[illegible] Panu Profesorowi
K. Twardowskiemu z wyra[illegible]
czci [illegible]

MATHESIS POLSKA

CZASOPISMO POŚWIĘCONE
NAUKOM ŚCISŁYM I ICH METODOLOGJI

WYDAWANE PRZEZ
STANISŁAWA WARHAFTMANA

PRZY WSPÓŁUDZIALE
EDWARDA STENZA
i KAZIMIERZA ZARANKIEWICZA

Nr 1 — 2. Styczeń — luty 1930 TOM V. ROK 5.

Odbitka z Tomu V. (1930) Nr 1 — 2.

MARJAN AUERBACH

Arytmetyka grecka u szczytu rozwoju

(Diophantos)

REDAKCJA I ADMINISTRACJA: WARSZAWA, MARSZAŁKOWSKA 81
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĄŻNICY ATLAS T. N. S. W.

Odbitka z „Mathesis Polskiej". Tom V Nr 1 — 2.

ARYTMETYKA GRECKA U SZCZYTU ROZWOJU

(DIOPHANTOS)

MARJAN AUERBACH (Lwów).

Arytmetyka grecka u szczytu rozwoju.
(Diophantos).

Twórcami matematyki greckiej zachodnio-europejskiej są Grecy. Nie rozstrzygając kwestji, czy i ile Grecy nauczyli się w tej dziedzinie od Egipcjan i Babilończyków, należy z całą jasnością stwierdzić, że jest zasadnicza różnica między matematyką grecką z jednej a babilońsko-egipską z drugiej strony. Matematyka babilońsko-egipska ma na oku cele czysto praktyczne, jest geodezją (mierzy place, pola i t. p.) lub logistyką (uczy rachować, więc dodawać i t. p.). Z geodezji geometrję, a z logistyki arytmetykę stworzyli Grecy, obdarzeni zmysłem spekulatywnym, zamiłowanym w badaniu i dociekaniu prawdy bez względu na korzyści i potrzeby praktyczne. Oni pierwsi mają zainteresowanie dla stosunków, jakie zachodzą między wielkościami (bryłami i ich granicami, t. zn. powierzchniami, linjami), i między ilościami t. zn. liczbami. Problem t. zw. delijski, czyli podwojenie sześcianu, ciągnący się jak nić Arjadny przez labirynt greckiej matematyki poprzez cały szereg wieków, jest jednym z bardzo licznych na to przykładów. W skrócie ten problem brzmi: znaleźć sześcian dwa razy większy od danego sześcianu. T. zn. mam dany sześcian o krawędzi a, więc $V = a^3$. Znaleźć sześcian $V_1 = 2V = 2a^3$. Jak wielka będzie krawędź tego sześcianu? $2a^3 = x^3$, $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$.

Otóż cały problem streszcza się w znalezieniu $\sqrt[3]{2}$, gdyż ten dwa razy większy sześcian ma krawędź większą od krawędzi pierwszego sześcianu tyle razy, ile wynosi $\sqrt[3]{2}$. Rzecz jasna, że rozwiązanie tego pytania nie ma wartości praktycznej. W praktyce — gdyby to było komuś potrzebne — wystarczy znać wartość $\sqrt[3]{2}$ w przybliżeniu, a Grecy umieli obliczać z dużą dokładnością $\sqrt[3]{2}$. Ale Grekom chodziło o wynalezienie rozwiązania matematycznie dokładnego, mówmy ściślej, geometrycznie dokładnego tak, jak np. dokładnie umieli wyznaczyć $\sqrt{2}$, choć i to jest liczba arytmetycznie niewymierna. Umysł teoretyczny Greków w całej pełni objawia się przy problemach matematycznych tego rodzaju.

Ojcem matematyki greckiej jest Pitagoras. On rzucił podwaliny pod geometrję i arytmetykę. I rzecz dziwna. Podczas gdy geometrja osiągnęła swój zenit, doszła do szczytu rozwoju w epoce aleksandryjskiej, w wieku III (Eukleides i Archimedes), więc w epoce, w której nauka grecka święci swe triumfy, to najwybitniejszy arytmetyk, Diophantos, żyje w III w. po Chrystusie, w czasie upadku nauk i wogóle ducha greckiego. Arytmetyka grecka nie wspięła się na te wyżyny, które osiągnęła geometrja. Powodów możnaby znaleźć dwa. Tak dalece i tak silnie zaciążyła metoda geometryczna na umysłach greckich matematyków, że wszelkie operacje arytmetyczne oglądali przez szkła geometrji, skutkiem czego arytmetyka, zaprzągnieta w rydwan geometrji, nie mogła się swobodnie rozwijać. Zdaje mi się, że była jeszcze inna przyczyna, więcej może zewnętrzna, ale mimo to działała nader hamująco. Mam na myśli system znakowania. Pisanie liczb osobnemi znakami a nie całemi słowami więc np. nie słowem całem δεκα, ale osobnym znakiem ι, jest w Grecji dość późne. Kiedy okazało się mało praktycznem pisanie liczb całemi słowami, próbowano oznaczać liczby literami alfabetu i tak kolejno α znaczyło 1, β = 2, i t. d., aż do ω = 24, gdyż ω było 24 literą alfabetu. Tak są znaczone pieśni Iljady czy Odysei. Ten system znakowania nie nadawał się do matematyki wcale, bo nie wychodził poza liczbę 24. Najstarszy system znakowania, który się nadawał jako tako dla arytmetyki, był tak zwany system Herodjana, nie dla tego, że Herodjan, żyjący w II wieku po Chrystusie, go wynalazł, lecz dla tego, że on go opisał. Herodjan opowiada, że systemem tym, który wnet przedstawię, posługiwał się Solon w swych ustawach, że można go było widzieć na starych stelach. System ten podobny jest nieco do systemu rzymskiego. Jota = oczywiście duże, więc jakby jedna kreska, znaczy jeden, Π = 5 (od πεντε), Δ = 10 (δεκα), Η = 100 (εκατον); *H* — wiadomo — było pierwotnie znakiem przydechu *h*; Χ = 1000 (χιλιοι), Μ = (μυριοι). Liczby te pisano obok siebie od lewej ku prawej stronie coraz mniejsze, więc 115 = ΗΔΙΠ. Znak można było powtórzyć 4 razy, więc 400 = ΗΗΗΗ; jeśli był wielokrotnością liczby 5, więc 50, 500, 5.000, 50.000, umieszczano ten znak w literze Π, więc 50 = $\overline{|\Delta|}$, 500 = $\overline{|\mathrm{H}|}$, 5.000 = $\overline{|\mathrm{X}|}$, 50.000 = $\overline{|\mathrm{M}|}$ i t. d.

Młodszy od systemu Herodjana jest system drugi, którego używano od wieku IV przed narodz. Chrystusa, a który operuje literami alfabetu w następujący sposób: litery od α — ϑ ozaczały jednostki od 1 — 9, więc ε oznaczało cyfrę 5, ζ cyfrę 7, a 6 oznaczano literą *bau*. Litery od ι — κοππα oznaczały dziesiątki, litery od ρ — *sampi* (ϡ) oznaczały setki. W ten sposób 27 literami alfabetu — wziąwszy do pomocy 3 litery *bau, koppa* i *sampi*, ułożyli Grecy system pisania liczb, mówiąc językiem dzisiejszym, trzycyfrowych. Tysiące oznaczali literami początkowemi alfabetu temi samemi, co jednostki, tylko dodawali kreskę po lewej stronie z dołu, więc ͵α = 1000, ͵γ = 3000 i t. d. Dziesiątki tysięcy oznaczali literą Μυ (μυριαζ), przy której pisano α, β, γ na oznaczenie ilości tych mirjad, więc δ Μυ = 40000 i t. d. Liczby pisano tak, że litery odpowiednie stawiano obok siebie od lewej ku prawej stronie coraz mniejsze. Aby odróżnić te litery od reszty tekstu, dawano nad niemi u góry kreskę, więc 78 = $\overline{ο η}$. W manuskryptach Diofantosa często brak znaku na mirjady, tylko kropka oddziela je od reszty liczby, więc 272144 = κζ.βρμδ itd.

Z dwu systemów, które naszkicowałem, łatwo spostrzec, że system Herodjana jest o wiele przejrzystszy od systemu literalnego. Przeciwnie, nadzwyczajnie trzeba wytężyć myśl a szczególnie pamięć, by widząc $\overline{φκη}$ + υλβ, widzieć, że to daje ,αρξ, bo tak się pisze systemem literalnym liczby 728, 432 i 1160.

System, zwany systemem Herodjana, nie przeżył — zdaje się — epoki Peryklesa. Dlaczego zmieniono system ten na inny, literalny, nie wiemy od starożytnych, żadne wzmianki starożytne powodu tej zmiany nie podają. Zdaje się, że system Herodjana za dużo zajmował miejsca przy pisaniu. Ale wpadli na Scyllę, chcąc uniknąć Charybdy. System literalny wymaga takiego natężenia uwagi, takiego napięcia pamięci, że prawdopodobnie był dość silnym hamulcem w rozwoju arytmetyki.

W szkole pitagorejskiej do roku 400 przed nar. Chrystusa arytmetyka była traktowana pod kątem widzenia geometrycznym. Między innemi widać to np. z nazw na liczby pierwsze i złożone. Liczby pierwsze nazywają się nie αριθμοι πρωτοι lecz ευθυγραμμοι, złożone nie — συνθετοι lecz επιπεδοι. Skąd te nazwy? Oto liczba nprz. 12 — liczba złożona z dwu czynników, n. p. 3 i 4, wyobraża boki prostokąta, 3 i 4, którego powierzchnia (επιπεδον) wynosi 12 jednostek kwadratowych. Stąd nazwa επιπεδοι, niby liczby powierzchniowe; a liczba 7, liczba pierwsza, nie da się na takie czynniki rozłożyć. Więc nie może być symbolem powierzchni, lecz tylko linji prostej. Stąd nazwa ευθυγραμμορ (= liczba prostolinijna). Jeszcze Eukleides tak traktuje w swoich *Elementa* arytmetykę.

U pierwszego Herona w dziele Μετρικα występują w zadaniach geometrycznych wymiary podane w liczbach. Heron prawdopodobnie nie jest pierwszym, który zajmował się geometrją rachującą, który operował w geometrji liczbami, tak, jak Eukleides nie jest pierwszym, który uprawiał geometrję konstrukcyjną. Ale ani przy Heronie ani przy Eukleidesie nie mamy dzieł poprzedników.

Szkoła nowopitagorejska, która w II wieku po nar. Chrystusa starała się podjąć przerwaną w IV wieku nić filozoficzną, wydała też kilku arytmetyków. Wśród nich najważniejszy jest *Nikomachos z Gerazy* (około roku 100 po nar. Chrystusa). Nikomachos napisał podręcznik arytmetyki Εισαγωγη αριθμητικη *Introductio in arithmeticam* w 2 księgach. Dzieło Nikomacha gra w historji arytmetyki tę rolę, którą Elementa Eukleidesa w historji geometrji konstrukcyjnej, a Herona dzieła w historji geometrji rachunkowej. Wszyscy trzej tworzą podręczniki, w których uporządkowali wyniki poprzedników, dodając swoje własne badania.

Dopiero w III wieku po nar. Chrystusa zjawia się genjalny matematyk, który wchłonąwszy w siebie i przetworzywszy prace i wyniki poprzedników, tworzy dzieło, przewyższające wszystko, co poprzednicy stworzyli, Mężem tym jest *Diophantos z Aleksandrji.* Dawniej zwano go Diophantes jak πολιτηζ, gdyż znano tylko gen. Διοφαντου, który da się urobić od Διοφαντηζ. Theon z Aleksandrji w komentarzu do Almagestu Ptolemeusza cytuje nazwisko arytmetyka w nom. Διοφαντοζ. A że chodzi o naszego uczonego, a nie o jakiegoś innego Diofantosa, wynika stąd, że cytuje w rzeczonem miejscu zdanie z Diofantosa, które w arytmetyce Diofantosa jeszcze jest zachowane. Dziś zwą go powszechnie *Diofantos.* Dzieło jego nosi tytuł Αριϑμητικα. Według wiadomości podanej przez Diofantosa we wstępie, ma dzieło 13 ksiąg. Zachowane mss. mają tylko 6 ksiąg. Spór o stosunek między tem, co tradycja rękopiśmienna zachowała, a tem, jak wyglądała całość, jeszcze nie jest rozstrzygnięty.

Treścią arytmetyki są równania i to dwa typy równań: 1) oznaczone, 2) nieoznaczone. O ile chodzi o równania oznaczone, jest Diofantos — że tak powiem — twórcą podręcznika, to znaczy zebrał i uporządkował wiadomości już znane. Stworzył pierwszy organiczny podręcznik równań algebraicznych z odłamków, których było zresztą mało, o ile wolno wnosić z wiadomości, które do nas doszły. Na polu równań nieoznaczonych jest Diofantos pionierem: tworzy pierwszy ten system zagadnień i pierwszy je rozwiązuje.

Ze wstępu wynika, że dzieło jest jakby *Praecepta ad Dionysium amicum,* podręcznikiem dla Dionyzjusza, który chce się uczyć arytmetyki. We wstępie wykłada Diofantos rzeczy zasadnicze, objaśniając terminy, potrzebne w arytmetyce, i podaje ich znaki. Więc kwadrat czyli druga potęga, x^2, nazywa sią δυναμιζ (znak Δυ), sześcian x^3 nazywa się κυβοζ (Κυ), x^4 — δυναμοδυναμιζ, x^5 δυναμοκυβοζ, x^6 κυβοκυβοζ. On operuje temi liczbami jako nieznanemi: Δυ, Κυ, Δδυ, Δκυ, Κκυ. Niewiadomą x znaczy znakiem Σ i nazywa ją αριϑμοζ, liczbą in abstracto; jednostkę znaczy literą $\overset{0}{\mathrm{M}}$. Wprowadza też te niewiadome jako $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ ... i nazywa je αριϑμοστον, δυναμοστον i t. d. Potem idzie tabela mnożeń potęg jako liczb całych i ułamków, więc: $x^2 \cdot x^3 = x^5$, $x_2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x}$ i t. d., i t. d.

Diofantos rozróżnia liczby *mające być dodane* i *mające być odjęte* (przypomina to nieco liczby dodatnie i ujemne). Dodawanie nazywa υπαρξιζ, odejmowanie λειψιζ. Dodajniki pisze obok siebie bez żadnego znaku, natomiast na odejmowanie ma osobny znak ⩚ jakby λ z „i" wśrodku: skrót słowa λειψιζ. Liczbami zwanemi „mające być odjęte" operuje, mnożąc je i wygłaszając zasadę: *liczba mająca być odjęta pomnożona przez liczbę mającą być odjętą daje liczbę mającą być dodaną; liczba zaś mająca być odjęta przez liczbę mającą być dodaną daje liczbę mającą być odjętą.* Przypomina to nasze mnożenie liczb ujemnych. Rzecz dziwna, że jakkolwiek zna mnożenie liczb ujemnych, nigdy w wyniku takich liczb nie zna. Duże trudności sprawia czytanie tekstu arytmetycznego Diofantosa, bo nie ma tych skrótów i symboli, co dzisiaj, choć przyznać trzeba, że na tej drodze daleko arytmetyka grecka zaszła.

Np. $10x + 30 = 11x + 15$ pisze: ΣΣοι ι$\overset{o}{\mu}$λ ισοι εισιν ΣΣοιζ $\overline{\iota\alpha}$ μονασι $\overline{\iota\varepsilon}$.

Zasady rozwiązywania równań ma takie, jak dziś. Oto jego słowa: *Jeśli się natrafi przy zadaniu na równanie, ale tak zbudowane, że współczynniki po obu stronach są nierówne, odejmuje się jednorodzajowe od jednorodzajowych, aż jeden człon równy będzie jednemu członowi. Jeśli jednak po jednej lub obu stronach znajdują się liczby ujemne, należy je po obu stronach dodać, aż po obu stronach będą same liczby dodatnie. Potem musi się znowu odjąć po obu stronach równorodzajowe od równorodzajowych, aż po obu stronach będzie po jednym członie.* Innemi słowy sprowadza on równanie przez dodawanie i odejmowanie do formy $ax^m = bx^n$, tak jak dzisiaj to jeszcze czynimy.

Umie też rozwiązywać równania drugiego stopnia typu $ax^2 + bx = c$. I ma cały szereg zadań z tej dziedziny. Teoretycznego wykładu brak. Uczeni przypuszczają, że wykład ten był między księgą pierwszą a drugą.

Rozwiązuje je on inną niż dziś metodą, ale opartą o tę samą zasadę: uzupełnia mianowicie do kwadratu, np.

$$ax^2 + bx = c$$

$$a^2x^2 + abx = ac$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Naturalnie, że Diofantos nie zna dwu pierwiastków równania, gdyż często byłoby jedno ujemne.

Weźmy dla przykładu jedno z zadań łatwiejszych, aby zobaczyć, że choć nie przeprowadza teoretycznych rozważań, widać z metody rozwiązywania, że analizą, której właśnie czytelnikowi nie pokazuje, wykrył pewne prawa, których każe przestrzegać przy rozwiązywaniu zadania. Biorę z 1 księgi zadanie 6, więc jedno z początkowych: *Daną liczbę rozłożyć na dwa dodajniki tak, aby dana część pierwszego dodajnika była większa od danej części drugiego dodajnika o daną liczbę:*

$$x + y = a$$

$$\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = b$$

Po rozwiązaniu równania wypadnie $x = \frac{m(a + bn)}{m + n}$, $y = \frac{n(a - bm)}{m + n}$

Diofantos mówi po podaniu tematu i przed zaczęciem wykonania: *Liczba dana (b) musi być mniejsza od liczby, która powstanie, jeśli się z liczby początkowo danej (a) weźmie tę daną część, w której jest nadwyżka.*

Co to znaczy? Zobaczymy to, wziąwszy przypadek konkretny, mianowicie: *Rozłożyć liczbę* 100 *tak, aby* $\frac{1}{4}$ *pierwszej była większa od* $\frac{1}{6}$ *drugiej o* 20. Według powyższego musi więc być: $20 < \frac{100}{4}$, co w tym wypadku jest oczywiście prawdą.

Cóż to jednać znaczy, że m u s i być mniejsza? Spróbujmy, co się stanie, jeśli wstawimy liczby, które tego warunku nie spełniają. Zmieńmy w przytoczonym przykładzie konkretnym $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{6}$ odpowiednio nprz. na $\frac{1}{10}$ i $\frac{1}{15}$. Obecnie już więc nie będzie $20 < \frac{100}{10}$. Mamy teraz:

$$x + y = 100, \quad \frac{x}{10} - \frac{y}{15} = 20; \quad \text{zatem } x = 160, \; y = -60.$$

Cóż widzimy? Wynik jest ten, że jeden dodajnik jest ujemny. A Diofantos nie znał, czy nie uznawał rozwiązań w liczbach ujemnych. Otóż jego zastrzeżenie zakreśla granice, w których wyniki są jeszcze dodatnie.

Jest rzeczą ciekawą, jak on wpadł na to, że tylko wtedy są rozwiązania dodatnie, kiedy spełnia się warunek wyrażony w zdaniu „Liczba dana musi być mniejsza od liczby, która powstanie, jeśli się z liczby początkowo danej weźmie tę daną część, w której jest nadwyżka". W naszem rozwiązaniu ogólnem było $y = \frac{n(a - bm)}{m + n}$. Co nam ten wzór mówi? y będzie dodatnie, jeśli $a - bm$ będzie dodatnie, gdyż ani n ani $m + n$ nie mogą sprawić, aby wynik był ujemny. Kiedy $a - bm$ będzie dodatnie? Jeśli

$a > bm$, czyli $\frac{a}{m} > b$. Nierówność $b < \frac{a}{m}$ mówi to samo, co Diofantos w swem zastrzeżeniu. Takich zastrzeżeń, umieszczonych tuż po postawieniu zagadnienia a przed samem rozwiązywaniem, jest dużo, nieraz bardzo trudnych i zawiłych. Wybrałem tu nadzwyczaj łatwe, co wynika choćby już z tego, że jest w 6 zadaniu ks. I, więc całkiem na początku, gdzie są zadania same łatwe. Ale co z nich wynika? Wynika, zdaniem mojem, jasno, że Diofantos kryje się z metodą, z analizą, która prowadzi do rozwiązania ogólnego, lecz woli olśniewać genjalnością w różnych sposobach rozwiązywania, zastosowanych do każdego poszczególnego wypadku, choć znał — jak widać — metody ogólne.

Lwia część zadań w arytmetyce Diofantosa przypada na równania nieoznaczone. Na tem polu jest Diofantos pionjerem. Rzecz jasna, że także w równaniach nieoznaczonych niema rozwiązań liczbami ujemnemi lub niewymiernemi, tylko dodatniemi, to znaczy większemi od zera liczbami całkowitemi lub ułamkowemi.

Rzecz dziwna, że trudno dopatrzeć się w tej partji zadań jakiejś metody czy kilku metod. Jeden z najwybitniejszych historyków matematyki greckiej, Nesselmann, w dziele *Die Algebra der Griechen* na stronicy 355 powiada: *przedstawić metody Diofantosa — znaczyłoby całą jego książkę odpisać.* W tych słowach Nesselmanna mieści się przyznanie, że Diofantos nie miał metod, z których każda rozwiązywałaby jakąś grupę zadań. Mimo że trudno metody jego podpatrzeć, sądzę, że Diofantos metody ogólne miał, do których doszedł drogą analizy, jak to starałem się pokazać przy równaniach oznaczonych, ale drogę tę przed czytelnikiem zakrył. Nie pokazał, jaką drogą doszedł do rozwiązywania zagadnień pewnego typu.

Tem więcej olśniewa mistrzostwo jego w rozwiązywaniu równań nieoznaczonych. Mistrzostwo to okazuje się przedewszystkiem w wyborze wyrażenia, które on oznacza jako niewiadomą x (αοριστον). Tak zgrabnie, tak po mistrzowsku wyszukuje tę niewiadomą, że rozwiązanie samo staje się nad wyraz łatwe. Może wyjaśnią to przykłady. Weźmy przykład prosty: zadanie 19 z ks. II, które tak wygląda: $\frac{x^2 - y^2}{y^2 - z^2} = 3$. *(Znaleść trzy kwadraty takie, aby różnica największego i średniego była do różnicy średniego i najmniejszego w danym stosunku. Niechaj różnica będzie trzykrotnością różnicy).*

Wstawiwszy $x = z + u + v$, $y = z + v$, otrzymamy $z = \frac{1}{2} \cdot \frac{3v^2 - (u^2 + 2uv)}{u - 3v}$.

Więc z będzie wtedy dodatnie, jeśli $u^2 + 2uv < 3v^2$ a $3v < u$.

Takiej analizy Diofantos nie przeprowadza. Ale z budowy jego rozwiązania przeziera, — jakby przez gęstą mgłę — że taką lub podobną analizę przeprowadził, czy na papierze, czy też raczej, co jest prawdopodobniejsze w pamięci. Taki dar widzenia całego naraz zadania musiał mieć, skoro tak trafnie dobiera niewiadome, jak to zaraz zobaczymy. Najmniejszą niewiadomą nazywa x^2, środkową nazywa x^2+2x+1 (kwadrat dwumianu $x+1$); więc największa będzie — mówi Diofantos: x^2+8x+4. Skąd to?. Oto największa mniej średnia $=3$ (średnia mniej najmniejsza). Nazwijmy największą X_1^2; będziemy mieli: $X_1^2 - x^2 - 2x - 1 = 3(x^2+2x+1-x^2)$, stąd $X_1^2 = x^2+8x+4$. Najmniejsza jest kwadratem: x^2; średnia jest kwadratem: x^2+2x+1; ale i największa x^2+8x+4 ma być kwadratem. Otóż tworzę — mówi Diofantos — kwadrat z $x+3$ Dlaczego z $x+3$, a nie z $x+4$, $x+5$, lub $x+9$?. Bo — powiada Diofantos — *Formo quadratum ab x — ut habeam x^2 — plus unitatibus ita sumptis, ut aliarum specierum in quadrato reperiendarum, nempe x et unitatum, coefficientes non superent ambo eos, qui sunt in $8x+4$, sed alter superetur, alter superet. Esto* 3.

To twierdzenie jest tak ciemne, że trudno domyśleć się, co ono ma znaczyć. Można je dopiero zrozumieć po przeprowadzeniu analizy, którą przedtem zrobiłem. Mianowicie jest to warunek potrzebny, aby rozwiązanie dało wyniki dodatnie. Jeśli przyrównamy x^2+8x+4 do $(x+3)^2$, otrzymamy $x=2^1/_2$, niewiadomą najmniejszą, nasze z. Środkowa $x+1$, nasze $y=3^1/_2$; największa $=5^1/_2$.

Z tego też przykładu widać dalszą cechę metody Diofantosa, szuka on jednego konkretnego rozwiązania, choć rozwiązań jest więcej, bo zadanie jest równaniem nieoznaczonem. O tem Diofantos aż nadto dobrze wie, bo nawet tak się wyraża: *Weźmy* — mówi — nprz. *za x liczbę* 3. Możnaby, rozumie się, wziąć inną liczbę. Ta cecha jednak zostaje w związku z brakiem analizy u Diofantosa.

Często ma się wrażenie, czytając zagadnienia Diofantosa, że Diofantos stawia i rozwiązuje zagadki, właśnie przez to, że nie przeprowadza metodycznie analizy równania, choć, jak już mówiłem, on tę analizę znał. Tu i owdzie tylko, acz bardzo rzadko, poda jakąś ogólną zasadę, która jest mu pomocną przy jego rozwiązaniach n. p. w *V*10 udowadnia, że liczba typu $4n+3$ nie może być sumą kwadratów.

Diofantos jest matematykiem, ściślej mówiąc, arytmetykiem wielkim, wybitnym. Nie powstydziłby go się żaden naród, żadna epoka. Smutne tylko to, że stoi samotny, że nie miał w Grecji kontynuatorów, że nie miał uczniów, którzyby arytmetykę rozszerzali i pogłębiali.