.

¹¹ Orientierte Lagen, die sich nur durch den Maßstab oder die Lage des ganzen Raummodells unterscheiden, sollen als nicht verschieden gelten.

¹² J. Krames, „Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven (Ein Beitrag zur Theorie der „gefährlichen Örter“)“, Monatsh. Math. Phys. 49 (1941), S. 327—354. Auf diese Arbeit wird später abgekürzt mit „ZE“ verwiesen. — Wegen allfälliger Prioritätsfragen siehe ferner J. Krames, „Neue Nebenlösungen einer alten Aufgabe“, Anzeiger der Akad. Wiss. Wien, 77 (1940), wo über die notarielle Öffnung eines bei der Akademie der Wissenschaften in Wien am 12. Januar 1938 hinterlegten Schreibens des Verfassers berichtet wird.

zerrung des ursprünglichen Objektes¹³. Je zwei derartige Orientierungen sollen „ergänzende“ genannt werden; in der Praxis kommt hiervon immer nur eine in Betracht.

Ferner ist der Satz zu erwähnen, daß zwei projektive Ebenenbüschel des Raumes (die z. B. von beliebigen Ebenen in projektiven Strahlbüscheln geschnitten werden) stets eine Regelfläche zweiten Grades erzeugen, d. h., die Schnittgeraden aller Paare entsprechender Ebenen solcher Büschel erfüllen eine Schar von geradlinigen Erzeugenden der Fläche. Wird nun eine Fläche zweiten Grades aus zwei Zentren O_1, O_2 aufgenommen (projiziert), die auf

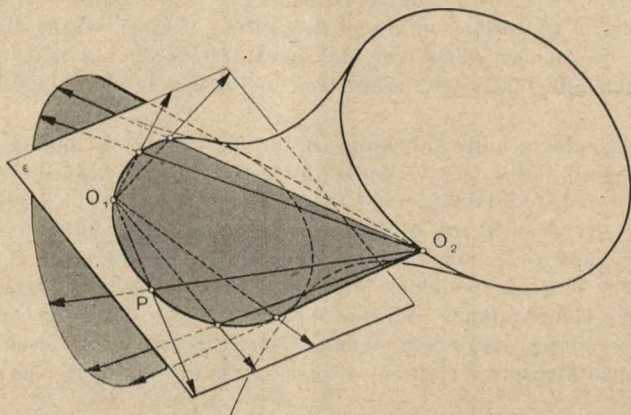


Abb. 2.

ihr liegen, so trifft jeder Zielstrahl, der von einem der Zentren ausgeht, die Fläche in einem einzigen weiteren Punkt, und durch diesen geht auch ein eindeutig bestimmter Zielstrahl des anderen Bündels (Abb. 2). Mit anderen Worten: *Durch die Punkte einer Fläche zweiten Grades, auf der die beiden Aufnahmezentren liegen, ist eine umkehrbar eindeutige (eineindeutige) Zuordnung zwischen den beiden Zielstrahlbündeln (Scharstrahlbündeln) festgelegt.* Diese Bündelzuordnung ist jedoch keine lineare (kollineare), sie stellt vielmehr eine sogenannte *quadratische Verwandtschaft* dar, weil ja z. B. allen Zielstrahlen durch O_1 , die innerhalb einer beliebigen Ebene ϵ liegen, die Erzeugenden eines Kegels zweiter Ordnung als zugeordnete Strahlen entsprechen (Abb. 2).

Wenn nun im Raum insbesondere zwei *kongruente* Ebenenbüschel vorliegen (das sind solche Büschel, bei denen der Winkel zwischen je zwei Ebenen des einen immer gleich dem Winkel zwischen den entsprechenden Ebenen des anderen Büschels ist), so erfüllen die Schnittgeraden entsprechender Ebenen eine Fläche besonderer Art, nämlich eine sogenannte „*orthogonale*“ *Regelfläche zweiten Grades*. Betrachten wir etwa zwei Ebenenbüschel mit parallelen Achsen e_1, e_2 (Abb. 3), deren Ebenen auf einer Normalebene zu e_1, e_2 zwei gleichsinnig kongruente Strahlbüschel ausschneiden. In diesem Fall schneiden sich je zwei entsprechende Ebenen ϵ_1, ϵ_2 längs einer zu e_1, e_2 parallelen Geraden f , und das Erzeugnis der kongruenten Ebenenbüschel ist ein *Drehzylinder*, der die Büschelachsen ebenfalls als Erzeugenden enthält. Der Drehzylinder bildet also ein einfaches Beispiel für die genannten Flächen.

Um die übrigen orthogonalen Regelflächen zweiten Grades zu erhalten, hat man bloß die beiden kongruenten Ebenenbüschel unabhängig voneinander in alle möglichen räumlichen Lagen zu bringen. Es ergeben sich dann im allgemeinen *orthogonale Hyperboloide*, in Sonderfällen, wenn die Büschelachsen e_1, e_2 sich schneiden, *orthogonale Kegel* usw.

Wir denken uns nun eine beliebige orthogonale Regelfläche zweiten Grades Ω durch zwei kongruente Ebenenbüschel allgemeiner Lage erzeugt und projizieren diese Fläche aus

¹³ Siehe *Th. Schmid*, Intern. Archiv für Photogrammetrie 3 (1913), S. 306, 308.

zwei Zentren O_1, O_2 , die auf den (windschiefen) Achsen e_1, e_2 dieser Büschel angenommen wurden (Abb. 4). Sei etwa $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ein Paar entsprechender Ebenen der Büschel, so bildet ihre Schnittgerade f eine Erzeugende der Fläche. Umgekehrt geht auch durch jeden beliebigen Punkt P , der auf Ω liegt, eine solche Flächenerzeugende f , die als Schnittgerade entsprechender Ebenen der kongruenten Büschel erhalten wird.

Man kann nun die beiden Zielstrahlbüchel mit den Scheiteln O_1, O_2 , die durch die Punkte von Ω eindeutig quadratisch aufeinander bezogen sind (siehe oben), aus der

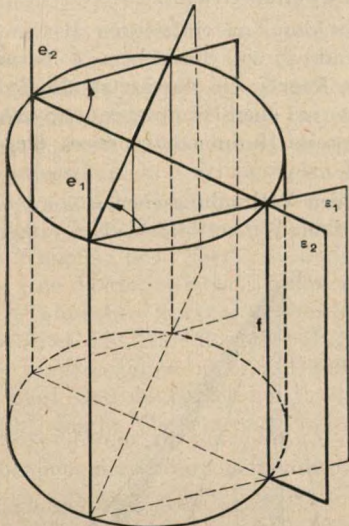


Abb. 3.

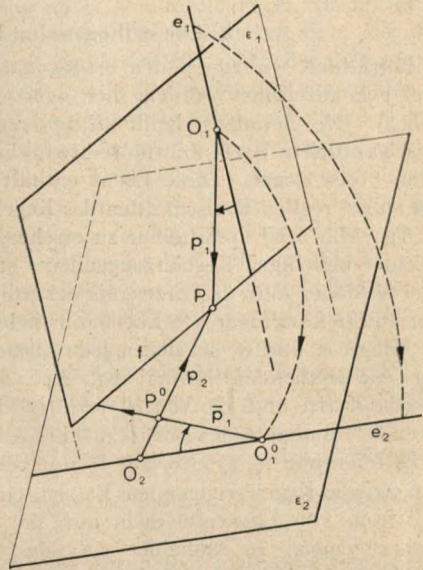


Abb. 4.

ursprünglichen Lage herausgreifen und *unter Beibehaltung der Zuordnung zwischen ihren Strahlen* in eine solche Lage bringen, daß die Büschelachsen e_1 und e_2 zusammenfallen und zugleich jede Ebene der kongruenten Ebenenbüschel mit ihrer entsprechenden zur Deckung kommt (Abb. 4). Es ist dann unschwer zu erkennen, daß irgend zwei Zielstrahlen, die sich in der ersten Lage der Bündel in einem Flächenpunkt P geschnitten haben, auch in der zweiten Lage einen Schnittpunkt \bar{P} besitzen, d. h. die beiden Zielstrahlbüchel befinden sich nach der Verlagerung neuerdings in einer orientierten Lage. Diese ist offenbar von der ursprünglichen und deren „Ergänzung“ verschieden, denn jetzt fallen andere Bündelstrahlen, nämlich e_1 und e_2 , mit der Kernachse zusammen.

Damit ist bereits nachgewiesen, daß es Flächen gibt, deren Punkte bei bestimmter Annahme der Aufnahmezentren eine solche Zuordnung zwischen den beiden Zielstrahlbücheln verursachen, daß diese (abgesehen von der „Ergänzung“) *auf mehr als eine einzige Art* in orientierte Lage kommen können¹⁴. Man kann daher auch sagen: Sind von einem Objekt zwei Aufnahmen gegeben, und hat man die zugehörigen Zielstrahlbüchel in eine solche Lage gebracht, daß jeder Zielstrahl von seinem zugeordneten im Raum geschnitten wird, so ist damit noch nicht sichergestellt, daß die Schnittpunkte dieser Strahlen eine zum aufgenommenen Objekt ähnliche Raumfigur ergeben.

Anders ausgedrückt: *Das „Sich-Schneiden“ aller zugeordneten Zielstrahlen bildet noch keine hinreichende Bedingung dafür, daß die gegenseitige Lage der Zielstrahlbüchel, wie sie bei den Aufnahmen vorhanden war, bereits wiederhergestellt ist.*

Wie sich später herausstellte, hat der französische Geodät E. C. P. Poibilliers anlässlich eines Vortrages auf dem Intern. Photogrammeter-Kongreß Paris 1934 bereits eine ähnliche

Bemerkung gemacht¹⁴. Er hat aber dabei weder von den orthogonalen Regelflächen zweiten Grades etwas erwähnt, noch ist er bis zu den übrigen Ergebnissen und Folgerungen vorgedrungen, die der Verfasser im Jahre 1937 herausgefunden hat und mit denen erst alle Zusammenhänge restlos geklärt erscheinen. Es handelte sich damals vor allem um die Feststellung der *allgemeinsten* Fälle, bei denen die Hauptaufgabe — vorerst rein geometrisch betrachtet — *mehr als eine Lösung* haben kann. Bevor wir darauf näher eingehen können, haben wir uns noch mit den orthogonalen Regelflächen zweiten Grades näher zu beschäftigen.

3. Die orthogonalen Regelflächen zweiten Grades.

Betrachten wir zuerst den *orthogonalen Kegel*. Er kann am einfachsten als ein Kreiskegel gekennzeichnet werden, bei dem eine Erzeugende e_s zur Basisebene β normal ist (Abb. 5). Die Gerade e_s heißt „Haupterzeugende“ des Kegels; sie durchsetzt alle (∞^1) zur Basis parallelen Kreisschnitte rechtwinklig und liegt in einer Hauptebene (Symmetrieebene) η des Kegels. Diese Ebene enthält noch eine zweite Haupterzeugende e_t , die gleichfalls zu ∞^1 reellen Kreisschnitten des Kegels normal ist.

Aus Abb. 5 ist unmittelbar zu ersehen, daß die beiden Verbindungsebenen von e_s und e_t mit einer beliebigen Kegelerzeugenden f stets einen rechten Winkel bilden. Der orthogonale Kegel ist daher auch das Erzeugnis der projektiven (nicht kongruenten!) Ebenenbüschel mit den Achsen e_s und e_t , bei denen jede Ebene zu ihrer entsprechenden normal ist. Auf diese Tatsache dürfte auch die von *H. Schröter*¹⁵ herührende Namengebung zurückzuführen sein.

Es seien nun e_1, e_2 zwei zur Hauptebene η symmetrische Kegelerzeugenden. Fassen wir sie als Achsen von Ebenenbüscheln auf, die den Kegel erzeugen, so schneidet sich das zur Basisebene normale Ebenenpaar σ_1, σ_2 dieser Büschel längs der Haupterzeugenden e_s . Sind φ_1, φ_2 zwei weitere entsprechende Ebenen, die durch e_1 bzw. e_2 gehen und sich in der beliebigen Kegelerzeugenden f schneiden, so folgt aus den in Abb. 5 angedeuteten Winkelgleichheiten, daß die Ebenenwinkel $\sphericalangle \sigma_1 \varphi_1$ und $\sphericalangle \sigma_2 \varphi_2$ immer gleich groß sind. Mit anderen Worten: Je zwei zur Hauptebene η symmetrische Erzeugenden e_1, e_2 — wir wollen sie kurz

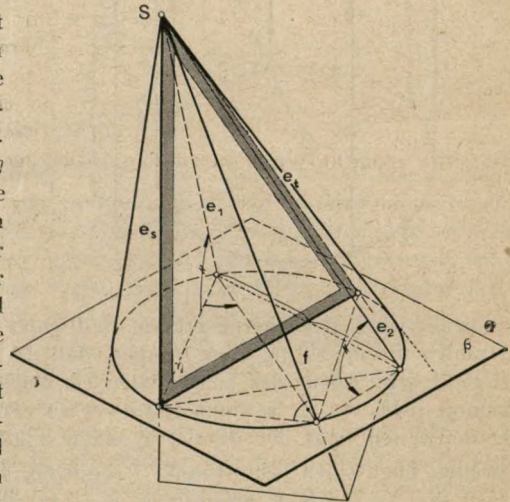


Abb. 5.

„adjungierte Erzeugenden“ nennen — bilden die Achsen von *kongruenten Ebenenbüscheln*, die den orthogonalen Kegel erzeugen. Es gibt demnach ∞^1 Paare solcher adjungierter Erzeugenden, und die erwähnten Haupterzeugenden sind zu sich selbst adjungiert, d. h. in ihnen sind je zwei adjungierte Erzeugenden des Kegels zusammengefallen. Man bestätigt leicht, daß auch umgekehrt irgend zwei kongruente Ebenenbüschel mit sich schneidenden Achsen e_1, e_2 (im allgemeinen) einen orthogonalen Kegel erzeugen, auf dem e_1, e_2 symmetrisch zur Hauptebene η liegen.

Sind hingegen im Raum zwei kongruente Ebenenbüschel mit windschiefen Achsen gegeben, so erzeugen sie im allgemeinen ein *orthogonales Hyperboloid*. Ein solches besitzt wie jedes einschalige Hyperboloid zwei Scharen von (reellen) Erzeugenden (s. Abb. 6 und 7) sowie zwei Scharen von (reellen) *Kreisschnitten*. In Abb. 6 sind insbesondere jene beiden

¹⁴ Intern. Archiv für Photogrammetrie 8/II (1937), S. 244—246.

¹⁵ *H. Schröter*, „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung usw.“, Leipzig 1880, §§ 12, 25.

Kreisschnitte zu sehen, die die Hauptachse der Kehlellipse (das ist die längere reelle Achse der Fläche) zum Durchmesser haben. Durch Parallelverschieben der Ebenen dieser Kreise ergeben sich alle übrigen Kreisschnitte des Hyperboloids (Abb. 8). Ein orthogonales Hyperboloid ist nun dadurch gekennzeichnet, daß sein *Asymptotenkegel* (der von allen Durchmessern der Fläche gebildet wird, die zu den Flächenerzeugenden parallel sind) ein orthogonaler Kegel ist. Tatsächlich ergibt sich dieser Kegel auch als Erzeugnis der gegebenen kongruenten Ebenenbüschel, sobald jedes von ihnen derart parallel verschoben wurde, daß seine Achse durch den Mittelpunkt des Hyperboloides geht. Umgekehrt kann auch jedes Paar von kongruenten Ebenenbüscheln, das den orthogonalen Asymptotenkegel erzeugt, durch Parallelverschiebungen in zwei kongruente Ebenenbüschel übergeführt werden, die das orthogonale Hyperboloid zum Erzeugnis haben. Damit ist klargestellt, daß jedes orthogonale Hyperboloid ebenfalls auf ∞^1 Arten durch zwei kongruente Ebenenbüschel erzeugbar ist. Die windschiefen Achsen e_1, e_2 solcher Büschel sind Flächenerzeugenden und sollen wieder paarweise „adjungiert“ heißen. Je zwei von ihnen gehen durch eine halbe Umdrehung um die längere reelle Flächenachse ineinander über (Abb. 9). Demnach gibt es innerhalb jeder Erzeugendenschar eines orthogonalen Hyperboloids ∞^1 adjungierte Paare (sie bilden eine Involution) und zwei zu sich selbst adjungierte *Haupterzeugenden* (die Doppelstrahlen der Involution). Diese letzteren schneiden wieder je ∞^1 (reelle) Kreisschnitte der Fläche unter rechten Winkeln, denn dies gilt auch für den orthogonalen Asymptotenkegel (bekanntlich werden jede Fläche zweiten Grades und ihr Asymptotenkegel von jeder beliebigen Raumebene in ähnlichen Kurven geschnitten). Ferner gehen die Haupterzeugenden durch die Hauptscheitel der Kehlellipse des Hyperboloides. In Abb. 8 ist eine dieser Erzeugenden besonders hervorgehoben, und in Abb. 10, die eine Seitenansicht der in Abb. 6 dargestellten Fläche zeigt, sind die beiden durch einen dieser Flächenscheitel gehenden Haupterzeugenden kenntlich gemacht. Wie leicht nachzuprüfen, genügen die Halbachsenstrecken des orthogonalen Hyperboloides der einfachen Relation¹⁵ $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$, wobei c den absoluten Betrag der imaginären Halbachse angibt.

Beim gleichseitigen hyperbolischen (= *orthogonalen*) *Paraboloid*, das als Grenzfall des orthogonalen Hyperboloides ebenfalls auf ∞^1 Arten durch zwei kongruente Ebenenbüschel mit windschiefen Achsen erzeugbar ist, treten an die Stelle der Kreisschnitte die Erzeugenden beider Scharen (Abb. 11). Hier gibt es aber in jeder Schar bloß eine Scheitelerzeugende, und diese bildet wieder eine zu sich selbst adjungierte Haupterzeugende.

Von den übrigen orthogonalen Regelflächen zweiten Grades haben wir bereits den *Drehzylinder* besprochen, bei dem jede Erzeugende zu jeder anderen und zu sich selbst adjungiert ist. Es sind noch die *gleichseitig-hyperbolischen Zylinder* und als Ausartungsfälle die *Paare normaler Ebenen* zu den orthogonalen Regelflächen zweiten Grades zu zählen.

4. Geometrische Klarstellung des Problems.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die wichtigsten Ergebnisse erörtern, mit denen das in Rede stehende Problem — zunächst in rein geometrischer Hinsicht — erstmalig vollständig geklärt wurde. Das Hauptergebnis lautet¹⁶:

Die allgemeinsten Raumfiguren (Objekte), deren Punkte eine solche Zuordnung zwischen den beiden Zielstrahlbündeln verursachen, daß diese in zwei verschiedene (nicht ergänzende) orientierte Lagen gebracht werden können, sind jene Raumfiguren, deren sämtliche Punkte auf einer orthogonalen Regelfläche zweiten Grades Ω liegen, auf der von einem Paar adjungierter Flächenerzeugenden e_1, e_2 je eine durch die beiden Aufnahmezentren geht.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, betrachte man einmal zwei zugeordnete Zielstrahlbündel, die auf zwei verschiedene Arten orientierbar sind. In jeder dieser Orientierungen kann man sich alle Kernebenen sowohl mit dem einen wie auch mit dem anderen

¹⁶ „ZE“, Nr. 6, Satz 6.

Zielstrahlbündel fest verbunden denken, d. h. es liegen hier zwei kongruente Ebenenbüschel

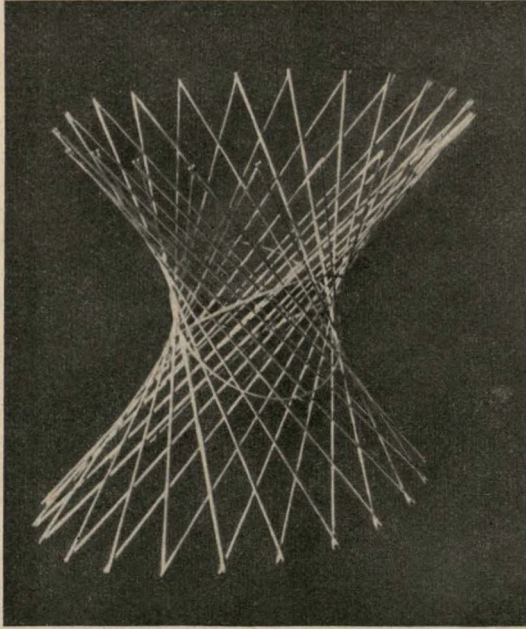


Abb. 6.

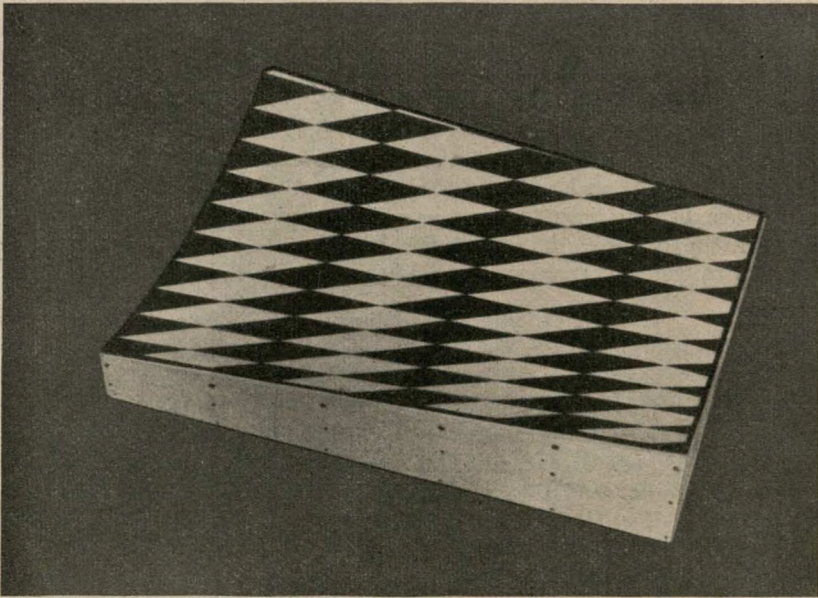


Abb. 7.

mit der Kernachse $k_1 = k_2$ als Träger vor, bei denen jede Ebene mit ihrer entsprechenden zusammengefallen ist. Bringt man nun die beiden Zielstrahlbündel in die zweite orientierte

Lage, so gehen diese Kernebenenbüschel der ersten Lage in zwei kongruente Ebenenbüschel mit verschiedenen Achsen k_1, k_2 über (weil jetzt laut Voraussetzung andere Bündelstrahlen in die Kernachse fallen). Diese kongruenten Büschel erzeugen aber eine orthogonale Regel-

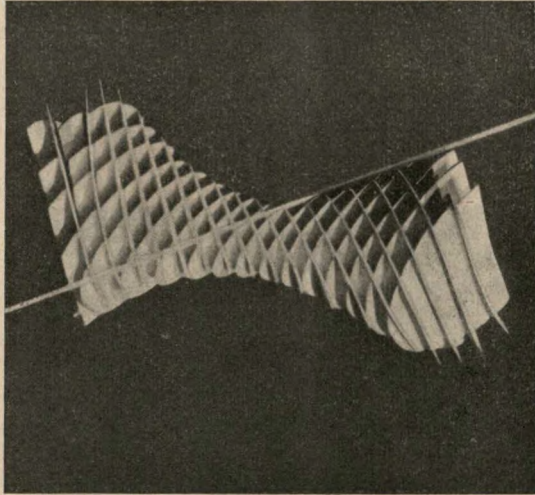


Abb. 8.

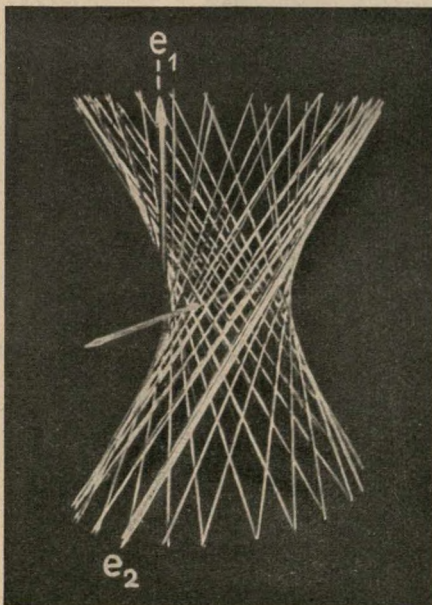


Abb. 9.

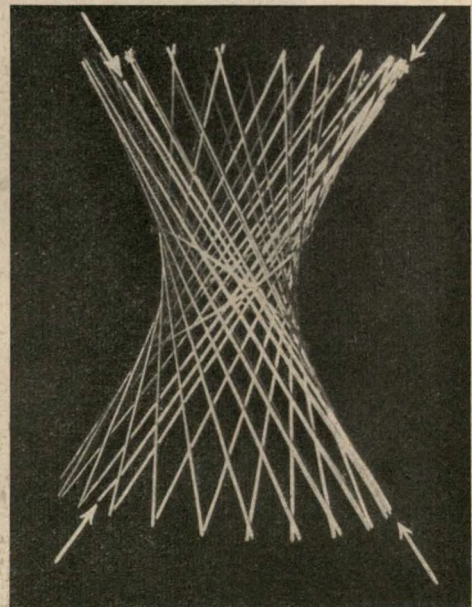


Abb. 10.

fläche zweiten Grades Ω (oder eine Ausartungsform einer solchen, s. unter 3); auf dieser Fläche liegen alle Schnittpunkte zugeordneter Zielstrahlen in der zweiten Orientierung. Aus der Kernebene, in der irgend zwei zugeordnete Zielstrahlen p_1, p_2 ursprünglich lagen, gehen ja, wie soeben erklärt wurde, zwei entsprechende Ebenen dieser kongruenten Büschel hervor,

und auf der Schnittgeraden dieser Ebenen muß der Schnittpunkt der Zielstrahlen p_1 und p_2 bei der zweiten Orientierung liegen. Damit ist obiges Ergebnis nachgewiesen.

Wegen der Gleichberechtigung der beiden orientierten Lagen kann man ferner folgern¹⁷: *Lassen sich zwei zugeordnete Zielstrahlbündel auf mehr als eine Art in orientierte Lagen bringen, so liegen alle Schnittpunkte zugeordneter Zielstrahlen für jede der möglichen Orientierungen auf einer orthogonalen Regelfläche zweiten Grades Ω , von der jeweils zwei adjungierte Erzeugenden durch die Aufnahmezentren gehen.* Beim Übergang von der einen zur anderen Lösung der Hauptaufgabe *verzerrt* sich also die zugehörige Regelfläche Ω immer wieder in eine Fläche von derselben Art und Lage. Der Zusammenhang zwischen beiden Flächen ist indessen durchaus nicht einfach.

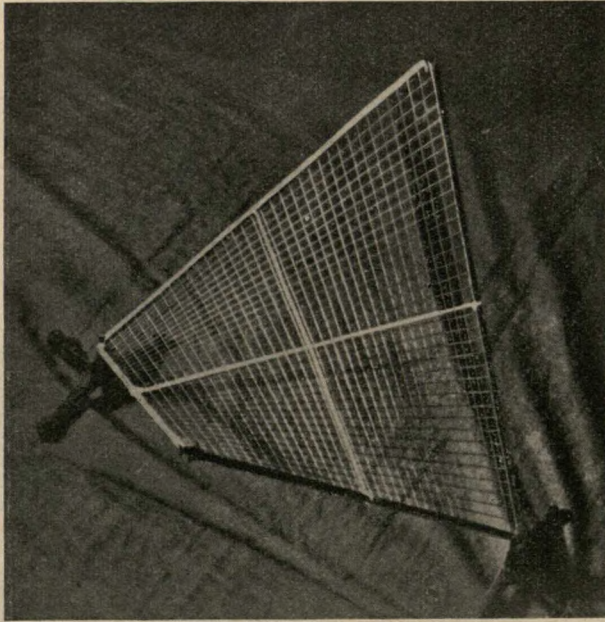


Abb. 11.

Vor allem ist festzustellen, daß hinsichtlich der Art der orthogonalen Regelflächen zweiten Grades Ω , die bei zwei verschiedenen Lösungen der Hauptaufgabe auftreten können, mehrere Möglichkeiten offen sind. Zwar entspricht einem orthogonalen Hyperboloid bei der ersten Orientierung im allgemeinen wieder ein solches Hyperboloid bei der zweiten, doch gibt es auch Sonderfälle, bei denen eines davon ein orthogonales Paraboloid, ein orthogonaler Kegel, ja sogar ein Drehzylinder oder ein gleichseitig-hyperbolischer Zylinder wird. Ferner kann ein Paraboloid auch in ein anderes Paraboloid übergehen usw. Die besonderen Bedingungen, die die Zentren O_1, O_2 zusätzlich noch erfüllen müssen, damit einer dieser Sonderfälle eintritt, hat der Verfasser ebenfalls angegeben¹⁸.

¹⁷ „ZE“, Nr. 6, Satz 7.

¹⁸ „ZE“, Nr. 7. — Siehe weiterhin: J. Krames, „Der einfachste Übergang zur Nebenlösung bei vorliegendem „Gefährlichem Ort“, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 84—100. — Wegen weiterer Sonderfälle, bei denen die zu drei verschiedenen Orientierungen gehörigen (windschiefen) Regelflächen Ω untereinander kongruent (aber dennoch quadratisch aufeinander bezogen) sind, siehe auch J. Krames, „Über bemerkenswerte Sonderfälle des „Gefährlichen Ortes“ der photogrammetrischen Hauptaufgabe“, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 1—13.

Von besonderem Interesse ist ferner der punktweise Zusammenhang zwischen den zu zwei verschiedenen Lösungen der Hauptaufgabe gehörigen Regelflächen Ω . *Ordnet man* nämlich auf diesen Flächen *solche Punkte einander zu, die sich jedesmal als Schnittpunkte derselben beiden zugeordneten Zielstrahlen ergeben*, so ist damit zwischen beiden Flächen eine *eindeutige* Punktverwandtschaft hergestellt. Hierbei handelt es sich jedoch wieder um keine Kollineation, sondern um eine *quadratische Verwandtschaft* (vgl. unter 2.). So ergibt sich bereits aus den vorangegangenen Überlegungen, daß den Kurven zweiter Ordnung, die z. B. von den Kernebenen der ersten Orientierung aus der zugehörigen Fläche Ω ausgeschnitten werden, jene Erzeugenden auf der zweiten Fläche entsprechen, die als Schnittgeraden der aus den ursprünglichen Kernebenen hervorgegangenen Ebenenpaare erhalten werden. Einem beliebigen ebenen Schnitt der einen Fläche entspricht ferner eine Raumkurve dritter Ordnung auf der anderen usw.¹⁹

Schließlich gibt es auch Sonderfälle, bei denen die beiden zugeordneten Zielstrahlbündel sogar auf *drei verschiedene Arten* orientierbar sind (von den jeweiligen „Ergänzungen“ wieder abgesehen). Projiziert man nämlich ein orthogonales Hyperboloid aus zwei seiner Punkte O_1, O_2 , die durch eine halbe Umdrehung um die längere reelle Flächenachse ineinander übergehen, so enthält jede der beiden Erzeugendenscharen zwei adjungierte Erzeugenden e_1, e_2 bzw. f_1, f_2 , von denen etwa e_1, f_1 durch O_1 und e_2, f_2 durch O_2 gehen. Ähnliches gilt auch für das orthogonale Paraboloid. In jedem solchen Fall gibt es nach obigem neben der durch die ursprüngliche Anordnung gegebenen Orientierung der Zielstrahlbündel noch *zwei* weitere Lösungen der Hauptaufgabe. Dabei sind auf den zu ihnen gehörigen orthogonalen Regelflächen zweiten Grades Ω immer wieder zwei Paare adjungierter Erzeugenden vorhanden, die durch die Zentren O_1 bzw. O_2 gehen. Jede dieser beiden Flächen ist (wie in allgemeinen Fällen) sowohl mit der gegebenen Fläche wie auch mit der anderen *eindeutig quadratisch* verwandt.

Wir wollen anschließend noch die Frage aufwerfen: Wie viele orthogonale Regelflächen zweiten Grades Ω gibt es, welche die gegebenen Aufnahmezentren O_1, O_2 enthalten und von denen je zwei adjungierte Erzeugenden e_1, e_2 durch O_1 bzw. O_2 gehen? Da eine allgemeine Fläche zweiten Grades durch neun Punkte oder allgemeiner durch neun einfache Bedingungen bestimmt ist und da ferner die in Frage kommenden Flächen bereits vier Bedingungen erfüllen (Orthogonalitätsbedingung, O_1 ein Flächenpunkt, O_2 ein Flächenpunkt, e_1 adjungiert e_2), kann man sogleich sagen: *Zu je zwei im Raum festgehaltenen Aufnahmezentren gehört eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit (Ω) von orthogonalen Regelflächen zweiten Grades von der verlangten besonderen Lage*²⁰.

In dieser Mannigfaltigkeit (Ω) sind — wie leicht einzusehen — ∞^5 orthogonale Hyperboloide, ∞^4 orthogonale Paraboloiden, ∞^4 orthogonale Kegel, ∞^3 gleichseitig-hyperbolische Zylinder, ∞^3 Drehzylinder und schließlich als Grenzfälle *alle* ∞^3 Ebenen des Raumes enthalten. In der Tat kann jede beliebige Raumebene ε (im Verein mit der zu ihr normalen Kernebene) stets auch als Erzeugnis zweier kongruenter Ebenenbüschel erhalten werden, deren (zu ε symmetrisch liegende) Achsen e_1, e_2 durch die Zentren O_1 bzw. O_2 gehen. Für zwei Aufnahmen eines ebenen Objektes (Geländes) war das Vorhandensein einer zweiten Lösung der Hauptaufgabe schon längst bekannt¹². Diese Besonderheit erscheint nunmehr durch die Einordnung unter die allgemeinen mehrdeutigen Orientierungen erst ins rechte Licht gerückt.

¹⁹ Nähere Einzelheiten über diese Punktverwandtschaft finden sich in „ZE“, Nr. 5, und in den in Fußnote 18 zitierten Arbeiten. — Ein bemerkenswerter Zusammenhang mit einem anderen bekannten Problem ergibt sich, wenn man auf zwei Hyperboloiden Ω die den Fernkurven 2. Ordn. jeweils entsprechenden Kurven aufsucht. Man erhält sogenannte „kubische Kreise“, die für die betreffenden Zentren O_1, O_2 auch als „Horopter“ aufgefaßt und etwa als *Verschwindungs- und Fluchthoropter* bezeichnet werden können (s. Fußn. 24).

²⁰ Vgl. auch „ZE“, Nr. 4 und Nr. 6.

Zu zwei gegebenen Aufnahmezentren O_1, O_2 gehören ferner noch ∞^4 orthogonale Hyperboloide und ∞^3 orthogonale Paraboloiden, die aus O_1 und O_2 aufgenommen, zwei dreideutig orientierbare Zielstrahlbündel ergeben. Denn die aufzunehmende Fläche hat sodann neben den vier oben erwähnten Bedingungen bloß eine weitere (f_1 adjungiert f_2) zu erfüllen.

Ist umgekehrt eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades Ω gegeben, so gibt es für die Annahme des Zentrenpaares O_1, O_2 insgesamt ∞^3 bzw. ∞^2 Möglichkeiten, wenn die Hauptaufgabe zwei bzw. drei verschiedene Lösungen haben soll. Auf die praktische Bedeutung dieser Tatsachen kommen wir noch unter 8. zurück.

5. Die allgemeinsten „gefährlichen“ Flächen und ihre „gefährlichen“ Gebiete.

Die besprochenen orthogonalen Regelflächen zweiten Grades sind (nach dem Hauptergebnis unter 4) vom Standpunkt der photogrammetrischen Praxis als die *allgemeinsten „gefährlichen“ Flächen* anzusehen, die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftreten können. Man könnte auch sagen, sie bilden die allgemeinsten „gefährlichen“ *Geländeformen*. Hat man nämlich einmal ein Gelände aufgenommen, das innerhalb des abgebildeten Bereiches durch ein passendes Stück einer solchen Fläche²¹ annähernd ersetzbar ist, so besitzt die Hauptaufgabe zwei oder drei verschiedene Lösungen, und es besteht die Gefahr, daß beim mechanischen Einpassen der zugehörigen Zielstrahlbündel *nicht die richtige Geländeform, sondern ein Stück einer anderen orthogonalen Regelfläche zweiten Grades* erhalten wird. Denn nähert sich die Einpassung einer der erwähnten anderen Lösungen, sagen wir kurz einer „Nebenlösung“, so läßt sich die Schnittgenauigkeit für s ä m t l i c h e Paare zugeordneter Zielstrahlen ebenso fortschreitend verbessern wie beim Einpassen der richtigen Orientierung (die auch „Hauptlösung“ heißen soll). Die übliche Kontrolle mit Hilfe einer großen Anzahl von Bildpaaren P, P'' würde also in einem solchen Fall vollständig versagen.

Hierzu ist noch das Folgende zu bemerken: Solange Haupt- und Nebenlösung stärker voneinander abweichen, wird sich meistens schon aus den Bildinhalten allein das Vorhandensein einer „gefährlichen“ Fläche erkennen und die richtige Auswahl unter den möglichen Lösungen treffen lassen²². Haupt- und Nebenlösung können aber auch *beliebig wenig voneinander verschieden* sein, wodurch die mechanische Einpassung der Hauptlösung noch weiter erschwert wäre. Um einen solchen, für die Praxis *besonders „gefährlichen“ Fall* herzustellen, hätte man bloß das Zentrum O_1 auf einer Erzeugenden e_1 anzunehmen, die nahe bei einer Haupterzeugenden e_s verläuft. Die adjungierte Erzeugende e_2 ist dann ebenfalls nahe an e_s herangerückt, und das Zentrum O_2 kann noch in einen beliebigen Punkt von e_2 verlegt werden. Wie hier die Hauptlösung zweckmäßig gefunden wird, bleibt vorläufig noch dahingestellt.

Schließlich können die beiden adjungierten Erzeugenden e_1, e_2 auch *zusammenfallen*, ohne daß dabei auch die Zentren O_1, O_2 zusammenrücken. Es gilt dies dann, wenn die Zentren auf einer der Haupterzeugenden angenommen wurden, so daß diese zugleich zur Kernachse wird. In jedem derartigen Fall ist eine Nebenlösung mit der Hauptlösung zur Deckung gekommen, und die *beiden Zielstrahlbündel können jetzt gewisse unendlichkleine Bewegungen ausführen, die die orientierte Lage als solche, d. h. das „Sich-Schneiden“ zugeordneter Zielstrahlen, nicht aufheben*. Es tritt hier an Stelle der zweiten Lösung der Hauptaufgabe eine „*infinitesimale Unbestimmtheit*“ in Erscheinung, das ist, praktisch gesprochen, eine gewisse Unsicherheit bei der mechanischen Einpassung. *Derartige Sonderfälle* von „gefährlichen“ Flächen wurden in den letzten Jahren in der Literatur mehrfach behandelt²³, wobei aber die

²¹ Wie dies zu verstehen ist, wird am Schluß dieses Abschnittes erklärt.

²² „Z.E.“, Nr. 2 und Nr. 8.

²³ R. Bofhardt, „Über den Einfluß der Geländehöhenunterschiede beim optisch-mechanischen Verfahren“, Schweiz. Z. f. Vermessungswesen und Kulturtechnik, (1933), Heft 5, 6; R. Finsterwalder, „Der gefährliche Zylinder beim Normalfall der räumlichen Doppelpunkteinschaltung“, Z. f. Vermessungsw. 67 (1938), S. 433—441, sowie: „Der gefährliche Ort

vom Verfasser bereits im Jahre 1937 klargestellten geometrischen Zusammenhänge ebenfalls noch nirgends herausgefunden wurden.

Zu den bisher besprochenen geometrischen Voraussetzungen, unter welchen eine Nebenlösung der Hauptaufgabe zustande kommen kann, treten noch einige weitere, wenn man beachtet, 1. daß die beiden Zielstrahlen in jedem aufgenommenen Geländepunkt von der selben Seite her auf die Geländefläche auftreffen müssen, sowie 2., daß je zwei zugeordnete Zielstrahlen auch in der Nebenlösung keinen „virtuellen“ Schnittpunkt aufweisen dürfen. Man versteht darunter einen Punkt, der wohl als geometrischer Schnittpunkt zweier Projektionsstrahlen erhalten wird, wobei aber wenigstens einer dieser Strahlen vom betreffenden Zentrum aus entgegengesetzt zur ursprünglichen Zielrichtung zu durchlaufen wäre. Sobald ein solcher, am Gerät nicht einstellbarer Punkt auftritt, würde man sogleich wissen, daß es sich nur um eine Nebenlösung handeln kann. Ähnliches gilt im besonderen auch für jeden Punkt der aufgenommenen Fläche, bei dem die beiden zugeordneten Zielstrahlen in der Nebenlösung zueinander parallel werden.

Läßt man nun auf einer vorgelegten „gefährlichen“ Fläche das Gebiet aller Punkte weg, bei denen obige beide Bedingungen nicht erfüllt sind, so bleiben gewisse Teile der Fläche übrig, die man als eigentlich „gefährliche“ Gebiete bezeichnen könnte. Ihre genaue Abgrenzung hat *W. Wunderlich* (Wien)²⁴ angegeben. Man kann nun abschließend feststellen: *Das Auftreten einer Nebenlösung ist beim mechanischen Einpassen nur dann nicht unmittelbar (aus den Bildinhalten allein) erkennbar, wenn der Aufnahmebereich des Geländes zur Gänze innerhalb eines der „gefährlichen“ Gebiete auf einer „gefährlichen“ Fläche liegt.* In diesem Sinne ist die oben gebrauchte Redeweise „passendes Stück einer solchen Fläche“ zu verstehen.

6. Modellversuche.

Zur klaren Veranschaulichung der wichtigsten Ergebnisse wurden mehrere Modelle hergestellt und mit ihnen eine Reihe von Versuchen ausgeführt²⁵, die durchweg alle Erwartungen erfüllten. Die wesentlichen Phasen eines derartigen Modellversuches sind aus den beigegeführten Abbildungen zu entnehmen. Im Raumbild I ist zunächst ein (über einem 40×50 cm großen Basisrechteck liegender) Ausschnitt aus einer der ∞^5 „gefährlichen“ Flächen Ω dargestellt, die zu zwei gegebenen Aufnahmezentren O_1, O_2 gehören. Es handelt sich um ein orthogonales Hyperboloid mit der Haupterzeugenden $e_s = AB$. Die dazu normalen Kreisschnitte der Fläche sind durch gestrichelte Linien angedeutet. Einer dieser Kreise wurde überdies aus Draht hergestellt. Außerhalb des materiell (aus Gips) ausgeführten Teiles der Fläche, auf ihrer geometrischen Fortsetzung nach oben zu, befinden sich die beiden adjungierten Erzeugenden e_1, e_2 , auf denen die Zentren O_1, O_2 liegen. Am Flächenmodell wurden überdies die beiden Erzeugendenscharen (e_i) und (f_i) durch ein Geradennetz hervorgehoben.

Auf der Fläche wurden nun neun gleichmäßig verteilte Punkte angenommen und diese aus O_1, O_2 auf die Bildplatten Π_1, Π_2 (Format: 18×24 cm, Bildweiten: 200 mm) projiziert. Das Ergebnis samt den Bildern der Haupterzeugenden AB und der dazu windschiefen Flächen-

der photogrammetrischen Hauptaufgabe und seine Bedeutung besonders bei der Auswertung von Luftaufnahmen im Gebirge“, *Bildmessung und Luftbildw.* 13 (1928), S. 103–109; *E. Gotthardt*, „Der gefährliche Ort bei der photogrammetrischen Hauptaufgabe“, *Z. f. Vermessungsw.* 68 (1939), S. 297–308; *H. Jung*, „Über den gefährlichen Ort beim Normalfall der räumlichen Doppelpunkteinschaltung“, *Z. f. Vermessungsw.* 69 (1940), S. 113–124.

²⁴ *W. Wunderlich*, „Zur Eindeutigkeitsfrage der Hauptaufgabe der Photogrammetrie“, *Monatsh. Math. Phys.* 50 (1941), S. 151–164, Nr. 8. — Die Grenzen der „gefährlichen Gebiete“ einer gefährlichen Fläche bestehen im allgemeinen aus dem auf ihr befindlichen *Verschwindungshoropter* (vgl. Fußn. 19), aus den durch die Aufnahmezentren gehenden Flächenerzeugenden und der Fernkurve der Fläche.

²⁵ Bei der Herstellung der Modelle wie auch bei der Durchführung der Modellversuche haben mich mein Assistent *A. Reuschel* und Ing. *K. Killian* sehr unterstützt. Der Letzter genannte hat sich besonders um verschiedene feinmechanische Einzelheiten bemüht. Beiden Herren sei auch an dieser Stelle mein aufrichtiger Dank ausgesprochen.

erzeugenden e_i zeigt Abb. 12. In jedem der Bündel wurden hierauf die zu den neun Flächenpunkten führenden Zielstrahlen durch *ausziehbare Metallstäbe* realisiert und *mit den Bildplatten starr verbunden*. Dabei erhielten zugeordnete Zielstrahlen zur eindeutigen Kennzeichnung jeweils *gleiche Marken*. Die ursprüngliche Orientierung der beiden Zielstrahlbündel, wie sie bei den Aufnahmen des Hyperboloids aus O_1 und O_2 zustande kommt, ist nun aus Raumbild II ersichtlich.

Für das vorliegende Beispiel waren die Annahmen so getroffen (O_1, O_2 auf einer Erzeugenden f_i), daß die zur zweiten Orientierung gehörige „gefährliche“ Fläche ein orthogonaler

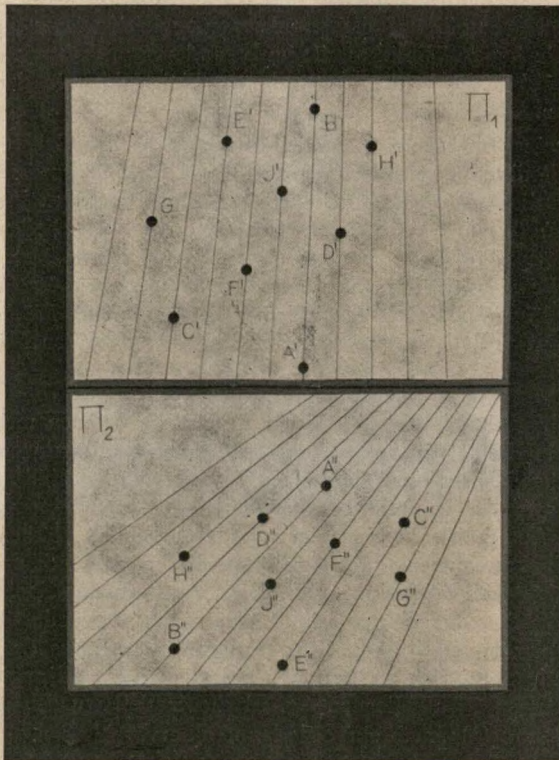
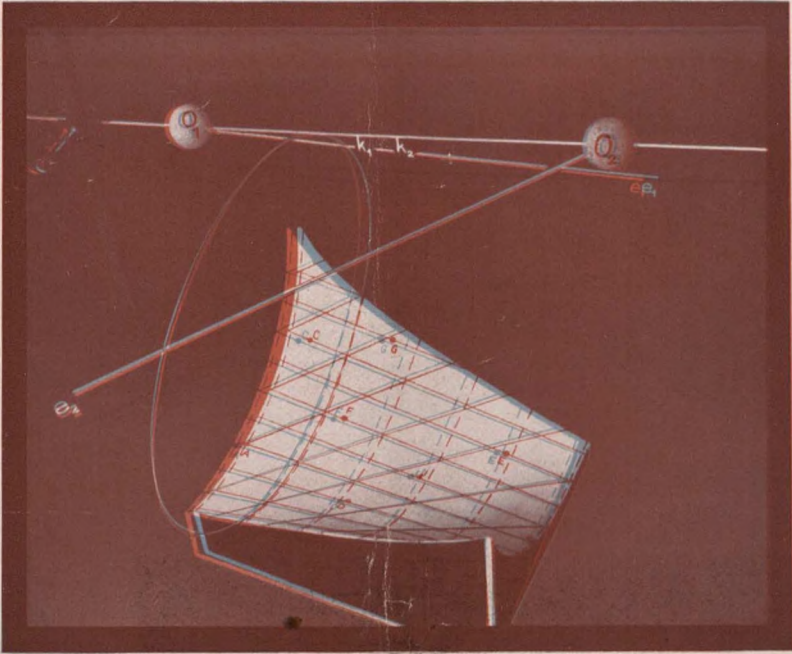
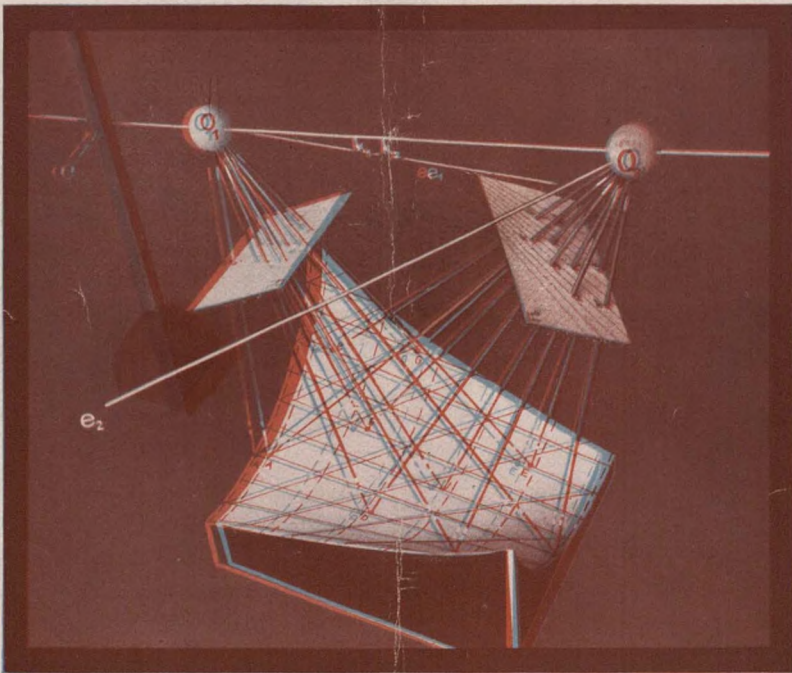


Abb. 12.

Kegel wurde. Dieser ist vorerst in Raumbild III mit den neuen Lagen der Zentren O_1, O_2 und den zugehörigen adjungierten Kegelerzeugenden k_1, k_2 zu sehen. Letztere sind aus den ursprünglich in die Kernachse $k_1 = k_2$ fallenden Zielstrahlen hervorgegangen, während e_1 und e_2 nunmehr die neue Kernachse bilden (s. 4.). Die Einpassung der neun Zielstrahlenpaare auf neun Punkte der Kegeloberfläche ist sodann in Raumbild IV dargestellt. Bei diesem Übergang zur Nebenlösung mußten die erwähnten Metallstäbe in verschiedenem Ausmaß verlängert oder verkürzt werden (s. auch unter 7.). Man kann jetzt leicht erkennen, daß irgend zwei zugeordnete Zielstrahlen, die bei der ersten Orientierung in einem beliebigen (zwischen den gegebenen neun Punkten eingeschalteten) Punkt des Hyperboloides zusammentrafen, bei der zweiten Orientierung immer einen Punkt der Kegeloberfläche zum Zielpunkt haben. *Man könnte also tatsächlich aus dem Bildinhalt allein nicht feststellen, ob man gerade die richtige Geländeform oder ihre Verzerrung, wie sie in der Nebenlösung auftritt, eingestellt hat.* Daran würde sich nichts ändern, wenn man auch noch so viele Geländepunkte zur Kontrolle heranzieht.

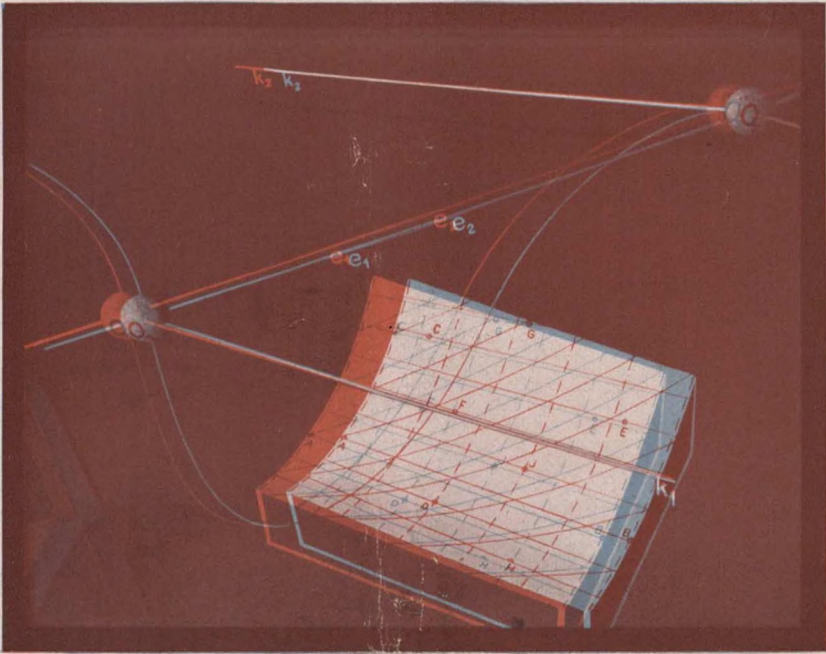


Raumbild I

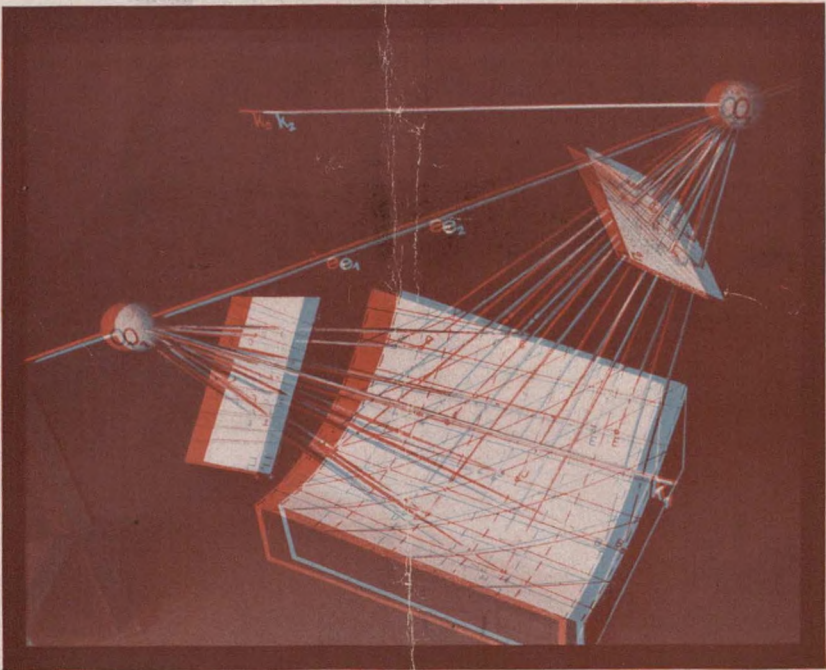


Raumbild II





Raumbild III



Raumbild IV

Hätte man ursprünglich den Kegel aus den Zentren O_1, O_2 aufgenommen, dann würde die zuerst besprochene Orientierung (Raumbild II) die Nebenlösung der Hauptaufgabe darstellen, und das Hyperboloid wäre die zugehörige verzerrte Geländeform.

Zur Veranschaulichung der quadratischen Verwandtschaft, die zwischen beiden Flächen besteht, sind in den Raumbildern III und IV auch die Kurven zweiter Ordnung dargestellt, die von den Kernebenen der zweiten Orientierung aus dem Kegel ausgeschnitten werden. Diese Kurven entsprechen den Erzeugenden der zweiten Hyperboloidschar (f_1), der die Haupterzeugende AB und auch die adjungierten Erzeugenden e_1, e_2 nicht angehören (vgl. unter 4). Ferner ist in Raumbild III die durch einen Draht realisierte Raumkurve dritter Ordnung ersichtlich, die dem Drahtkreis von Raumbild I in der Punktverwandtschaft entspricht.

Naturgemäß könnte jedes der beiden Flächenmodelle bei unbegrenzt vielen weiteren Versuchen ähnlicher Art als Ausgangspunkt dienen (s. Schluß von Abschnitt 4).

Aus den Modellversuchen ergab sich auch unmittelbar, daß bei Geländeaufnahmen aus der Luft der abgebildete Bereich tatsächlich innerhalb der „gefährlichen“ Gebiete auf einer „gefährlichen“ Fläche liegen kann.

7. Weitere Ergebnisse.

Die Herstellung der Modelle erfolgte auf Grund von genauen darstellend-geometrischen Konstruktionen (Maßstab 1 : 1), die der Verfasser selbst ausgeführt hat. Hierfür erwies sich

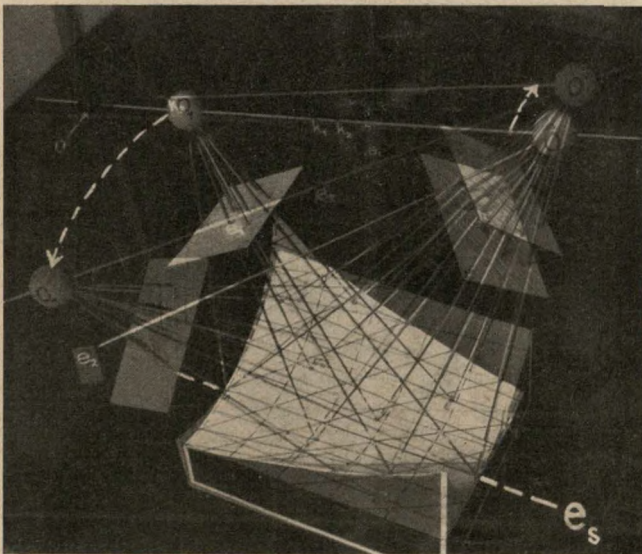


Abb. 13.

eine weitergehende Erforschung der zwischen zwei derartigen Flächen Ω bestehenden geometrischen Zusammenhänge von großem Nutzen. Bei dieser Gelegenheit sind einige neue Eigenschaften der orthogonalen Regelflächen zweiten Grades zutage getreten, worüber bereits anderwärts berichtet wurde²⁶. Von diesen Ergebnissen sei hier folgendes angeführt: *Der Übergang von der einen zur anderen orientierten Lage der beiden Zielstrahlbündel (Raumbild II und IV) kann am einfachsten dadurch herbeigeführt werden, daß jedes der Bündel mit der erwähnten Haupterzeugenden $e_s = AB$ starr verbunden und hierauf um diese Gerade durch je einen bestimmten Winkel verdreht wird (Abb. 13).* Hierbei bleiben also die Längen der zu den Punkten von AB führenden Zielstrahlen (Metallstäbe) und diese Punkte selbst ungeändert.

²⁶ J. Krames, „Über die mehrdeutigen Orientierungen zweier Sehstrahlbündel und einige Eigenschaften der orthogonalen Regelflächen zweiten Grades“, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 65–83; siehe auch die in Fußn. 18 zitierten Arbeiten.

Es gibt aber noch andere Bewegungsvorgänge, durch die die Bündel aus der einen Orientierung in die andere gebracht werden. Insbesondere kann man auch fordern, daß die Bündelscheitel O_1, O_2 im Raum festgehalten bleiben. Diese Annahme entspricht nämlich der Handhabung der meisten Orientierungsmaschinen, z. B. der sogenannten *Doppelprojektoren*¹⁰. Die erwähnten Bewegungen sind sodann im wesentlichen einfache Verdrehungen der Bündel um bestimmte Bündelstrahlen d_1 bzw. d_2 als Drehachsen durch bestimmte Winkel δ_1 bzw. δ_2 . Es zeigte sich, daß es immer ∞^1 derartige Drehachsenpaare gibt, und zwar verteilen sie sich innerhalb jedes Bündels auf zwei bestimmte Ebenen (die Symmetrieebenen von k_1, e_1 bzw.

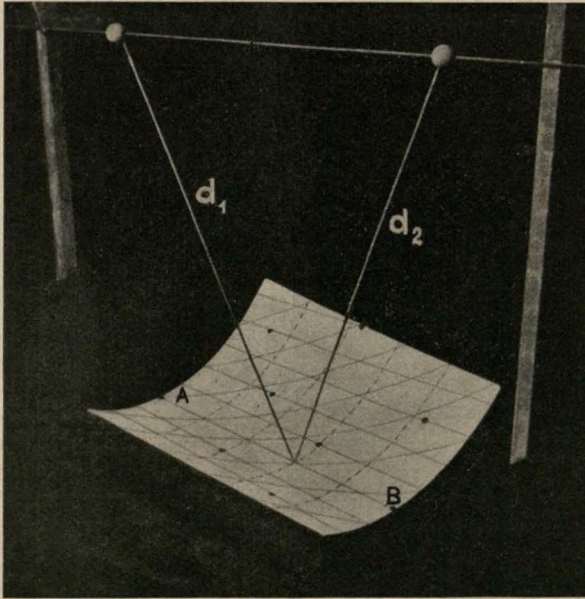


Abb. 14.

k_2, e_2), wobei zusammengehörige Drehachsen d_1, d_2 insgesamt vier Paare projektiver Strahlbündel erfüllen²⁰. Die verschiedenen Orientierungen, die mit Hilfe dieser ∞^1 Verdrehungen herstellbar sind, ergeben (abgesehen von den „Ergänzungen“) durchweg untereinander (gleich- oder gegensinnig) kongruente Raummodelle, die (jeweils) durch alle möglichen Verdrehungen um die Kernachse ineinander übergehen. Wird etwa vorgeschrieben, daß ein bestimmter Geländepunkt innerhalb einer geeignet festgelegten Kernebene liegen soll, so gibt es immer noch vier Paare von Drehachsen d_1, d_2 , mit denen der Übergang von einer Orientierung zur anderen wie angegeben durchführbar wäre. In der Praxis kommt aber hiervon in der Regel höchstens ein Paar in Frage.

Bei den Sonderfällen mit zusammengedrängten Lösungen der Hauptaufgabe (s. 5) gibt es ferner zwei projektive Bündel zusammengehöriger Drehachsen d_1, d_2 , um die die beiden Zielstrahlbündel durch infinitesimale Winkel $d\delta_1, d\delta_2$ verdrehbar sind (ohne dabei das „Sich-Schneiden“ zugeordneter Zielstrahlen aufzuheben). Hierbei konnten die gegenseitigen Lagen der Drehachsen und das jeweilige Verhältnis der infinitesimalen Drehwinkel durch einfache Relationen festgelegt werden, was bisher ebenfalls noch nirgends geschehen ist²⁷. Betrachtet

²⁷ Bezeichnen ψ_1 bzw. ψ_2 die Winkel, unter denen diese Drehachsen gegen die Kernachse geneigt sind, und r_1, r_2 die Halbmesser der durch die Zentren gehenden Kreisschnitte der vorliegenden Fläche Ω , so gilt für die infinitesimalen Drehwinkel $d\delta_1 : d\delta_2 = r_2 \sin \psi_2 : r_1 \sin \psi_1$. Damit sind alle theoretischen Vorbedingungen gegeben, um Sonderfälle mit unsicherer Einstellung an Hand der Instrumente zu demonstrieren. Über das Ergebnis solcher Versuche soll bei anderer Gelegenheit berichtet werden.

man im besonderen einen orthogonalen Kegel oder einen Drehzylinder, der aus zwei Punkten O_1, O_2 derselben Haupterzeugenden (Zylindererzeugenden) e_s aufgenommen wurde, *so sind die eben erwähnten Drehachsenbüschel sogar perspektiv*, und zwar schneiden sich je zwei zusammengehörige Drehachsen d_1, d_2 stets auf der e_s gegenüberliegenden Erzeugenden der Fläche. In Abb. 14 ist die Lage zweier solcher Drehachsen dargestellt, wie sie möglich sind, wenn man den Kegel der Raumbilder III und IV aus zwei Zentren aufgenommen hat, die der $e_s = AB$ gegenüberliegenden Haupterzeugenden angehören²⁷. Perspektive Büschel entsprechender Drehachsen d_1, d_2 können übrigens auch bei getrennten Lösungen der Hauptaufgabe vorkommen, nämlich dann, wenn die Ebenen dieser Büschel die „gefährliche“ Fläche berühren²⁸.

8. Auswirkungen auf die photogrammetrische Praxis.

Zum Abschluß sind wohl noch einige Bemerkungen über die praktischen Auswirkungen der erzielten Ergebnisse am Platz. Wie man sich in der Praxis bei Geländeaufnahmen aus der Luft vor den „gefährlichen“ Flächen, insbesondere vor deren „gefährlichen“ Gebieten, in acht nehmen kann, das ist zunächst noch eine Frage für sich. Sehr naheliegend wäre jedenfalls die Verwendung von *Paßpunkten*, ähnlich wie dies schon längst gehandhabt wird²⁹. Solange man jedoch mit einem reicher gegliederten Geländestück zu tun hat, in dem etwa mehrere Rücken nebeneinander verlaufen oder ausgesprochene Gipfel- oder Muldenpunkte vorhanden sind, wird man meistens sofort überblicken können, daß keine orthogonale Regelfläche zweiten Grades auch nur annähernd auf das Gelände paßt. Anders ist dies indessen bei *einfacheren Geländeformen*, z. B. bei weiten Tälern, Sätteln usw. In allen solchen Fällen ist die Frage nach „gefährlichen“ Flächen durchaus aktuell. Besonders zu beachten ist ferner der schon erwähnte Umstand, daß eine allenfalls vorhandene Nebenlösung von der Hauptlösung beliebig wenig verschieden sein kann. In solchen Fällen könnte (an Stelle der bei völlig zusammenfallenden Lösungen auftretenden „infinitesimalen“ Unsicherheit) ein beträchtliches *freies Spiel* zur Geltung kommen.

Darüber hinaus dürfte die Kenntnis der Eigenschaften der „gefährlichen“ Flächen in der jetzt vorliegenden Vollständigkeit schon deshalb von großem Nutzen sein, weil ja auch noch untersucht werden muß, *in welchem Ausmaß eine Geländefläche von einer „gefährlichen“ Fläche abweichen müßte, damit eine Nebenlösung bei der mechanischen Einpassung mit Sicherheit vermeidbar ist*. Diese vorwiegend fehlertheoretische Frage scheint noch von besonderer Wichtigkeit zu sein. Nach ihrer Klarstellung wird man auch erst die Bedeutung der Tatsache richtig ermessen können, daß *zu je zwei Aufnahmezentren O_1, O_2 insgesamt ∞^5 „gefährliche“ Flächen in Betracht zu ziehen sind* (s. 4).

Schließlich sei noch ein Ergebnis hervorgehoben, das aus dem Hauptergebnis unter 4 unmittelbar folgt und das bei den heute üblichen Auswertverfahren gleichfalls berücksichtigt werden muß. Es besagt, daß *die gegenseitige Orientierung zweier Aufnahmen, deren innere Orientierungen bekannt sind, bereits durch die Punktpaare von sechs Raumpunkten eindeutig bestimmt ist, sofern diese sechs Punkte keiner „gefährlichen“ Fläche von der besprochenen Beschaffenheit und Lage angehören*. Mit dieser Aussage ist zugleich das Kernpunktproblem in geometrischer Hinsicht erstmalig endgültig geklärt. Während nämlich Kruppa die Mindestzahl der Bildpaare angegeben hat, für die die Hauptaufgabe überhaupt (mehrdeutig) lösbar ist, sind jetzt die Bedingungen bekannt, die sechs Bildpaare erfüllen müssen, damit diese Aufgabe *eindeutig* wird.

Wenn nun in der Praxis die Arbeit des Einpassens gewöhnlich mit *sechs* Geländepunkten begonnen wird²⁹, so läßt sich dabei nur in den seltensten Fällen erkennen, ob diese sechs Punkte obige Bedingungen erfüllen oder nicht. Liegen aber die sechs herausgegriffenen

²⁸ K. Schwidefsky, a. a. O., S. 110 ff. — Man vergleiche hierzu S. Finsterwalder, „Der Folgebildanschluß“, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München 1941, S. 91—110, wo die Lage zweier Geländepunkte gegenüber dem einen Zentrum als bekannt vorausgesetzt wird.

²⁹ Siehe etwa K. Schwidefsky, a. a. O., S. 102.

Punkte auf einer dieser „gefährlichen“ Flächen, noch dazu innerhalb eines ihrer „gefährlichen“ Gebiete, so könnte es passieren, daß vorerst eine Nebenlösung eingestellt wird, und es würde sich bestenfalls erst im späteren Verlauf herausstellen, daß die Arbeit mit anderen sechs Punkten nochmals begonnen werden muß. Man wird hier wohl trachten müssen, einen derartigen Zeitverlust von Anfang an zu vermeiden.

Für die noch zu erwartenden weiteren Folgerungen sind mit den geometrischen Ergebnissen, die in ihren Grundzügen hier dargelegt wurden, ebenfalls bereits die wichtigsten Voraussetzungen gegeben.

Verteilung von Lagefehlern

Von Dr.-Ing. G. Förstner, Jena.

Die Darstellung der Häufigkeit von Punktfehlern photogrammetrisch bestimmter Punkte ergab eine von der Gaußschen Glockenkurve abweichende Form, so daß systematische Fehler vermutet wurden. Dies führte zu einer Arbeitsgemeinschaft, in der dem Verfasser die grundsätzlichen Ausführungen, Dr.-Ing. Burkhardt die Aufstellung der praktischen Beispiele zufielen.

Fehlertheoretisch wird nachgewiesen, daß die Gaußsche Glockenkurve nur für lineare eindimensionale Beobachtungsfehler gilt. Das entsprechende Fehlerverteilungsgesetz für Punktfehler in der Grundrißlage wird abgeleitet und erläutert. Zum Schluß wird untersucht, inwieweit die Fehler photogrammetrisch bestimmter Punkte als unabhängige und gleichgewichtige Beobachtungsfehler betrachtet werden dürfen.

Genauigkeitsmaße.

Fehlerreihen können auf zwei Arten gewonnen werden. Einmal können die zur Ermittlung der unbekanntenen Größen notwendigen Messungen durch überschüssige Messungen ergänzt werden. Durch Ausgleichung aller Messungen erhält man dann nicht nur die wahrscheinlichsten Werte der gesuchten Größen, sondern auch so viel scheinbare Fehler ν , als Messungen durchgeführt wurden. Ist andererseits eine Größe irgendwie genügend genau bekannt, dann braucht sie zwar nicht mehr durch Messung ermittelt zu werden. Wird jedoch trotzdem gemessen, so können wahre Fehler ε bestimmt werden. Dies ist die zweite Möglichkeit, zu einer Fehlerreihe zu kommen.

Fehlerreihen können zur Bestimmung der Genauigkeit der Messungen verwendet werden. Dabei ist allerdings vorauszusetzen, daß die Beobachtungsfehler streuen. Wird z. B. eine Tischlänge mit dem cm-Maß mehrmals gemessen, dann werden diese Messungen nicht streuen; die Tischlänge wird scheinbar „ganz genau“ gemessen. Wird aber eine etwa 100 m lange Strecke auf einem holprigen Feldweg mit ein oder zwei in cm geteilten Maßstäben von 1 bis 5 m Länge mehrmals gemessen, dann werden die Messungen streuen; die einzelnen Messungen werden vom Mittelwert, dem wahrscheinlichsten Wert, um kleine Beträge, nämlich um die scheinbaren Fehler ν abweichen. Es ist also notwendig, daß die Maßstabsfehler kleiner sind als die Fehler der Messung. Andererseits wird aber das Messen mit einem zu genauen Maßstab meist unwirtschaftlich, da die Messung zu lange dauert und damit zu wenig Messungen erzielt werden. Es ist daher vollkommen ausreichend, wenn der Maßstab etwa viermal so genau ist wie die Messung. Für die Bestimmung der wahren Fehler ε genügen daher auch viermal so genaue Vergleichsmessungen.

Es gibt nur eine einzige objektive Form der Genauigkeitsangabe, nämlich die Angabe aller einzelnen Beobachtungsfehler. Danach kann sich dann jedermann selbst ein mehr oder weniger subjektives Urteil über die Genauigkeit bilden. Die Angabe der Einzelfehler kann in Form einer Zahlentafel oder einer graphischen Darstellung gemacht werden. Treten bestimmte Größen von Beobachtungsfehlern mehrfach auf, so können diese statistisch zusammengefaßt werden, sofern sie unter gleichen Bedingungen entstanden sind. Eine derartige Zahlentafel enthält dann die beiden Spalten Fehlergröße und Fehlerzahl. Die zweckmäßigste graphische Darstellung ist die Säulenform mit dem Fehlerintervall als Breite und der Fehlerzahl als Höhe.

Diese objektive Art der Genauigkeitsangabe ist jedoch umständlich und meist unübersichtlich. Es würden daher verschiedene Genauigkeitsmaße für die einzelne Beobachtung eingeführt, z. B.:

1. der mittlere Fehler m nach

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2n}}\right) \quad (1)$$

2. der durchschnittliche Fehler d nach

$$d = \frac{[|\varepsilon|]}{n} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\pi-2}{2n}}\right) \quad (2)$$

3. der wahrscheinliche Fehler w , den man erhält, wenn man die Beobachtungsfehler ε ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Größe nach ordnet und in zwei gleichgroße Gruppen einteilt. Der Grenzwert zwischen der Gruppe der größeren Fehler und der Gruppe der kleineren Fehler ist dann w ;

4. der Maximalfehler ε_{max} .

Am gebräuchlichsten und genauesten ist der mittlere Fehler. Die Genauigkeit des mittleren Fehlers kann aber nicht mit der Genauigkeit einer Meßgröße verglichen werden. Läßt sich z. B. eine Strecke auf $1/10000$ ihrer Länge genau messen, so wird der mittlere Fehler der Einzelmessung wie alle Fehleruntersuchungen niemals so genau. (1) zeigt, daß mit einer Fehlerreihe von 50 Beobachtungsfehlern erst eine Genauigkeit des mittleren Fehlers von 10 v. H. erreicht wird. Mißt A eine Strecke durch zehn Messungen auf ± 12 cm genau, B „nur“ auf ± 13 cm genau, so ist damit noch nicht erwiesen, daß die Messung des A genauer ist! Es ist daher auch in den meisten Fällen sinnlos, den mittleren Fehler mit mehr als zwei zählenden Ziffern anzugeben.

Der durchschnittliche Fehler nach (2) ist zwar nur um 7 v. H. ungenauer als m , das Weglassen des Vorzeichens ist jedoch ein störender Eingriff, der von Anfängern gern vergessen wird. Der wahrscheinliche Fehler berücksichtigt nur ein oder zwei, allerdings sehr günstig liegende Einzelfehler. Der Maximalfehler ist dagegen ein sehr ungünstig gelegener Einzelfehler, der wesentlich größeren Zufälligkeiten unterworfen ist als jedes andere Genauigkeitsmaß.

Man kann die Genauigkeitsmaße auf jede beliebige Fehlerreihe anwenden, ganz gleich, ob sie systematische, einseitig wirkende oder sogar grobe Fehler enthält. Ob dann allerdings zwei Fehlerreihen miteinander verglichen werden dürfen, ist fraglich. Von einem Genauigkeitsmaß wird also verlangt, daß es die Fehlerreihe ersetzen kann.

Wahrscheinlichkeit eindimensionaler Beobachtungsfehler.

Für eine Reihe gleichgewichtiger, unregelmäßiger, voneinander unabhängiger Beobachtungsfehler gilt das Gaußsche Fehlerverteilungsgesetz, nach dem positive und negative Beobachtungsfehler etwa gleich häufig sind. Kleine Beobachtungsfehler treten häufiger auf als große. Der Fehler Null ist also am häufigsten, während Fehler in der Größenordnung des zwei- bis dreifachen mittleren Fehlers selten sind.

Mathematisch hat das Gaußsche Fehlerverteilungsgesetz folgende Form: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Beobachtungsfehlers von der x -fachen Größe des mittleren Fehlers und einem Fehlerintervall dx ist:

$$W_I(xm) = \varphi_I(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x^2} dx \quad (3)$$

Zahlenwerte siehe Zahlentafel, Spalte 1. $\varphi_I(x)$ über x aufgetragen, gibt die Gaußsche Glockenkurve, deren positiver Teil in Abb. 1 in verschiedenen Maßstäben dargestellt wurde. Die Kurven haben bei $x = 1$, also bei der Abszisse = dem mittleren Fehler, einen Wendepunkt.

Die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines eindimensionalen Fehlers zwischen die Grenzen $-xm$ und $+xm$ ist:

$$W_I \left| \begin{array}{l} +xm \\ -xm \end{array} \right. = 2 \int_0^{xm} \varphi(x) dx \quad (4)$$

Zahlenwerte siehe Zahlentafel, Spalte 2. Die Form von $W_j \left| \begin{matrix} + x m \\ - x m \end{matrix} \right.$ zeigt Abb. 2 (ausgezogene Kurve).

Die Feststellung, ob eine Reihe gleichgewichtiger, unabhängiger, eindimensionaler Fehler der Gaußschen Fehlerverteilung genügt, kann verschieden gemacht werden.

Man kann z. B. in einem Diagramm nach rechts und links die Fehlergrößen $\varepsilon = xm$, nach oben die Fehlerzahl in jedem Fehlerintervall dx auftragen. Zu dieser Treppenkurve trägt man dann die mit $n \cdot dx/m$ multiplizierten Werte der Zahlentafel, Spalte 1, über x , also die Sollwerte für die Häufigkeit des Fehlers xm , auf. $x = 1$ gilt für den mittleren Fehler m , $n =$ Anzahl aller Fehler der Reihe.

Man kann positive und negative Fehler je für sich untersuchen. Werden jedoch beide zu Absolutfehlern zusammengefaßt, dann ist auch die Häufigkeit der Fehler nach der Fehlertheorie zu verdoppeln, so daß die Ordinaten, die der Fehlerzahl je Fehlerintervall entsprechen, im halben Maßstab oder aber die Sollwerte im doppelten Maßstab gezeichnet werden müssen.

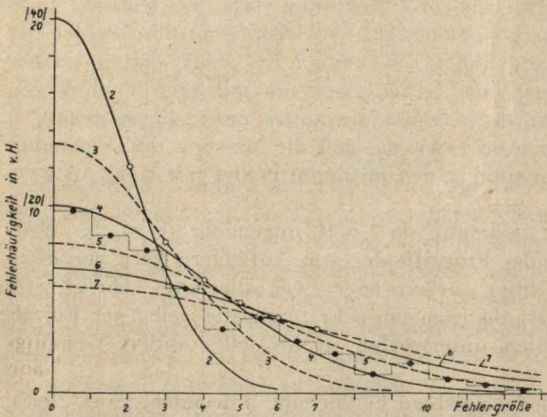


Abb. 1. Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eindimensionaler Fehler; Intervallbreite 0,5 cm.

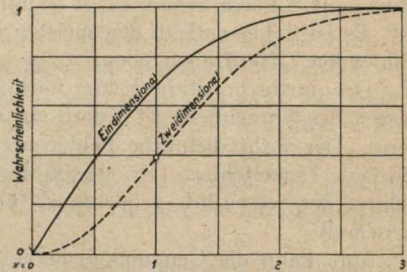


Abb. 2. Häufigkeit der Fehler bis zur Größe des x -fachen mittleren Fehlers.

Einfacher ist es, die Abb. 1 zu verwenden, die ein Beispiel über die Untersuchung von Koordinatenfehlern gibt. Die Veränderung des Ordinatenmaßstabs ist durch die doppelte Bezifferung gegeben. 10 usw. gilt für die Absolutfehler; die einfachen Zahlen dagegen gelten für die getrennte Untersuchung der positiven und negativen Fehler. Die Fehler sind wieder in gleichgroße Intervalle $dx = 2'$ eingeteilt, nämlich von $0'$ bis $2'$, $2'$ bis $4'$... Jedes Intervall soll durchschnittlich wenigstens zehn Fehler enthalten; die Anzahl der Intervalle soll, von einigen größeren Fehlern ($> 3m$) abgesehen, etwa 5 bis 20 betragen. Der prozentuale Anteil der Fehler in jedem Fehlerintervall zur Gesamtfehlerzahl n ist in Abb. 1 aufgetragen, z. B. 128 von 664 Fehlern zwischen $0'$ und $2' = 19,3$ v. H., 111 von 664 Fehlern zwischen $2'$ und $4' = 16,7$ v. H. usw. Als Einheit diente 1 v. H. = 0,25 cm bzw. $|1 \text{ v. H.}| = 0,125$ cm; Intervallbreite $dx = 0,5$ cm. Da hiermit Abszissen- und Ordinatenmaßstab festgelegt sind, konnten die Gaußschen Glockenkurven für verschiedene mittlere Fehler eingezeichnet werden. Von diesen passen sich die Kurven 4 und 5 gleich gut an die Treppenkurve an. Der mittlere Fehler beträgt also 4,5 Intervallbreiten = $\pm 9'$ (da $dx = 2'$). Der aus den Fehlern selbst errechnete mittlere Koordinatenfehler ist $\pm 10'$. Die Übereinstimmung ist gut; außerdem paßt sich die Fehlerreihe recht gut an die theoretische Glockenkurve an.

Trägt man die Treppenkurve stets im selben Maßstab auf, so kann mit Hilfe der auf Pauspapier übertragenen Fehlerkurven der Abb. 1 für eindimensionale Fehler der mittlere

Fehler rasch, einfach und genügend genau berechnet und gleichzeitig die Fehlerreihe fehlertheoretisch überprüft werden (Beilage: Intervallbreite 1 cm).

Voraussetzung für eine derartige Untersuchung ist, daß die Fehlerreihe genügend groß ist ($n > 50$). Einfacher und auch auf kleine Beobachtungsreihen anwendbar ist folgendes Verfahren: Nach Zahlentafel, Spalte 2, gilt:

Fehlergröße	Fehlerzahl Soll	Differenz Soll
ε zwischen $-m/2$ und $+m/2$	38 v. H.	38 v. H.
ε zwischen $-m$ und $+m$	68 v. H.	30 v. H.
ε zwischen $-3m$ und $+3m$	99,7 v. H.	32 v. H.
		100 v. H.

Werden also die Fehler ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Größe nach geordnet und bei $m/2$ und m in drei Gruppen eingeteilt, dann muß jede Gruppe etwa ein Drittel aller Fehler enthalten.

Die Definition des mittleren Fehlers und der anderen Genauigkeitsmaße erfolgte zwar unabhängig von der Gaußschen Fehlerverteilung. Der mittlere Fehler hat aber nur dann objektiven Wert als Genauigkeitsmaß, wenn die Gaußsche Fehlerverteilung bei der Fehlerreihe vorausgesetzt werden kann, denn nur dann kann der mittlere Fehler die Angabe der einzelnen ε ersetzen. Ist das Gaußsche Fehlerverteilungsgesetz nicht erfüllt, ist also nachgewiesen, daß in der Reihe der Beobachtungsfehler noch systematische Fehlereinflüsse vorhanden sind, dann ist es nicht zulässig, den mittleren Fehler ohne jeglichen Zusatz als Genauigkeitsmaß anzugeben.

Dasselbe gilt für die übrigen Genauigkeitsmaße, solange nur eines dieser Maße angegeben wird. Genügt jedoch die Fehlerreihe der Gaußschen Fehlerverteilung, dann können die Genauigkeitsmaße durch folgende Beziehungen umgerechnet werden:

$$m = 1,25 d = 1,48 \sigma. \quad (5)$$

Für den Maximalfehler wird in der Regel gesetzt:

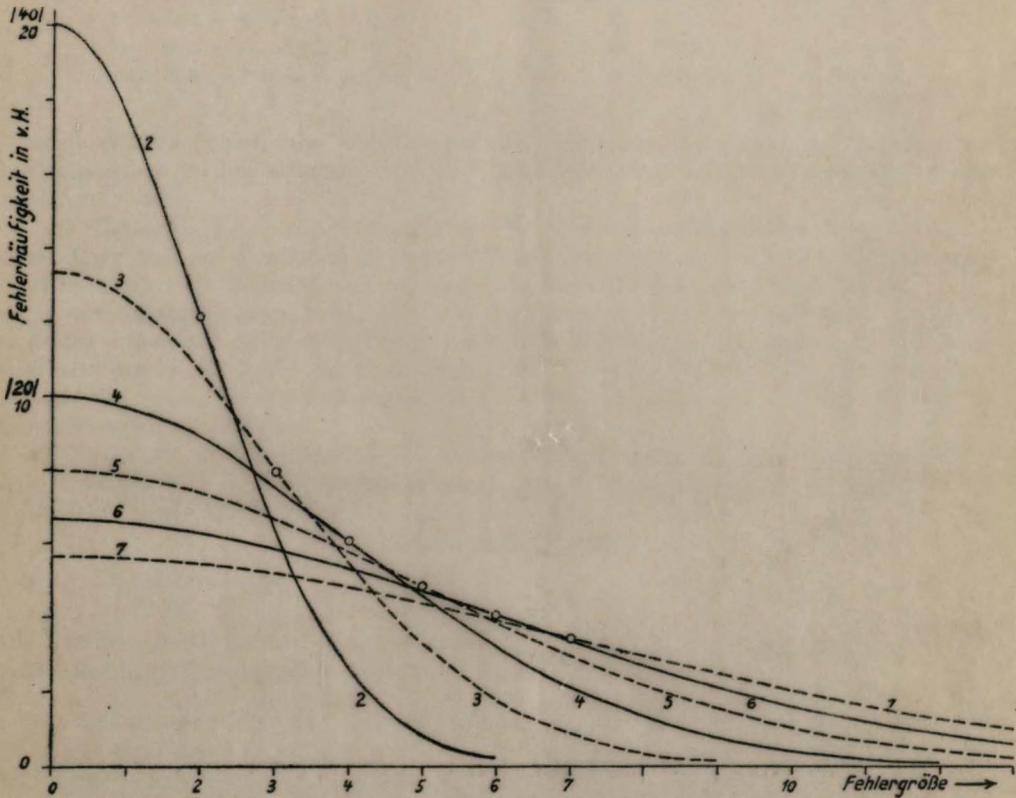
$$\varepsilon_{max} \approx 3 m. \quad (6)$$

Die Berechnung von m aus σ oder gar aus ε_{max} ist natürlich sehr unsicher, da nicht alle Fehler der Reihe berücksichtigt werden, wie dies bei m und d der Fall ist.

Wahrscheinlichkeit zweidimensionaler Beobachtungsfehler.

Nach dem bisher beschriebenen Verfahren können alle eindimensionalen Fehler, wie Streckenfehler, Koordinatenfehler usw., untersucht werden. Für den Punktfehler, also den in der Ebene unter einer beliebigen Richtung liegenden Lagefehler eines Punktes, gilt ein anderes Häufigkeitsgesetz. Dabei wird zunächst vorausgesetzt, daß jede Richtung des Fehlervektors ungefähr gleich wahrscheinlich ist. Fehlervektoren gleicher Länge werden dann ohne Berücksichtigung der Richtung statistisch zusammengefaßt und die Häufigkeit der auf die einzelnen Vektorlängen fallenden Fehler über der Vektorlänge aufgetragen. In dieser Darstellung hat sich also nur die Tatsache geändert, daß statt der Häufigkeit eindimensionaler Fehler jetzt die Häufigkeit zweidimensionaler Fehler aufzutragen ist.

Die Häufigkeitskurve hat sich jedoch grundlegend geändert, wie mit Abb. 3 gezeigt werden soll. Im unteren Teil der Abbildung ist die Fläche um den wahren Punkt durch konzentrische Ringe gleicher Dicke dx und durch einige Radien in gleichgroße Flächenstücke aufgeteilt. Im oberen Teil der Abbildung ist die Gaußsche Glockenkurve gezeichnet und im rechten Teil durch einige Säulen besonders hervorgehoben. Die einzelnen Säulen stellen die wahrscheinliche Häufigkeit der betreffenden Fehler ε je Flächeneinheit dar. Da der zweite Ring drei Flächeneinheiten, der dritte Ring fünf Flächeneinheiten usw. aufweist, ist die wahrscheinliche Häufigkeit des betreffenden Fehlers ε , auf die gesamte Ringfläche umgerechnet, drei- bzw. fünfmal so groß. Auf diese Weise entsteht die gestrichelte Kurve für die Häufigkeit zweidimensionaler Punktfehler.



Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eindimensionaler Fehler (Gaußsche Fehlerkurve).
 Intervallbreite: 1 cm.

(Zum Aufsatz Förstner: Verteilung von Lagefehlern; B. u. L. 1/2, 1942.)

An Stelle der Gaußschen Glockenkurve, die für eindimensionale Fehler gilt, tritt bei zweidimensionalen Fehlern eine dünenförmige Häufigkeitskurve. Danach ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Fehlers Null am kleinsten, nämlich Null. Die größte

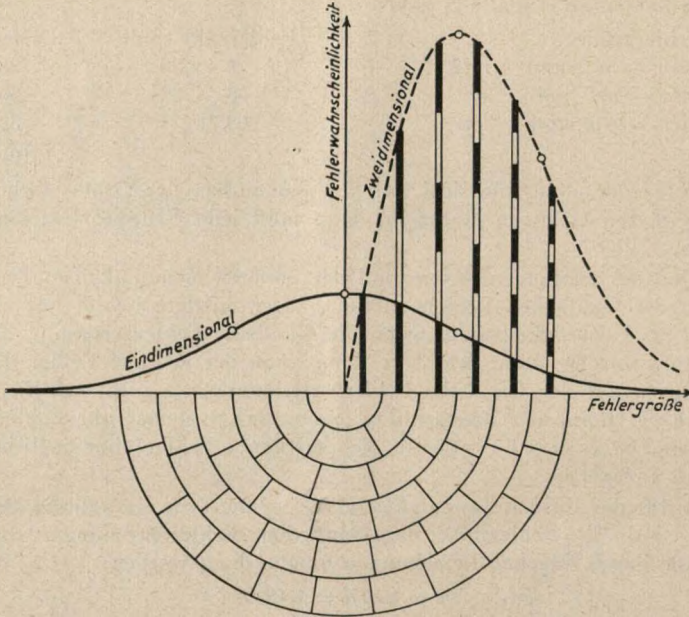


Abb. 3. Entstehung der Häufigkeitskurve für zweidimensionale Fehler.

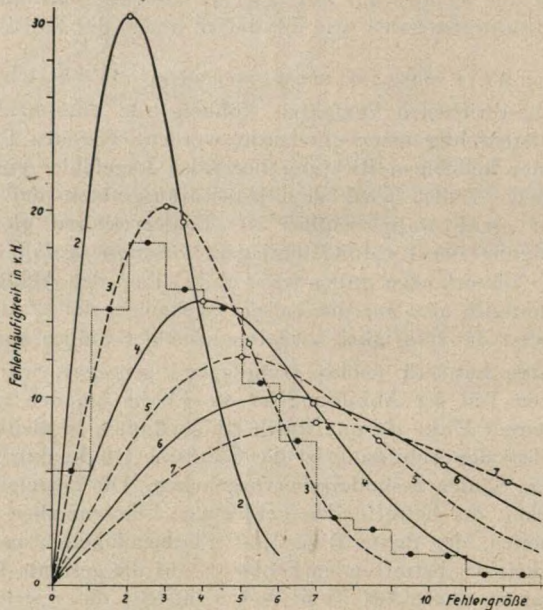


Abb. 4. Wahrscheinlichkeit für das Auftreten zweidimensionaler Fehler; Intervallbreite 0,5 cm.

Wahrscheinlichkeit hat der Punktfehler, der dem mittleren Koordinatenfehler entspricht. Die Wahrscheinlichkeit größerer Fehler nimmt dann wieder rasch mit der Fehlergröße ab.

Für die mathematische Behandlung können die in Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, I. Band, 8. Auflage, S. 629—632, für die Fehlerellipse abgeleiteten Beziehungen verwendet werden. Nach Jordan (20) gilt für die mittlere Fehlerellipse $s = 1/\sqrt{2}$, während wir bei unseren Formeln für die mittlere Fehlerellipse $x = 1$ haben. Für die x -fache mittlere Fehlerellipse ist also in den Jordanschen Formeln zu setzen:

$$s^2 = x^2/2. \quad (7)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Punktfehlers in die x -fache mittlere Fehlerellipse ist dann nach Jordan (26):

$$W_2 \left| \begin{matrix} xm \\ 0 \end{matrix} \right. = 1 - e^{-1/2 x^2} \quad (8)$$

Die Differentiation von (8) gibt die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Punktfehlers in einen Ring vom Halbmesser xm und der Ringbreite dx :

$$W_2(xm) = \varphi_2(x) dx = x \cdot e^{-1/2 x^2} dx \quad (9)$$

(9) ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines zweidimensionalen Punktfehlers von der Größe xm und einem Fehlerintervall dx . Zahlenwerte siehe Zahlentafel, Spalte 3. $\varphi_2(x)$ über x aufgetragen, gibt die in Abb. 4 dargestellten dünenförmigen Häufigkeitskurven. Die Kurven steigen vom Nullpunkt ab. Sie erreichen ihr Maximum bei $x = 1$, also beim mittleren Koordinatenfehler. Von dort ab fallen die Häufigkeitskurven; der Wendepunkt liegt bei $x = \sqrt{3}$.

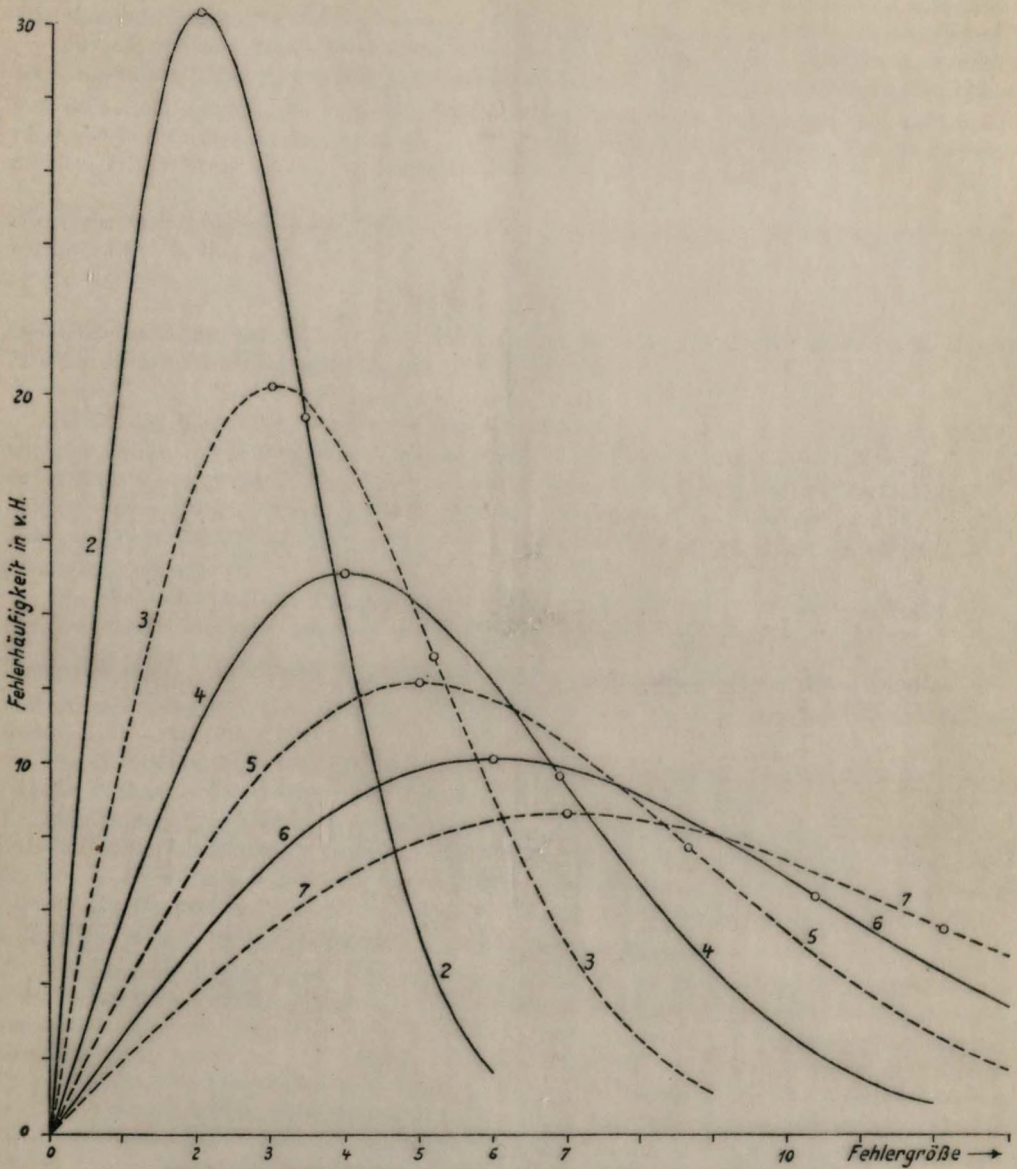
Die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Punktfehlers in der Ebene zwischen die Grenzen Null und xm ist gegeben durch (8). Zahlenwerte siehe Zahlentafel, Spalte 4. Die Form von $W_2 \left| \begin{matrix} xm \\ 0 \end{matrix} \right.$ zeigt Abb. 2 (gestrichelte Kurve). Die Kurve beginnt im Nullpunkt mit horizontaler Tangente. Der Wendepunkt liegt bei $x = 1$, also beim mittleren Koordinatenfehler.

Die Feststellung, ob eine Reihe gleichgewichtiger, unabhängiger Punktfehler die theoretische Fehlerverteilung zeigt, kann verschieden durchgeführt werden.

Man kann z. B. in einem Diagramm die Häufigkeit einer bestimmten Fehlergröße (Fehlerintervall dx) über der Fehlergröße $\varepsilon = xm$ auftragen. Zu dieser Treppenkurve trägt man die mit $n \cdot dx/m$ multiplizierten Werte der Zahlentafel, Spalte 3, über x , also die Sollwerte für die Häufigkeit des Fehlers xm , auf; $x = 1$ gilt für den mittleren Koordinatenfehler, $x = \sqrt{2}$ für den mittleren Punktfehler, $n = \text{Gesamtfehlerzahl}$.

Einfacher ist es jedoch, die Abb. 4 zu verwenden, die ein Beispiel für die Untersuchung von Punktfehlern enthält. Die Fehler sind wieder in gleichgroße Intervalle $dx = 4$ cm eingeteilt, nämlich von 0 bis 4 cm, 4 bis 8 cm usw. Jedes Intervall soll durchschnittlich wenigstens 10 Fehler enthalten. Die Anzahl der Intervalle soll, von einigen größeren Fehlern ($> 3m$) abgesehen, etwa 5 bis 20 betragen. Der auf die Gesamtfehlerzahl n bezogene prozentuale Fehleranteil in jedem Intervall ist in Abb. 4 aufgetragen, z. B. 60 von 978 Fehlern zwischen 0 und 4 cm = 6,1 v. H., 144 von 978 Fehlern zwischen 4 und 8 cm = 14,7 v. H. usw. Als Einheit diene 1 v. H. = 0,25 cm, Intervallbreite $dx = 0,5$ cm. Da hiermit Abszissen- und Ordinatenmaßstab festgelegt sind, konnten die Fehlerhäufigkeitskurven für verschiedene mittlere Koordinatenfehler eingezeichnet werden. Von diesen Kurven paßt sich die mit 3 bezeichnete etwas besser an die Treppenkurve an als Kurve 4. Der mittlere Koordinatenfehler ist also etwa $3\frac{1}{2}$ Intervallbreiten = ± 13 cm, da $dx = 4$ cm. Der aus den Punktfehlern selbst errechnete mittlere Koordinatenfehler beträgt ± 13 cm. Die Übereinstimmung ist also recht gut. Außerdem paßt sich die Fehlerreihe recht gut an die theoretische Häufigkeitskurve an.

Trägt man die Treppenkurve stets im selben Maßstab auf, so kann mit Hilfe der auf Pauspapier übertragenen Fehlerkurven der Abb. 4 für den zweidimensionalen Punktfehler



Wahrscheinlichkeit für das Auftreten zweidimensionaler Fehler.

Intervallbreite: 1 cm.

(Zum Aufsatz Förstner: Verteilung von Lagefehlern; B. u. L. 1/2, 1942.)

der mittlere Koordinatenfehler einfach, rasch und genügend genau berechnet und gleichzeitig die Fehlerreihe fehlertheoretisch untersucht werden. (Beilage: Intervallbreite 1 cm.)

Bei einer derartigen Untersuchung muß eine genügend große Fehlerreihe ($n > 50$) vorausgesetzt werden. Einfacher und auch für kleine Beobachtungsreihen brauchbar ist folgendes Verfahren: Nach Zahlentafel, Spalte 4, gilt für zweidimensionale Punktfehler:

Fehlergröße	Fehlerzahl Soll	Differenz Soll
ε zwischen 0 und m	35 v. H.	35 v. H.
ε zwischen 0 und $1,5 m$	68 v. H.	33 v. H.
ε zwischen 0 und $3 m$	99 v. H.	31 v. H.
		99 v. H.

Werden also die zweidimensionalen Punktfehler der Größe nach geordnet und bei m und $1,5 m$ ($m =$ mittlerer Koordinatenfehler) in drei Gruppen eingeteilt, dann muß jede Gruppe etwa $\frac{1}{3}$ aller Fehler enthalten. Die Gruppengrenzen liegen hier anders als beim eindimensionalen Fehler.

Die Angabe des mittleren Punktfehlers ohne jeglichen Zusatz als Ersatz für die gesamte Fehlerreihe ist nur dann zulässig, wenn die Fehlerreihe dem Fehlerverteilungsgesetz genügt.

Die Anzahl n_2 zweidimensionaler Fehler, von denen wahrscheinlich ein einziger größer als xm ist, ergibt sich nach (8) aus:

$$\log n_2 = -\log(1 - W_2) = 0,21715 x^2.$$

Zahlenwerte (n_1 für eindimensionale Fehler aus Jordan-Eggert):

x	2	3	4	5
n_1	22	370	15 800	1 740 000
n_2	7	90	2 980	268 000

Danach ist es üblich, den Maximalfehler bei eindimensionalen Fehlern zu $3 m$ anzusetzen; der entsprechende Maximalfehler bei zweidimensionalen Fehlern ist dann etwa der 3,5fache mittlere eindimensionale Fehler.

Auf dieselbe Weise könnte die Häufigkeit des räumlichen Punktfehlers untersucht werden. In der Photogrammetrie und Geodäsie wird jedoch die dritte Punktcoordinate meist nach einem anders gear teten Verfahren bestimmt; eine gleichgewichtige Zusammenfassung der drei Koordinaten ist also in der Regel nicht möglich.

Untersuchung photogrammetrisch bestimmter Punkte.

Bei der Anwendung des Fehlerhäufigkeitsgesetzes muß vorausgesetzt werden, daß die einzelnen Beobachtungsfehler der Reihe einigermaßen gleichgewichtig und unabhängig voneinander sind. Bevor also fehlertheoretische Untersuchungen an photogrammetrisch bestimmten Punkten vorgenommen werden, ist es notwendig, festzustellen, wieweit diese beiden Voraussetzungen zutreffen bzw. wie sich Abweichungen auswirken.

In den Abb. 5 bis 7 sind zu diesem Zwecke drei einfache Beispiele einer Radialtriangulation dargestellt. In Abb. 5 sind die vier Eckpunkte, in Abb. 6 die beiden Endpunkte des einen Flugstreifens und in Abb. 7 die Anfangspunkte der beiden Flugstreifen als Paßpunkte angenommen worden. Der Bildabstand ist halb so groß wie der Streifenabstand. Die Fehlerellipsen gelten für eine beliebige Punktunsicherheit. Wird z. B. eine mittlere Punktunsicherheit von $\pm 1/20$ mm angenommen, dann ist die in den Abbildungen verzeichnete Einheit ebenfalls $1/20$ mm. Zur Berechnung der Fehlerellipsen in Abb. 5 war die Auflösung von 20 Normalgleichungen, bei Abb. 6 und 7 je weiterer vier Normalgleichungen notwendig.

Aus diesen Abbildungen folgt, daß interpolierte Punkte, d. h. Punkte, die zwischen den Paßpunkten bestimmt werden, ungefähr als gleichgewichtig betrachtet werden können. Punkte, die sehr nahe an den Paßpunkten liegen, werden zwar genauer sein; im übrigen Gebiet zwischen den Paßpunkten kann dagegen für Fehleruntersuchungen ausreichende Gleichmäßigkeit der Fehlerellipsen vorausgesetzt werden. Wird das ganze Gebiet einheitlich untersucht, dann wird der mittlere Fehler in erster Linie durch die größeren Lagefehler der paßpunktfernen Punkte beeinflusst. Die aus dem mittleren Fehler abgeleitete Sollkurve

wird also etwas zu flach ausfallen; ihr Maximum wird zu weit nach rechts kommen. Bei der Istkurve dagegen werden die kleinen Fehler, die von den paßpunktnahen Punkten herühren, gegenüber der Theorie zu häufig auftreten (vgl. auch R. Burkhardt: Beispiele für die tatsächliche Verteilung von Lagefehlern).

Bei den extrapolierten Punkten, d. h. bei Punkten, die außerhalb der Paßpunkte liegen, sind die Verhältnisse anders. Die Fehlerellipsen wachsen sehr rasch mit dem Abstand von den Paßpunkten. In Abb. 6 ist die Fehlerellipsenform noch sehr unterschiedlich. In Abb. 7 dagegen tritt auch noch eine bevorzugte Achsenrichtung auf; die Aufteilung der Lagefehler in zwei Komponenten wird also zwei verschiedene Koordinatenfehler ergeben. Extrapolierte Punkte können auf Grund dieser Überlegungen nicht mehr als gleichgewichtig angesehen werden; sie sind bei Fehleruntersuchungen von vornherein auszuschalten.

Je mehr Paßpunkte vorhanden sind, desto unregelmäßiger werden die Fehler der Netzpunkte ausfallen. Die gegenseitige Abhängigkeit wird nur gering sein, und zwar um so geringer, je weiter zwei Vergleichspunkte auseinanderliegen. Ein systematischer oder auch ein größerer unregelmäßiger Fehler, wie er nach dem Fehlerverteilungsgesetz bei einzelnen Paßpunkten auftreten darf, wird sich auf benachbarte Punkte in gleicher Richtung und Größe auswirken. Die wirkliche und auch die scheinbare Systematik verliert sich jedoch bei einer großen Anzahl von Paßpunkten schnell. Gegen eine Anwendung des Fehlerverteilungsgesetzes wird also nichts einzuwenden sein.

Sind dagegen nur wenig Paßpunkte vorhanden, dann sind die einzelnen Punkte sehr stark voneinander abhängig. Systematische oder auch größere unregelmäßige Fehler einzelner Paßpunkte müssen sich über weite Gebiete hinweg noch bemerkbar machen. Da jedoch die Systematik in den verschiedenen Teilen des Netzes anders sein wird, wird bei der Untersuchung aller Lagefehler eine Unregelmäßigkeit vorgetäuscht, die nicht vorhanden ist.

Ein systematischer Fehler innerhalb eines Teilgebietes ist leicht zu erkennen, wenn alle Lagefehler dieses Gebietes von einem einzigen Ursprungspunkt aus als Vektoren abgetragen werden. Die Endpunkte dieser Vektoren bilden einen unregelmäßigen Punkthaufen. Die Verbindung von Ursprungspunkt und Schwerpunkt des Punkthaufens ist der konstante Fehleranteil in dem untersuchten Teilnetz. Die Verbindungslinien des Schwerpunktes mit den einzelnen Vektorenden sind die unregelmäßigen Fehleranteile, aus denen dann die mittlere Streuung, der mittlere Koordinaten- oder Punktfehler, errechnet werden kann.

Sind die Enden einer Strecke unabhängig bestimmte Punkte mit dem mittleren Koordinatenfehler m_k bzw. dem mittleren Punktfehler m_p , dann wäre der mittlere Fehler der Strecke:

$$m_s = \sqrt{2} m_k = m_p. \quad (10)$$

Sind die Ecken einer rechteckigen Fläche mit den Seiten a und b unabhängig bestimmte Punkte, dann wäre der mittlere Flächenfehler:

$$m_f = 2c\sqrt{f} m_p, \quad (11)$$

$$c = \frac{1+a/b}{2\sqrt{a/b}} \quad (12)$$

Zahlenwerte:	$a/b = 1$	3	5	10
	$c = 1$	1,16	1,34	1,74.

Da jedoch photogrammetrisch bestimmte Punkte nur in seltenen Fällen unabhängig voneinander bestimmt werden, wird im Gegensatz zu (10) und (11) eine Abhängigkeit vom Punktabstand vorhanden sein. Diese Abhängigkeit ist am größten bei Punkten, die vom selben Plattenpaar stammen, da bei ihnen der mehrmals erwähnte systematische Einfluß am deutlichsten ist. Die aus m_s und m_f berechneten mittleren Punktfehler werden daher kleiner ausfallen als die aus den Lagefehlern des ganzen Netzes berechneten. Diese Werte werden

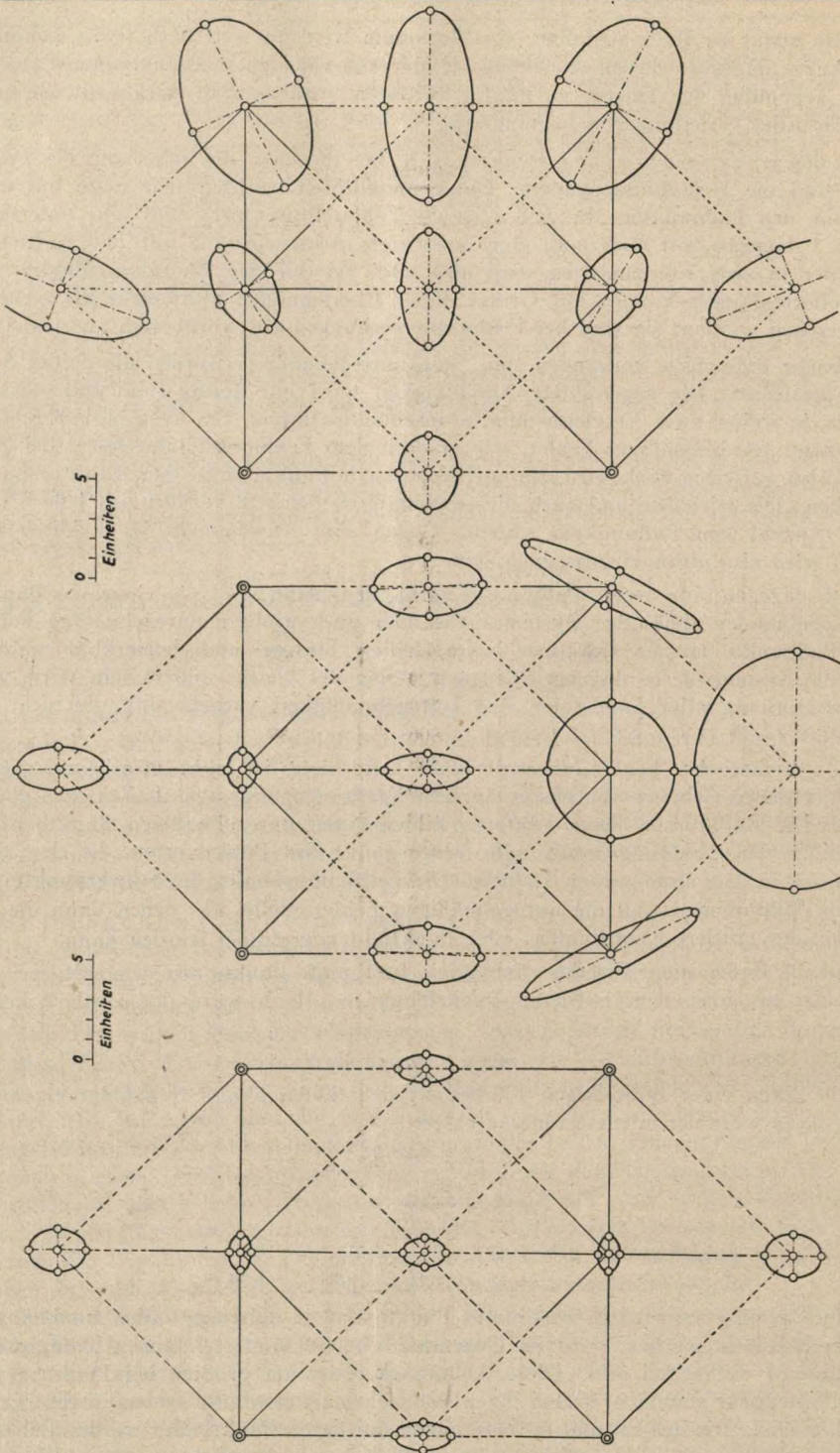


Abb. 5 bis 7. Beispiele zur Genauigkeit der Radialtriangulation.

um so kleiner sein, je kleiner die dabei verwendeten Strecken und Flächen sind. Da auch für die Photogrammetrie das Gesetz der Nachbarschaft gilt, ist die photogrammetrische Punktbestimmung im allgemeinen genauer, als nach dem direkt berechneten mittleren Punktfehler zu erwarten ist.

Zahlentafel

	1	2	3	4
x	$\varphi_1(x)$	$W_1 \left \begin{matrix} +xm \\ -xm \end{matrix} \right.$	$\varphi_2(x)$	$W_2 \left \begin{matrix} xm \\ 0 \end{matrix} \right.$
0	0,399	0,000	0,000	0,000
0,1	397	080	100	005
0,2	391	158	196	020
0,3	381	236	287	044
0,4	368	311	369	077
0,5	352	383	441	118
0,6	333	452	501	165
0,7	312	516	548	217
0,8	290	576	581	274
0,9	266	632	600	333
1,0	0,242	0,683	0,607	0,394
1,1	218	729	601	454
1,2	194	770	584	513
1,3	171	806	558	570
1,4	150	838	525	625
1,5	130	866	487	675
1,6	111	890	445	722
1,7	094	911	401	764
1,8	079	928	356	802
1,9	066	943	312	836
2,0	0,054	0,954	0,271	0,864
2,1	044	964	232	890
2,2	036	972	196	911
2,3	028	978	163	929
2,4	022	984	135	944
2,5	018	988	110	956
2,6	014	991	089	966
2,7	010	993	071	974
2,8	008	995	056	980
2,9	006	996	043	985
3,0	0,004	0,997	0,033	0,989
3,5	0,001	1,000	0,008	0,998
4,0	0,000	1,000	0,001	1,000

Beispiele für die tatsächliche Verteilung von Lagefehlern

Von Rudolf Burkhardt, Berlin.

Auch auf dem Gebiet der Luftbildmessung muß sich die Forschung mehr und mehr mit statistischen Fehlerfeststellungen befassen. Dabei lassen sich Einflüsse einzelner Fehler auf ein Ergebnis durch die Feststellung ihrer Wahrscheinlichkeit zu Folgerungen zusammenfassen, die fast Gesetz sind.

Solche statistischen Untersuchungen bei der Hansa Luftbild zeigten bei Lagefehlern eine merkwürdige Systematik. Bei der mit Dr.-Ing. Förstner gebildeten Arbeitsgemeinschaft fiel dem Verfasser die Beschaffung der Beispiele für die tatsächliche Verteilung von Lagefehlern zu — die Bestätigung der Theorie durch die Praxis.

Im folgenden wird die Fehlerstatistik mitgeteilt, mit dem Versuch, einzelne Abweichungen zu begründen. Der erste Abschnitt soll an einem Querschnitt durch eine Koordinatenausmessung am Stereoplanigraph, angefangen von den geodätischen Unterlagen bis zum Ausmessungsergebnis, die Übereinstimmung von Theorie und Praxis überprüfen, während die folgenden die praktische Anwendung an Hand mehrerer kennzeichnender Beispiele zeigen sollen.

1. Fehlerverteilung einer Koordinatenausmessung am Stereoplanigraph.

a) Fehler der Unterlagen.

Die Stereogramme (32 an der Zahl) wurden auf Grund von 48 Signalpunkten orientiert. Als Grundlage diente ein Punktnetz mit einem mittleren Lagefehler von 1,9 cm, das als fehlerfrei betrachtet werden kann.

Die Prüfpunkte bestanden aus signalisierten Polygon- und Einmessungspunkten. Eine Nachprüfung dieser Punkte (durch eine Kleintriangulierung mit einem mittleren Fehler von $m_s = 1,9$ cm) ergab:

mittlerer Fehler der Polygonpunkte: $m_p = 5,2$ cm,
mittlerer Fehler der Einmessungspunkte: $m_e = 7,6$ cm.

Die Fehlerverteilung war:

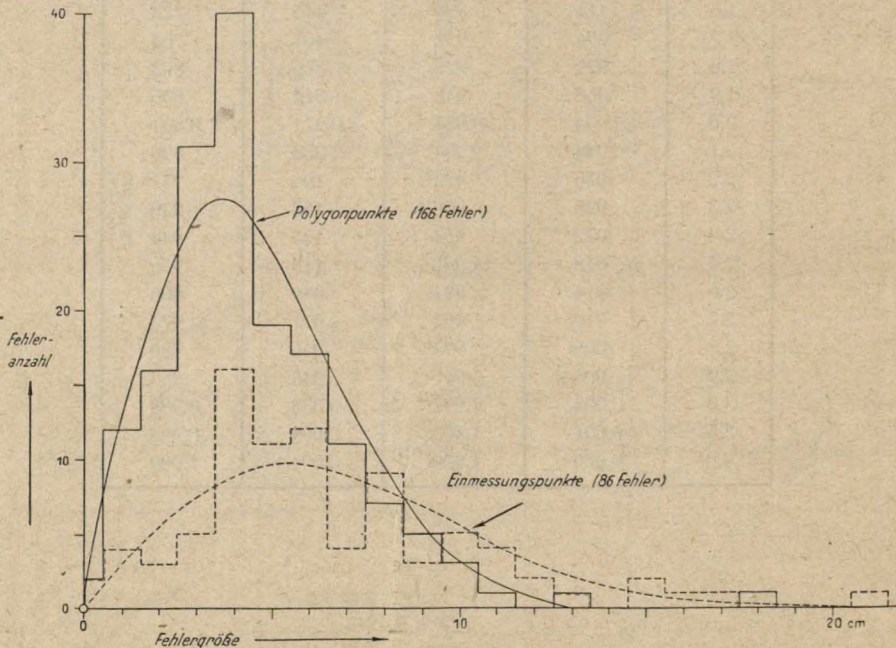


Abb. 1. Fehlerverteilung bei den geodätisch bestimmten Prüfpunkten.

Bei diesen geodätischen Messungen zeigt sich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Istkurve und Sollkurve. Nur die Fehler in Größe des mittleren Koordinatenfehlers überwiegen um ein Geringes. Auch sind einzelne größere Fehler festzustellen. (Vgl. z. T. mit 2. und 3. b, Fehlerverteilung bei Triangulierungen.)

Der Plan mit den aufgetragenen wahren Fehlern (und solche kann man voraussetzen, da die prüfende Kleintriangulierung etwa dreifach so genau ist wie die geprüften Punkte) zeigte örtliche gemeinsame Punktverschiebungen, also die Abhängigkeit einzelner Punktfehler von denen der Nachbarpunkte. Doch waren die örtlichen Verschiebungen über das gesamte Gebiet ungleichmäßig und zufällig verteilt: Die Kurve von Förstner (Abb. 4, S. 22) ist auch hier anwendbar: Durch diese und durch die Angabe des mittleren Lagefehlers ist für den Benutzer der Messung die Genauigkeit genügend gekennzeichnet. Will man auch die Systematik ergründen, so hilft hierfür am besten der Punktplan mit allen als Vektoren aufgetragenen Punktfehlern.

b) *Koordinatenfehler y, Koordinatenfehler x bei der Ausmessung am Stereoplanigraph.*

Die auf Grund der 48 Paßpunkte durchgeführte Koordinatenausmessung von 31 Stereogrammen am Stereoplanigraph wurde an Hand von 12 T. P., 364 P. P. und 618 Kleinpunkten geprüft (zusammen 994 Prüfpunkte). Von den ausgemessenen Punkten lagen etwa zwei Drittel nur in einem Stereogramm, die übrigen in zwei oder mehreren Stereogrammen. Die Fehlerverteilung änderte sich nicht, wenn beide Gruppen gemeinsam erfaßt wurden, auch die verschiedene Genauigkeit der T. P., P. P. und Kleinpunkte wirkte sich nicht merkbar aus. In Abb. 2 und in Abb. 3 werden daher die gesamten y- bzw. x- Fehler dargestellt. Es zeigte sich eine gute Übereinstimmung der Fehlerverteilung mit der Sollkurve.

c) *Punktfehler (Lagefehler).*

Die große Zahl von 994 Lagefehlern ergibt eine verblüffend mit der Sollkurve übereinstimmende Fehlerverteilungskurve.

In Abb. 5 werden die 994 Lagefehler in drei Gruppen getrennt:

- A = 12 Lagefehler bei T. P.,
- B = 364 Lagefehler bei P. P.,
- C = 618 Lagefehler bei Kleinpunkten,

insgesamt = 994 Lagefehler.

d) *Fehler von Punkten in drei Stereogrammen.*

• Um die Auswirkung der Mittelung von Punktwerten aus drei Stereogrammen zu erkennen, sind in Abb. 6 die Koordinatenfehler und die Lagefehler dieser Punkte aufgetragen.

Wir erkennen, daß bei den Koordinatenfehlern das Maximum nicht mehr bei Null liegt und daß auch die Lagefehler um einiges von der Soll-Fehlerverteilung abweichen. Doch läßt die geringe Fehlerzahl ($n = 25$) keine eingehenderen Schlüsse zu.

e) *Streckenfehler.*

Abb. 7 zeigt 82 Streckenfehler. 82 verschieden lange Strecken wurden unmittelbar mittels Zeiss-Boßhardt gemessen. Betrachtet man die Differenzen gegen die aus photogrammetrischen Koordinaten berechneten Strecken als wahre Fehler, so müßte die Fehlerverteilung der Gaußschen Glockenkurve entsprechen, wenn die Fehler gleichgewichtig wären. Die auftretende Abweichung läßt eine Abhängigkeit der Genauigkeit von der Streckenlänge vermuten.

Um die Abhängigkeit von der Streckenlänge nachzuweisen, wurden vier Streckengruppen zusammengefaßt.

	Streckenlänge	mittlerer Fehler	(Fehlerzahl)	
A.	0 Meter bis 10 Meter	$m_s = \pm 4,4$ cm	(6)	} (82)
B.	10 Meter bis 50 Meter	$m_s = \pm 6,2$ cm	(25)	
C.	50 Meter bis 150 Meter	$m_s = \pm 10,8$ cm	(20)	
D.	150 Meter bis 260 Meter	$m_s = \pm 11,9$ cm	(37)	

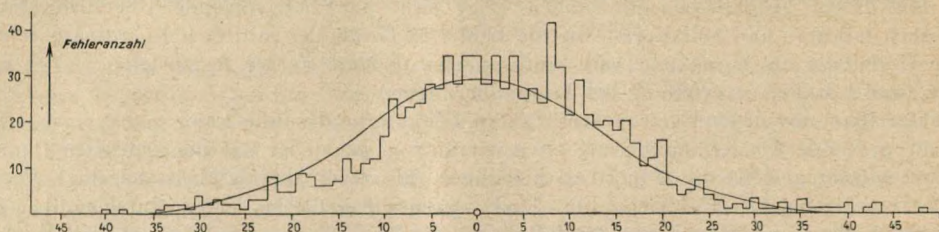
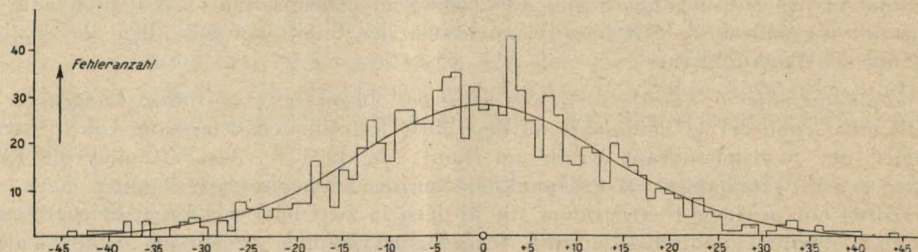
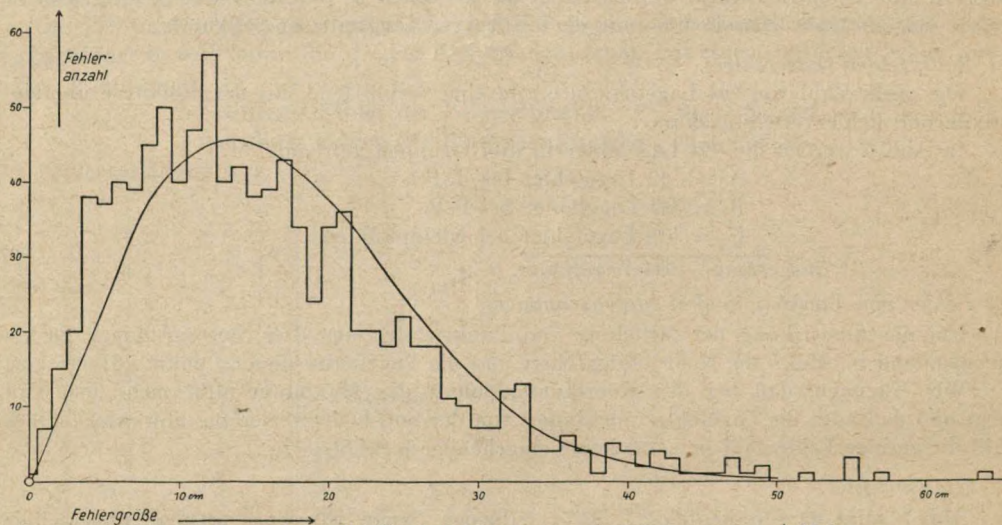
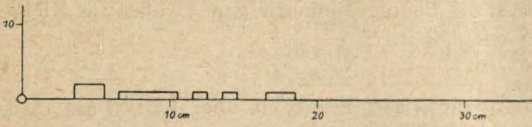
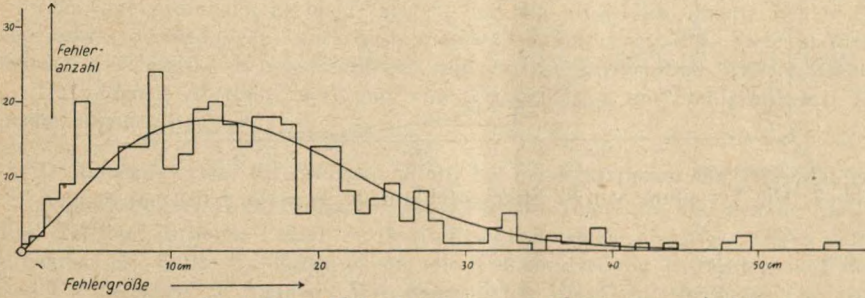
Abb. 2. Verteilung der y -Koordinatenfehler; $m_y = \pm 13,1$ cm.Abb. 3. Verteilung der x -Koordinatenfehler; $m_x = \pm 13,7$ cm.Abb. 4. Verteilung der Punktfehler; $m_p = \pm 18,7$ cm; $m_K = \pm 13,3$ cm.

Abb. 8 zeigt die Abhängigkeit des Streckenfehlers von der Streckenlänge. Diese mittleren Streckenfehler entsprechen der mittleren relativen Genauigkeit.

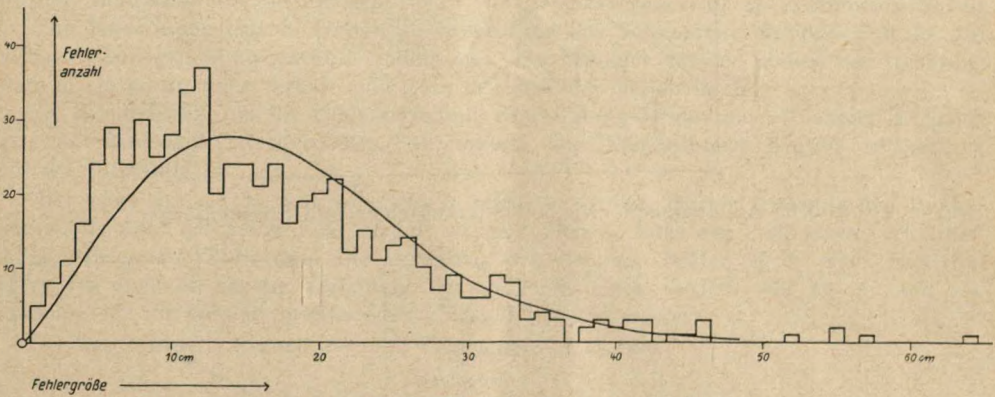
Offen bleibt die Frage, wie sich die Strecken in einem Stereogramm von denen über zwei Stereogramme in der Genauigkeit abheben. Eine Abhängigkeit wird jedenfalls durch Abb. 8 angedeutet. (Die Überdeckung der Stereogramme betrug in Flugrichtung etwa 100 m, quer dazu etwa 200 m.) Hier sei nur noch festgestellt, daß der mittlere Streckenfehler kleiner als der mittlere Punktfehler ist. Das Abnehmen der Genauigkeit mit der Streckenlänge weist eindeutig auf systematische örtliche Punktverschiebungen, ähnlich, wie sie sich bei den geodätischen Punkten unter 2. a) zeigten. Das beweist, daß die oft anzutreffende Meinung von der absoluten Natur photogrammetrischer Fehler



A. 12 Lagefehler bei Trigonometrischen Punkten. (Dient nur zum Vergleich der Summierung $A + B + C$, für eine Eintragung der Fehlerkurve ist die Fehlerzahl zu gering.) $m_K = \pm 8,1$ cm.



B. 364 Lagefehler bei Polygonpunkten. $m_K = \pm 12,6$ cm.



C. 618 Lagefehler bei Kleinpunkten. $m_K = \pm 13,6$ cm.

Abb. 5, A, B und C. Lagefehler der einzelnen Punktgruppen.

Auch hier läßt sich die gleiche gute Übereinstimmung mit der Sollkurve feststellen.

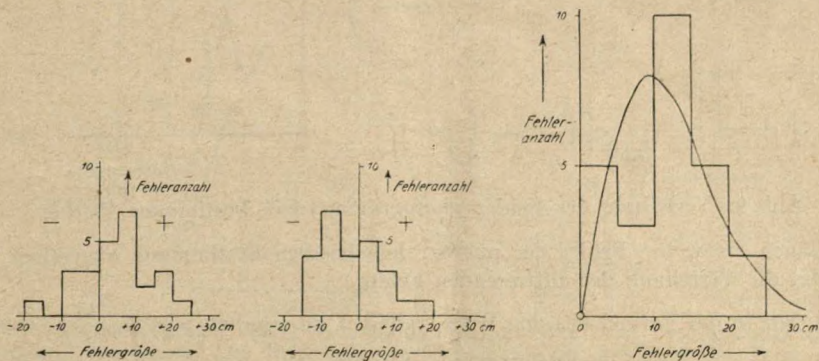


Abb. 6. Verteilung der Koordinatenfehler und der Punktfehler von Punkten, die aus drei Stereogrammen ausgemessen wurden.

irrig ist: Ebenso wie die Geodäsie arbeitet auch die Photogrammetrie vom Großen ins Kleine und zeitigt somit auch ebenso eine relative Genauigkeit.

f) Flächenfehler.

29 Flächen, von denen die kleinste etwas über 17 000, die größte über 100 000 qm maß, wurden aus geodätischen und aus photogrammetrischen Koordinaten gerechnet. Die Diffe-

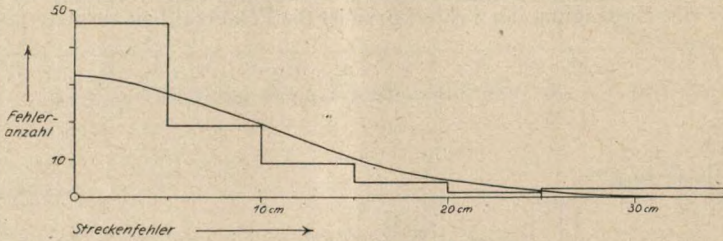


Abb. 7. Die Verteilung von 82 Streckenfehlern ($m_s = m_p = \pm 10,2$ cm).

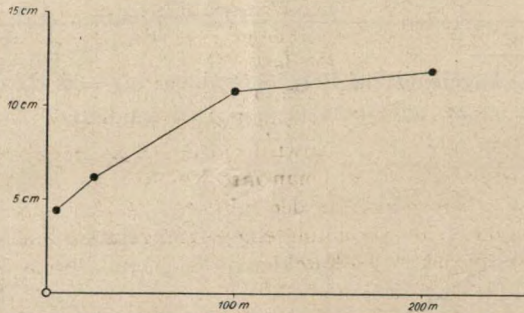


Abb. 8. Abhängigkeit zwischen Streckenfehler und Streckenlänge.

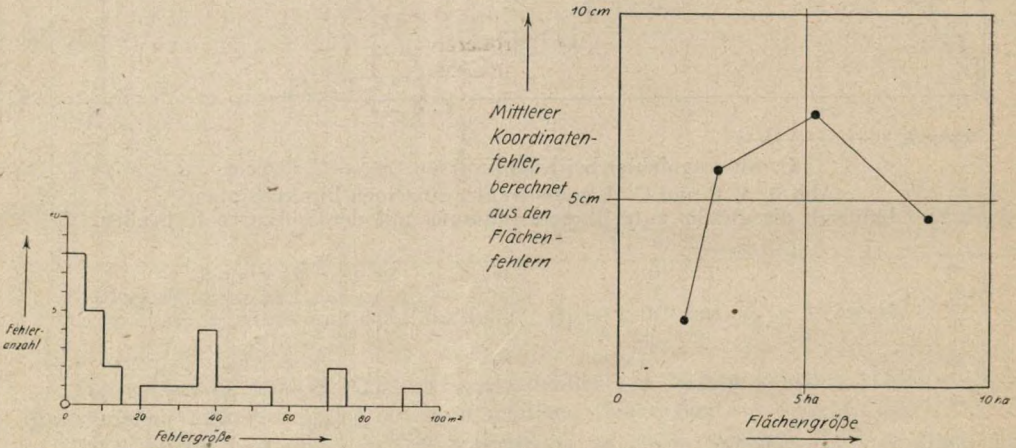


Abb. 9. Verteilung der Fehler photogrammetrisch bestimmter Flächen.

renzen können als wahre Fehler der photogrammetrischen Bestimmung angesehen werden. Abb. 9 zeigt die Verteilung der auftretenden Fehler.

Setzen wir in der Formel (11) den Wert c gleich 1, so erhalten wir, da $\frac{[F]}{n} = 40\,379$:

$$m_f = 402 \cdot m_p = \pm 34,7 \text{ m}^2$$

und $m_p = 8,6$ cm.

Die undeutbare Fehlerverteilung befürwortet eine Aufteilung in einzelne Gruppen:

1. 8 Flächen 1,7— 2,0 ha $m_f = 7 \text{ m}^2$
2. 8 Flächen 2,1— 3,0 ha $m_f = 26 \text{ m}^2$
3. 7 Flächen 4,1— 6,2 ha $m_f = 46 \text{ m}^2$
4. 6 Flächen 6,6—10,2 ha $m_f = 35 \text{ m}^2$.

Auch der aus Flächen errechnete mittlere Punktfehler m_p ist kleiner als der tatsächliche; kleinere Flächen sind genauer. Wieder ein Beweis für die Systematik der photogrammetrischen Punktfehler.

Die Untersuchungen a) bis f) zeigen, daß die tatsächlich erzielte Fehlerverteilung bei Koordinatenausmessungen mit ausreichenden Paßpunkten am Stereoplanigraph, trotz örtlicher Systematik, als Gesamtergebnis mit der theoretischen Soll-Verteilung übereinstimmt.

Im nächsten Abschnitt wird nun eine Triangulation am Planigraph mit Koordinatenausmessungen untersucht.

2. Anwendung auf die Fehlerverteilung bei Triangulationen am Stereoplanigraph.

Während unter 1. die Sollkurve durch kleinere Intervalle und genaue Eintragung nach dem erzielten mittleren Fehler durch praktische Beispiele bestätigt werden sollte, wird im folgenden die Sollkurve dazu dienen, die Fehlerverteilung betrachten und den mittleren Fehler entnehmen zu können. Wir teilen daher die Gesamtfehlerzahl in größere Intervalle ein (möglichst über 10 Intervalle). Dann tragen wir ohne Rücksicht auf die tatsächliche Intervallbreite die Fehlerprozentage von Zentimeterintervall zu Zentimeterintervall ein. Die dadurch entstehende Treppenkurve wird mit den Sollkurven verglichen und die sich am besten anpassende ausgewählt. Indem man ihre Nummer mit der Einheit der Intervallbreite in cm multipliziert, erhält man dann den mittleren Fehler in cm.

Ein Beispiel zeigt uns die Fehlerverteilung einer Triangulation von Aufnahmen 1 : 12 500 am Stereoplanigraph mit spärlichen Paßpunkten. Die Intervallbreite beträgt 10 cm, die Zahl der Intervalle 12.

Hier zeigt sich ein Ausfall von Fehlern mittlerer Größe. Da die triangulierten Punkte gleichmäßig über das ganze Feld verteilt waren, treten in Nähe der Paßpunkte verhältnismäßig viele große Fehler auf. Die Verteilung der kleineren Fehler würde einen mittleren Fehler von etwa 30 cm, die Verteilung der größeren einen solchen von 40 cm und die Schätzung für die Gesamtverteilung etwa $3,5 \cdot 10 = 35 \text{ cm}$ ergeben.

Der aus Zahlen berechnete mittlere Fehler beträgt 34,4 cm.

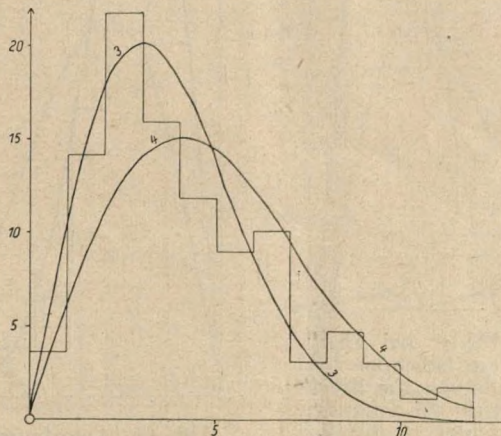


Abb. 10. Fehlerverteilung einer Koordinatetriangulation am Stereoplanigraph mit spärlichen Paßpunkten. Die Intervallbreite beträgt 10 cm, die Zahl der Intervalle 12. (Der errechnete mittlere Koordinatenfehler beträgt 34,4 cm.)

Die triangulierten Punkte sind also nicht gleichgewichtig. Wie wir später sehen werden, tritt eine solche Verteilungskurve mit Ausfall mittelgroßer Fehler fast stets bei Triangulationen mit spärlichen Paßpunkten auf. (Vgl. auch 1. a.)

Umgekehrt kann man aus einer solchen Fehlerverteilung auf eine für gleichgewichtige Messung unzureichende Paßpunktzahl schließen. Für den jedoch, der die Messung verwerten will, sind die geringen Abweichungen von der Soll-Verteilung unbedeutend; für ihn würde im allgemeinen die Angabe des mittleren Fehlers genügen.

3. Fehlerverteilung bei kleinmaßstäbiger Radialtriangulation.

Eine kleinmaßstäbige Radialtriangulation gibt Gelegenheit, auch diese photogrammetrische Lagebestimmung auf ihre Fehlerverteilung zu untersuchen.

140 kleinmaßstäbige Luftbilder wurden zweimal trianguliert:

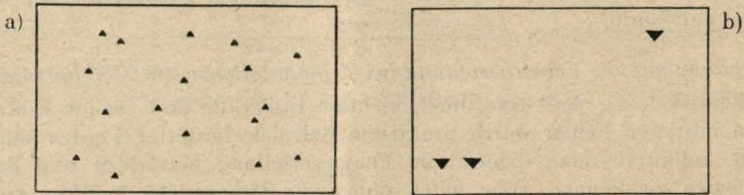


Abb. 11.

a) Über das Gebiet gleichmäßig verteilt lagen 17 Paßpunkte und 138 Prüfpunkte.

b) Bei gleichmäßiger Verteilung der Prüfpunkte waren nur drei Paßpunkte in zwei Ecken des Gebietes verlegt.

Fehlerverteilung:

Besonders Abb. 13 zeigt eine gewisse Abweichung von der Soll-Verteilung: Es überwiegen kleine und große Fehler.

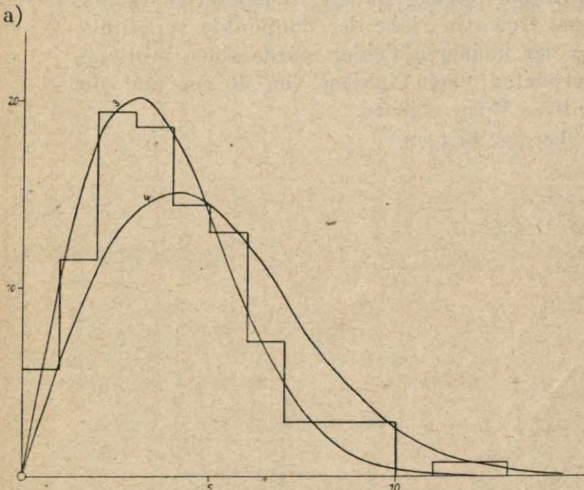


Abb. 12. Verteilung der Fehler bei gleichmäßiger Anordnung und ausreichender Zahl der Paßpunkte; 12 Intervalle von 3 m Breite. Die Fehlerverteilung entspricht der Sollkurve. Der mittlere Koordinatenfehler ergibt sich aus der Auftragung $3\frac{1}{3} \cdot 3 = 10$ m. (Der errechnete mittlere Koordinatenfehler beträgt 10,0 m.)

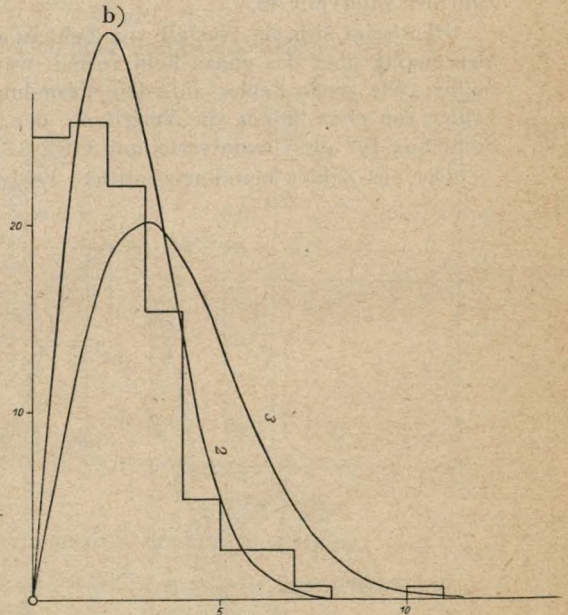


Abb. 13. Anordnung von drei Paßpunkten in zwei Ecken des Gebietes. 11 Intervalle von 10 m Breite. (Der errechnete mittlere Koordinatenfehler beträgt 20,7 m.)

Wir erinnern uns an das Ergebnis aus dem 2. Abschnitt: Bei Triangulationen ist diese Fehlerverteilung offenbar kennzeichnend, da in Paßpunktnähe kleine Fehler, in größerer Entfernung von den Paßpunkten aber größere Fehler überwiegen.

4. Beispiel stärkerer Abweichung von der Soll-Verteilung und daraus gezogene Schlüsse.

An einem Beispiel, bei dem die Fehlerverteilung nicht mehr zufällig ist und bei dem also die Soll-Verteilungskurve eigentlich nicht mehr angewendet werden dürfte, soll ihre allgemeine Verwertbarkeit gestützt werden.

Es wurde daher ein Extremfall herausgegriffen: Punktübertragung von Bild zu Bild (Luftbild-Abzüge) bei verschiedenem Gelände (Feld, Wald, Wattengebiet, Fels, Flachland, Gebirge usw.) und sechs verschiedenen, wenig geübten Beobachtern für Radialtriangulation.

- a) Unmittelbare Übertragung mit Kopiernadel.
- b) Stereoskopische Übertragung mittels Spiegelraumglasses und stereoskopischer Kreismarke, auf Zellophan aufgetragen.

Die Punkte wurden nach drei Gütegruppen beurteilt: 1. gut übertragbar, 2. mittel und 3. schlecht übertragbar. Um einen raschen Überblick zu erhalten, wurden die Fehler jeder der drei Gruppen für a) und b) der Größe nach zusammengestellt. Die als gut und mittel beurteilten Punkte zeigten eine ziemlich gute Übereinstimmung mit der Sollkurve. Die Punkte hatten einen mittleren Punktfehler von

	a)	b)
gut einstellbar:	0,12 mm	0,19 mm,
mittel einstellbar:	0,20 mm	0,28 mm,
schlecht einstellbar:	0,46 mm	0,74 mm.

Die schlecht identifizierbaren Punkte zeigten hingegen folgende Fehlerverteilung:

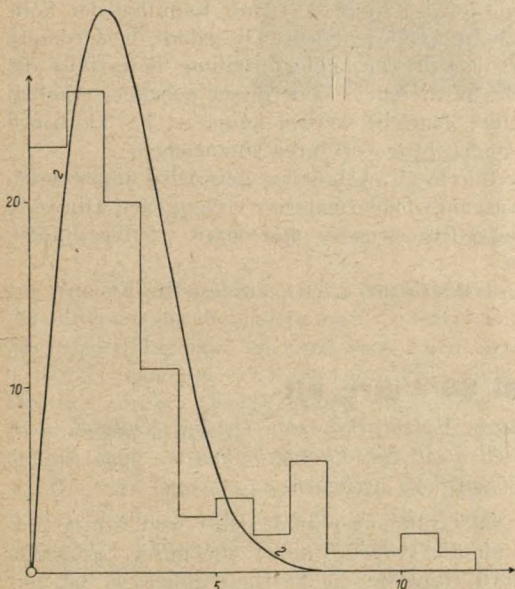


Abb. 14 a. Schlecht übertragbare Punkte bei unmittelbarer Übertragung. Intervallbreite = 0,1 mm.

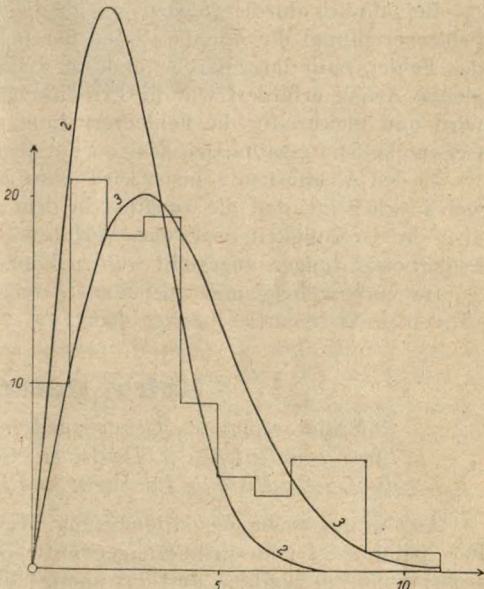


Abb. 14 b. Schlecht übertragbare Punkte bei stereoskopischer Übertragung. Intervallbreite = 0,1 mm.

Aus Abb. 14a und der Sollkurve entnehmen wir:

1. Auch die als schlecht übertragbar beurteilten Punkte sind zum großen Teil für die unmittelbare Punktübertragung zu gebrauchen. (Vergleich mit dem mittleren Fehler der als gut übertragbar beurteilten Punkte.)
2. Die übermäßigen Fehler müssen ausgesucht und solche Punktarten bei künftigen praktischen Arbeiten ausgeschaltet werden.

Aus Abb. 14 b ist festzustellen:

1. Bei der gewählten Art der stereoskopischen Punktübertragung treten instrumentell nur wenige systematische Fehler auf. Die systematischen und großen Fehler müssen also beim stereoskopischen Einstellen entstanden sein.
2. Die Verteilung entspricht nicht einer gleichgewichtigen Fehlerverteilung. Dies läßt auf verschiedene Genauigkeit der Punktgruppen oder der Beobachter schließen. (Eine Sichtung des Beobachtungsmaterials zeigte, daß beides zutrifft.)
3. Da allgemein die Fehler der als schlecht übertragbar beurteilten Punkte bei der stereoskopischen Übertragung größer sind als bei der unmittelbaren, ist die letztere für den gedachten Zweck vorzuziehen, zumal sich für alle Beobachter und Punktgruppen ein gleichmäßig gutes Ergebnis erzielen läßt.

Die Kenntnis der Soll-Verteilung von Punktfehlern hat hier also rasch aus umfangreichem und zunächst unübersichtlichem Beobachtungsmaterial alle wesentlichen Schlüsse ziehen lassen. Es sei noch bemerkt, daß die Radialtriangulation Richtungen verwertet, also nur eine Dimension. Die Ergebnisse sind daher durch $\sqrt{2}$ zu teilen.

5. Zusammenfassung.

Im Abschnitt 1 wird an Hand eines umfangreichen und einwandfreien Beobachtungsmaterials die von Dr.-Ing. Förstner aufgestellte theoretische Fehlerverteilung praktisch bestätigt. Sowohl bei der geodätischen Unterlagenbestimmung als auch bei der photogrammetrischen Auswertung stimmt die tatsächliche mit der theoretischen Fehlerverteilung überraschend gut überein.

Bei ähnlich durchgeführten Messungen würde also nunmehr (nach Kenntnis der Soll-Fehlerverteilung) die Angabe des mittleren Fehlers allein genügen. Da jedoch die Ordnung der Fehler nach ihrer Größe und die Ermittlung der Ist-Fehlerverteilung höchstens die gleiche Arbeit erfordert wie die Errechnung des mittleren Fehlers, dieser nebenbei erhalten wird und gleichzeitig die Fehlerverteilung selbst beurteilt werden kann, ist bei künftigen Genauigkeitsuntersuchungen das von Förstner angegebene Verfahren vorzuziehen.

In den Abschnitten 2. bis 4. wird dieses Verfahren an praktischen Beispielen angewendet, wobei sich zeigt, daß die zunächst in dem Ausgangs-Fehlermaterial verborgenen Hinweise über die Genauigkeit durch das Verfahren aufgedeckt wurden und damit wohlbegründete Fehlerbetrachtungen angestellt werden können.

Im vorausgehenden wurde damit gezeigt, daß sich die a. a. O. aufgestellte Theorie gut mit den praktischen Ergebnissen deckt.

Hofrat Doležal 80 Jahre alt

Anläßlich seines 80. Geburtstages wurde Hofrat Professor Dr.-Ing. Doležal, dem Ehrenpräsidenten der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, vom Führer die Goethe-Medaille für Kunst und Wissenschaft verliehen.

Auf dem Gebiete der Bildmessung liegt die Gründungsperiode nicht weit hinter uns. Fast jeder trägt noch Erinnerungen mit sich an die großen Männer, die unser Fachgebiet eroberten, urbar machten und uns unersetzliche Kulturgüter in die Hand gaben, so daß wir dann unseren weiteren Weg leicht verfolgen konnten. Unter jenen aber, die damals unentwegt ihrer Überzeugung nachgingen und alle Hindernisse, die sich ihnen entgegenstellten, besiegten, steht Hofrat Doležal mit an erster Stelle.

Fast alles, was heute Gemeingut der Bildmessung ist, war damals noch nicht geschaffen. So fehlten noch viele theoretische Grundlagen, geeignete Geräte, Methoden und Erfahrungen. Mit großem Fleiß begann Doležal knapp vor der Jahrhundertwende sein Werk, das vor allem in einer unermüdlichen Lehrtätigkeit, dem Abhalten von Vorträgen und der Veröffentlichung von Abhandlungen über seine Untersuchungen, Neuerungen im Vermessungswesen und in der Bildmessung, Buchbesprechungen, Lebensbeschreibungen, Nachrufen u. v. a. m. bestand. Heute ist die Zahl dieser Werke und Mitteilungen, von denen jede für sich eine Fundgrube für den Forscher darstellt, unüberschaubar groß und dürfte gegen tausend betragen.



Prof. Dr. E. Doležal

Aufnahme Schiestl, Baden b. Wien, Februar 1952

Erwähnt seien ferner seine Vorschläge im Instrumentenbau, die sich auf dem Gebiete der Bildmessung besonders auf Phototheodolite und einen Photo-Transformator bezogen. Als Scheimpflug und von Orel ihre neuen Geräte bauten, standen sie mit ihm in regem Gedankenaustausch. Der ursprüngliche Name „Autostereograph“ geht auf eine Anregung Doležals zurück. Gemäß seinem Ausspruch: „Die terrestrische Photogrammetrie lebt noch“ ist er davon überzeugt, daß sie in Ingenieurkreisen bald wieder die ihr zustehende Bedeutung erlangen wird.

Doležals Lehrtätigkeit begann im Jahre 1889 an der damals neuerrichteten Staatsgewerbeschule in Sarajewo, wo er als Pionier deutscher Kultur nicht nur in mathematisch-technischen Fächern lehrte, sondern, als geprüfter Turnlehrer, auch ein Vorkämpfer für körperliche Ertüchtigung wurde. Später verlegte er seine Tätigkeit nach Leoben und Wien. Auf seine ehemaligen Hörer, unter denen sich auch der Schreiber dieser Zeilen befand, übertrug er die Liebe und Begeisterung zur Bildmeßkunst. Außerdem verband ihn persönliche Freundschaft mit allen bedeutenden Fachleuten des In- und Auslandes, so daß sein Ruf bald weit über die Grenzen seiner Heimat hinausdrang. Viel trugen dazu auch sein edler

Charakter und die stete Hilfsbereitschaft, besonders für die studierende Jugend, bei. Hatte er doch selbst in jungen Jahren das harte Los der mittellosen Studenten kennengelernt, so daß er später während seiner dreißigjährigen Tätigkeit als Vorstand Technischer Unterstützungs-Vereine ein wahrer „Vater der Studenten“ wurde.

Am 7. Mai 1907 wurde auf Prof. Doležals Veranlassung die „Österreichische Gesellschaft für Photogrammetrie“ und im Jahre 1910 die „Internationale Gesellschaft für Photogrammetrie“, die heute über 20 Landesgesellschaften umfaßt, gegründet, und im Jahre 1913 veranstaltete man den „Ersten Internationalen Kongreß für Photogrammetrie“ zu Wien, der damaligen Hauptpflegestätte der Photogrammetrie. Spätere derartige Kongresse fanden in den Jahren 1926 (Berlin), 1930 (Zürich), 1934 (Paris) und 1938 (Rom) statt.

Als Zeitschrift der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie gab Doležal ab 1908 das „Internationale Archiv für Photogrammetrie“ heraus; das an die Internationale Gesellschaft für Photogrammetrie bei deren Gründung überging.

Hofrat Doležals vielseitiges Wirken ist schon häufig gewürdigt worden, so daß es genügt, am Schlusse dieser Zeilen nur jene Veröffentlichungen anzuführen, die eine mehr oder minder erschöpfende Lebensbeschreibung über ihn enthalten. Besonders schön und ausführlich schildert Hofrat Winter in der Festschrift 1932 Doležals Wirken und gibt ein reichhaltiges Verzeichnis seiner Schriften. Da es kaum möglich ist, eine bessere Darstellung zu geben, so seien hier nur ganz kurz die wichtigsten Daten aus seinem Leben angeführt:

2. 3. 1862: geboren in Budwitz in Mähren;

1887—1888: Assistent an der Technischen Hochschule in Wien;

1889—1896: Lehrer an der Staatsgewerbeschule Sarajewo;

1896—1899: Konstrukteur am Lehrstuhl für Geodäsie (Prof. Schell) der Techn. Hochschule Wien;

1899—1905: Professor für darstellende und praktische Geometrie an der Bergakademie Leoben (Steiermark);

1905—1930: Ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule Wien, woselbst er im Jahre 1908 die Würde eines Rektors bekleidete.

Hofrat Doležal war während seiner Hochschultätigkeit auch Mitglied und Präsident der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung sowie Ehrenmitglied und Mitglied vieler offizieller und privater Körperschaften. Eine seiner Hauptaufgaben sah er darin, für die Vereinheitlichung des staatlichen Vermessungswesens einzutreten, das in der ehemaligen österreichisch-ungarischen Monarchie vielfältig zersplittert war.

Ogleich er stets selbstos auf Würden und Ehrungen verzichtete, so war es nur natürlich, daß man ihm hohe staatliche, akademische und sonstige Auszeichnungen zuteil werden ließ. Von denselben seien erwähnt:

1900: Verleihung der Silbernen Medaille durch den Deutschen Photographen-Verein;

1900: Verleihung der Voigtländer- und Goldenen Medaille durch die Österreichische Gesellschaft für Photographie;

1908: Orden der Eisernen Krone III. Klasse;

1911: Ernennung zum Hofrat;

1917: Komturkreuz des Franz-Josef-Ordens;

1917: Ernennung zum Mitglied der Kaiserl. Leopoldinischen deutschen Akademie der Naturforscher in Halle a. d. S.;

1920: Ernennung zum Dr.-Ing. e. h. durch die Technische Hochschule in Aachen;

1926: Ernennung zum Ehrenpräsidenten der Internat. Gesellschaft für Photogrammetrie;

1926: Ernennung zum Dr. techn. h. c. durch die Technische Hochschule in Brünn;

1928: Ernennung zum Dr. mont. h. c. durch die Montanistische Hochschule in Leoben;

1932: Ernennung zum Ehrenmitglied des Deutschen Geometervereins, des Österreichischen Vereins für Vermessungswesen, mehrerer photogrammetrischer Gesellschaften des Auslandes usw.;

1938: Ernennung zum Ehrenpräsidenten der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie.

Die ständigen Überanstrengungen vermochten Doležals Gesundheit nur selten, und dann nur vorübergehend, zu stören. Für ihn bedeutet das hohe Alter keine Bürde, sondern einen immer frischen Born von Erinnerungen. Mit Stolz kann er auf eine große Anzahl ehemaliger Schüler blicken, die, zum Teil selbst schon betagt, seine Lehren nun in die Tat umsetzen.

Seit dem Jahre 1930, also seinem Rücktritt vom akademischen Lehramt, hat er sich nach Baden bei Wien zurückgezogen, wo er nach wie vor mit gleicher Frische alle Fortschritte und Errungenschaften der Fachwissenschaft weiter verfolgt.

So wie es jedesmal ein Erlebnis war, den von Hofrat Doležal mit Feuer und Begeisterung gehaltenen Vorträgen beizuwohnen, so kehrt auch jeder, der — um seine eigenen Worte zu gebrauchen — den „Eremiten von Baden“ aufsucht, neu gestärkt und mit tiefen Eindrücken bereichert zurück. Nicht nur, daß er infolge seines seltenen Gedächtnisses auch die kleinsten Einzelheiten und Erinnerungen an Orts- und Personennamen wieder aufleben läßt, mit kaum geminderter Sehkraft und gestochener Handschrift seinen umfangreichen Brief- und Schriftwechsel erledigt, bezaubert Hofrat Doležal durch seine gütige und vornehme Denkungsart, die stets auf das Wohl der Allgemeinheit bedacht ist. Die Glückwünsche der gesamten Fachwelt begleiteten am 2. März d. J. den Jubilar, der uns in seiner vollen Frische noch lange als leuchtendes Vorbild erhalten bleiben möge! F. M a n e k.

Veröffentlichungen mit Angaben über Hofrat Doležals Lebenslauf.

Torroja: Anales de la Sociedad Española de Estudios Fotogramétricos (1928), S. 5—7.

N. N.: Bull. de la Photogrammétrie (1931), S. 1—7.

Winter: Festschrift Doležal (1932), S. IX—XXXIII.

Winter: Bildmessung und Luftbildwesen (1932), S. 1—11.

N. N.: Badener Zeitung (27. 2. 1937), S. 1—2.

Koerner: Bildmessung und Luftbildwesen (1937), S. 1—2.

Lego: Forschungen und Fortschritte, Berlin (1937), S. 107—108.

N. N.: Rivista del Catasto, Roma (1937), S. 263—264.

N. N.: Lebensbilder in Vermessungs- und technischen Zeitschriften sowie in den Berichten der ausländischen photogrammetrischen Gesellschaften.

Gedenktage

Am 2. Februar 1942 jährte sich zum 100. Male der Tag, an dem Ingenieur Hector de Grousilliers, der Erfinder des stereoskopischen Entfernungsmessers, in Zeitz geboren wurde. Grousilliers, der sich auf den verschiedensten Gebieten als Erfinder betätigte, meldete im Frühjahr 1893 seinen stereoskopischen, mit einer Reihe fester Meßmarken versehenen Entfernungsmesser zum Patent an und trat darauf mit der Firma Carl Zeiss, Jena, in Verbindung. Nachdem diese die Eigentumsrechte an der Erfindung erworben hatte, gelang es insbesondere den Bemühungen von Abbe und Pulfrich, für den Entfernungsmesser eine für die Praxis geeignete Konstruktion zu finden und gleichzeitig eine zweite Art von Raumbildentfernungsmessern zu schaffen, bei der die Reihe fester Meßmarken durch eine gleichfalls räumlich gesehene wandernde Marke ersetzt wurde. Bei der Beschäftigung mit diesen stereoskopischen Entfernungsmessern kam Pulfrich auf den Gedanken, sich dadurch von der verhältnismäßig kurzen Basis des Entfernungsmessers frei zu machen, daß er an die Stelle der von den Objektiven entworfenen und unmittelbar betrachteten beiden Landschaftsbilder Aufnahmen setzte, die mit Meßkammern hergestellt wurden. Diese Meßbilder wurden dann gleichfalls mit Hilfe einer wandernden Marke in dem zu diesem Zwecke geschaffenen Stereokomparator ausgemessen. Dadurch wurde die Grundlage für die inzwischen zu so hoher Blüte gelangte Stereophotogrammetrie gelegt.

Hector de Grousilliers, der in Charlottenburg wohnte, meldete sich am 4. 4. 1896 nach Breslau ab. Da er in die Liste des dortigen Einwohnermeldeamtes nicht eingetragen ist, konnte ich über ihn weiterhin nur in Erfahrung bringen, daß er etwa 1898 oder 1899 gestorben ist. Kinder waren nicht vorhanden. Seine Frau starb, ehe de Grousilliers Charlottenburg verließ.

O. L a c m a n n.

Hochschulnachrichten

Herr Dipl.-Ing. Heinz Otto Müller aus Züllichau erwarb an der Technischen Hochschule Berlin die Würde eines Doktor-Ingenieurs mit der photogrammetrischen Arbeit: „Die Ausmessung der Tiefe übermikroskopischer Objekte“.

Mitteilungen der Gesellschaft

Dr. Walter Bauersfeld, Vorstandsmitglied der Zeiss-Stiftung in Jena, der sich um die Fortschritte des Instrumentenbaues für Geodäsie und Luftbildmessung große Verdienste erworben hat, erhielt anlässlich der Jubiläumstagung der Siemens-Ring-Stiftung den Siemens-Ring „in Würdigung seiner großen, schöpferischen Arbeit und persönlichen Leistung für Wissenschaft und Technik“.

*

Der Senior der deutschen Kinotechnik, Oskar Messter, wurde anlässlich seines 75. Geburtstages am 21. 11. 1941 mit der Goethe-Medaille für Kunst und Wissenschaft ausgezeichnet.

*

Anlässlich seines 80. Geburtstages wurde Hofrat Professor Dr.-Ing. Doležal folgendes Telegramm übersandt:

„Dem hochverdienten Ehrenpräsidenten übersende ich im Namen aller Mitglieder der Deutschen und Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie zur Vollendung des 80. Lebensjahres in Anerkennung der hervorragenden wissenschaftlichen Verdienste auf dem Gebiete der Bildmessung und des Luftbildwesens die herzlichsten Glückwünsche und Grüße. Zugleich gratuliere ich Ihnen zur Verleihung der Goethe-Medaille für Kunst und Wissenschaft. Ich verbinde damit den aufrichtigen Wunsch, daß Sie noch viele Jahre an der weiteren Entwicklung der Luftphotogrammetrie in alter Frische teilnehmen.“

Wilhelm Geßner,

Vorsitzer der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie,
zugleich für die Hansa Luftbild G. m. b. H.

und den Luftbildausschuß der Lilienthalgesellschaft für Luftfahrtforschung.“

*

Dr. Albrecht Richter †.

Am 11. Februar 1942 verstarb unser langjähriges Vereinsmitglied, Marinegeneralarzt a. D. Dr. Albrecht P. F. Richter im 74. Lebensjahr.

Die Beisetzung hat am 14. Februar 1942 in Glindow stattgefunden.

*

Von Heft 2, „Bildmessung und Luftbildwesen“, 1927, das leider vergriffen ist, werden einige Exemplare benötigt. Die Deutsche Gesellschaft für Photogrammetrie e. V., Berlin SW 29, bittet, ihr entbehrliche Hefte zu senden.

*

Durch Maßnahmen der Papierbewirtschaftung war eine Zusammenfassung der Hefte 1 und 2/1942 zu einer Doppelnummer erforderlich. Diese Zusammenfassung dient der textlichen Raumersparnis.

Vereinsnachrichten

Am 10. 3. 1942 wurde die Kassenführung durch die beiden von der Hauptversammlung 1939 ernannten Prüfer, Oberstleutnant (Ing.) Löhnert und Oberregierungsrat Dr.-Ing. Lüscher, einer eingehenden Prüfung unterzogen. Durch Stichproben wurde die Übereinstimmung von Belegen mit den Eintragungen ermittelt und die rechnerische Richtigkeit der sorgfältigen Buchführung festgestellt.



gez. Löhnert.

gez. Lüscher.

Vermessungstechnisches Schrifttum

Buch

Die Grundbuchordnung in ihrer Fassung vom 5. 8. 1935, die zu ihr erlassenen neuen Bestimmungen und das amtliche Verzeichnis der Grundstücke.

Sammlung Wichmann, Band 5, 153 Seiten stark, Format DIN B 5, in Halbleinenband 4.50 RM.

v. Gruber

Optische Streckenmessung und Polygonierung
mit besonderer Berücksichtigung von Zeiss-Instrumenten.

Eine Sammlung von Vorträgen bei der Abteilung Geo der Firma Carl Zeiss.

Sammlung Wichmann, Band 11, 128 S. stark, mit 86 Abb., in starker Pappbrochur 8.— RM.

Hugershoff

Ausgleichsrechnung, Kollektivmaßlehre und Korrelationsrechnung
im Dienste von Technik, Wissenschaft und Wirtschaft.

Sammlung Wichmann, Band 10, 86 Seiten, mit 63 Abbildungen, in Halbleinenband 6.— RM.

Ketter, A.

Technik der Altstadtsanierung

mit Anhang: Neue Wege der Enteignung von Grundeigentum.

Sammlung Wichmann, Band 2, 80 Seiten, Format DIN B 5, mit 9 Abbildungen,
in Preßspandekel gebunden 2.50 RM.

Michael-Slawik

Gesamtinhaltsverzeichnis von 50 Jahrgängen der Allgemeinen
Vermessungs-Nachrichten von 1889 bis 1938.

158 Seiten, Format DIN B 5 in Halbleinenband 9.— RM.

Was heißt Wirtschaftlichkeit im Vermessungswesen?

Sammlung Wichmann, Band 6, 80 Seiten, Format DIN B 5, in Preßspandekel geb. 3.80 RM.

Ranzuch

Umwandlungstafel für Winkelteilungen.

Gleichartig dem Gebrauch von Funktionstafeln kann man, ohne blättern zu müssen,
die alte Gradteilung in die neue und die neue in die alte umwandeln. Mit Erläute-
rung und Beispielen auf festem Karton

1.00 RM.

Stichling

Die preußischen Separationskarten 1817—1881, ihre grenzrechtliche
und grenztechnische Bedeutung.

Sammlung Wichmann, Band 7, 180 Seiten, Format DIN B 5, mit 26 Abbildungen
und Karten in Preßspandekel gebunden 7.50 RM.

Zimmermann

Quadrattafel,

die einzige vollständige Tafel der Quadrate aller Zahlen bis 100 009.

Sammlung Wichmann, Band 8, 208 Seiten stark, Format 195×225 mm, in Halbleinen 7.— RM.



Herbert Wichmann, Verlag, Berlin-Grünwald

80

Fachbücher

Albrecht

Deutsches Schrifttum über Bildmessung und Luftbildwesen.
Herausgegeben von der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie e. V.
160 Seiten, Format DIN B 5, mit etwa 250 Angaben in Halbleinenband 7.50 RM.

Finsterwalder, R.

Die Bedeutung der neuen photogrammetrischen Methoden.
28 Seiten, Format DIN B 5, mit 9 Abbildungen 2.— RM.

Gebirgskartographie, Alpenvereinskartographie und die ihr dienenden Methoden.
Sammlung Wichmann, Band 3, 88 Seiten stark, Format DIN B 5, mit 21 Karten und Abbildungen, in Preßspandekel gebunden 4.— RM.

Photogrammetrie.
Eine Einführung in das Gesamtgebiet der Photogrammetrie, der Erd- und besonders der Luftbildmessung, einschließlich der Entzerrung.
237 Seiten, mit 103 Abbildungen und 17 Tabellen, Oktavformat gebunden 14.— RM.

Finsterwalder, S.

Photogrammetrische Aufsätze, Festschrift zum 75. Geburtstage.
Dreizehn der wichtigsten und heute noch gültigen, grundlegenden Arbeiten des Gelehrten
208 Seiten, Format DIN B 5, mit 25 Abbildungen in Halbleinenband 6.— RM.

Lüscher

Kartieren nach Luftbildern.
97 Seiten, Oktavformat, mit 113 Abbildungen und Zeichnungen im Text und auf Tafeln gebunden 6.— RM.

Nicolau-Bärlad

Die Photogrammetrie im Forstwesen,
dargestellt an der Waldwirtschaft der Karpathen- und Balkanländer.
Sammlung Wichmann, Band 9, 112 Seiten, mit 31 Abbildungen. Halbleinen 7.50 RM.

Rube

Photogrammetrie.
Eine kurze, lehrbuchartige Darstellung.
112 Seiten, Format DIN A 5, 83 Abbildungen kartoniert 3.60 RM.

Schwidefsky

Einführung in die Luft- und Erdbildmessung.
157 Seiten, mit 73 Abbildungen, zwei schwarzen und zwei farbigen Tafeln im Text, einer schwarzen Tafel, einer farbigen Brille und zwei Stereobildern im Anhang.
Oktavformat gebunden 8.— RM.

Herbert Wichmann, Berlin-Grünwald