Stefan Kempisty.

Zasada indukcji matematycznej a postulat Dedekinda.

Osobne odbicie z t. VI czasopisma matematyczno-fizycznego „Wektor".

Drukarnia Naukowa. — Warszawa, Rynek Starego Miasta 11.

Geprüft und auch für die Ausfuhr freigegeben Presseverwaltung, Warschau den 12/III 1918.

Stefan Kempisty.

Zasada indukcji matematycznej a postulat Dedekinda.

Zasada indukcji matematycznej stosuje się nie tylko do ciągu liczb naturalnych, lecz do każdego porządku typu ω *).

W jednej ze swych prac **) O Veblen wyznacza tego rodzaju uporządkowanie zapomocą następujących dziewięciu postulatów:

A. Ogólne postulaty uporządkowania.

1. Zbiór $\{P\}$ zawiera conajmniej dwa elementy.

2. Jeśli P_1 i P_2 są różnymi elementami zbioru $\{P\}$, wówczas albo $P_1 < P_2$, albo $P_2 < P_1$.

3. Jeśli $P_1 < P_2$, wówczas P_1 różni się od P_2.

4. Jeśli $P_1 < P_2$ oraz $P_2 < P_3$, to $P_1 < P_3$.

B. Postulat domkniętości Dedekinda.

Jeśli $\{P\}$ składa się całkowicie z dwuch nieskończonych podmnogości $[P']$ i $[P'']$ takich, że $P' < P''$, wówczas istnieje w $[P']$ taki element P_0', że $P' < P_0'$ o ile $P' \neq P_0'$, lub też w $[P'']$ element P_0'' taki że $P_0'' < P''$ o ile $P'' \neq P_0''$.

Postulaty dobrego uporządkowania i szczególne.

W_1. Zbiór $\{P\}$ zawiera element P_0 taki, że dla żadnego elementu P' nie mamy $P' < P_0$.

---

*) t. j. podobnego do porządku liczb naturalnych według wielkości.

**) O. Veblen. Definition in Terms of Order alone of the Linear Continuum and Well-Ordered Sets. *Trans. Amer. Mat. Soc.* 1905.

P_0 nazywa się elementem pierwszym.

W_2. Jeśli P_1 jest takim elementem zbioru $\{P\}$, dla którego istnieją elementy P' spełniające związek $P_1 < P'$, wówczas $\{P\}$ zawiera element P_2 taki, że $P_1 < P_2$, przyczym dla żadnego elementu P'' nie zachodzą równocześnie stosunki

$$P_1 < P'', \quad P'' < P_2.$$

P_2 nazywa się elementem bezpośrednio następującym po P_1, zaś P_1—elementem bezpośrednio poprzedzającym P_2.

W_3. Każdy element zbioru $\{P\}$ prócz P_0 posiada element bezpośrednio poprzedzający.

W_ω. Jeśli P jest elementem zbioru $\{P\}$, wówczas $\{P\}$ zawiera element P' taki, że $P < P'$.

Postulaty powyższe powinny wystarczyć do uzasadnienia indukcji zupełnej, jeśli mają charakteryzować porządek typu ω. Chcę właśnie dowieść, że wystarczają w zupełności, przyczym opierać się będą przeważnie na postulacie Dedekinda.

Dla większej przejrzystości zmienię jednak oznaczenia, zachowując tylko znak $<$ dla stosunku pierwotnego „poprzedza“.

W nowej postaci postulaty Veblena przedstawiać się będą jak następuje:

I. Istnieją przynajmniej dwa przedmioty a, b takie, że $a < b$.

Niech w dalszym ciągu $a, b, c, \ldots n, \ldots x, y, z$ oznaczają elementy zakresu stosunku „poprzedza“ *).

II. Jeśli $a \neq b$, wówczas $a < b$, lub $b < a$.

III. Jeśli $a < b$, to $a \neq b$.

IV. Jeśli $a < b$ oraz $b < a$, to $a < c$.

V. Jeżeli podzielimy zakres na dwie części, oznaczając przez x element należący do pierwszej, zaś przez y — należący do drugiej, w taki sposób, że $x < y$ wówczas istnieje w części pierwszej element a taki, że $x < a$ o ile $x \neq a$, lub też w części drugiej element b taki, że $b < y$ o ile $y \neq b$.

VI. Istnieje element a_0 tego rodzaju, że dla żadnego x nie zachodzi $x < a_0$.

Określenie. Element a_0 nazywamy pierwszym.

VII. Istnieje element b taki, że $a < b$, przyczym dla żadnego x nie mamy równocześnie

$$a < x, \quad x < b.$$

---

*) a jest elementem zakresu stosunku „poprzedza“ o ile istnieje takie c, że ~~albo~~ $a < c$, albo $c < a$.

Określenie. Element b nazywamy bezpośrednio następującym po a, zaś a — bezpośrednio poprzedzającym b.

VIII. Istnieje element bezpośrednio poprzedzający element a, o ile $a \neq a_0$.

IX. Dla każdego a istnieje b takie, że $a < b$.

Zasadę indukcji matematycznej, o której dowód chodzi, wypowiemy w sposób następujący:

Jeżeli jakieś zdanie nieokreślone staje się prawdziwym dla a_0 oraz dla każdego b o ile jest prawdziwym dla bezpośrednio poprzedzającego elementu a, wówczas staje się prawdziwym zdaniem dla każdego n.

Dowód polegać będzie na t. zw. sprowadzeniu do niedorzeczności. Zaprzeczmy zasadzie indukcji.

Istnieją więc zdania nieokreślone, które stają się prawdziwymi dla a_0 i dla każdego b o ile są prawdziwymi dla bezpośrednio poprzedzającego a, a jednak nie są spełniane przez pewne n.

Weźmy pod uwagę jedno z takich zdań oraz jeden z takich elementów n i przeprowadźmy z ich pomocą podział zakresu stosunku „poprzedza" na dwie klasy. Niech do klasy pierwszej (niższej) należą albo takie x, dla których nasze zdanie staje się prawdziwym, przyczym $x < n$, albo też takie x, które spełniają związek $x < z$, gdzie z jest elementem poprzedzającym n $(z < n)$ i zamieniającym nasze zdanie nieokreślone w zdanie prawdziwe.

Do klasy drugiej (wyższej) zaliczymy pozostałe elementy zakresu.

Należy przedewszystkim dowieść, że ten podział jest przekrojem, czyli że:

1) żadna z klas nie jest pustą;

2) jeśli x należy do klasy niższej a y do klasy wyższej, wówczas $x < y$.

Otóż do klasy pierwszej należy w każdym razie element a_0 (VI), do drugiej zaś każde y następujące po n, gdyż nie spełnia ono w myśl postulatu II, III, IV warunku

$$y < n.$$

Prócz elementów powyższych możemy, opierając się na drugim założeniu zasady indukcji, wyznaczyć inne elementy należące do jednej z klas w szczególności zaś elementy poprzedzające n, a należące do klasy wyższej.

Na zasadzie tychże postulatów mamy, że o ile nie zachodzi $x < y$, wówczas $y < x$, bowiem x i y nie są sobie równe, jako należące do przeciwnie określonych zbiorów. Jednak ostatni stosunek jest niemożliwy nawet wtedy, gdy

$$y < n .$$

Jeśliby bowiem zdanie nasze było prawdziwym dla y, wówczas y należałoby do klasy pierwszej. Gdyby zaś było dla y nieprawdziwym, istniałby element następujący po y i zamieniający owe zdanie w zdanie prawdziwe, mianowicie element x. Zatym y należałoby również do klasy pierwszej. Nie jest to jednak możliwe wobec założenia, że y należy do klasy drugiej.

Przekonaliśmy się więc, że nasz podział jest przekrojem. Ponieważ założenia postulatu V są spełnione, możemy wygłosić wniosek: istnieje element a ostatni w klasie niższej, lub element b pierwszy w klasie wyższej.

Otóż, jeśli istnieje element a ostatni w klasie niższej, a więc taki, że

$$x < a$$

o ile

$$x \neq a ,$$

zdanie nasze staje się dla niego prawdziwym. Istotnie, gdyby bowiem stawało się fałszywym, musiałby istnieć element poprzedzający bezpośrednio a i nie spełniający naszego zdania. Lecz tego rodzaju element nie może należeć do klasy niższej, gdyż ani a, ani y nie spełniają obranego zdania.

Zatym zdanie nasze zachodzi dla elementu ostatniego a.

Jednak na zasadzie jednego ze zdań składających się na zaprzeczenie zasady indukcji mamy, że zdanie obrane staje się prawdziwym dla b bezpośrednio następującego po a o ile jest prawdziwe dla a. Tymczasem dla takiego elementu b nasze zdanie prawdziwym być nie może, gdyż wtedy b musiałoby, wobec $b < n$, należeć do klasy pierwszej, a więc mielibyśmy

$$b < a ,$$

co jest sprzeczne z określeniem elementu bezpośrednio następującego.

Widzimy zatym, że jedna z alternatyw wniosku postulatu Dedekinda (V) jest niemożliwą. Dowiedziemy teraz, że i pozostała część wniosku nie jest również możliwą, t. j. że niema elementu pierwszego w klasie wyższej.

Jeżeli b jest takim elementem, wówczas dla każdego y klasy drugiej mamy

$$b < y$$

o ile

$$b \neq y .$$

Ponieważ obrane przez nas zdanie staje się nieprawdziwym dla n na zasadzie ostatniego z założeń zestawionych w zaprzeczeniu zasady indukcji, więc nieprawdziwym będzie również dla m bezpośrednio poprzedzającego element n. Mamy zatym w klasie wyższej prócz n przynajmniej jeden jeszcze element m.

Element pierwszy b klasy wyższej jest albo równy m, albo też

$$b < m,$$

w każdym zaś razie mamy na zasadzie postulatu IV

$$b < n .$$

Przeto nasze zdanie nieokreślone nie może zachodzić dla b, gdyż wtedy b należałoby do klasy niższej. Gdyby jednak owo zdanie nie było prawdziwym dla b, wówczas na zasadzie wspomnianego założenia nie byłoby również prawdziwym dla bezpośrednio poprzedzającego elementu a. Lecz a należy do klasy pierwszej, gdyż dla elementów klasy drugiej mamy albo

$$b < y ,$$

albo też

$$b = y .$$

Jeżeli więc zdanie nasze nie zachodzi dla a, to powinien istnieć element z, dla któregoby zachodziło, przyczym

$$a < z , \quad z < n .$$

Otóż element z jako następujący po a należy do klasy wyższej, jest to bowiem albo element b, albo też element po nim następujący. Tymczasem z określenia mamy

$$z < n ,$$

przyczym zdanie nieokreślone staje się prawdziwym dla z. A więc element z należy do klasy niższej. Doszliśmy w ten sposób do sprzeczności, gdyż jeden element nie może należeć do dwuch wyłączających się klas.

Warszawa w listopadzie 1917.

Résumé.

Le principe d'induction mathématique et le postulat de Dedekind.

Le raisonnement par récurrence est applicable à toute suite du type ω. Je le demontre en sortant des postulats de M. Veblen [A 1—4, B, W_1, W_2, W_3, W_ω] *). En rejetant le principe d'induction je définis une coupure dont la classe inférieure ne contient pas d'element dernier et dont la classe superieure ne renferme pas d'element premier, ce qui est contraire au postulat de Dedekind (B).

*) O. Veblen: Trans. Amer. Math. Soc., 1905.

DRUKARNIA
NAUKOWA
w WARSZAWIE