SCHWAB-LESSER
MATHEMATISCHES UNTERRICHTSWERK
FÜR HÖHERE LEHRANSTALTEN
BAND II.

LEHR- UND ÜBUNGSBUCH DER GEOMETRIE I. TEIL

AUSGABE A FÜR REALANSTALTEN

SCHWAB-LESSER, GEOMETRIE I. TEIL, AUSGABE A opis: 47035

669

J. Wlichitz

M 3.60 + ct a 14/VIII

MATHEMATISCHES UNTERRICHTSWERK

ZUM GEBRAUCHE AN

HÖHEREN LEHRANSTALTEN

IM SINNE DER MERANER LEHRPLÄNE BEARBEITET

VON

PROF. KARL SCHWAB,
OBERLEHRER
AN DER KLINGER-OBERREAL-
SCHULE ZU FRANKFURT A. M.,

UND

PROF. OSKAR LESSER,
OBERLEHRER
AN DER KLINGER-OBERREAL-
SCHULE ZU FRANKFURT A. M.

II. BAND:

GEOMETRIE.

I. TEIL, AUSGABE A:

FÜR DIE MITTLEREN KLASSEN DER REALANSTALTEN.

LEIPZIG 1912.
VERLAG VON G. FREYTAG,
G. m. b. H.

LEHR- UND ÜBUNGSBUCH

DER

GEOMETRIE

VON PROF. KARL SCHWAB,

OBERLEHRER AN DER KLINGER-OBERREALSCHULE ZU FRANKFURT A. M.

ERSTER TEIL.

AUSGABE A:

FÜR DIE MITTLEREN KLASSEN DER REALANSTALTEN.

MIT 257 TEILS FARBIGEN FIGUREN IM TEXT.

ZWEITE AUFLAGE.

PREIS, GEBUNDEN, 3 ℳ 60 ₰

LEIPZIG 1912.
VERLAG VON G. FREYTAG,
G. m. b. H.

Vorwort.

Bei der Abfassung des vorliegenden Lehr- und Übungsbuches der Geometrie mußte mein Bestreben darauf gerichtet sein, den Forderungen zu genügen, die die Reform des mathematischen Unterrichtes an ein neues Lehrbuch zu stellen berechtigt ist, vor allem also die vielfachen funktionalen Beziehungen, die uns im geometrischen Unterricht entgegentreten, überall hervorzuheben, um dadurch auch von dieser Seite her den Funktionsbegriff zu entwickeln und dem Schüler vertraut zu machen.

Wenngleich sich hier der algebraische Unterricht naturgemäß viel fruchtbarer erweist, so findet sich doch auch in der Geometrie allenthalben mannigfache Gelegenheit, das gegenseitige Abhängigkeitsverhältnis der in Betracht kommenden Größen nach Maß und Zahl zur Erkenntnis zu bringen. Diese Gelegenheit ist um so wertvoller, als sich hierbei die Variation einer veränderlichen Größe zwanglos, als etwas Selbstverständliches ergibt und die Änderung der abhängigen Größe sich, zumeist unter Verzicht auf jede Rechnung, anschaulich und natürlich begründen läßt. Hierzu gibt die Betrachtung jeder entwickelten Beweisfigur, aber besonders die Ausführung und Determination von Konstruktionsaufgaben Anlaß, weswegen man gerade bezüglich der letzteren nicht verfehlen sollte, die gegebene Gelegenheit gründlich auszunutzen. Wo immer im Lehrgange die Möglichkeit solcher Betrachtungen vorhanden war, ist darauf hingewiesen worden. Dagegen mußte natürlich im Übungsstoff auf solche Hinweise im allgemeinen verzichtet werden; es wird vorausgesetzt, daß bei der Behandlung der Aufgaben die Abhängigkeitsuntersuchung genau so weit zu ihrem Rechte kommt, wie sie im Aufbau des Lehrgebäudes angeregt worden ist. Der geometrische Unterricht wird dadurch eine wesentliche Belebung erfahren und sich für den Schüler leichter faßlich gestalten, ohne an seinem Bildungswert irgend welche Einbuße zu erleiden.

Der Umfang und die Auswahl des Lehrstoffs entsprechen den amtlichen Lehrplänen von 1901 für die Realanstalten. Von der Behandlung des propädeutischen geometrischen Unterrichtes, wie er den Oberrealschulen für Quinta vorgeschrieben ist, habe ich geglaubt Abstand nehmen zu müssen. Dieser Unterricht kann in so mannigfacher Weise gegeben werden, daß es nicht möglich gewesen wäre, eine allseitige befriedigende Darstellung zu geben. Es muß hier dem Lehrer völlige Freiheit gewahrt bleiben.

Bei der Beweisführung ist mit dem herkömmlichen Beweisschema gebrochen worden; statt dessen werden die Gedankenprozesse entwickelt, durch die man von gegebenen Erkenntnissen mittels logischer Schluß-folgerungen zu neuen Wahrheiten gelangt. Eingehend wird bei den Beweisen der Begriff der Symmetrie, sowohl der achsialen als auch der zentrischen, benutzt. Das Kapitel über das Parallelogramm hat dadurch eine von der üblichen abweichende Darstellung erhalten.

Zur Erhöhung der Anschaulichkeit und der Übersichtlichkeit sind bei den Zeichnungen vielfach verschiedene Farben verwendet worden; auch wurden ganze Flächenteile farbig angelegt.

Besondere Sorgfalt wurde auf die Ausgestaltung des Übungsstoffs verwandt. Selbstverständlich hat der Lehrer aus der großen Fülle eine entsprechende Auswahl zu treffen. Eine Anzahl der Aufgaben, so in den Abschnitten über Flächenteilungen und über Schrägprojektionen von Flächen und Körpern, sind mit „L“ bezeichnet; diese können im Linearzeichenunterricht erledigt werden.

Um dem Schüler die praktische Verwendbarkeit seiner mathematischen Kenntnisse zu zeigen, haben der Meßtisch und der Storchschnabel in der Planimetrie, die Strecken- und Winkelmessung in der Trigonometrie Berücksichtigung gefunden. Auch ist bei dem Übungsstoff, namentlich der Trigonometrie, hierauf Rücksicht genommen worden.

Zur Belebung des Interesses am Unterricht und zur Erhöhung des Verständnisses der kulturellen Bedeutung der Mathematik sind zahlreiche geschichtliche Anmerkungen, die besonders dem trefflichen Werke von Tropfke entnommen sind, beigefügt worden. Kein Lehrer, der einmal das von den Schülern für solche geschichtliche Belehrungen bekundete Interesse kennen gelernt hat, wird es unterlassen, diese Anmerkungen zum Ausgangspunkte weiterer Mitteilungen zu machen.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Direktor, Herrn Dr. Bode, für die Durchsicht der Urschrift und seine Verbesserungsvorschläge meinen verbindlichsten Dank auch an dieser Stelle auszusprechen. Ebenso danke ich meinem Kollegen vom hiesigen Wöhlerrealgymnasium, Herrn Oberlehrer Dr. A. Gerlach, für die Überlassung der Aufgaben 28—31 im Kapitel XXIV. Endlich sage ich Dank Herrn Dr. R. Muencke in Berlin für die Überlassung des Klischees des von ihm zu beziehenden Ohmannschen Feldwinkelmessers.

Frankfurt a. M., im Januar 1909.

K. Schwab.

Inhaltsübersicht.

I. Planimetrie.

II. Trigonometrie.

III. Stereometrie.

I. Planimetrie.

Kapitel I.

Die geometrischen Grundgebilde.

a) Von jeder Stelle des uns umgebenden Raumes, sei es auf freiem Felde, sei es in dem Klassenzimmer, können wir uns nach allen Seiten (Richtungen) hinbewegen. In einem begrenzten Raume, z. B. in dem Klassenzimmer bevorzugen wir von diesen Richtungen drei derselben und nennen sie die Ausdehnungen (Dimensionen). Man bezeichnet diese als Länge, Breite und Höhe.

Ähnlich wie bei dem Klassenzimmer verfahren wir mit anderen begrenzten Raumteilen, mit dem Federkasten, mit einer Kiste, mit einem Ziegelstein, mit einem Würfel. Auch bei ihnen unterscheiden wir drei Ausdehnungen oder Dimensionen.

Aufgabe. Es sollen an einem Würfel, Federkasten, Schwammkasten mit dem Zentimetermaßstab diese Ausdehnungen gemessen werden.

b) Das Klassenzimmer wird von dem übrigen Schulgebäude durch vier Wände, den Fußboden und die Decke abgegrenzt. Ebenso wird der Würfel, der Federkasten, der Ziegelstein von dem umgebenden Raume abgegrenzt. Diese Begrenzungsteile nennen wir Flächen und jeden durch Flächen begrenzten Raumteil nennen wir einen Körper.

An jeder der Flächen unterscheiden wir nur zwei Ausdehnungen, die Länge und Breite.

Zeige an den genannten Körpern die Begrenzungsflächen!

c) Die Grenzflächen dieser Raumteile stoßen in Linien (Kanten) aneinander, bei denen wir nur eine Ausdehnung wahrnehmen, die Länge.

Zeige an dem Würfel, im Klassenzimmer diese Kanten!

d) Je zwei Linien stoßen in einem Punkte (Ecke) zusammen. Der Punkt hat gar keine Ausdehnung. Er bezeichnet nur eine Stelle im Raume.

e) Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß Punkte, Linien und Flächen nicht für sich bestehen, sondern nur an Körpern. In unserer Vorstellung aber können wir diese Gebilde von den Körpern loslösen und diese gedachten Punkte, Linien und Flächen für sich allein betrachten.

Auch im gewöhnlichen Leben sprechen wir von Punkten auf der Erdoberfläche, von Linien (Straßen), die Punkte (Orte) verbinden, von Flächen (Grundstücken) und denken dabei nicht an die Verbindung dieser Gebilde mit der Erdkugel.

Kapitel II.

Punkt, Linie, Fläche.

a) Wir können einen Körper, z. B. einen Würfel in eine andere Stellung zu dem Klassenschranke übergehen lassen und sagen dann, der Würfel hat eine Bewegung ausgeführt. Bei diesem Vorgange bewegen sich auch die an dem Würfel sich befindlichen Grenzgebilde, Flächen, Linien (Kanten), Punkte (Ecken) mit ihm. Wir können daher auch die Bewegung dieser Gebilde für sich allein betrachten.

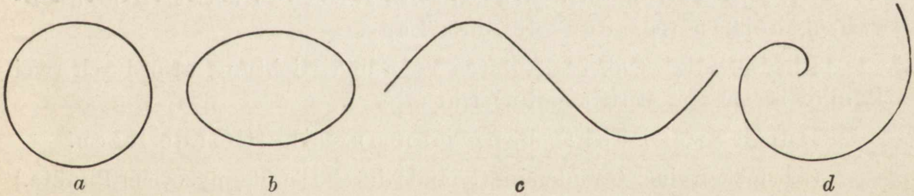
b) Der Punkt hat nur ein Merkmal, seine Lage. Ein Punkt wird mit einem großen Buchstaben (A, B, C . . .) bezeichnet. Ein Punkt, der sich bewegt, kann nur seine Lage ändern. Bewegt sich ein Punkt, so ist sein Weg eine Linie.

Beispiele. Der Weg der Bleistift- oder Federspitze auf dem Papier, der der Kreide auf der Tafel, der Weg der Sternschnuppe, der Spitze einer einen Gegenstand durchdringenden Nadel, der Weg eines als Punkt aufgefaßten Spaziergängers auf der als Linie betrachteten Landstraße.

Bei Beginn seiner Bewegung gibt es für den Punkt eine unbegrenzte Zahl von Bewegungen, er kann sich nach allen Richtungen bewegen. Behält der Punkt während der Bewegung die zuerst gewählte Richtung bei, so ist der beschriebene Weg eine gerade Linie.

Ändert aber der sich bewegende Punkt fortgesetzt seine Bewegungsrichtung, so ist die von ihm beschriebene Linie eine krumme Linie. Die Beschaffenheit der krummen Linien hängt ab von der Art und Weise wie die Richtung des bewegten Punktes sich in jedem Augenblicke ändert.

Fig. 1.

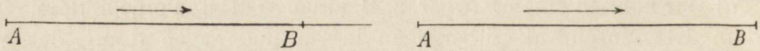


Beispiele für krumme Linien: Die Kreislinie (Fig. 1 *a*), die Ellipse (Fig. 1 *b*), die Wellenlinie (Fig. 1 *c*), die Spirallinie (Fig. 1 *d*).

c) Bewegt sich ein Punkt von einer gegebenen Anfangslage A aus unbegrenzt in derselben Richtung weiter, so beschreibt er eine einerseits unbegrenzte gerade Linie, die man einen Strahl nennt; bewegt er sich nur ein Stück in derselben Richtung weiter, so beschreibt er eine beiderseits begrenzte Linie, eine Strecke (Fig. 2), die durch die Anfangs- und Endlage des Punktes vollständig begrenzt ist und eine bestimmte Länge besitzt.

Ein Strahl ist durch die Ausgangslage des bewegten Punktes und durch die Richtung seiner Bewegung vollkommen bestimmt. Der Strahl hat also zwei Merkmale, die Lage seines Ausgangspunktes und seine Richtung.

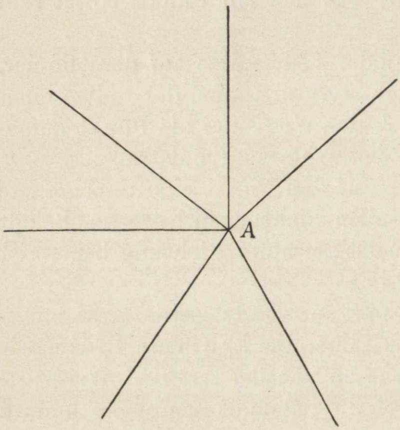
Fig. 2.



Erklärung. *Strahlen mit demselben Ausgangspunkt werden als Strahlen mit gleicher Lage bezeichnet.*

Die Gesamtheit aller Strahlen von *gleicher Lage*, aber *verschiedener Richtung* bildet einen *Strahlenbüschel* (Fig. 3).

Fig. 3.



Durch die Richtung, die der Punkt A bei seiner geradlinigen Bewegung im Beginne der Bewegung einschlägt, sind alle Punkte seiner Bahn mitbestimmt. Jeder andere Punkt B (Fig. 4) auf dem Strahle reicht mit A aus, um die Richtung des Strahles zu bestimmen. Durch zwei Punkte des Strahles ist also seine Lage und Richtung bestimmt.

Wir können uns die Bewegung des Punktes A aber auch über A hinaus nach der andern Seite fortgesetzt denken und erhalten dann eine beiderseits unbegrenzte gerade Linie, die wir kurzweg eine *Gerade* nennen wollen.

Alle Geraden, die durch denselben Punkt hindurchgehen, heißen Geraden gleicher Lage.

Eine Gerade ist ebenfalls durch Lage und Richtung, also durch zwei Punkte bestimmt. Mithin ergibt sich:

Durch zwei Punkte kann man nur eine Gerade legen.

(Abstecken einer Geraden im Gelände durch Benutzung zweier Punkte.)

Eine Gerade wird durch zwei an beliebige ihrer Punkte gesetzte große Buchstaben (AB) oder durch einen kleinen Buchstaben bezeichnet. Bei dem Strahl setzt man den einen Buchstaben an den Endpunkt, bei der Strecke die Buchstaben an beide Endpunkte. (Fig. 4, Strecke AB.)

Fig. 4.

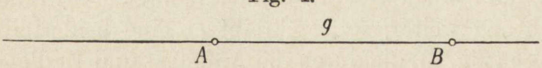
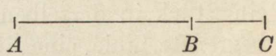


Fig. 5.



d) Bewegt sich ein Punkt A auf einer Geraden zuerst nach B und dann weiter nach C (Fig. 5), so hat er im ganzen die Strecke AC zurückgelegt. Da die Strecke AC ebenso lang ist als die beiden Strecken AB und BC zusammengenommen, so ist die Strecke AC die Summe der Strecken AB und BC. Wir schreiben daher:

$$AB + BC = AC.$$

Wie addiert man also zwei Strecken?

Da ferner $AC - BC = AB$, so ist AB der Unterschied der Strecken AC und BC.

Wie subtrahiert man danach eine Strecke von einer anderen?

Ist $BC = AC$, so fallen bei der Subtraktion dieser Strecken auch die zweiten Endpunkte zusammen.

Kann man umgekehrt zwei Strecken so aufeinander legen, daß ihre beiden Endpunkte zusammenfallen, so sind die Strecken einander gleich.

e) Bewegt sich eine unbegrenzte gerade oder krumme Linie, so beschreibt dieselbe eine **Fläche.** Bewegt sich erstere so, daß bei der Bewegung jeder ihrer Punkte eine gerade Linie beschreibt, so nennen wir eine solche Fläche eine ebene Fläche oder eine Ebene. Alle nicht ebenen Flächen heißen krumme Flächen.

Beispiele für ebene Flächen sind: Die Wände des Zimmers, die Wände einer Kiste, die Flächen eines Würfels; für krumme Flächen: Die Kugelfläche, die Begrenzungsflächen eines Hutes, eines Weinglases, einer Kaffeetasse, eines Eies.

Bei den genannten ebenen Flächen können wir nach allen Richtungen gerade Linien ziehen, die ganz in die Flächen hineinfallen. (Prüfen eines Reißbrettes mit der Kante der Reißschiene.)

Bei den krummen Flächen ist dies nicht nach allen Richtungen (Hutfläche) oder überhaupt nicht möglich (Kugelfläche, Eifläche).

Bewegt sich eine Strecke derart, daß jeder ihrer Punkte eine gerade Linie beschreibt, so entsteht eine begrenzte ebene Fläche, eine ebene Figur (Begrenzungsflächen des Würfels, die Zimmerwände).

Bei der Bewegung einer begrenzten Fläche (einer Figur) entsteht ein begrenzter Raum, ein Körper.

f) Die **Geometrie** beschäftigt sich mit den Raumgebilden, mit Punkten, Linien, Flächen und Körpern. Dieselbe zerfällt in zwei Teile: 1. in die **Planimetrie,** 2. in die **Stereometrie.**

Die Planimetrie handelt von den Raumgebilden, die in einer Ebene liegen, während die Stereometrie die Raumgebilde im Raume, insbesondere auch die Körper zum Gegenstande ihrer Betrachtungen hat.

Aufgaben.

1. Es soll eine Strecke $AB = d$ gezeichnet werden, wenn $d = 2$, 5, 9 *cm* ist.

2. Es soll eine Strecke gezeichnet werden, die n-mal so lang ist als eine gegebene Strecke a; $a = 3$ *cm*; $n = 2, 3, 5 \ldots$

3. Es soll die Summe zweier Strecken a und b gezeichnet werden.

4. Es soll die Strecke AB um die Strecke d verlängert werden.

5. Es soll der Unterschied zweier Strecken a und b gezeichnet werden.

6. Es soll die Strecke a auf der Summe zweier Strecken b und c von dem einen Endpunkte der Summenstrecke aus abgetragen werden.

Kapitel III.

Bewegung der Geraden in der Ebene. Der Winkel.

a) Da eine Gerade durch ihre Lage und ihre Richtung bestimmt ist, so kann eine sich bewegende Gerade sowohl ihre Lage als ihre Richtung ändern.

Geht eine Gerade g durch Änderung ihrer Lage, ohne ihre Richtung zu ändern, in g_1 über, so nennen wir diese Art der Bewegung eine Verschiebung. (Fig. 6.)

Fig. 6.

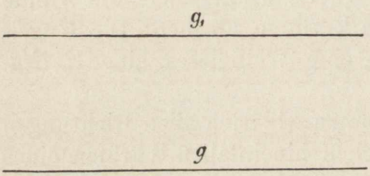
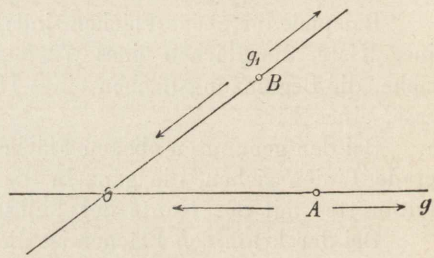


Fig. 7.



Erklärung. Geraden mit verschiedener Lage, aber gleicher Richtung nennen wir parallel.

Das Zeichen für parallel ist $\parallel$. ($g \parallel g_1$.)

Da die Lage einer Geraden durch einen gegebenen Punkt und ihre Richtung durch eine gegebene Gerade bestimmt ist, folgt:

Durch einen außerhalb einer Geraden gegebenen Punkt kann man zu der Geraden nur eine Parallele ziehen.

b) Geht eine Gerade g mit Beibehaltung ihrer Lage durch Änderung ihrer Richtung in g_1 über, so sagen wir, die Gerade g hat eine Drehung ausgeführt. (Fig. 7.)

Der die Lage beider Geraden bestimmende Punkt heißt der Drehpunkt.

Denken wir uns auf zwei sich schneidenden Geraden zwei Punkte A und B so bewegt, daß sie sich dem Schnittpunkt O nähern (Fig. 7), so sagen wir, sie bewegen sich in konvergenten Richtungen; bewegen sie sich vom Schnittpunkt weg, so sagen wir, die Richtungen sind divergent.

Mithin ist jedes Strahlenbüschel in der einen Richtung ein konvergentes, in der andern ein divergentes.

c) Ändert ein Punkt auf einer Geraden seine Lage, so wird die Größe der Bewegung durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke gemessen. Ändert eine Gerade ihre Richtung, so müssen wir für die Größe der Drehung ebenfalls ein Maß haben.

Erklärung. Die Drehungsgröße zwischen zwei Geraden nennen wir den von den Geraden gebildeten Winkel.

Der Schnittpunkt der Geraden heißt der Scheitel, die Geraden die Schenkel des Winkels.

Ein Winkel wird entweder durch drei große Buchstaben bezeichnet, von denen man den einen an den Scheitelpunkt, die anderen an beliebige Punkte der Schenkel setzt, oder durch einen kleinen (gewöhnlich griechischen) Buchstaben (α, β, γ, δ . . .).

Die Buchstaben werden so gelesen, daß der Buchstabe am Scheitelpunkt in der Mitte steht. Das Zeichen für den Winkel ist $\sphericalangle$.

Der Winkel ABC (Fig. 8) oder $\sphericalangle\, BAC$ oder $\sphericalangle\, CAB$; $\sphericalangle\, \alpha$.

Fig. 8.

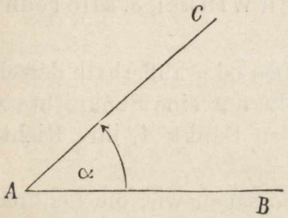
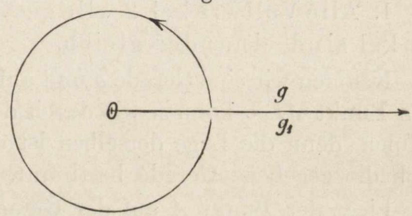


Fig. 9.



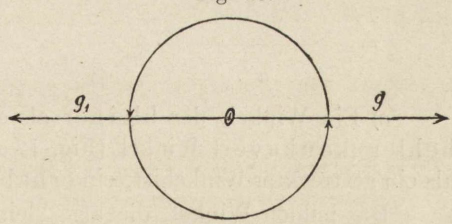
Man bezeichnet auch, wenn keine Verwechslung möglich ist, den Winkel durch einen großen Buchstaben am Scheitel.

Die Größe einer Drehung, also auch die Größe eines Winkels ist von der Lage des Drehpunktes (Scheitelpunktes) und von der Länge der sich drehenden Geraden (Schenkel) unabhängig.

Dreht die Gerade g sich fortgesetzt um den Punkt O, so fällt sie der Reihe nach mit den Richtungen aller Geraden, die durch den Punkt O gehen, zusammen und gelangt schließlich wieder in ihre Anfangsrichtung. Die Gerade hat dann eine ganze Umdrehung gemacht; den entstandenen Winkel nennen wir einen Vollwinkel. (Fig. 9.)

Gelangt der Strahl g bei seiner Drehung in die entgegengesetzte Richtung g_1 von g (Fig. 10), so ist die Drehung, die g nach g_1 bringt, gerade so groß, wie diejenige, die g_1 nach g überführt. Also ist die Drehung die Hälfte einer ganzen Umdrehung.

Fig. 10.

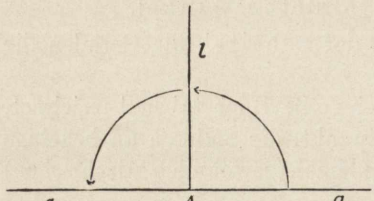


Den Winkel, der durch eine halbe Umdrehung eines Strahles entsteht, nennen wir einen gestreckten Winkel.

Die Schenkel eines gestreckten Winkels bilden nach entgegengesetzt Richtung eine gerade Linie.

Den Winkel, der durch den vierten Teil einer ganzen Umdrehu entsteht, heißt ein r e c h t e r W i n k e l (1 R). (Fig. 11). Wir sagen, sei Schenkel g und l sind s e n k r e c h t (lo recht, normal) zueinander, oder der ei ist eine S e n k r e c h t e (Lot, Normale) dem andern. Die Lage der Schenkel und g zueinander ist die gleiche, wie d eines ruhig hängenden Senkbleis od Lotes zu den Geraden, die man auf ein Flüssigkeitsoberfläche ziehen kann.

Fig. 11.



Aus dem Vorangehenden folgt:

E i n g e s t r e c k t e r W i n k e l i s t g l e i c h z w e i r e c h t e n W i n k e l n (2 R

Da die Größe eines Winkels von dem Drehpunkte und der Län der Schenkel unabhängig ist, so folgt:

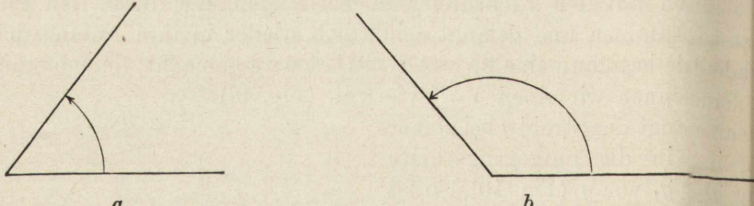
1. A l l e V o l l w i n k e l, 2. a l l e g e s t r e c k t e n W i n k e l, 3. a l l e r e c h t e W i n k e l s i n d e i n a n d e r g l e i c h.

Nehmen wir eine Gerade g und auf derselben oder außerhalb derselb einen Punkt A, so können wir durch den Punkt nur eine Senkrechte zu zeichnen, denn die Lage derselben ist durch den Punkt A, ihre Richtu durch die gegebene Gerade bestimmt.

Liegt der Punkt A auf der Geraden g, so sagen wir, die Senkrech wird in A zu g errichtet; liegt A außerhalb der Geraden g, so wird die Sen rechte von A auf g gefällt. Mithin ergibt sich:

I n e i n e m P u n k t e e i n e r G e r a d e n k a n n m a n a u f d e r s e l b n u r **eine** S e n k r e c h t e e r r i c h t e n, v o n e i n e m P u n k t e a u ß e r h a l b n **eine** S e n k r e c h t e a u f d i e G e r a d e f ä l l e n.

Fig. 12.



c) Ein Winkel, der k l e i n e r als ein gestreckter Winkel ist, heißt h o h l e r (k o n k a v e r) Winkel (Fig. 12 a und b), ein Winkel, der g r ö als ein gestreckter Winkel ist, ein e r h a b e n e r (konvexer) Winkel. (Fig. 1

Die hohlen Winkel, die also kleiner als 2 R sind, teilt man ein s p i t z e (Fig. 12 a), die k l e i n e r als 1 R, und in s t u m p f e (Fig. 1 die g r ö ß e r als 1 R sind.

Fig. 12.

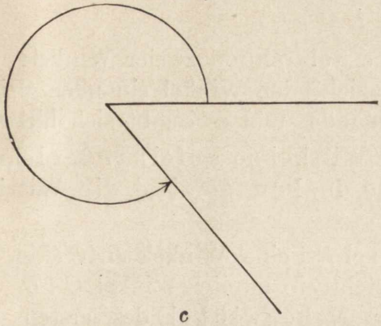
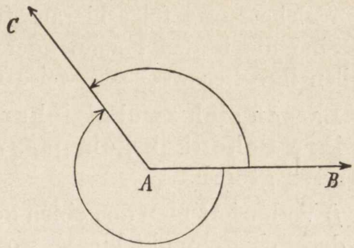


Fig. 13.



Zwei Strahlen AB und AC, die von einem Punkte A ausgehen, bilden immer zwei Winkel miteinander.

Wir können uns den Winkel CAB der Figur 13 entstanden denken durch Drehung des Schenkels AB nach links (entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers) oder nach rechts (gleichgerichtet mit der Bewegung des Uhrzeigers).

Im ersteren Falle ist der Winkel ein hohler, im zweiten Falle ein erhabener Winkel.

Wir verstehen, wenn keine andere Festsetzung getroffen wird, unter dem Winkel zweier Geraden immer den hohlen Winkel.

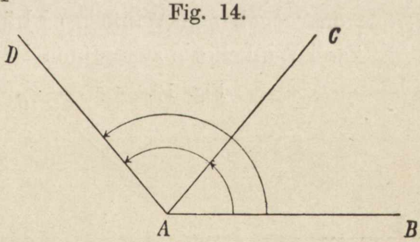
d) Um jeden beliebigen Winkel messen zu können, teilt man den Vollwinkel in 360 gleiche Teile und nennt jeden Teil einen Grad (1^0). Der 60. Teil eines Grades heißt eine Minute ($1'$), der 60. Teil einer Minute 1 Sekunde ($1''$).

Ein Vollwinkel hat also 360^0, ein gestreckter Winkel 180^0, ein rechter Winkel 90^0. Ein Grad hat 60 Minuten ($1^0 = 60'$), eine Minute hat 60 Sekunden ($1' = 60''$).

Zum Messen gegebener Winkel oder zum Zeichnen eines Winkels von gegebener Größe dient der Transporteur.

e) Dreht sich der Strahl AB (Fig. 14) zuerst nach AC und dann nach AD, so hat er den Winkel BAD beschrieben; der Winkel BAD ist so groß als die beiden Winkel CAB und CAD zusammengenommen, also ist der Winkel BAD gleich der Summe der Winkel CAB und CAD

Fig. 14.



$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD.$$

Welche Regel ergibt sich hieraus für die Addition zweier oder mehrerer Winkel?

Es ist ferner (Fig. 14)

$$\sphericalangle BAD - \sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB.$$

Der Winkel CAB ist demnach gleich dem Unterschied der Winkel BAD und DAC.

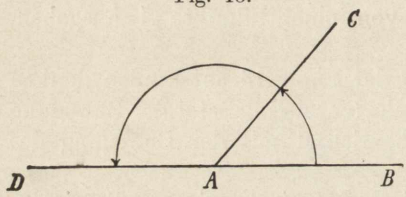
Welche Regel folgt hieraus für die Subtraktion zweier Winkel?

Sind die beiden voneinander abzuziehenden Winkel einander gleich, so fallen ihre Schenkel paarweise aufeinander und es ergibt sich hieraus:

Lassen sich zwei gleichartige Winkel so aufeinander legen, daß ihre Schenkel sich paarweise decken, so sind die Winkel einander gleich.

f) Verlängert man den einen Schenkel BA eines Winkels BAC (Fig. 15) über den Scheitelpunkt hinaus, so entsteht ein zweiter Winkel CAD, der der Nebenwinkel des ersten genannt wird.

Fig. 15.



Erklärung. Nebenwinkel sind solche Winkel, die den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam haben und deren freie Schenkel eine Gerade bilden.

Da der Winkel DAB, der gleich der Summe der Winkel CAB und CAD ist, gleich einem gestreckten Winkel, also gleich 2 R ist, so folgt der

Satz 1: Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei rechten Winkeln.

Der Nebenwinkel eines rechten Winkels muß auch gleich einem rechten Winkel, also ihm gleich sein. Wenn mithin ein Winkel und sein Nebenwinkel einander gleich sind, so ist jeder gleich einem rechten Winkel.

Was kann man von dem Nebenwinkel eines spitzen oder eines stumpfen Winkels aussagen?

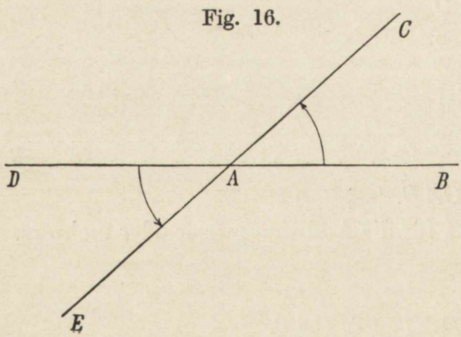
Ist ein Winkel gleich α^0, so beträgt sein Nebenwinkel $(180 - \alpha)^0$.

Ist $\alpha = 10^0, 25^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0, 160^0$, so ist $(180 - \alpha)^0 = 170^0, 155^0, 120^0, 90^0, 60^0, 45^0, 20^0$.

Die Größe des Nebenwinkels eines gegebenen Winkels ist von der Größe des gegebenen Winkels abhängig.

Zwei Winkel, die zusammen 180^0 betragen, nennt man auch Supplementwinkel; ist die Summe zweier Winkel gleich 90^0, so nennt man sie auch Komplementwinkel.

Fig. 16.



g) Verlängert man beide Schenkel eines gegebenen Winkels BAC (Fig. 16) über den Scheitel hinaus, so entsteht ein Winkel DAC, der der Scheitelwinkel des ersteren heißt.

Erklärung. Winkel, die den Scheitel gemeinsam haben, und bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des andern Winkels sind, heißen Scheitelwinkel.

Durch die Drehung, die den Schenkel AB nach AC überführt, wird auch die Verlängerung von AB, nämlich AD in die Verlängerung AE von AC gebracht; also entstehen beide Winkel durch dieselbe Drehung und sie sind daher einander gleich.

Satz 2: Scheitelwinkel sind einander gleich.

Wie kann man dieses Ergebnis mit Benutzung des Satzes von den Nebenwinkeln auch ableiten?

Welche Winkel an der obigen Figur sind Nebenwinkel, welche Scheitelwinkel?

Was läßt sich über die Summe der vier Winkel um den Punkt A aussagen?

Durch einen der vier Winkel, die von zwei sich schneidenden Geraden gebildet werden, sind die übrigen drei bestimmt.

Aufgaben. (Anwendung des Transporteurs.)

1. Es soll ein gegebener Winkel gemessen werden.

2. Es soll die Größe eines gegebenen Winkels und seines Nebenwinkels durch Messung ermittelt werden.

3. Es soll ein gegebener Winkel durch Messung mit seinem Scheitelwinkel verglichen werden.

4. Es soll die Summe beziehungsweise Differenz zweier gegebener Winkel durch Messung bestimmt werden.

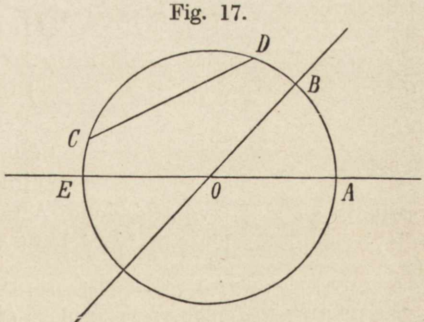
5. Es soll ein Winkel von gegebener Größe gezeichnet werden:
$\alpha = 48^0$; 74^0, 129^0, 295^0, 312^0.

Kapitel IV.

Die Kreislinie.

a) Dreht sich ein Strahl um seinen Endpunkt O (Fig. 17), so beschreibt jeder seiner Punkte (z. B. A) eine krumme Linie, die **Kreislinie,** wenn der Strahl eine ganze Umdrehung macht; führt der Strahl nur einen Teil einer ganzen Umdrehung aus, so beschreibt jeder seiner Punkte nur einen Teil der ganzen Kreislinie, den man Kreisbogen nennt.

Fig. 17.



Der Drehpunkt O heißt der Mittelpunkt (Zentrum) der Kreislinie, die Strecke OA in jeder ihrer verschiedenen Richtungen heißt Halbmesser (Radius), jeder der von dem Strahl OA beschriebenen Winkel (z. B. AOB) heißt ein Zentriwinkel.

Jeder Punkt der Kreislinie hat von dem Mittelpunkte O die gleiche Entfernung ($OB = OA$ gleich dem Halbmesser).

Eine gerade oder krumme Linie, deren sämtliche Punkte einer bestimmten Bedingung genügen, nennen wir einen **geometrischen Ort** für diese Punkte[1]).

Geometrischer Ort 1. Die Kreislinie ist der geometrische Ort für alle Punkte, die von einem gegebenen Punkte (ihrem Mittelpunkte) eine gegebene Entfernung (gleich ihrem Halbmesser) haben.

b) Jede Strecke CD, die zwei Punkte C und D einer Kreislinie miteinander verbindet, heißt Sehne; sie zerlegt die Kreislinie oder den Kreisumfang (Kreisperipherie) in zwei Bögen. Geht die Sehne durch den Kreismittelpunkt, so wird sie Durchmesser genannt. Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich und zwar gleich dem doppelten Halbmesser.

Jeder Durchmesser teilt die Kreislinie in zwei Halbkreise.

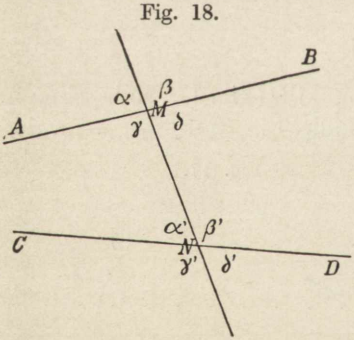
c) Da alle Punkte einer Kreislinie von ihrem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, so ist die Kreislinie durch ihren Radius der Größe nach vollkommen bestimmt; alle Kreislinien, die man mit demselben Radius beschreiben kann, sind völlig gleich, sie lassen sich zur Deckung bringen, d. h. sie sind kongruent.

Kapitel V.

Parallele Geraden.

a) Werden zwei Geraden AB und CD (Fig. 18) von einer dritten MN geschnitten, so entstehen an jedem der beiden Schnittpunkte vier, im ganzen also acht Winkel. Von diesen acht Winkeln liegen vier ($\alpha, \gamma, \alpha', \gamma'$) auf der einen (linken) Seite, die vier anderen ($\beta, \delta, \beta', \delta'$) auf der andern (rechten) Seite der schneidenden Geraden MN.

Fig. 18.



In bezug auf die geschnittenen Geraden AB und CD liegen vier der Winkel ($\alpha, \beta, \gamma', \delta'$) außerhalb, die vier anderen ($\gamma, \delta, \alpha', \beta'$) innerhalb derselben.

Jedem der vier Winkel an dem einen Schnittpunkte kann man einen bestimmten Winkel an dem andern Schnittpunkte zuordnen, so daß verschiedene Arten von Winkelpaaren entstehen, die mit besonderen Namen bezeichnet werden.

[1]) Der Begriff des geometrischen Ortes wurde wahrscheinlich von dem griechischen Philosophen Plato (429—348 v. Chr., Athen) in die Mathematik eingeführt.

1. Gleichliegende oder korrespondierende Winkel sind je ein innerer und äußerer Winkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden (α und α', β und β', γ und γ', δ und δ').

2. Wechselwinkel sind je zwei innere oder zwei äußere Winkel auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden (α und δ', β und γ', γ und β', δ und α').

3. Entgegengesetzte Winkel sind je zwei innere oder zwei äußere Winkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden (α und γ', β und δ', γ und α', δ und β').

a) Ersetzt man den einen von zwei gleichliegenden Winkeln (α und α_1) durch seinen Scheitelwinkel (z. B. α durch δ), so erhält man ein Paar Wechselwinkel (α' und δ). Verfährt man ebenso mit einem Paar Wechselwinkel, so erhält man zwei gleichliegende Winkel.

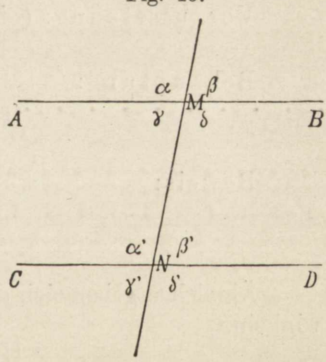
Setzt man an Stelle des einen von zwei gleichliegenden Winkeln den an derselben Seite der schneidenden Geraden liegenden Nebenwinkel, so erhält man ein Paar entgegengesetzter Winkel.

b) Sind die geschnittenen Geraden parallel, so bestehen zwischen den Winkeln der genannten Paare besondere Beziehungen.

Parallele Geraden sind Geraden, die gleiche Richtung, aber verschiedene Lage haben.

Bewegen sich zwei Personen auf zwei parallelen Geraden AB und CD (Fig. 19), die eine auf AM oder BM, die andere auf CN oder DN, so müssen sie, um sich in den Richtungen NM beziehungsweise MN weiterbewegen zu können, dieselben Richtungsänderungen (Drehungen) ausführen. Diese Richtungsänderungen werden durch die gleichliegenden Winkel α und α' oder β und β', beziehungsweise durch γ und γ' oder δ und δ' gemessen. Daher müssen diese entsprechenden Winkelpaare einander gleich sein.

Fig. 19.



Wir können mithin die Erklärung der parallelen Linien auch wie folgt festsetzen:

Parallele Geraden sind Geraden, die mit einer dritten sie schneidenden Geraden gleiche gleichliegende Winkel bilden.

Ersetzt man den einen von zwei gleichliegenden Winkeln durch seinen Scheitelwinkel oder durch seinen an derselben Seite der schneidenden Geraden liegenden Nebenwinkel, so erhält man in ersterem Falle ein Paar Wechselwinkel, im letzteren ein Paar entgegengesetzte Winkel. Da aber nach Kapitel III, *h* Scheitelwinkel einander gleich und nach Kapitel III, *g* Nebenwinkel zusammen 2 R betragen, so ergibt sich:

Satz 3. Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten, so sind je zwei Wechselwinkel einander gleich und die Summe je zweier entgegengesetzten Winkel beträgt zwei Rechte.

Die acht Winkel in Fig. 19 sind durch einen derselben bestimmt.

Anmerkung. In der Mathematik faßt man jede neue Erkenntnis in einen Satz oder Lehrsatz zusammen.

Die Grundlage, auf der man zu der neuen Erkenntnis durch Anwendung bereits erworbener Ergebnisse gelangt, bezeichnet man als die Voraussetzung des Lehrsatzes. In unserem obigen Lehrsatz war die Voraussetzung, daß die Geraden parallel sind, beziehungsweise daß diese Geraden mit einer sie schneidenden Geraden gleiche gleichliegende Winkel bilden.

Um zu einer neuen Erkenntnis zu gelangen, stellt man eine Behauptung auf.

Um die Richtigkeit der Behauptung darzutun, bedarf es eines Beweises, bei dem man die bereits gewonnenen Ergebnisse benutzt.

In dem Lehrsatz enthält der Bedingungssatz (sind zwei Geraden parallel und werden sie von einer dritten Geraden geschnitten) die Voraussetzung, der Folgesatz (so sind je zwei Wechselwinkel usf.) die Behauptung.

Fassen wir unsere obige Entwicklung noch einmal in der üblichen Form zusammen, so ergibt sich folgende Darstellung.

Satz: Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten, so sind zwei Wechselwinkel einander gleich und die Summe je zweier entgegengesetzten Winkel beträgt zwei Rechte.

Voraussetzung: (Fig. 19.) $AB \parallel CD$ oder: $\alpha = \alpha'$, [$\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$].

Behauptung: I. $\alpha = \delta'$, $\beta = \gamma'$, $\gamma = \beta'$, $\delta = \alpha'$.

II. $\alpha + \gamma' = 2\,R$, $\beta + \gamma' = 2\,R$, $\gamma + \alpha' = 2\,R$, $\delta + \beta' = 2\,R$.

Beweis: I. $\delta = \delta'$ (nach Voraussetzung)

$\delta = \alpha$ (Kapitel III, h)

$\alpha = \delta'$.

Ähnlich ergeben sich die Beweise für die anderen Paare von Wechselwinkeln.

II. $\alpha = \alpha'$ (nach Voraussetzung)

$\alpha' + \gamma' = 2\,R$ (Kapitel III, g)

$\alpha + \gamma' = 2\,R$.

usw.

Satz 4. Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten und sind entweder ein Paar Wechselwinkel einander gleich oder beträgt die Summe zweier entgegengesetzten Winkel zwei Rechte, so ist auch jedes Paar gleichliegender Winkel einander gleich, d. h. die geschnittenen Geraden sind einander parallel.

Voraussetzung: (Fig. 19.) I. $\alpha = \delta'$

II. $\alpha + \gamma' = 2\,R$.

Behauptung: $\alpha = \alpha'$, d. h. $AB \parallel CD$.

Beweis: I. $\alpha = \alpha'$ (nach Voraussetzung)

$\delta' = \alpha'$ (nach Kapitel III, h)

$\alpha = \alpha'$

II. $\alpha + \gamma' = 2\,R$ (nach Voraussetzung)

$\alpha' + \gamma' = 2\,R$ (Kapitel III, g)

$\alpha = \alpha'$.

Anmerkung. Die Sätze 3 und 4 stehen in der Beziehung zueinander, daß die Voraussetzung des ersteren die Behauptung des zweiten und die Behauptung des ersteren die Voraussetzung des zweiten bildet. Wir sagen von zwei solchen Sätzen, daß der zweite die **Umkehrung** des ersteren ist.

Folgerungen und Übungssätze.

Ist in der Figur 18 einer von den acht Winkeln ein rechter, so sind alle Winkel rechte; mithin folgt:

1. Steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.
2. Zwei Geraden, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind einander parallel.
3. Errichtet man auf jeder von zwei Parallelen eine Senkrechte, so sind dieselben einander parallel.
4. Winkel mit parallelen gleichgerichteten oder entgegengesetzt gerichteten Schenkeln sind einander gleich; Winkel mit parallelen Schenkeln, von denen das eine Schenkelpaar gleichgerichtet, das andere aber entgegengesetzt gerichtet ist, betragen zusammen 2 Rechte.
5. Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie auch untereinander parallel.

Kapitel VI.

Ebene Figuren.

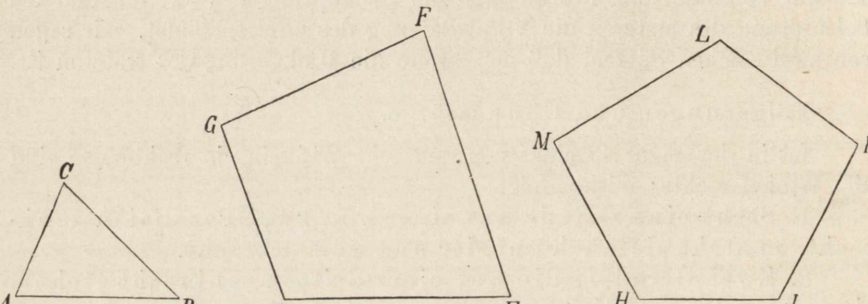
a) Ein vollständig begrenzter Teil einer Ebene heißt eine Figur. Die Begrenzung kann von geraden oder krummen Linien oder auch von beiden zugleich gebildet werden. Man unterscheidet daher geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren.

Die Linien, die eine geradlinige Figur begrenzen, nennt man die Seiten der Figur. Zur Begrenzung einer Figur sind mindestens drei Seiten erforderlich; wir unterscheiden die Figuren nach der Anzahl der Seiten in Dreiseite, Vierseite usw.

Je zwei Seiten schneiden sich in einem Punkte (Eckpunkt oder Ecke) der Figur. Die Anzahl der Ecken einer Figur ist gleich der Anzahl ihrer Seiten. Wir benennen daher gewöhnlich die Figuren nach der Anzahl ihrer Ecken und sagen statt Dreiseit gewöhnlich Dreieck, statt Vierseit Viereck usw. Eine geradlinige Figur von unbestimmter Seitenzahl nennen wir ein Vieleck oder Polygon.

Wir bezeichnen ein Vieleck, indem wir an seine Eckpunkte Buchstaben setzen und dieselben in der Reihenfolge nennen, in der sie an der Figur aufeinander folgen, z. B. Dreieck ABC (Fig. 20 *a*), Viereck $DEFG$ (Fig. 20 *b*), Fünfeck $HIKLM$ (Fig. 20 *c*).

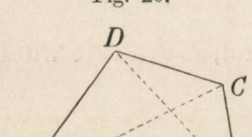
Fig. 20.



a *b* *c*

Je zwei Seiten einer Figur bilden an dem ihnen gemeinschaftlichen Eckpunkt einen Winkel der Figur. Jede Figur hat ebenso viele Winkel, als sie Eckpunkte und Seiten hat.

Fig. 20.



d

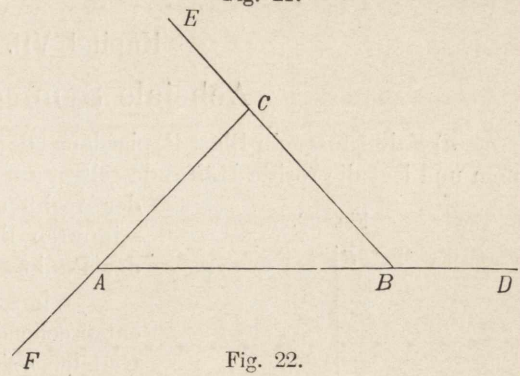
Jede Linie, die zwei Eckpunkte eines Vieleckes verbindet, ohne eine Seite zu sein, nennt man eine Diagonale. Das Dreieck enthält keine Diagonale; in dem Viereck $ABCD$ (Fig. 20 *d*) kann man zwei Diagonalen AC und BD, im Fünfeck $HIKLM$ kann man im ganzen 5 Diagonalen, in einem Vieleck mit n Seiten (n-Eck) $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen zeichnen. (Beweis!)

Die Anzahl der Diagonalen ist von der Zahl der Ecken beziehungsweise der Seiten des Vieleckes abhängig.

b) Die einzige hier in Betracht kommende krummlinige Figur ist die Kreisfläche, die von der Kreislinie begrenzt wird.

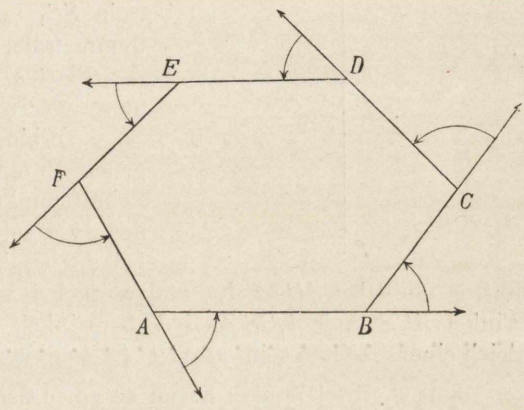
Jede Sehne teilt die Kreisfläche in zwei Kreisabschnitte oder Segmente (gemischtlinige Figuren); ist die Sehne ein Durchmesser, so teilt er die Kreisfläche in zwei Halbkreisflächen. Ein Stück der Kreisfläche, das von zwei Radien und dem zwischen ihnen liegenden Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisausschnitt oder Sektor.

Fig. 21.



c) Verlängert man bei einer geradlinigen Figur eine Seite über den Eckpunkt hinaus, so entsteht der Nebenwinkel des an dem Eckpunkt liegenden Winkels der Figur; einen solchen Winkel nennt man einen Außenwinkel der Figur; so sind (Fig. 21) die Winkel BAF, CBD und ACE die Außenwinkel des Dreieckes ABC an den Eckpunkten A, B und C.

Fig. 22.



Es seien sämtliche Außenwinkel des Vieleckes $ABCDEF$ (Fig. 22) gezeichnet.

Denkt man sich die Seite AB um B gedreht, bis sie mit BC, dann um C bis sie mit CD und so fort, bis sie wieder mit ihrer Anfangslage zusammenfällt, so hat sie sich um den Betrag sämtlicher Außenwinkel des Vieleckes gedreht; dabei hat sie aber eine volle Umdrehung gemacht; folglich ist die Summe aller Einzeldrehungen gleich einer vollen Drehung, d. i. gleich 4 Rechten.

Satz 5. Die Summe der Außenwinkel eines jeden Vieleckes beträgt vier Rechte.

Da jeder Außenwinkel eines Vieleckes mit dem an demselben Eckpunkte liegenden Innenwinkel zusammen 2 Rechte beträgt, so beträgt die Summe aller Innen- und Außenwinkel eines Vieleckes doppelt so viel Rechte als das Vieleck Seiten hat. Da die Summe der Außenwinkel aber gleich 4 Rechten ist, so folgt:

Satz 6. Die Winkelsumme eines Vielecks beträgt doppelt soviel Rechte als das Vieleck Seiten hat, vermindert um vier Rechte.

Für ein n-Eck ist die Winkelsumme $(2n - 4) R$.

Insbesondere ergibt sich für das Dreieck der

Satz 7. Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten.

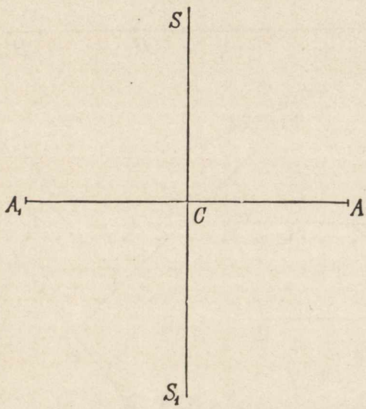
Wie groß ist die Winkelsumme im Viereck, Fünfeck usf.?
Der Schüler entwerfe eine Tabelle.
Die Winkelsumme eines Vieleckes ist von der Seitenanzahl abhängig.

Kapitel VII.

Achsiale Symmetrie.

a) Faltet man ein Blatt Papier längs der Geraden SS_1 (Fig. 23) zusammen und legt die rechte Hälfte desselben auf die linke, so fällt je ein Punkt der rechten Hälfte auf einen ganz bestimmten Punkt der linken Hälfte, z. B. der Punkt A auf den Punkt A_1.

Fig. 23.

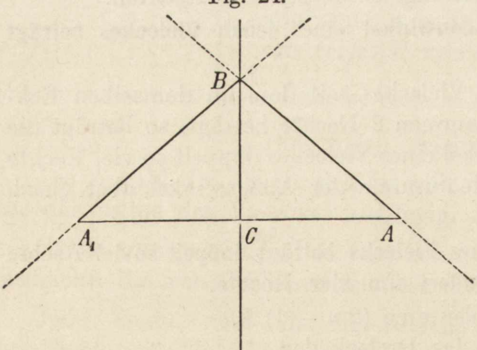


Wir sagen von zwei solchen einander entsprechenden Punkten, daß sie zu der Geraden SS_1 **symmetrisch liegen**; die Gerade SS_1 heißt die **Symmetrieachse oder Symmetrale,** die Drehung der einen Hälfte des Blattes um SS_1 nennen wir **Umklappung** oder **achsiale Drehung.**

Verbinden wir die symmetrisch gelegenen Punkte A und A_1, und ist C der Schnittpunkt ihrer Verbindungsstrecke mit der Symmetralen, so bleibt der Punkt C bei der Umklappung liegen, da A auf A_1 fällt, es muß also $AC = A_1C$ und Winkel ACS gleich Winkel A_1CS sein. Die Winkel ACS und A_1CS sind Nebenwinkel, folglich muß jeder derselben gleich einem rechten sein, also ist AA_1 senkrecht zu SS_1. Mithin ergibt sich:

Satz 8. Zwei Punkte liegen zu einer Geraden symmetrisch, wenn ihre Verbindungsstrecke auf der Geraden senkrecht steht und von ihr halbiert wird.

Fig. 24.



Alle Punkte, die zu sich selbst symmetrisch sind, liegen auf der Symmetrieachse.

Verbindet man einen beliebigen Punkt B (Fig. 24) der Symmetralen zweier Punkte A und A_1 mit diesen Punkten, so fällt bei der Umklappung die Strecke AB auf die Strecke A_1B; diese Strecken sind daher einander gleich. Da sämtliche Punkte diese Eigenschaft haben, so ergibt sich:

Satz 9. Jeder Punkt der Symmetralen zweier Punkte ist von den Punkten gleichweit entfernt.

Eine Linie, deren sämtliche Punkte eine bestimmte Eigenschaft haben, wird, wie schon in Kapitel IV. erwähnt ist, der geometrische Ort dieser Punkte genannt. Mithin erhalten wir:

Geometrischer Ort 2. Die Symmetrale zweier Punkte ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den beiden Punkten gleichweit entfernt sind.

Klappt man in der Figur 24 die eine Hälfte der Zeichnung auf die andere. so ergibt sich: Der symmetrische Punkt zu jedem Punkte der einen Geraden AB liegt auf der andern AB; diese Geraden heißen daher **symmetrische Geraden.** Da bei der Umklappung der Winkel CBA sich mit dem Winkel CBA_1 deckt, also ihm gleich ist, so ist die Symmetrale dieser Geraden die Halbierungslinie des Winkels ABA_1. Also folgt:

Die Halbierungslinie eines Winkels ist die Symmetrale seiner Schenkel.

Ebenso ergibt sich:

Zwei sich schneidende Geraden sind in bezug auf jede ihrer Winkelhalbierenden symmetrisch.

b) Läßt sich in einer Figur eine Gerade so ziehen, daß bei der Umklappung um dieselbe sich die beiden Teile der Figur in bezug auf Gestalt und Fläche decken, so nennen wir die Figur symmetrisch in bezug auf diese Gerade als Symmetrieachse.

Für den **Kreis** ist **jeder Durchmesser** eine **Symmetrale** sowohl der **Kreislinie** als auch der **Kreisfläche.**

Wo liegt die Symmetrale einer Hausfront bei gerader, wo bei ungerader Fensterzahl? Welche Lage hat die Symmetrale des menschlichen Gesichtes?

Auch körperliche Gebilde lassen sich in symmetrische Hälften zerlegen. — Beispiele. —Was tritt hier an Stelle der Symmetrieachse? Welche Lage hat z. B. die Symmetrieebene des menschlichen Körpers?

Kapitel VIII.

Fundamentalaufgaben.

1. Es soll zu zwei gegebenen Punkten A und A_1 die Symmetrale gezeichnet werden.

Lösung. (Fig. 25.) Die Symmetrale ist durch zwei ihrer Punkte S und S_1 bestimmt. Nach Satz 9 ist jeder dieser Punkte von A und A_1 gleichweit entfernt. Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkte gleichweit entfernt sind, ist der Kreis, den man mit der Entfernung als Halbmesser schlagen kann.

Man schlage daher um A und A_1 mit einem Halbmesser, der größer ist als die halbe Strecke AA_1, Kreise, die sich in zwei Punkten S und S_1 schneiden. Die Verbindungslinie SS_1 ist die verlangte Symmetrale.

Fig. 25.

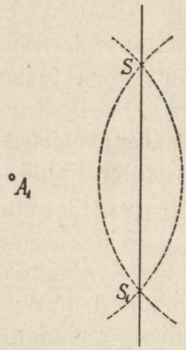
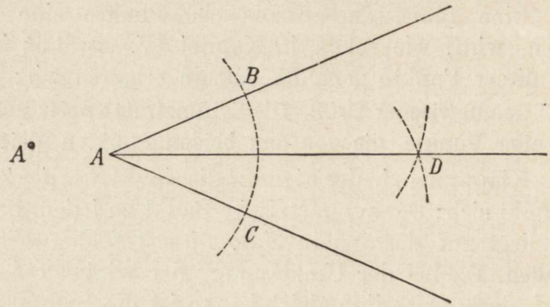


Fig. 26.



2. Es soll eine gegebene Strecke halbiert werden.

Lösung. Man zeichne nach Aufgabe 1 die Symmetrale der Endpunkte der gegebenen Strecke. Nach Satz 8 ist der Schnittpunkt der Symmetralen mit der gegebenen Strecke der verlangte Halbierungspunkt.

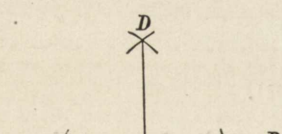
3. Es soll ein gegebener Winkel halbiert werden.

Lösung. (Fig. 26.) Die Symmetrale der Schenkel ist die gesuchte Halbierungslinie. Der Scheitelpunkt A ist ein Punkt der Symmetralen.

Schlagen wir um den Scheitelpunkt A mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, so sind die Schnittpunkte B und C mit den Schenkeln in bezug auf die gesuchte Symmetrale symmetrisch gelegene Punkte. Zeichnet man um B und C mit dem halben Halbmesser zwei Kreise, so ist ihr Schnittpunkt D ein Punkt der Symmetralen und AD die gesuchte Winkelhalbierende.

4. Es soll in einem Punkt einer gegebenen Geraden das Lot errichtet werden.

Fig. 27.

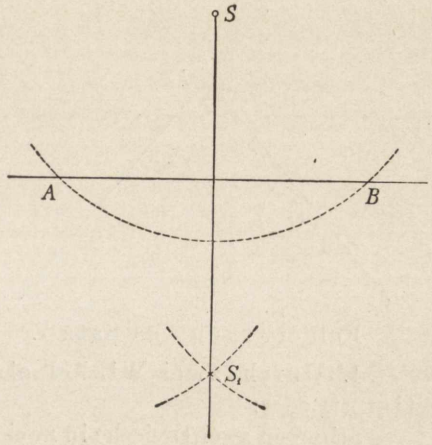


Lösung. (Fig. 27.) Man trage auf der gegebenen Geraden von C aus gleiche Strecken $CM = CN$ ab, so ist C ein Punkt der Symmetralen der Punkte M und N. Schlägt man um M und N mit demselben Halbmesser Kreise, so ist ihr Schnittpunkt D ein zweiter Punkt der Symmetralen CD, die zugleich das gesuchte Lot ist.

5. Es soll von einem Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden auf die Gerade das Lot gefällt werden.

Lösung. (Fig. 28.) Man zeichne um den gegebenen Punkt S mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, der die gegebene Gerade in zwei Punkten A und B schneidet. S ist dann ein Punkt der Symmetralen der Punkte A und B. Einen zweiten Punkt S_1 der Symmetralen und damit der gesuchten Senkrechten findet man wie bei den vorhergehenden Aufgaben.

Fig. 28.



Die Aufgaben 1—5 bilden die Grundlagen aller geometrischen Konstruktionen; man bezeichnet sie daher als Fundamentalaufgaben.

Aufgaben.

1. Es sollen folgende Figuren zu symmetrischen mit gegebenen Symmetralen ergänzt werden:

a) Ein Halbkreis für seinen Durchmesser als Symmetrale;

b) ein Kreisausschnitt für einen der beiden Halbmesser als Symmetrale;

c) ein Kreis und eine Sekante für die Sekante als Symmetrale;

d) ein Kreis und eine Tangente für die Tangente als Symmetrale;

e) eine Gerade und außerhalb derselben eine Strecke für die Gerade als Symmetrale;

f) ein Dreieck für die eine Seite als Symmetrale.

2. Es soll eine gegebene Strecke in 4, 8, 16 .... 2^n gleiche Teile geteilt werden.

3. Es soll ein gegebener Winkel in 4, 8, 16 ... 2^n gleiche Teile geteilt werden.

4. Es sollen die Halbierungslinien der drei Winkel eines Dreieckes gezeichnet werden.

5. Es soll dieselbe Aufgabe für die Winkel eines Viereckes gelöst werden.

6. Es sollen die Mittellote (Symmetralen) der drei Seiten eines Dreieckes gezeichnet werden.

7. Es soll dieselbe Zeichnung für die Seiten eines Viereckes ausgeführt werden.

8. Es sollen von den drei Eckpunkten eines Dreieckes die Lote auf die Gegenseiten gefällt werden.

9. Auf derselben Seite der Bahnstrecke EE_1 liegen zwei Orte P und O; es soll eine Haltestelle so angelegt werden, daß sie von beiden Orten gleichweit entfernt ist.

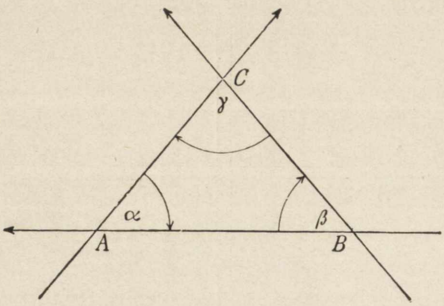
Kapitel IX.

Fundamentalsätze vom Dreieck.

a) Winkelbeziehungen.

In Kapitel VI haben wir als Folgerung aus Lehrsatz 6 den Satz 7 erhalten, demzufolge die Winkelsumme im Dreieck 2 Rechte beträgt. Der Satz läßt sich auch direkt wie folgt ableiten.

Fig. 29.



Dreht man (Fig. 29) die Seite BA um B nach BC, BC um C nach AC und AC um A nach AB, so gelangt die Seite BA durch die drei Drehungen um die Winkel β, γ, α in ihre entgegengesetzte Richtung, hat also eine halbe Umdrehung gemacht. Mithin muß die Summe der drei Winkel α, β, γ gleich einem gestreckten Winkel oder gleich 2 Rechten sein.

Folgerungen aus Satz 7.

1. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt, oder:

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so müssen sie auch in den dritten Winkeln übereinstimmen.

Der dritte Winkel eines Dreiecks ist demnach von der Summe der beiden anderen Winkel abhängig. Ändert sich diese Summe, so ändert sich auch der dritte Winkel.

Der Schüler entwerfe eine Tabelle und berechne zu verschiedenen Werten zweier Winkel den dritten.

2. Ein Dreieck kann nur einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten, dagegen kann es drei spitze Winkel enthalten.

Man teilt daher die Dreiecke in bezug auf die Winkel ein in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige, je nachdem sie einen rechten, einen stumpfen oder drei spitze Winkel enthalten.

Im Gegensatze zu dem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die spitz- und stumpfwinkligen Dreiecke auch als schiefwinklige Dreiecke.

Im spitzwinkligen Dreieck ist die Summe je zweier Winkel größer als ein Rechter.

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden spitzen Winkel gleich einem Rechten.

Es soll zu gegebenen Werten des einen spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck der andere Winkel berechnet werden. (Tabelle!)

Im stumpfwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden spitzen Winkel kleiner als ein Rechter.

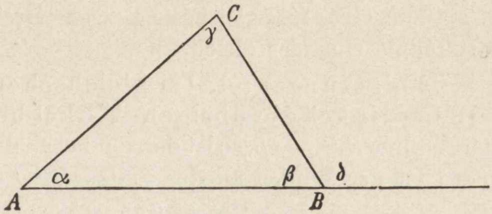
Satz 10. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Behauptung: (Fig. 30.) $\delta = \alpha + \gamma$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \beta + \delta &= 2R \quad \text{(Satz 1)} \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2R \quad \text{(Satz 7)} \\ \hline \beta + \delta &= \alpha + \beta + \gamma. \\ \hline \delta &= \alpha + \gamma. \end{aligned}$$

Fig. 30.



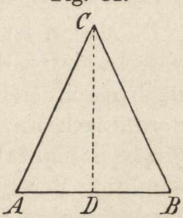
Durch welche Drehungen kann BA in die Lage von BC übergeführt werden? Es sollen diese Beziehungen zu einem zweiten Beweise des Satzes 10 benutzt werden.

1. Was folgt für die Größe jedes Außenwinkels eines Dreiecks, wenn man ihn mit jedem der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel vergleicht?

2. Was ergibt sich für die Größe der Außenwinkel eines spitzwinkligen, eines rechtwinkligen und eines stumpfwinkligen Dreiecks?

b) Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks. Das gleichschenklige Dreieck.

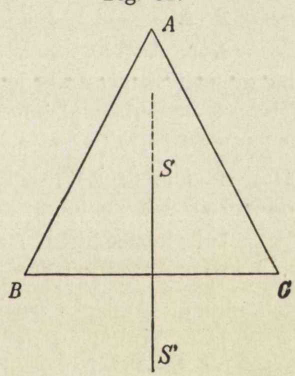
Fig. 31.



Es seien in dem Dreieck ABC (Fig. 31) die Seiten AC und BC einander gleich. Die Halbierungslinie CD des Winkels ACB ist die Symmetrale der Strahlen AC und BC. Da $AC = BC$, so liegen die Punkte A und B symmetrisch zu CD. Bei der Umklappung um CD decken sich die Winkel CAD und CBD und sind daher einander gleich.

Satz 11. Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

Fig. 32.



Ist umgekehrt der Winkel ABC (Fig. 32) gleich dem Winkel ACB und zeichnet man die Symmetrale SS_1 der Punkte B und C, so fallen bei der Umklappung um SS_1 wegen der Gleichheit der Winkel die Strahlen CA und BA aufeinander, sind also symmetrische Strahlen; sie müssen sich daher in einem Punkte A von SS_1 schneiden, also gleich sein. Es ergibt sich

Satz 12. Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber.

In bezug auf die Seiten teilt man die Dreiecke ein in ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige, je nachdem alle drei Seiten verschieden groß, zwei Seiten oder alle drei Seiten einander gleich sind.

Im gleichschenkligen Dreieck nennt man die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie oder Basis; den der Grundlinie gegenüberliegenden Eckpunkt des gleichschenkligen Dreiecks bezeichnet man als seine Spitze.

Aus Satz 11 ergibt sich für das gleichschenklige Dreieck der

Satz 13. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Folgerungen: 1. Im gleichschenkligen Dreieck sind durch einen Winkel die übrigen Winkel bestimmt. Ist der Winkel an der Grundlinie $ABC = \beta$, so ist der Winkel an der Spitze $BAC = \alpha = 180^0 - 2\beta$.

Ist der Winkel an der Spitze $BAC = \alpha$, so ist jeder Winkel an der Grundlinie $\beta = \gamma = \frac{180^0 - \alpha}{2}$.

Ändert sich demnach β, so ändert sich auch α; ebenso ändert sich auch β beziehungsweise γ, wenn α andere Werte annimmt.

Der Schüler entwerfe Tabellen, indem er zu bestimmten Werten von β die zugehörigen Werte von α berechnet und umgekehrt.

Von zwei Größen, die in einer solchen Beziehung zueinander stehen, daß mit jeder Änderung der einen sich auch die andere in bestimmter Weise verändert, sagen wir, die eine sei eine Funktion der andern.

Mithin ist im gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze eine Funktion des Winkels an der Grundlinie und umgekehrt. Ebenso ist nach Kapitel III der eine von zwei Nebenwinkeln eine Funktion des andern, nach Kapitel VI die Winkelsumme eines Vieleckes eine Funktion der Seitenanzahl, nach Kapitel IX, α der dritte Dreieckswinkel eine Funktion der Summe der beiden anderen Winkel, der Außenwinkel eines Dreiecks eine Funktion der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel, im rechtwinkligen Dreieck der eine spitze Winkel eine Funktion des andern.

2. Aus Satz 10 folgt für das gleichschenklige Dreieck:

Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß als jeder Winkel an der Grundlinie.

3. Da das gleichseitige Dreieck als ein Sonderfall des gleichschenkligen Dreiecks anzusehen ist, so ergibt sich, daß im gleichseitigen Dreieck alle drei Winkel einander gleich sind; da ihre Summe gleich $2R$ oder 180^0 ist, so folgt:

Im gleichseitigen Dreieck ist jeder Winkel gleich $\frac{2}{3}R$ oder gleich 60^0.

Was ergibt sich für die Größe der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sowie der Außenwinkel an der Grundlinie?

Der Winkel an der Spitze kann ein spitzer, rechter, oder stumpfer sein. Ist der Winkel an der Spitze ein rechter, das Dreieck also ein gleichschenklig-rechtwinkliges, so ist der Winkel an der Grundlinie $\frac{1}{2}R$ oder 45^0.

Erklärungen:

1. In einem Dreieck nennt man die Senkrechten, die man von den Eckpunkten auf die gegenüberliegenden Seiten fällen kann, die **Höhen** des Dreiecks. Jedes Dreieck hat also drei Höhen.

2. Die Linien, die die Winkel eines Dreiecks halbieren, heißen **Winkelhalbierenden,** die Linien die die Eckpunkte eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, heißen **Mittellinien** der **Mitteltransversalen.**

3. Jede Linie, welche eine geradlinige Figur durchschneidet, nennt man eine Transversale der Figur; geht dieselbe gleichzeitig durch einen Eckpunkt der Figur, so heißt sie eine **Ecktransversale.**

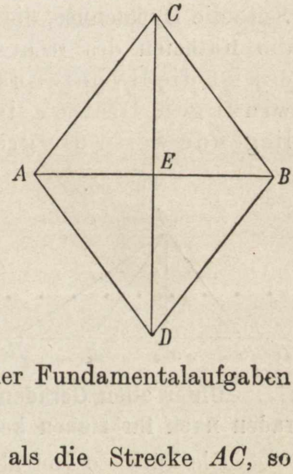
4. Die Höhen, Winkelhalbierenden und Mittellinien eines Dreiecks sind also Ecktransversalen desselben.

Aus den vorangehenden Betrachtungen ergibt sich mithin der

Satz 14. Im gleichschenkligen Dreieck fallen die von der Spitze aus gezogene Höhe und Mittellinie mit der Halbierungslinie des Winkels an der Spitze und der Symmetralen der Grundlinie zusammen.

Die in Satz 14 angegebene Ecktransversale hat vier verschiedene Eigenschaften; da sie aber durch zwei derselben schon bestimmt ist, so kann man den Inhalt dieses Satzes in vier verschiedene Sätze zergliedern. Wie heißen diese vier Sätze?

Fig. 33.



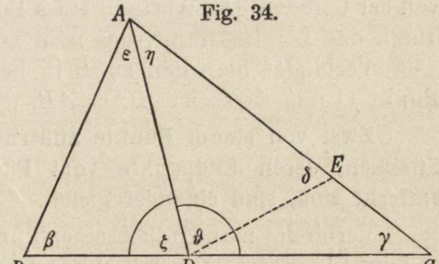
Errichtet man über derselben Grundlinie AB (Fig. 33) zwei gleichschenklige Dreiecke, so haben diese die Symmetrieachse gemeinsam. Daher ergibt sich:

Satz 15. Verbindet man die Spitzen zweier über derselben Grundlinie errichteten gleichschenkligen Dreiecke miteinander, so halbiert die Verbindungslinie die gemeinschaftliche Grundlinie sowie die Winkel an den Spitzen und steht auf der gemeinschaftlichen Grundlinie senkrecht.

Den Lehrsatz 15 könnte man zur Lösung der Fundamentalaufgaben in § 8 benutzen.

Anmerkung. Ist die Strecke AB größer als die Strecke AC, so schreibt man $AB > AC$, ist AB kleiner als AC, so schreibt man $AB < AC$. Was heißt also $\sphericalangle\, \alpha > \sphericalangle\, \beta$? $\sphericalangle\, \gamma < \sphericalangle\, \delta$?

Fig. 34.



Es sei (Fig. 34) ABC ein Dreieck, in dem $AC > AB$ ist. Zeichnet man die Symmetrale des Winkels BAC und klappt das Dreieck ADB um AD um, so fällt AB längs AC nnd da $AC > AB$, der Punkt B zwischen die Punkte A und C, etwa nach E. Dann deckt der Winkel β den Winkel δ, also ist Winkel $\beta =$ Winkel δ. Da der Winkel δ als Außenwinkel des Dreiecks DEC größer ist als Winkel γ, so ist auch der Winkel $\beta >$ Winkel γ; mithin folgt:

Satz 16. In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber.

Umgekehrt setzen wir voraus $\sphericalangle \beta > \sphericalangle \gamma$. Es sei wiederum AD die Symmetrale des Winkels BAC, also $\sphericalangle \varepsilon = \sphericalangle \eta$. Dann ist:

$$\sphericalangle \beta + \varepsilon > \eta + \gamma;$$

daher ist nach dem Satze über die Winkelsumme im Dreieck:

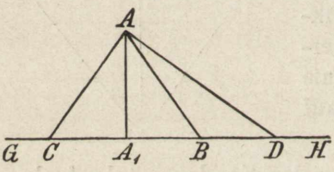
$$\sphericalangle \zeta < \vartheta.$$

Klappen wir das Dreieck ABD um AD um, so fällt BD in den Winkel ADC; da aber AB der Richtung nach auf AC zu liegen kommt, so deckt B einen Punkt zwischen A und C, d. h. $AB < AC$.

Satz 17. In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.

Folgerungen: 1. Im rechtwinkligen Dreieck ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die größte Dreiecksseite. Man nennt diese Seite die **Hypotenuse,** die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten die **Katheten** des rechtwinkligen Dreiecks. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse größer als jede der Katheten. Im stumpfwinkligen Dreieck ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite.

Fig. 35.



Fällt man von einem Punkte A außerhalb einer Geraden GH (Fig. 35) auf die Gerade das Lot AA_1 und verbindet einen beliebigen Punkt B der Geraden mit A_1, so ist $AA_1 < AB$, da das Dreieck AA_1B ein rechtwinkliges und AB die Hypotenuse darin ist. Es folgt:

Unter allen Geraden, die man von einem Punkte außerhalb einer Geraden nach ihr ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste.

Die kürzeste von allen Linien, die man von einem Punkte außerhalb einer Geraden nach ihr ziehen kann, nennt man den **Abstand des Punktes von der Geraden.** Der Abstand eines Punktes von einer Geraden wird mithin durch das Lot bestimmt, das man von dem Punkte auf die Gerade fällt.

Verbindet man den zu B in bezug auf AA_1 symmetrisch gelegenen Punkt C mit A, so ist $AC = AB$, d. h.:

Zwei von einem Punkte außerhalb einer Geraden nach ihr gezogene Strecken, deren Endpunkte vom Fußpunkte der Senkrechten gleichweit entfernt sind, sind einander gleich.

Verbindet man endlich einen Punkt D, für den $A_1D > A_1B$ ist, mit A, so folgt, da in dem Dreieck ABD der Winkel ABD als Außenwinkel an der

Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks ABC ein stumpfer ist, $AD > AB$, d. h.:

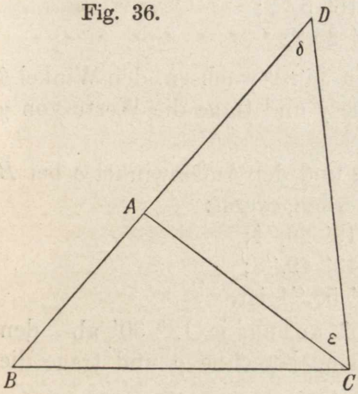
Von zwei von einem Punkte außerhalb einer Geraden nach ihr gezogenen Strecken ist diejenige die größere, deren Endpunkt am weitesten von dem Fußpunkte der Senkrechten entfernt ist.

c) Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks.

Verlängert man in dem Dreieck ABC (Fig. 36) die Seite BA um $AD = AC$, so ist $BD = BA + AC$. In dem gleichschenkligen Dreieck ADC ist $\sphericalangle\, \varepsilon = \sphericalangle\, \delta$, daher $\sphericalangle\, BCD > \sphericalangle\, \delta$, folglich nach Satz 17: $BD > BC$ oder $BA + AC > BC$. Mithin gilt der

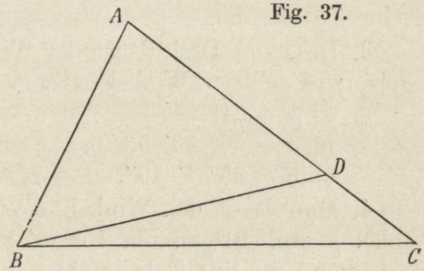
Satz 18. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Fig. 36.



Trägt man in dem Dreieck ABC (Fig. 37) auf der Seite AC die Strecke $AD = AB$ ab, so ist $DC = AC - AD = AC - AB$. In dem Dreieck

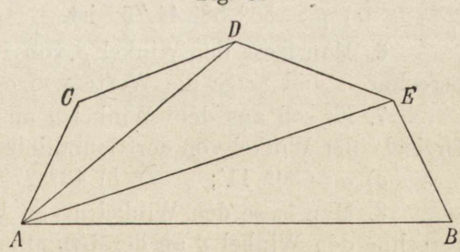
Fig. 37.



BDC ist der Winkel BDC als Außenwinkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks ADB ein stumpfer, mithin $DC < BC$, oder $AC - AB < BC$.

Satz 19. In jedem Dreieck ist der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

Fig. 38.



Folgerung. Verbindet man (Fig. 38) die Punkte A und B durch die Gerade AB und durch die gebrochene Linie $ACDEB$, so folgt aus Satz 18

$$AC + CD > AD$$
$$AD + DE > AE,$$

mithin

$$AC + CD + DE > AE$$
$$AE + EB > AB,$$

also auch

$$AC + CD + DE + EB > AB,$$

d. h. die gebrochene Linie, welche die Punkte A und B verbindet, ist größer als die gerade Verbindungslinie.

Läßt man die Anzahl der Strecken des gebrochenen Linienzuges immer größer, die Strecken selbst immer kleiner werden, so nähert sich der Linienzug immer mehr einer krummen Linie, die demnach auch größer ist als die gerade Verbindungsstrecke. Daher ergibt sich der

Satz 20. Die Strecke ist die kürzeste Verbindungslinie ihrer Endpunkte.

d) Aufgaben:

1. Es soll der dritte Dreieckswinkel berechnet werden, wenn gegeben ist:

a) $\alpha = 18^0\ 38'\ 16''$, $\beta = 53^0\ 17'\ 27''$;
b) $\beta = 55^0\ 23'\ 44,''7$, $\gamma = 115^0\ 49'\ 17,''3$;
c) $\alpha = 14^0\ 22'\ 17,''3$, $\gamma = 132^0\ 16'\ 5,''7$;
d) $\alpha = 88^0\ 12'$, $\beta = 39^0\ 0'\ 25,''2$.

2. Man lasse den Winkel α von 10^0 an um je 10^0 wachsen, den Winkel β von 160^0 an um je 15^0 abnehmen, berechne γ und trage die Werte von γ in eine Tabelle ein.

3. In einem Dreieck ist der Winkel α und der Außenwinkel δ bei B gegeben; es soll der Winkel γ berechnet werden, wenn:

a) $\alpha = 24^0\ 54'\ 28,''3$, $\delta = 106^0\ 19'\ 26,''4$;
b) $\alpha = 66^0\ 33'\ 58,''6$, $\delta = 121^0\ 43'\ 49,''8$;
c) $\alpha = 85^0\ 4'\ 19''$, $\delta = 96^0\ 0'\ 58,''4$ ist.

4. Man lasse den Winkel α von 150^0 an um je $12^0\ 30'$ ab-, den Winkel β von 10^0 an um $15^0\ 20'$ zunehmen, berechne γ und trage die Werte von γ in eine Tabelle ein.

5. Der Winkel β an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist gegeben; es soll der Winkel α an der Spitze berechnet werden, wenn:

a) $\beta = 24^0\ 18'$; *b*) $\beta = 44^0\ 0'\ 36,''4$;
c) $\beta = 58^0\ 58'\ 44,''5$ ist.

6. Man lasse den Winkel β von 10^0 an um je $14^0\ 30'\ 25''$ wachsen, berechne α und trage die Werte von α in eine Tabelle ein.

7. Es soll aus dem Winkel α an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks der Winkel von der Grundlinie berechnet werden, wenn

a) $\alpha = 80^0\ 11'$; *b*) $43^0\ 27'\ 30''$; *c*) $122^0\ 0'\ 43,''4$ ist.

8. Man lasse den Winkel α von 15^0 an um je $10^0\ 10'\ 10''$ wachsen, berechne den Winkel β an der Grundlinie und trage die erhaltenen Werte in eine Tabelle ein.

9. Man soll die Hälfte eines gegebenen Winkels α zeichnen, ohne die Halbierungslinie zu ziehen. (Satz 13, Folgerung 2.)

10. Man soll einen gegebenen Winkel α verdoppeln, verdreifachen usw. ohne den Winkel wiederholt anzutragen. (Satz 13, Folgerung 2.)

11. Auf derselben Seite einer Geraden MN liegen die zwei Punkte P_1 und P_2; man soll auf der Geraden einen Punkt Q so bestimmen, daß die Strecken $P_1 Q$ und $P_2 Q$ mit MN gleiche Winkel bilden.

Anleitung. Man suche zu einem der Punkte P_1 oder P_2 den in bezug auf MN symmetrisch gelegenen Punkt.

Kapitel X.

Die Grundaufgaben des Dreiecks. Kongruenz der Dreiecke.

a) Bezeichnungen.

Die Seiten und Winkel eines Vielecks nennt man seine Stücke. Ein Dreieck hat also 6 Stücke. Ist ABC ein Dreieck, so bezeichnet man die dem Eckpunkte A gegenüberliegende Seite BC mit a, die Gegenseite von B, d. i. AC mit b, die Gegenseite von C, d. i. AB mit c, den Winkel mit dem Scheitelpunkt A mit α, entsprechend die Winkel mit den Scheitelpunkten B und C mit β und γ.

b) Bestimmung der Lage eines Punktes durch geometrische Örter.

Ist von einem Dreieck eine Seite $AB = c$ und der Winkel $BAC = \alpha$ gegeben, so muß der Eckpunkt C auf dem freien Schenkel des an AB in A angetragenen Winkels α liegen. Jeder Punkt dieses freien Schenkels kann als dritter Eckpunkt des Dreiecks genommen werden. Nach früheren Erklärungen werden wir demnach den freien Schenkel des in A angetragenen Winkels α als geometrischen Ort für den dritten Eckpunkt C bezeichnen.

Ist außerdem noch die Seite $BC = a$ gegeben, so ist zufolge des geometrischen Ortes (1.) (S. 20) ein zweiter geometrischer Ort für C die mit a als Halbmesser um C als Mittelpunkt beschriebene Kreislinie. Der Punkt C muß sonach auf beiden Örtern zugleich liegen. Es gibt also so viele Lagen für C als beide Örter gemeinsame Punkte haben.

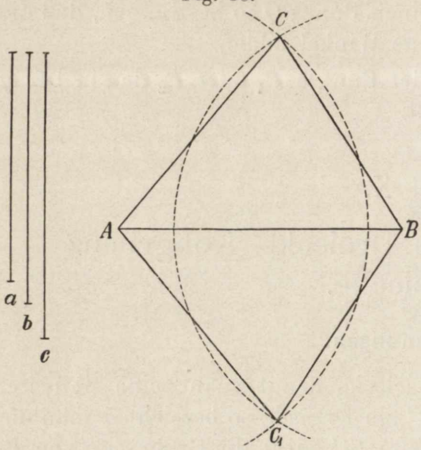
Ein Punkt, der zwei Bedingungen zugleich genügen muß, wird durch zwei geometrische Örter gefunden. Man erhält für den Punkt so viele Lagen als beide Örter gemeinsame Punkte besitzen.

c) Die fünf Grundaufgaben des Dreiecks.

I. Es soll ein Dreieck aus den drei Seiten a, b, c gezeichnet werden.

Durch die Seite $AB = c$ sind zwei Eckpunkte des Dreiecks bestimmt. Der dritte Eckpunkt C liegt 1) auf dem Kreise um B als Mittelpunkt mit a als Halbmesser 2) auf dem Kreise um A als Mittelpunkt mit b als Halbmesser. Mithin ist der Punkt C der Schnittpunkt beider Kreise.

Fig. 39.



Konstruktion. (Fig. 39.) Man zeichne $AB = c$ und schlage um A und B mit b und a Kreise, die sich in C und C_1 schneiden, und verbinde C und C_1 mit A und B. Die Aufgabe hat demnach zwei Lösungen. Da aber die Punkte C und C_1 zu AB als Achse symmetrisch liegen, so sind die Dreiecke ABC und ABC_1 selbst symmetrisch, lassen sich also durch Umklappen um AB zur Deckung bringen. Wir erhalten demnach in Wirklichkeit nur ein einziges Dreieck.

Bedingung für die Lösbarkeit. Die um A und B geschlagenen Kreise schneiden sich nur, wenn $a + b > c$ und $a - b < c$ ist.

(Satz 18 und 19.) Erläuterung durch Zeichnung!

Zeichnen wir mit denselben drei Seiten an verschiedenen Stellen Dreiecke und legen diese Dreiecke mit einer der Seiten, etwa AB aufeinander, so müssen die Dreiecke sich vollständig decken, da die Lage des dritten Eckpunktes C nach der vorangegangenen Konstruktion eindeutig bestimmt ist.

Erklärung. Zwei Dreiecke (oder im allgemeinen zwei Figuren), die sich zur Deckung bringen lassen, nennt man kongruent. (Das Zeichen der Kongruenz ist $\cong$.)

Die Seiten und Winkel solcher Figuren, die sich decken, nennen wir **gleichliegende** oder **homologe Stücke.**

Mithin sind in kongruenten Figuren alle entsprechenden Seiten und Winkel einander gleich.

Aus unserer eindeutigen Dreieckskonstruktion folgt also aus der Gleichheit der Seiten die Gleichheit der Winkel.

Das Ergebnis der Konstruktion liefert den

Satz 21. (I. Kongruenzsatz.) Dreiecke, die in drei Seiten übereinstimmen, sind einander kongruent.

Aufgabe. Es soll ein gegebener Winkel α an eine Gerade MN im Punkte A angetragen werden.

Lösung. (Fig. 40.) Wir bringen den gegebenen Winkel $RPQ = \alpha$ in ein Dreieck, indem wir seine Schenkel durch die Gerade RQ schneiden und zeichnen zu diesem Dreieck nach Satz 21 ein ihm kongruentes, so, daß der P entsprechende Eckpunkt auf A, die PQ entsprechende Seite auf MN fällt.

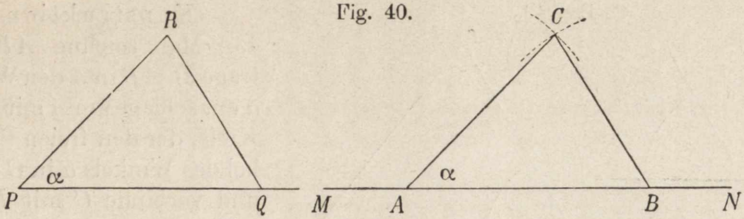


Fig. 40.

Man mache also $AB = PQ$, schlage um A und B mit PR und QR Kreise, die sich in C schneiden. Dann ist $\triangle ABC \cong PRQ$ und folglich $\sphericalangle CAB = \sphericalangle RPQ = \alpha$.

Gewöhnlich bringt man den Winkel α in ein gleichschenkliges Dreieck. (Fig. 41.) Man schlägt mit einem beliebigen Halbmesser um P einen Kreis-

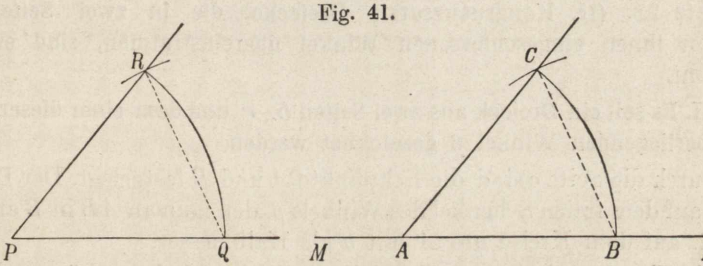


Fig. 41.

bogen, der die Schenkel des Winkels in Q und R schneidet. Um A schlägt man mit demselben Halbmesser den Kreis, der MN in B schneidet Um B zeichnet man mit der Sehne QR als Halbmesser den Kreis, der den ersteren in C schneidet, verbindet C mit A, so ist $\sphericalangle CAB = \alpha$.

Aufgabe. Es soll durch einen gegebenen Punkt A zu einer gegebenen Geraden MN die Parallele gezeichnet werden.

Lösung. (Fig. 42.) Man verbinde A mit einem beliebigen Punkt B von MN und trage den Winkel $ABN = \alpha$ an AB in A nach der entgegengesetzten Seite an, so ist PQ die gesuchte Parallele, denn die Winkel ABN und BAP sind ein Paar gleiche Wechselwinkel, PQ also parallel MN nach Satz 4.

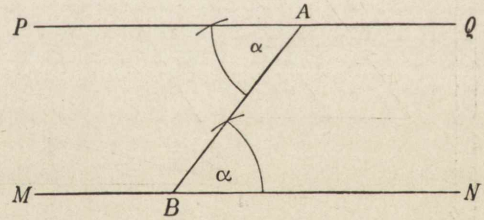
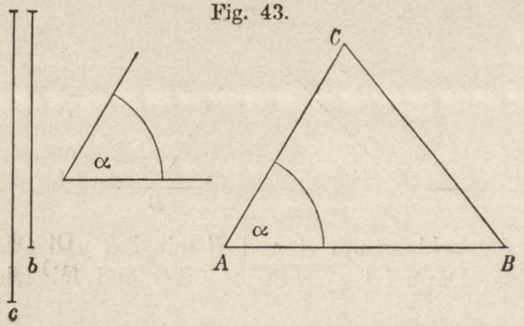


Fig. 42.

II. Es soll ein Dreieck aus zwei Seiten b, c und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α gezeichnet werden.

Durch die Seite c sind die Eckpunkte A und B des gesuchten Dreiecks bestimmt. Der Punkt C liegt 1) auf dem freien Schenkel des Winkels α, den man an AB in A auftragen kann, 2) auf dem Kreise um A mit b als Halbmesser.

Fig. 43.



Konstruktion. (Fig. 43.) Man zeichne $AB = c$, trage an AB in A den Winkel α an, schlage um A mit b den Kreis, der den freien Schenkel des Winkels α in C trifft, und verbinde C mit B.

Da der Kreis den freien Schenkel des Winkels in nur einem Punkte schneidet, so hat die Aufgabe nur eine Lösung. Die Lösung ist immer möglich, wenn $\sphericalangle\, \alpha < 2\, R$ ist. Aus der Eindeutigkeit der Konstruktion folgt:

Satz 22. (II. Kongruenzsatz.) Dreiecke, die in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind einander kongruent.

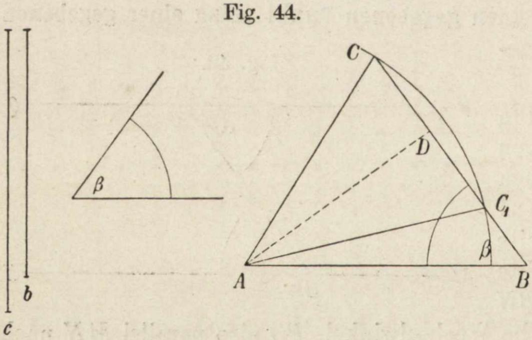
III. Es soll ein Dreieck aus zwei Seiten b, c und dem einer dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel β gezeichnet werden.

Durch die Seite c sind die Eckpunkte A und B festgelegt. Der Punkt C liegt 1. auf dem freien Schenkel des Winkels β, den man an AB in B antragen kann, 2. auf dem Kreise um A mit b als Halbmesser.

Die Konstruktion ergibt sich wie vorher. Bei der Lösung können verschiedene Fälle eintreten.

a) Es sei $b < c$; der um A mit b als Halbmesser geschlagene Kreis schneidet den freien Schenkel des Winkels entweder gar nicht, oder er trifft ihn in einem Punkte oder in zwei Punkten, je nachdem $b \lesseqgtr d$ ist, wo d das Lot ist, das man von A auf den freien Schenkel von β fällen kann. (Fig. 44.)

Fig. 44.

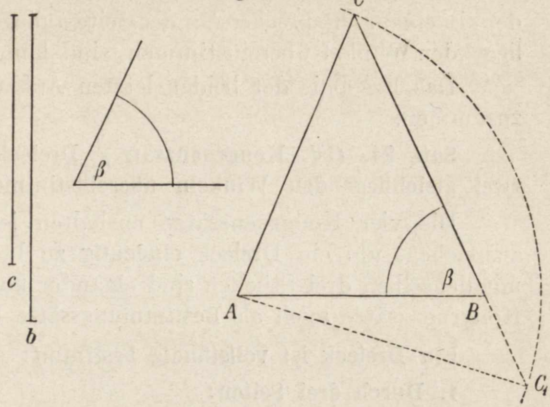


b) Es sei $b > c$. (Fig. 45.) In diesem Falle wird der freie Schenkel des Winkels β nur in einem Punkte von dem Kreise geschnitten. Mithin erhalten wir in diesem Falle stets und nur eine Lösung. Dreiecke, die in diesem Falle in b, c, β übereinstimmen, müssen kongruent sein.

Anmerkung: Der in letzterem Falle um A geschlagene Kreis trifft allerdings die Rückverlängerung des freien Schenkels des Winkels α noch in einem Punkte C_1; das sich hierbei ergebende Dreieck ABC_1 enthält aber nicht den Winkel α, sondern seinen Nebenwinkel $2\, R - \alpha$.

Satz 23. (III. Kongruenzsatz.) Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren von diesen Seiten übereinstimmen, sind einander kongruent.

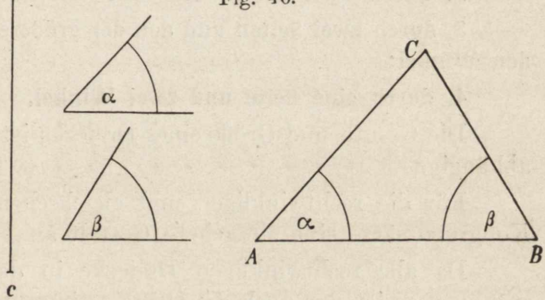
Fig. 45.



IV. Es soll ein Dreieck aus einer Seite c und den beiden ihr anliegenden Winkeln α, β gezeichnet werden.

Durch die Seite $AB = c$ sind die Punkte A und B bestimmt. Der Punkt C liegt auf den freien Schenkeln der Winkel α und β, die man an AB in A und B antragen kann; mithin liegt er in ihrem Schnittpunkte.

Fig. 46.



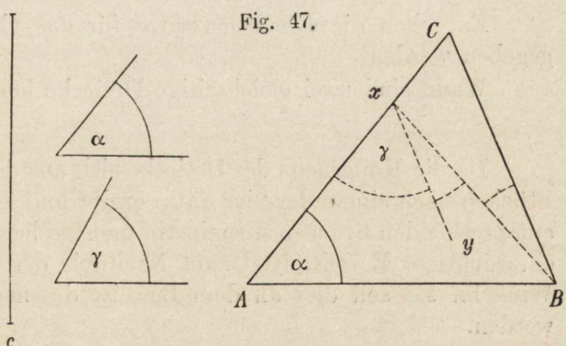
Die Konstruktion ergibt sich leicht. (Fig. 46.)

Da die freien Schenkel der Winkel α und β sich nur in einem Punkte schneiden, so ist das Dreieck durch c, α, β eindeutig bestimmt. Alle Dreiecke mit derselben Seite und den gleichen ihr anliegenden Winkeln sind kongruent.

V. Es soll ein Dreieck aus einer Seite c, einem ihr anliegenden (α) und dem ihr gegenüberliegenden Winkel γ gezeichnet werden.

Durch die Seite $AB = c$ sind die Punkte A und B bestimmt. Der Punkt C liegt auf dem freien Schenkel des Winkels α, den man an AB in A antragen kann. Denkt man sich in einem beliebigen Punkte x dieses freien Schenkels den Winkel γ angetragen, so liegt C außerdem auf der Parallelen, die man durch B zu dem freien Schenkel xy des Winkels γ ziehen kann. Dann ist $\sphericalangle ACB$ als korrespondierender Winkel zu Axy gleich α.

Fig. 47.



Die nach dem Vorangegangenen leichte Zeichnung (Fig. 47) liefert nur eine Lösung der Aufgabe. Alle Dreiecke mit derselben Seite, die außerdem in einem entsprechenden der Seite anliegenden und dem ihr gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent.

Das Ergebnis der beiden letzten Aufgaben fassen wir in einen Satz zusammen.

Satz 24. (IV. Kongruenzsatz.) Dreiecke, die in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, sind einander kongruent.

Die vier Kongruenzsätze enthalten jeder drei Dreiecksstücke, die ausreichen, um ein Dreieck **eindeutig** zu bestimmen, denn alle Dreiecke mit denselben drei Stücken sind einander kongruent. Man kann daher die Kongruenzsätze auch als **Bestimmungssätze** bezeichnen.

Ein Dreieck ist vollständig bestimmt:

1. Durch drei Seiten;

2. durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel,

3. durch zwei Seiten und den der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel;

4. durch eine Seite und zwei Winkel.

Die Gestalt und Größe eines Dreiecks ist demnach von drei (Stücken) abhängig.

Für die rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke nehmen die Kongruenzsätze eine einfachere Gestalt an.

Da alle rechtwinkligen Dreiecke in dem rechten Winkel übereinstimmen, so ist nur noch die Übereinstimmung zweier weiteren Stücke erforderlich.

Es sollen die Kongruenzsätze für das rechtwinklige Dreieck angegeben werden.

Da in einem gleichschenkligen Dreieck durch den einen Schenkel auch der andere Schenkel und durch einen Winkel, sei es der Winkel an der Grundlinie oder an der Spitze, die anderen Winkel bestimmt sind, so ist zur Kongruenz von gleichschenkligen Dreiecken nur die Übereinstimmung in zwei Stücken erforderlich.

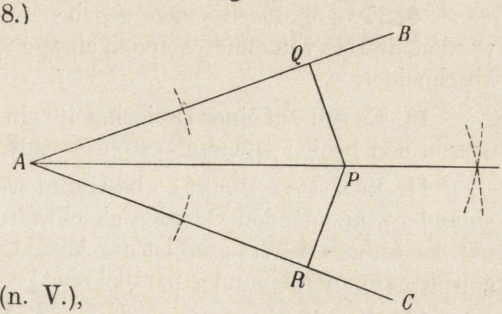
Es sollen die Kongruenzsätze für das gleichschenklige Dreieck angegeben werden.

Wann sind zwei gleichseitige Dreiecke kongruent?

Da die Kongruenz der Dreiecke sich aus der Übereinstimmung in drei Stücken nach einem der vier Sätze ergibt und kongruente Dreiecke in allen entsprechenden Stücken übereinstimmen, so liefern uns die Kongruenzsätze ein wichtiges Beweismittel zum Nachweis der Gleichheit von Seiten und Winkeln. Es soll dies an dem Beweise des nachstehenden Satzes gezeigt werden.

Satz 25. Jeder Punkt der Halbierungslinie eines Winkels ist von seinen Schenkeln gleichweit entfernt.

Fig. 48.



Voraussetzung: (Fig. 48.)
1. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$
2. $PQ \perp AB$
$PR \perp AC$.

Behauptung:
$PQ = PR$.

Beweis: In den rechtwinkligen Dreiecken APQ und APR ist: $AP = AP$
$\sphericalangle QAP = \sphericalangle PAR$ (n. V.),
folglich ist nach dem vierten Kongruenzsatze:

$$\triangle APQ \cong \triangle APR$$

und daher: $PQ = PR$.

Ebenso läßt sich auch die Umkehrung beweisen.

Aus beiden Sätzen ergibt sich:

Geometrischer Ort 3. Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Geraden gleichweit entfernt sind, ist das Geradenpaar, das die Winkel der gegebenen Geraden halbiert.

Zusatz. Da die Hälften zweier Nebenwinkel zusammen einen Rechten betragen, so stehen die Winkelhalbierenden aufeinander senkrecht.

d) Aufgaben.

1. Es soll der Satz 25 an der Figur zu Satz 15 ohne Benutzung der Kongruenz abgeleitet werden. ($\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 1\ R$.)

2. Es sollen die Sätze 13, 14, 15 mit Hilfe der Kongruenzsätze bewiesen werden.

3. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist: *a*) eine Kathete und der ihr anliegende spitze Winkel, *b*) eine Kathete und der ihr gegenüberliegende spitze Winkel, *c*) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel, *d*) die Hypotenuse und eine Kathete, *e*) die beiden Katheten.

4. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist: *a*) die Grundlinie und der Winkel an derselben, *b*) die Grundlinie und der Winkel an der Spitze, *c*) der Schenkel und der Winkel an der Grundlinie, *d*) der Schenkel und der Winkel an der Spitze, *e*) der Schenkel und die Grundlinie.

5. Es soll ein gleichseitiges Dreieck aus der Seite gezeichnet werden. Wie kann man demnach einen Winkel von 60^0, 30^0, 15^0 zeichnen?

6. Es soll ein rechter Winkel in drei gleiche Teile geteilt werden.

7. Es soll ein Winkel gezeichnet werden, der doppelt oder dreimal so groß ist als ein gegebener Winkel α.

8. Es soll zu zwei gegebenen Winkeln eines Dreiecks der dritte durch Zeichnung bestimmt werden.

9. Es soll durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so gezogen werden, daß sie von den Schenkeln eines gegebenen Winkels gleiche Strecken abschneidet.

10. Es soll auf einer Dreiecksseite ein Punkt so bestimmt werden, daß er von den beiden anderen Seiten gleichweit entfernt ist.

11. Es soll ein Punkt so bestimmt werden, daß er von drei gegebenen einander schneidenden Geraden gleichweit entfernt ist. Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Wie groß ist die Anzahl der Lösungen, wenn zwei der gegebenen Geraden einander parallel sind?

12. Es soll die Entfernung zweier Punkte A und B, die nicht unmittelbar gemessen werden kann, bestimmt werden. (Fig. 49.)

Anleitung. Man wähle einen dritten Punkt C so, daß man von ihm nach A und B gelangen kann. (Satz 22.)

Fig. 49.

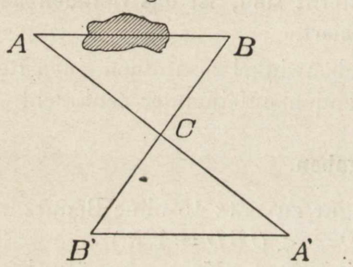
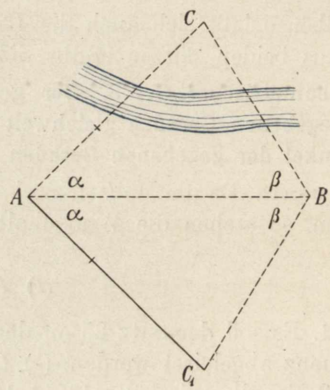


Fig. 50.



13. Es soll die Entfernung des Punktes A von einem Punkte C bestimmt werden, der von A aus unzugänglich, aber sichtbar ist. (Fig. 50.)

Anleitung. Man stecke von A aus die Strecke AB ab, so daß C von A aus sichtbar ist und messe mit einem Winkelmeßinstrumente die Winkel α und β.

Anwendung von Satz 24.

Kapitel XI.

Dreiecksaufgaben.

a) Anleitung zum Lösen von Aufgaben.

Mit Benutzung der in Kapitel X abgeleiteten Kongruenzsätze läßt sich leicht zeigen, daß in kongruenten Dreiecken auch die anderen im Dreiecke vorkommenden Strecken, als Höhen, Winkelhalbierende, Mittellinien sowie auch die Winkel, die diese Strecken mit den Seiten und miteinander bilden, gleiche Größe haben. Mithin sind diese Strecken und Winkel ebenfalls für das Dreieck zur Bestimmung desselben geeignet und können zur Zeichnung benutzt werden. Auch in diesem Falle reichen drei der jetzt in erweitertem Sinne als Dreiecksstücke aufzufassende Strecken für sich allein oder in Verbindung mit den Seiten und Winkel des Dreiecks zur Zeichnung aus. Es soll an einigen Beispielen gezeigt werden, wie solche Zeichnungen ausgeführt werden können.

Es ist üblich folgende abkürzende Bezeichnungen für die Dreiecksstücke zu verwenden.

Die Winkel des Dreiecks ABC an den Eckpunkten A, B, C werden durch α, β, γ, die diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c, die zu diesen Seiten gehörigen Höhen mit h_a, h_b, h_c, die zu ihnen gehörigen Mittellinien mit m_a, m_b, m_c, die Halbierungslinien der Winkel α, β, γ mit w_α, w_β, w_γ, die von der Höhe $CD = h_c$ auf der Seite AB gebildeten Abschnitte BD und AD mit p und q, die von der Winkelhalbierenden $CE = w_\gamma$ auf der Seite AB gebildeten Abschnitte EB mit u und AE mit v, im rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse mit c, im gleichschenkligen Dreieck die Grundlinie mit a bezeichnet.

Aufgabe. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus zwei Seiten a, b und der zur dritten Seite gehörigen Höhe h_c. (Fig. 51.)

Fig. 51.

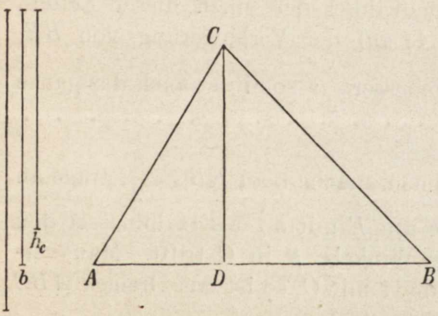
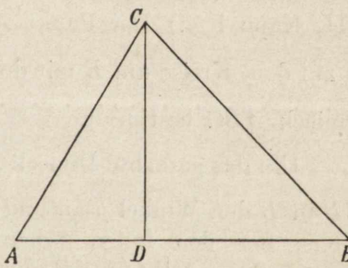


Fig. 52.



Wir zeichnen uns bei jeder Aufgabe zuerst ein Dreieck, von dem wir annehmen, daß es die gegebenen Stücke enthalten soll, in dem also in der vorliegenden Aufgabe die Seite $CB = a$, die Seite $AC = b$ und die Höhe $CD = h_c$ ist. Die Höhe CD teilt das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke ACD und BCD. Die beiden Dreiecke lassen sich aus der Hypotenuse, einer Kathete und dem rechten Winkel zeichnen.

Man errichte demnach auf einer beliebigen Geraden die Senkrechte $DC = h_c$ (Fig. 52), schlage um C mit b und a als Halbmesser Kreise, die die Gerade in A und B schneiden, und verbinde A und B mit C, so ist das Dreieck ABC das verlangte Dreieck.

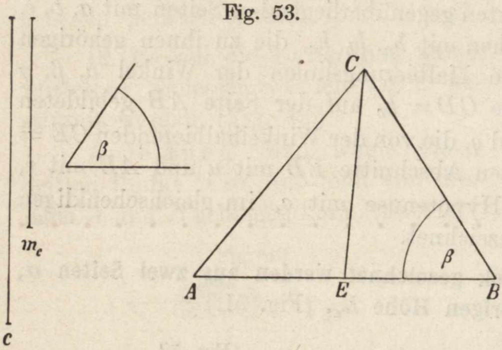
Die letztere Behauptung muß bewiesen werden. Der Beweis gestaltet sich hier sehr einfach. Nach der Konstruktion ist:

1. $CD = h_c$ und $\sphericalangle CDB = 1 R$;
2. $CA = b$;
3. $CB = a$.

Da $CD = h_c$ als gemeinsame Kathete der beiden rechtwinkligen Dreiecke kleiner sein muß als die Hypotenusen AC und CB, so hat die Aufgabe nur dann eine Lösung, wenn a und $b > h_c$ sind.

Aufgabe. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus einer Seite c, der zu ihr gehörigen Mittellinie m_c und einem ihr anliegenden Winkel β. (Fig. 53.)

Fig. 53.



Wir verfahren ebenso wie bei der ersten Aufgabe und zeichnen uns zuerst eine Figur, von der wir annehmen, daß sie die gegebenen Stücke enthalte, so daß also die Seite $AB = c$, die zu ihr gehörige Mittellinie $CE = m_c$ und der Winkel $CBA = \beta$ ist. Das Dreieck CEB ist bestimmt durch $BE = \frac{c}{2}$, $CE = m_c$ und Winkel $CBE = \beta$, also durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der einen dieser Seiten. (III, Kapitel X.) Der Punkt A liegt 1) auf der Verlängerung von BE, 2) auf dem Kreise um E mit dem Halbmesser $\frac{c}{2}$; somit ist auch das ganze Dreieck ABC bestimmt.

Um das gesuchte Dreieck zu zeichnen, mache man $EB = \frac{c}{2}$, trage an EB in B den Winkel β an und schlage um E mit m_c als Halbmesser den Kreis, der den freien Schenkel des Winkels β in C trifft. Man verlängere BE um $EA = EB$ und verbinde A mit C, so ist das Dreieck ABC das verlangte.

Der Beweis ist auch bei dieser Aufgabe leicht.

Nach Konstruktion ist:

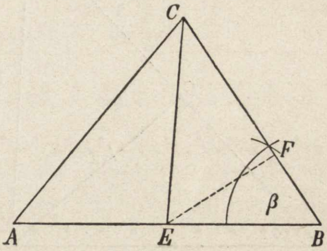
1. $AB = AE + EB = 2\,CB = 2 \cdot \frac{c}{2} = c$;
2. $CE = m_c$ und $AE = EB$;
3. $\sphericalangle CBA = \beta$.

Die Untersuchung nach den Bedingungen der Lösbarkeit gestaltet sich hier etwas ausführlicher.

1. Es sei $m_c > \frac{c}{2}$; nach III, Kapitel X ist dann die Aufgabe stets lösbar und liefert nur eine Lösung.

2. Es sei $m_c < \frac{c}{2}$; man fälle von dem Endpunkte E der Strecke $EB = \frac{c}{2}$ auf den freien Schenkel des Winkels das Lot $EF = d$. (Fig. 54.)

Fig. 54.



a) Ist $m_c > d$, so hat die Aufgabe zwei Lösungen, da der Kreis um E mit m_c als Halbmesser den freien Schenkel des Winkels β in zwei Punkten C_1 und C_2 trifft. Wir erhalten somit zwei Teildreiecke C_1EB und C_2EB, und daher auch zwei Dreiecke ABC_1 und ABC_2.

b) Ist $m_c = d$, so fallen C_1 und C_2 zusammen und die Aufgabe hat auch unter der Bedingung $m_c < \frac{c}{2}$ aber gleich d, nur eine Lösung.

c) Ist $m_c < d$, so trifft der um E mit m_c als Halbmesser geschlagene Kreis den freien Schenkel des Winkels β überhaupt nicht, die Aufgabe hat in diesem Falle gar keine Lösung.

Die Behandlung der beiden vorangegangenen Aufgaben läßt erkennen, daß die Lösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe in vier Teile zerfällt.

1. Der erste Teil, die **Analysis,** ist die zusammenfassende Darstellung der Betrachtungen, durch die man zur Lösung der Aufgabe gelangt. Die Analysis geht am zweckmäßigsten von einer Figur aus, von der wir voraussetzen, daß sie die gegebenen Bestimmungsstücke enthält. Eine gute Analysis muß knapp sein und darf keinenfalls mit der Konstruktion vermengt werden; sie hat nur die Wege zu bezeichnen, auf denen die letztere möglich ist.

2. Die **Konstruktion** gibt an, auf welche Weise man aus den gegebenen Bestimmungsstücken den Folgerungen der Analysis gemäß unter Benutzung von Fundamentalkonstruktionen die gesuchte Figur herstellt.

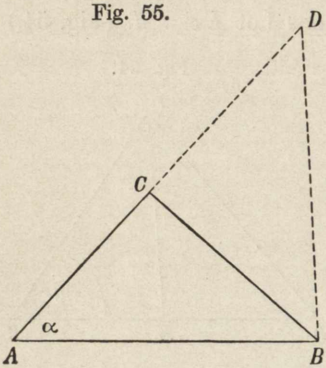
3. Der **Beweis** hat zu zeigen, daß die durch die Konstruktion hergestellte Zeichnung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Der Beweis ist gewissermaßen die Umkehrung der Analysis und kann daher kurz behandelt oder auch ganz fortgelassen werden.

4. Den Schluß einer vollständigen Lösung bildet die **Determination;** sie hat zu untersuchen: *a*) ob die Lösbarkeit der Aufgabe von gewissen Bedingungen der Lage oder Größe der gegebenen Stücke abhängt; *b*) ob die Aufgabe im allgemeinen nur eine oder unter welchen besonderen Bedingungen sie nur eine oder mehrere Lösungen liefert.

Aufgabe. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus der Summe zweier Seiten $a + b = s$ und den beiden einer dieser Seiten anliegenden Winkel α und γ.

Analysis. (Fig. 55.) Um $a + b = s$ zu erhalten, verlängere man AC um $CD = CB$, verbinde D mit B, so ist:

Fig. 55.



$$AD = AC + CD = AC + CB = a + b = s.$$

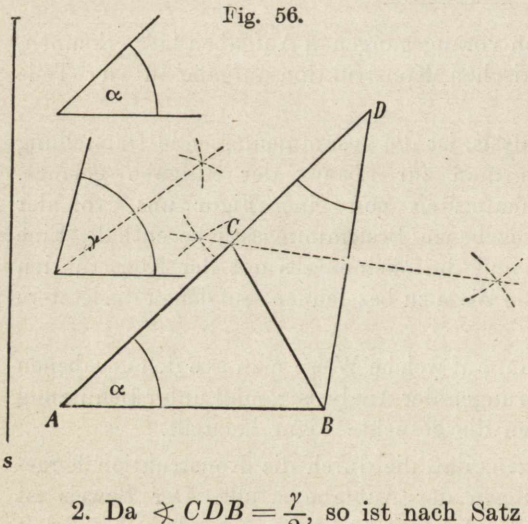
Da das Dreieck CBD ein gleichschenkliges ist, so muß $\sphericalangle\, CDB = \frac{1}{2} \sphericalangle\, ACB = \frac{\gamma}{2}$ sein. Mithin ist das Hilfsdreieck ABD bestimmt durch:

1. $AD = s$;
2. $\sphericalangle\, DAB = \alpha$;
3. $\sphericalangle\, ADB = \frac{\gamma}{2}$.

Der Punkt C liegt auf AD und auf der Symmetralen von DB.

Konstruktion. (Fig. 56.) Man zeichne $AD = s$ und trage an dieser Strecke in A den Winkel α und in B den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ an, so treffen deren freie Schenkel sich in B. Zeichnet man die Symmetrale zu DB, die AD in C trifft, und verbindet C mit B, so ist das Dreieck ABC das verlangte.

Fig. 56.



Beweis. Da nach Konstruktion das Dreieck CDB ein gleichschenkliges ist, so ist:

1. $AC + CB = AC + CD = AD = s$.

2. Da $\sphericalangle\, CDB = \frac{\gamma}{2}$, so ist nach Satz 10, Folgerung 2:

$$\sphericalangle\, ACB = 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = \gamma.$$

3. Nach Konstruktion ist $\sphericalangle\, CAB = \alpha$.

Determination. Die Aufgabe ist lösbar unter der Voraussetzung, daß $\alpha + \gamma < 2\,R$ ist; sie hat dann stets nur eine Lösung, da das Hilfsdreieck ADB eindeutig bestimmt ist.

b) Übungsaufgaben.

Man soll ein Dreieck aus folgenden Stücken zeichnen:

1. a, c, h_c; **2.** a, h_c, α; **3.** a, h_c, γ; **4.** h_c, α, β;
5. h_c, p, q; **6.** b, h_c, p; **7.** p, α, β; **8.** b, α, p;
9. a, c, m_c; **10.** a, m_c, β; **11.** a, h_a, m_a; **12.** a, h_c, m_c;
13. h_c, w_γ, γ; **14.** h_c, w_γ, α; **15.** a, h_b, w_γ; **16.** a, u, γ;
17. h_c, α, u; **18.** w_γ, v, b.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen aus:

19. a, h_c; **20.** h_c, α; **21.** h_c, p; **22.** a, m_a;
23. w_γ, α; **24.** w_α, α.

Man soll ein gleichschenkliges Dreieck zeichnen aus:

25. a, h_a;[1]) **26.** h_a, α; **27.** β, w_β; **28.** b, m_b.

Man soll ein gleichseitiges Dreieck zeichnen aus:

29. h_c.

Man soll ein Dreieck zeichnen aus:

30. $a + b = s, c, \gamma$; **31.** $a + b = s, c, \alpha$; **32.** $a - b = d, c, \beta$;
33. $a - b = d, c, \gamma$; **34.** $a - b = d, c, \alpha$; **35.** $a - b = d, c, \alpha - \beta = \delta$;
36. $c + b = s, h, \beta$; **37.** $c - b = d, a, h_c$; **38.** $a + b + c = s, \alpha, \beta$;
39. $a + b + c = s, h_b\ \gamma$; **40.** $a + c - b = d, \alpha, \beta$;
41. $a + c - b = d, h_c, \alpha$; **42.** $a + h_c = s, b, \beta$.

Man soll ferner ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen aus:

43. $a + b = s, c$; **44.** $a + c = s, b$; **45.** $a + b = s, \beta$;
46. $a + h_c = s, \beta$; **47.** $a - b = d, c$; **48.** $c - a = d, \beta$;
49. $c - a = d, b$; **50.** $a + b + c = s, \alpha$.

Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden aus:

51. $a + b = s, \beta$; **52.** $b + h_a = s, \beta$; **53.** $b - a = d, \beta$;
54. $b - h_a = d, \beta$; **55.** $2b + a = s, h_a$.

Man zeichne ein Dreieck aus:

56. $p - q = d, a, \beta$; **57.** $p - q = d, a, b$;
58. $p - q = d, a, \alpha$; **59.** $p - q = d, h_c, \alpha$;
60. $a, b, \alpha - \beta = \delta$; **61.** $a, p - q = d, \alpha - \beta = \delta$;
62. $a + p - q = s, b, \beta$; **63.** $a + h_c = s, p - q = d, \beta$;
64. $a + b = s, p - q = d, \beta$; **65.** $a + b = s, p - q = d, \gamma$;
66. $a + b = s, p - q = d, \alpha - \beta = \delta$; **67.** $p - q = d, a - b = d, \beta$;
68. $p - q = d, a - b = d_1, \alpha - \beta = \delta$.

Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

69. u, v, α; **70.** $u, v, \alpha - \beta = \delta$;
71. $u, v, a - b = d$; **72.** $a - b = d, u, \alpha$;

---

[1]) h_a ist die zur Grundlinie a gehörige Höhe, h_b die zum Schenkel b gehörige Höhe, α der Winkel an der Spitze, β der Winkel an der Grundlinie.

73. $a - b = d,\ u,\ \alpha - \beta = \delta$; **74.** $u - v = d,\ a - b = d,\ \beta$;
75. $u - v = d,\ a - b = d\ \ \alpha - \beta = \delta$.

Man zeichne ferner ein Dreieck aus:

76. $a,\ b,\ m_c$; **77.** $a,\ m_c,\ \gamma$; **78.** $a,\ m_c,\ \alpha$;
79. $a,\ m_c,\ \sphericalangle\, b\, m_c$;[1]) **80.** $a,\ \sphericalangle\, a\, m_c,\ \sphericalangle\, b\, m_c$; **81.** $m_c,\ \sphericalangle\, a\, m_c,\ \sphericalangle\, b\, m_c$;
82. $a,\ h_a,\ m_c$.

Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

83. $h_a + h_b = s,\ a,\ \gamma$; **84.** $h_a + h_b = s,\ a,\ b$;
85. $h_a + h_b = s,\ a + b = s,\ c$; **86.** $h_c + h_a = s,\ b,\ \beta$;
87. $a + b = s,\ h_a + h_b = s_1,\ \alpha - \beta = \delta$;
88. $a + b = s,\ h_a,\ h_b$; **89.** $h_b - h_a = d,\ a,\ \gamma$;
90. $h_b - h_a = d,\ c,\ \gamma$; **91.** $a,\ c,\ h_c - h_a = d$;
92. $h_b - h_a = d,\ c,\ a - b = d_1$; **93.** $a - b = d, h_b - h_a = d_1, \alpha - \beta = \delta$;
94. $h_b - h_a = d,\ a + b = s,\ \gamma$; **95.** $a - b = d,\ h_a,\ h_b$.

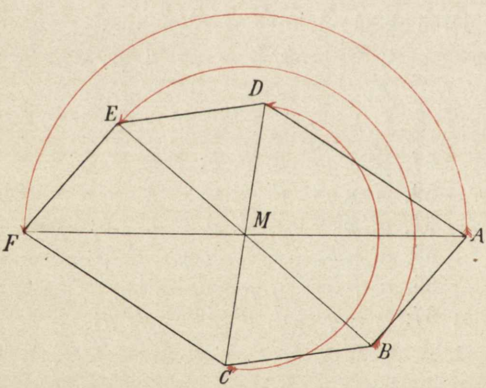
Kapitel XII.

Zentrische Symmetrie. Das Parallelogramm.

a) Symmetrie einer Figur in Beziehung auf einen Punkt.

In der Figur 57 sei $MA = MF$, $MB = ME$, $MC = MD$. Drehen wir die Figur in ihrer Ebene um M um 180°, so gelangen, wie die Kreisbogen andeuten, nach einer halben Umdrehung A nach F, F nach A, B nach E, E nach B, C nach D, D nach C, und die Figur deckt sich alsdann mit ihrer ursprünglichen Lage.

Fig. 57.



Erklärungen. 1. Eine Figur, die nach einer halben Umdrehung um einen Punkt sich mit ihrer ursprünglichen Lage deckt, heißt in Beziehung auf diesen Punkt zentrisch symmetrisch oder kurz zentrisch.

2. Der im Innern gelegene Drehpunkt heißt das Zentrum der Figur.

3. Punkte, die nach der Drehung um 180° zusammenfallen, nennen wir entsprechende Punkte.

[1]) $\sphericalangle\, b\, m_c$ ist der Winkel, gebildet von b und m_c.

Aus diesen Erklärungen ergeben sich sofort die folgenden Sätze:

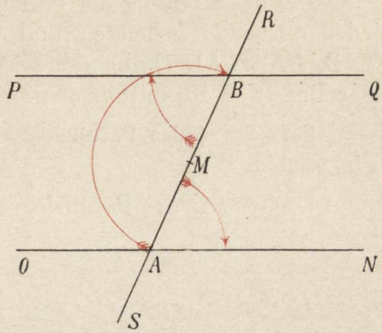
1. Eine Gerade ist zentrisch in bezug auf jeden ihrer Punkte.

2. Eine Strecke ist zentrisch zu ihrem Halbierungspunkte.

3. Zwei sich schneidende Geraden sind zu ihrem Schnittpunkte zentrisch.

4. Werden zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten, so ist die entstandene Figur in bezug auf den Halbierungspunkt der auf der Schneidenden gebildeten Strecke zentrisch. (Fig. 58.)

Fig. 58.



5. Der Kreis ist zu seinem Mittelpunkt zentrisch.

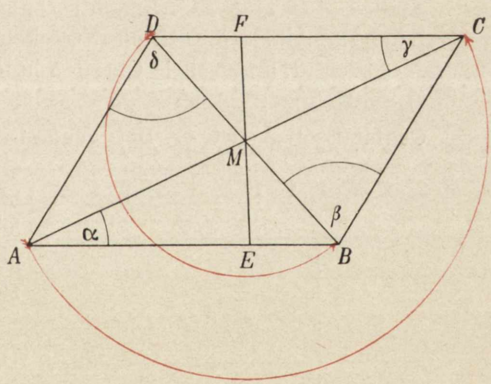
Welche besondere Eigentümlichkeit ergibt sich bei der Drehung des Kreises um seinen Mittelpunkt?

b) Das Parallelogramm.

Erklärung. Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind, heißt ein **Parallelogramm.**

Es sei in der Figur 59 das Punktepaar A und C sowohl als auch das Punktepaar B und D zentrisch in bezug auf den Punkt M. Man ziehe die Verbindungsstrecken AB, DC, AD und BC und drehe das entstandene Viereck $ABCD$ um 180^0 um M; es deckt sich dann der Winkel α mit dem Winkel γ, der Winkel β mit dem Winkel δ und es sind daher diese Winkel paarweise gleich. Mithin ist $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$, d. h. das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. AC und BD sind seine Diagonalen, die sich halbieren.

Fig. 59.



Satz 26. Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbieren, ist ein Parallelogramm.

Setzen wir umgekehrt voraus, daß das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, so fällt nach einer Drehung von 180^0 um den Mittelpunkt M der Diagonale AC der Eckpunkt A auf C und D auf B. Also folgt:

Satz 27. Die Diagonalen eines Parallelogrammes halbieren einander.

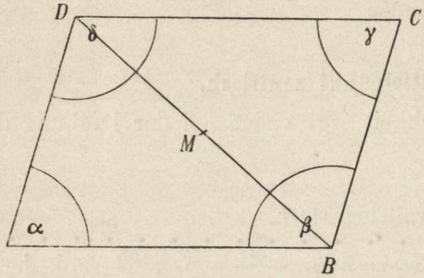
Anmerkung. Es sollen Satz 26 und 27 mittels der Kongruenzsätze bewiesen werden.

Bei der Drehung der Figur 59 um M werden auch die beiden Stücke jeder durch M gehenden und von zwei Gegenseiten begrenzten Strecke (z. B. EF) zur Deckung gebracht; diese Stücke sind daher einander gleich. Der Punkt M ist mithin das Zentrum des Parallelogramms.

Satz 28. Jedes Parallelogramm ist zentrisch zum Schnittpunkt seiner Diagonalen.

Drehen wir das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 60) um den Mittelpunkt M der Diagonale BD um 180^0, so vertauschen die Seiten AB und CD sowohl als auch AD und CB ihre Lage; der Winkel α deckt den Winkel γ, der Winkel β den Winkel δ. Es ergeben sich die Sätze:

Fig. 60.



Satz 29. Im Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten einander gleich.

Satz 30. Im Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Übungsaufgabe. Es sollen die Sätze 29 und 30 mittels des zu beweisenden Satzes: ,,Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt" bewiesen werden.

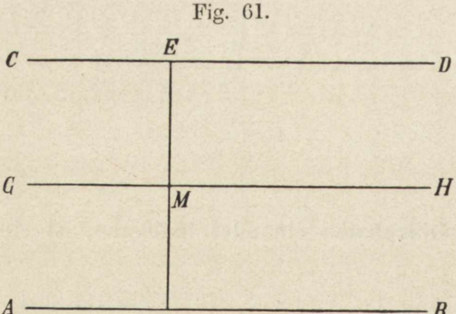
Stehen AD und BC (Fig. 60) senkrecht zu AB und CD, so folgt:

Zusatz. Alle senkrechten Strecken zwischen zwei Parallelen sind einander gleich, d. h. parallele Geraden haben überall den gleichen Abstand.

Hieraus folgt:

Geometrischer Ort 4. Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand haben, ist das Parallelenpaar, das man beiderseits in dem gegebenen Abstand zu der Geraden ziehen kann.

Fig. 61.



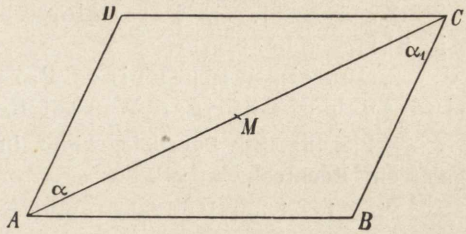
Zieht man (Fig. 61) durch den Halbierungspunkt M der zu den Parallelen AB und CD senkrechten Strecke EF die Parallele GH zu den Parallelen, so nennen wir GH die **Mittelparallele** zu AB und CD. Nach dem letzten Zusatze ist jeder Punkt von GH von AB und CD gleichweit entfernt.

Mithin ergibt sich:

Geometrischer Ort 5. Der geometrische Ort aller Punkte die von zwei Parallelen gleichen Abstand haben, ist ihre Mittelparallele.

Es sei in dem Viereck $ABCD$ (Fig. 62) die Seite AB gleich und parallel der Gegenseite CD. Drehen wir das Viereck um den Mittelpunkt M der Diagonale AC um 180^0, so kommt A auf C, B auf D zu liegen, die Strecken BC und AD vertauschen ihre Lagen, somit auch der Winkel α und sein Wechselwinkel α_1, also ist $BC \parallel AD$; mithin folgt:

Fig. 62.



Satz 31. Sind in einem Viereck ein Paar Gegenseiten gleich und parallel, ist so das Viereck ein Parallelogramm.

Übungsaufgabe. Es soll der Satz 31 mittels Kongruenz von Dreiecken bewiesen werden.

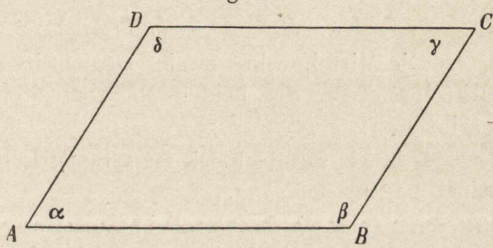
In dem Viereck $ABCD$ (Fig. 63) sei

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma$$
$$\sphericalangle \beta = \sphericalangle \delta.$$

Dann ist:

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma + \sphericalangle \delta.$$

Fig. 63.



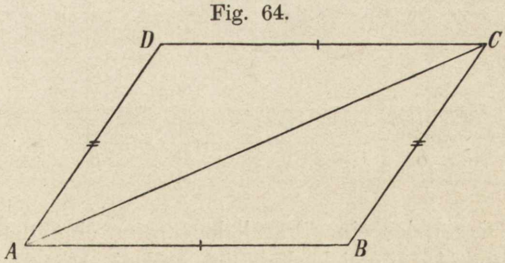
Da nach Satz 6 die Winkelsumme eines Viereckes gleich 4 R ist, so ist: $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = 2\,R$,
mithin ist nach Satz 4: $AD \parallel BC$.
Ebenso ist:

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \delta = \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 2\,R, \text{ also } AB \parallel CD; \text{ d. h.:}$$

Satz 32. Sind in einem Viereck je zwei einander gegenüberliegende Winkel gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Zeichnet man in dem Viereck $ABCD$ (Fig. 64), in dem die Gegenseiten einander gleich sind, d. h. $AB = CD$, $AD = BC$, eine Diagonale, z. B. AC, so ergibt sich aus der Kongruenz der entstandenen Dreiecke, daß die Gegenseiten auch einander parallel sind, d. h. das Viereck ist ein Parallelogramm.

Fig. 64.



Satz 33. Sind in einem Viereck je zwei Gegenseiten einander gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Nach Satz 30 sind in einem Parallelogramm die gegenüberliegenden Winkel einander gleich; nach Satz 3 beträgt aber auch die Summe je zweier aufeinanderfolgenden Winkel im Parallelogramm zwei Rechte. Mithin ergibt sich:

Zusätze. 1. Im Parallelogramm sind durch einen Winkel die übrigen bestimmt.

2. Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein Rechter, so sind auch die übrigen Winkel Rechte.

Erklärung. Ein Parallelogramm, in dem jeder Winkel ein Rechter ist, heißt ein Rechteck.

Sind in einem Parallelogramm zwei aneinanderstoßende Seiten einander gleich, so müssen nach Satz 29 alle Seiten einander gleich sein.

Erklärung. 1. Ein Parallelogramm, in dem alle Seiten einander gleich sind, heißt ein Rhombus.

2. Ein rechtwinkliges, gleichseitiges Parallelogramm heißt ein Quadrat.

c) Zentrische und achsial symmetrische Vierecke.

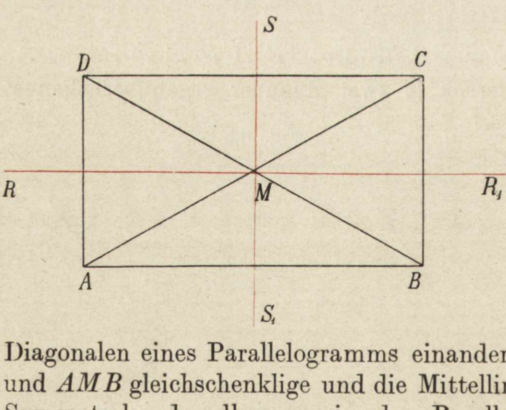
I.

Die Mittelpunkte zweier Gegenseiten eines Rechteckes liegen auf der Mittelparallelen der beiden Nachbarseiten (Geometrischer Ort 5). Mithin ergibt sich:

Satz 34. Ein Rechteck ist symmetrisch in bezug auf die Mittelparallelen seiner Gegenseiten.

Klappen wir das Parallelogramm um die Symmetrale SS_1 um (Fig. 65), so decken sich die Diagonalen, folglich müssen die Diagonalen einander gleich sein.

Fig. 65.



Satz 35. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Übungsaufgabe. Es soll der Satz 35 mittels der Kongruenz von Dreiecken bewiesen werden.

Sind in dem Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 65) die Diagonalen AC und BD einander gleich, so sind, da die Diagonalen eines Parallelogramms einander halbieren, die Dreiecke CMD und AMB gleichschenklige und die Mittellinie SS_1 des Parallelogramms die Symmetrale derselben sowie des Parallelogramms. Klappen wir das

Parallelogramm um SS_1 um, so decken sich die Winkel DAB und ABC, und sie sind daher einander gleich; da ihre Summe aber auch $2\,R$ beträgt, so ist jeder derselben gleich einem Rechten; mithin ist das Parallelogramm ein Rechteck.

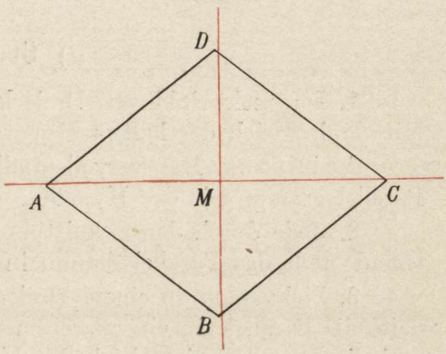
Satz 36. Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen einander gleich, so ist es ein Rechteck.

Übungsaufgabe. Es soll der Satz 36 mittels der Kongruenz von Dreiecken bewiesen werden.

II.

In dem Rhombus $ABCD$ (Fig. 66) liegen die Punkte A und C, da $AD = AB$ und $CD = CB$, auf der Symmetralen der Diagonalen BD; ebenso liegen B und D auf der Symmetralen der Diagonale AC; d. h.:

Fig. 66.



Satz 37. Ein Rhombus ist zu seinen Diagonalen symmetrisch.

Klappen wir das Dreieck ABD um BD oder das Dreieck ADC um AC um, so folgt aus der Deckung mit dem Dreieck BDC beziehungsweise mit ABC:

Satz 38. Im Rhombus halbieren die Diagonalen die Winkel und stehen aufeinander senkrecht.

Inwiefern ergibt sich Satz 38 aus Satz 15?

Zusatz. Die Diagonalen eines Rhombus teilen denselben in vier kongruente Dreiecke.

Mit Benutzung der symmetrischen Beziehungen oder mittels der Kongruenz von Dreiecken (Übungsaufgabe!) ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Satz 39. 1. Halbiert in einem Parallelogramm eine Diagonale einen Winkel ihrer Ecken, so ist es ein Rhombus.

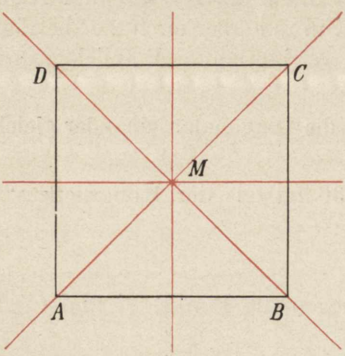
2. Stehen in einem Parallelogramm die Diagonalen aufeinander senkrecht, so ist es ein Rhombus.

Zusammenfassung. Der Rhombus und das Rechteck sind zweiachsig symmetrisch; als Parallelogramme sind sie auch zentrisch.

III.

Da das Quadrat (Fig. 67) zugleich ein gleichseitiges und rechtwinkliges Parallelogramm ist, so kommen ihm die symmetrischen Eigenschaften beider Arten zu.

Fig. 67.



Satz 40. Das Quadrat ist zentrisch bezüglich des Schnittpunktes seiner Diagonalen und symmetrisch

1) bezüglich beider Diagonalen und

2) bezüglich der Mittelparallelen seiner Seiten.

Zusätze. 1. Das Quadrat ist zentrisch und vierachsig symmetrisch.

2. Die Diagonalen eines Quadrates sind gleich, senkrecht zueinander und halbieren die Winkel.

d) Übungssätze:

1. Im rechtwinkligen Dreieck ist die zur Hypotenuse gehörende Mittellinie gleich der halben Hypotenuse.

Anleitung. Man vervollständige das rechtwinklige Dreieck zu einem Parallelogramm mit der Hypotenuse als Diagonale.

2. Jede durch den Schnittpunkt der Diagonalen (Zentrum) gehende Gerade teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Teile.

3. Zieht man in einem Dreieck durch den Halbierungspunkt einer Seite die Parallele zu einer zweiten Seite, so wird die dritte Seite halbiert und die Mittellinie ist gleich der Hälfte der zweiten Seite.

Anleitung. Man ergänze das Dreieck zu einem Parallelogramm, so daß der Halbierungspunkt der ersten Seite das Zentrum wird und drehe die Figur um diesen Punkt.

4. Verbindet man in einem Viereck die Halbierungspunkte der Seiten miteinander, so bilden die Verbindungslinien ein Parallelogramm.

Anleitung. Man ziehe die Diagonalen und wende den vorigen Übungssatz an.

5. Verbindet man in einem Rechteck die Halbierungspunkte der Seiten, so entsteht ein Rhombus.

6. Verbindet man in einem Rhombus die Halbierungspunkte der Seiten, so entsteht ein Rechteck.

7. Verbindet man in einem Quadrat die Halbierungspunkte der Seiten, so entsteht wieder ein Quadrat.

8. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Seiten eines Dreieckes teilen das Dreieck in vier kongruente Dreiecke.

e) Konstruktionsaufgaben.

Jedes beliebige Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Zur Bestimmung eines Dreiecks sind 3 Stücke erforderlich;

ein Viereck wird daher durch 2 . 3 = 6 Stücke bestimmt sein. Da die Diagonale als Seite beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist, so sind **zur Bestimmung eines Vierecks 5 Stücke erforderlich.**

Hat das Viereck besondere Eigenschaften, so kann man unmittelbar schließen, daß zu seiner Bestimmung weniger als 5 Stücke ausreichend sind.

Da jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, ein Dreieck aber durch 3 Stücke eindeutig bestimmt ist, so genügen auch zur Bestimmung eines Parallelogramms drei Stücke. (Der Schüler gebe solche Stücke an!)

Ein Rechteck und ein Rhombus sind durch zwei Stücke, ein Quadrat durch ein Stück eindeutig bestimmt.

Bezeichnungen. In dem Parallelogramm $ABCD$ werden die anstoßenden Seiten AB mit a, BC mit b, CD mit c, AD mit d, die Diagonalen AC und BD mit e und f, ihr spitzer Winkel mit ε, die Parallelogrammwinkel der Reihe nach vom Eckpunkt A anfangend mit α, β, γ und δ, die zu den Seiten a und b gehörigen Höhen mit h_a und h_b bezeichnet.

Es soll ein Parallelogramm gezeichnet werden aus:

1. a, b, β; **2.** a, b, α; **3.** a, b, e; **4.** a, e, β;
5. a, e, f; **6.** a, e, ε; **7.** e, f, ε; **8.** a, b, h_a;
9. a, e, h_a; **10.** e, h_a, α; **11.** e, f, h_a; **12.** $h_a, \sphericalangle ae, \sphericalangle be$[1]).

Es soll ein Rhombus gezeichnet werden aus:

1. $a\ \alpha$; **2.** a, e; **3.** e, α; **4.** e, f;
5. a, h_a; **6.** h_a, α.

Es soll ein Rechteck gezeichnet werden:

1. a, b; **2.** a, e; **3.** a, ε; **4.** e, ε;
5. $a, \sphericalangle ae$.

Es soll ein Quadrat gezeichnet werden aus:

1. a; **2.** e.

---

1. Es soll in ein Quadrat ein zweites so gezeichnet werden, daß ein Eckpunkt des letzteren in einem auf einer Seite des ersteren gegebenen Punkte liegt.

2. Es soll in ein Dreieck ein Rhombus so eingezeichnet werden, daß er mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat.

3. Es soll in ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so gezeichnet werden, daß eine Ecke des letzteren in eine Quadratecke und die beiden übrigen auf zwei Quadratseiten fallen.

---

[1]) $\sphericalangle ae$, $\sphericalangle be$ sind die Winkel, welche die Seiten a und b mit der Diagonale e bilden.

4. Zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels soll eine gegebene Strecke m so eingetragen werden, daß sie

a) auf einem Schenkel senkrecht steht;

b) einer gegebenen Geraden parallel ist.

5. Durch einen zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels liegenden Punkt eine Gerade so zu legen, daß der zwischen den Schenkeln liegende Abschnitt in diesem Punkte halbiert werde.

6. Durch einen außerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Strecke nach dem einen Schenkel so zu legen, daß sie von dem andern Schenkel halbiert wird.

Kapitel XIII.

Das Trapez.

a) Erklärungen.

1. Ein Viereck, in dem ein Paar Gegenseiten parallel sind, heißt ein **Trapez.**

2. Ein Trapez heißt **gleichschenklig,** wenn die nicht parallelen Seiten einander gleich sind.

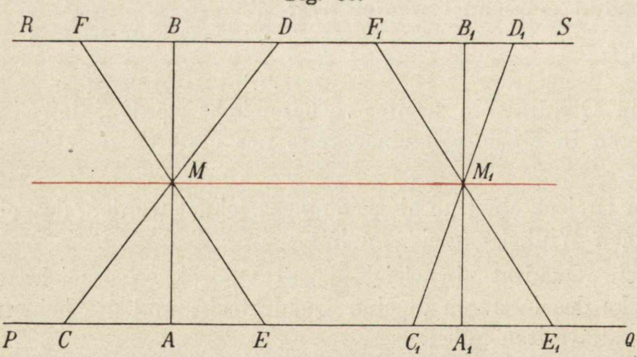
3. Die parallelen Seiten eines Trapezes heißen die **Grundlinien,** ihr Abstand die **Höhe,** die nicht parallelen Seiten kurzweg die **Seiten.**

4. Die Verbindungsstrecke der Halbierungspunkte der nicht parallelen Seiten heißt die **Mittellinie** des Trapezes.

b) Die Mittelparallele zweier Parallelen. (Vgl. Geometrischer Ort 5.)

Zieht man (Fig. 68) durch den Mittelpunkt M der zu den parallelen Geraden PQ und RS senkrechten Strecke AB zwischen den parallelen Geraden die Strecken CD, FE usf., so ergibt sich durch Drehung der Figur um M um 180°, daß die Strecken MC und MD, ME und MF einander gleich sind, also durch M ebenfalls halbiert werden. Der geometrische Ort des Punktes M, welcher von den parallelen Geraden PQ und RS gleichen Abstand hat, ist die Mittelparallele dieser Parallelen (geometrischer Ort 5). Mithin ergibt sich:

Fig. 68.



1. Zieht man durch den Halbierungspunkt einer zwischen zwei parallelen Geraden gezogenen Strecke die Parallele zu den parallelen Geraden, so halbiert letztere auch jede andere zwischen den Parallelen gezogene Strecke.

2. Die Verbindungslinie der Halbierungspunkte aller durch zwei parallele Linien begrenzten Strecken ist diesen parallelen Linien parallel.

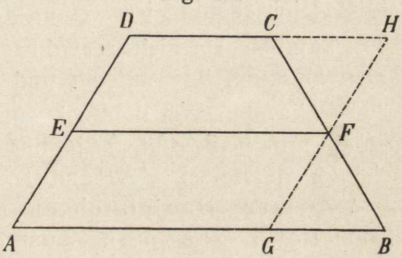
c) Sätze über das Trapez.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergeben sich unmittelbar die Sätze:

Satz 41. 1. Zieht man durch den Halbierungspunkt einer Seite eines Trapezes die Parallele zu den parallelen Seiten, so halbiert sie auch die andere der nicht parallelen Seiten.

2. Die Verbindungslinie der Halbierungspunkte der nicht parallelen Seiten eines Trapezes (Mittellinie) ist den parallelen Seiten parallel.

Fig. 69.



Zieht man (Fig. 69) durch den Halbierungspunkt F der Trapezseite CB die Parallele zu der andern Trapezseite AD bis zu ihren Schnittpunkten G und H mit den parallelen Gegenseiten, so ergibt die Drehung der Dreiecke FGB und CFH um F um 180^0, daß sie zur Deckung kommen, also $CH = GB$ ist. Er ist aber nach Satz 29:

$$EF = DH = DC + CH$$
$$EF = AG = AB - BG$$

Mithin folgt: $$2\,EF = AB + DC$$
$$EF = \frac{AB + DC}{2}, \text{ d. h.:}$$

Satz 42. Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe der parallelen Seiten.

Anmerkung. Die Mittellinie eines Trapezes ist eine Funktion der parallelen Seiten.

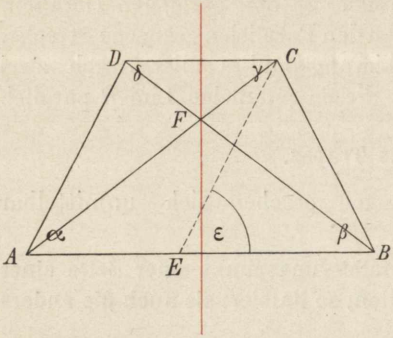
Verschwindet im Trapez die kleinere der parallelen Seiten, so ergibt sich als Grenzfall des Trapezes das Dreieck. Es folgt daher:

Zusatz. Die Verbindungsstrecke der Halbierungspunkte zweier Dreiecksseiten ist der dritten Seite parallel und gleich der Hälfte der dritten Seite. (Vgl. Kapitel XII *c*, Übungssatz 3.)

d) Sätze über das gleichschenklige Trapez.

Zieht man in dem gleichschenkligen Trapez (Fig. 70) durch einen der Endpunkte der kürzeren parallelen Seite zu einer der nicht parallelen Gegenseiten, z. B. durch C die Parallele zu AD, so wird das Trapez in ein

Fig. 70.



Parallelogramm und in ein Dreieck zerlegt. Da $CE = AD$ (Satz 29) und nach Festsetzung $AD = BC$ ist, so muß $BC = CE$, also das Dreieck BCE gleichschenklig sein; daher ist $\sphericalangle \beta = \varepsilon$ (Satz 13); da auch $\varepsilon = \alpha$ ist, so folgt $\alpha = \beta$. Da ferner $\alpha + \delta = 2\,R$ und $\beta + \gamma = 2\,R$, so muß auch $\delta = \gamma$ sein.

Satz 43. Im gleichschenkligen Trapez sind die Winkel an jeder Grundlinie einander gleich.

Zieht man in dem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ (Fig. 70) die Diagonalen AC und BD, so sind die Dreiecke ABC und ABD nach Satz 22 (II. Kongruenzsatz) einander kongruent; daraus folgt, daß $AC = BD$ und $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$. Da somit das Dreieck AFB gleichschenklig ist, so muß $AF = BF$ und endlich auch $CF = DF$ sein.

Satz 44. Im gleichschenkligen Trapez sind sowohl die ganzen Diagonalen als auch ihre unteren und oberen Abschnitte einander gleich.

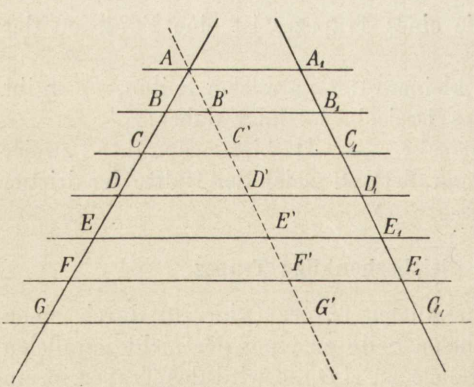
Fällt man von dem Diagonalschnittpunkte F auf die Grundlinie die gemeinsame Senkrechte, so ist diese Linie sowohl die Symmetrale der gleichschenkligen Dreiecke ABF und CDF als auch des gleichschenkligen Trapezes.

Zusatz. Das gleichschenklige Trapez ist symmetrisch zu dem Lote, das man aus dem Schnittpunkte seiner Diagonalen auf die Grundlinien fällen kann.

e) Teilung einer Strecke.

Trägt man auf einer Geraden (Fig. 71) die unter sich gleichen Strecken AB, BC, CD usw. ab und zieht durch die Punkte A, B, C... die Parallelen, so ist jede dieser Parallelen die Mittelparallele zu den beiden benachbarten Parallelen; mithin ergibt sich, daß diese Parallelen auf jeder andern sie schneidenden Geraden ebenfalls gleiche Strecken abschneiden, daß mithin $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1$ usw. ist.

Fig. 71.



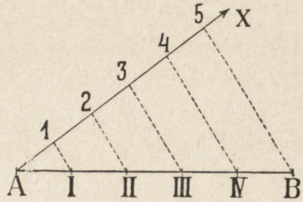
Diese Beziehungen ändern sich nicht, wenn wir die Gerade $A_1\,G_1$ parallel mit sich selbst verschieben bis A_1 mit A zusammenfällt oder darüber hinausfällt. Dann ist auch $AB' = B'C' = C'D'$ usf.

Aufgabe. Es soll eine gegebene Strecke in n gleiche Teile geteilt werden.

Lösung. (Fig. 72.) Man ziehe durch den einen Endpunkt der gegebenen Strecke AB einen beliebigen Strahl AX, trage auf demselben n gleiche Strecken $A, 1 = 1, 2 = 2, 3 \ldots$ ab, verbinde den Endpunkt 5 mit B und ziehe durch die Punkte 1, 2, 3... die Parallelen zu $5B$; dann ist

$$A, I = I, II = II, III = \ldots = \frac{1}{n} AB.$$

Fig. 72.



f) Konstruktionsaufgaben.

Zerlegt man ein Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke oder mittels einer durch einen Eckpunkt zu einer Seite gezogenene Parallele in ein Parallelogramm und in ein Dreieck, so erkennt man unmittelbar, daß ein Trapez durch vier voneinander unabhängige Stücke, ein gleichschenkliges Trapez durch drei solche Stücke bestimmt ist.

Bezeichnungen. In dem Trapez $ABCD$ bezeichne man wie im Parallelogramm mit a die größere parallele Seite AB, mit c die kleinere CD; es sei ferner $BC = b$. $AD = d$, die Diagonalen AC und BD seien e und f. Die Winkel werden von A anfangend mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, der Winkel AEB der Diagonalen mit ε, der Winkel zwischen der Seite b und der Diagonale e mit $\sphericalangle\, b\, e$, die Höhe mit h bezeichnet.

Es soll ein Trapez gezeichnet werden aus:

1. a, b, c, β; **2.** a, b, d, β; **3.** a, b, α, β;
4. a, b, f, β; **5.** a, d, e, β; **6.** b, e, α, β;
7. a, b, c, e; **8.** a, b, e, α; **9.** a, b, e, f;
10. a, b, α, γ; **11.** $a, e, f, \sphericalangle\, a\, e$; **12.** $c, e, \sphericalangle\, a\, e, \sphericalangle\, b\, e$:
13. a, b, c, h: **14.** a, b, f, h; **15.** a, d, e, h;
16. a, f, h, β; **17.** $a, h, \sphericalangle\, a\, e, \sphericalangle\, a, f$; **18.** a, b, β, ε;
19. b, e, h, ε.

Es soll ferner ein gleichschenkliges Trapez gezeichnet werden aus:

20. a, b, β; **21.** a, b, e; **22.** a, e, β;
23. $a, e, \sphericalangle\, a\, e$; **24.** a, b, h; **25.** a, h, α;
26. a, e, h; **27.** e, h, β; **28.** $b, h, \sphericalangle\, b\, e$;
29. a, α, ε; **30.** b, α, ε; **31.** a, h, ε.

Anleitung. Bei den Aufgaben 1—31 ist eines der Dreiecke zu zeichnen, in welche die Diagonalen das Trapez zerlegen.

Es ist ein Trapez zu zeichnen aus:

32. $a + b = s, c, e, \beta$; **33.** $a + b = s, e, \alpha, \beta$; **34.** $a + b = s, c, d, e$;
35. $a + b = s, h, \alpha, \beta$; **36.** $a + b = s, e, \beta, \varepsilon$;
37. $a + b = s, e, \sphericalangle\, e\, c, \sphericalangle\, d\, e$; **38.** $a - b = u, d, e, \beta$;
39. $a - b = u, c, e, \delta$; **40.** $a - b = u, c, h, \beta$; **41.** $a - b = u, e, h, \varepsilon$.

Anleitung. Die Aufgaben 32—41 lassen sich durch Ziehen von Diagonalen auf Dreiecksaufgaben zurückführen.

Es ist ein Trapez zu zeichnen aus:

42. a, b, c, d; **43.** a, c, α, β; **44.** $a, b, d, \alpha + \beta = s$;
45. $a - c = u, b, d, e$; **46.** $a - c = u, e, h, \alpha$.

Anleitung zu den Aufgaben 42—46. Man ziehe die Gerade DF parallel zu BC.

Es ist ferner sin Trapez zu zeichnen aus:

47. a, e, f, ε; **48.** e, f, ε, β; **49.** $a + c = s, b, e, f$;
50. a, c, e, f; **51.** $a + c = s, b, \sphericalangle a e, \sphericalangle a f$.

Anleitung zu den Aufgaben 47—51. Man ziehe durch C die Parallele zu BD, welche die Verlängerung von AB in G schneidet.

Kapitel XIV.

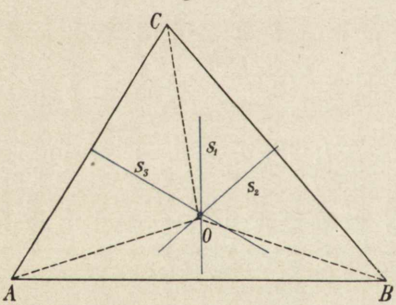
Merkwürdige Punkte im Dreieck.

α) Schnittpunkt der Seitensymmetralen (Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten).

Errichtet man in einem Dreieck ABC (Fig. 73) zu zwei Seiten die Symmetralen s_1 und s_2, so müssen sich dieselben notwendig schneiden. Ihr Schnittpunkt sei O. Dann muß nach Satz 9:

$$AO = OB$$
$$\text{und} \quad OB = OC,$$
$$\text{mithin auch} \quad OA = OC \quad \text{sein.}$$

Fig. 73.



Es liegt daher der Punkt O auch auf der Symmetralen s_3; und es folgt:

Satz 45. Die Symmetralen (Mittelsenkrechten) der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der von den Ecken des Dreiecks gleichweit entfernt ist.

Da A, P, C von O gleichweit entfernt sind, so liegen diese Punkte, wenn man die gleiche Entfernung $OA = OB = OC$ mit r bezeichnet, auf dem Kreise um O mit r als Halbmesser; dieser Kreis heißt der dem Dreieck umbeschriebene Kreis. (Umkreis.)

Für ein spitzwinkliges Dreieck liegt der Schnittpunkt O der Seitensymmetralen innerhalb des Dreiecks. Wird der Winkel ACB größer, so nähert sich der Punkt O der Seite AB. Ist der Winkel ACB ein rechter, so sind s_2 und s_3 parallel zu AC beziehungsweise BC, und es treffen beide die Hypotenuse im Mittelpunkte, d. h. der Punkt O fällt mit dem Mittelpunkte der Hypotenuse zusammen.

Verbindet man in diesem Falle O mit C, so ergibt sich, daß die zur Hypotenuse gehörige Mittellinie im rechtwinkligen Dreieck gleich der Hälfte der Hypotenuse ist. (Vgl. Kapitel XII, Übungssatz 1.)

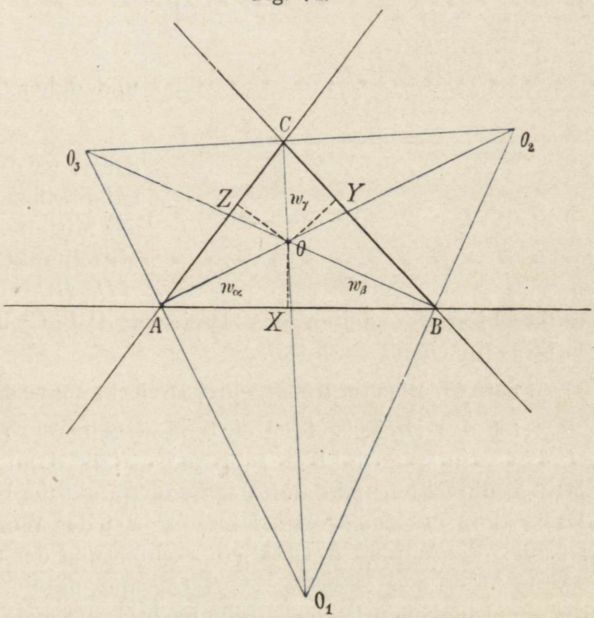
Dieses Ergebnis läßt sich auch umkehren. (Beweis.)

Wird der Winkel ACB endlich ein stumpfer, so rückt der Punkt O über AB hinaus und fällt außerhalb des Dreiecks.

b) Schnittpunkt der Winkelsymmetralen (Winkelhalbierenden).

Zeichnet man in einem Dreieck (Fig. 74) zwei Winkelsymmetralen w_α und w_β, so müssen sich dieselben schneiden.

Fig. 74.



Ihr Schnittpunkt O muß nach Satz 25, da er auf w_α liegt, gleichweit von AC und AB, und da er auch auf w_β liegt, auch gleichweit von AB und BC entfernt sein; also ist:

$$OX = OZ$$
$$OX = OY,$$

mithin muß $OY = OZ$ sein; demnach liegt der Punkt O auch auf der Winkelsymmetralen w_γ.

Satz 46. Die drei Winkelsymmetralen (Winkelhalbierenden) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der von den drei Seiten des Dreiecks gleichweit entfernt ist.

Die gleiche Entfernung $OX = OY = OZ$ bezeichnet man mit ϱ; ihre Bedeutung wird später erörtert.

Zeichnet man die Winkelsymmetralen zweier Außenwinkel, etwa A und B, so müssen sich dieselben aus dem gleichen Grunde und zwar außerhalb des Dreiecks schneiden. Es läßt sich ebenso wie vorher zeigen, daß auch die Symmetrale des den beiden Außenwinkel nicht anliegenden Innenwinkels γ durch O_1 gehen muß.

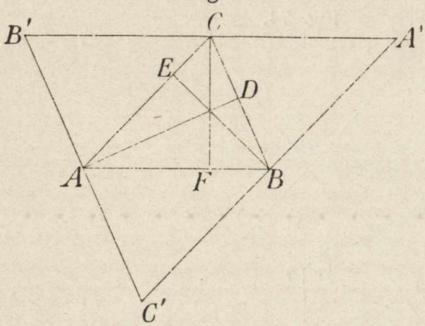
Zusatz. Die Symmetralen (Winkelhalbierenden) zweier Außenwinkel eines Dreiecks und die Symmetrale des ihnen nicht anliegenden Innenwinkels schneiden sich in einem Punkte, der von einer Dreiecksseite und den Verlängerungen der beiden gleichweit entfernt ist.

Welche Eigentümlichkeit besitzt die Figur 74 in bezug auf die Zahl der auf einer Geraden liegenden Eck- und Mittelpunkte und der durch einen solchen Punkt gehenden Geraden?

c) Schnittpunkt der Höhen.

Man lege durch die Ecken des Dreiecks ABC (Fig. 75) die Parallelen zu den Gegenseiten, so daß das Dreieck $A'\,B'\,C'$ entsteht. Da die Vierecke $ABCB'$ und $ACBC'$ Parallelogramme sind, so ist:

Fig. 75.



$$AB' = BC$$
$$AC' = BC$$

und daher

$$AB' = AC',$$

d. h. A ist der Mittelpunkt von $B'\,C'$; entsprechend läßt sich zeigen, daß B der Mittelpunkt von $A'\,C'$ und C der Mittelpunkt von $A'\,B'$ ist. Die Höhen AD, BC, CF sind daher die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks $A'\,B'\,C'$ und schneiden sich nach Satz 44 in einem Punkte[1]).

Satz 47. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Ist das Dreieck ABC ein spitzwinkliges, so muß auch das Dreieck $A'\,B'\,C'$ ein spitzwinkliges sein und es fällt dann der Schnittpunkt seiner Mittelsenkrechten und damit der Schnittpunkt der Höhen des ursprünglichen Dreiecks in das Innere des letzteren. Ist der Winkel ACB ein rechter, so ist auch der Winkel $B'\,C'\,A'$ ein rechter und der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'\,B'\,C'$ und damit der Höhenschnittpunkt des ursprünglichen Dreiecks fällt nach C. Ist endlich der Winkel ACB und daher auch der Winkel $A'\,C'\,B'$ ein stumpfer, so fällt der Höhenschnittpunkt außerhalb des Dreiecks ACB, und zwar liegt er oberhalb $B'A'$.

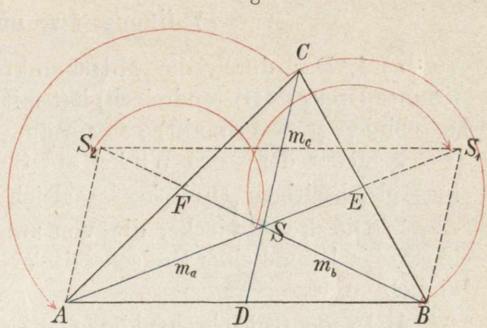
d) Schnittpunkt der Mittellinien.

Die Mittellinien m_a und m_b (Fig. 76) schneiden sich immer in einem Punkte S. Verbindet man C mit S und verlängert CS bis zum Schnittpunkte D mit AB, so läßt sich zeigen, daß D der Mittelpunkt von AB, also CD die dritte Mittellinie des Dreiecks ABC ist.

---

[1]) Dieser Beweis stammt von einem der berühmtesten deutschen Mathematiker Karl Friedrich Gauß, geboren in Braunschweig 1777, gestorben in Göttingen 1855.

Fig. 76.



Dreht man SCE um E um 180^0, so gelangt SCE nach BS_1E, durch Drehung um F gelangt SCF nach AS_2F. Es ist dann:

$SC = S_1B$ und $SC \parallel S_1B$

$SC = S_2A$ und $SC \parallel S_2A$,

mithin folgt:

$S_1B = S_2A$ und $S_1B \parallel S_2A$.

Verbindet man S_1 mit S_2, so ist nach Satz 31 das Viereck ABS_1S_2 ein Parallelogramm. Da S der Diagonalenschnittpunkt dieses Parallelogramms ist, so ist: $AS = SS_1$. Die Parallelen CD und BS_1 schneiden mithin (vgl. Kapitel XIII, e) auf AB gleiche Stücke ab, d. h. es ist $AD = DB$ und CD die dritte Mittellinie des Dreieckes ABC.

Da ferner:

$$SE = ES_1 = \frac{1}{2} SS_1 \text{ ist, so ist:}$$
$$SE = \frac{1}{2} AS.$$

Ebenso ist:

$$FS = FS_2 = \frac{1}{2} SS_2 \quad \text{und}$$
$$FS = \frac{1}{2} BS.$$

Da sich außerdem einfach zeigen läßt, daß $SD = \frac{1}{2} SC$ ist, so ergibt sich:

Satz 48. Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der jede Mittellinie so teilt, daß der Abschnitt an dem Eckpunkt doppelt so groß ist als derjenige an dem Seitenmittelpunkt[1]).

Der Schnittpunkt der Mittellinien heißt aus physikalischen Gründen der Schwerpu kt des Dreiecks.

Drei gerade Linien schneiden sich im allgemeinen in drei Punkten; es ist daher besonders bemerkenswert, wenn drei gerade Linien durch denselben Punkt gehen, also nur einen Schnittpunkt haben. Aus diesem Grunde heißen die Schnittpunkte der drei Mittelsenkrechten, der drei Winkelhalbierenden, der drei Höhen und der drei Mitteltransversalen eines Dreiecks **merkwürdige Punkte** des Dreicks.

Die beiden ersten merkwürdigen Punkte waren schon den Pythagoreern (um 500 v. Chr.) bekannt, während die Kenntnis der beiden letzteren sich erst bei Archimedes (287—212 v. Chr.; Syrakus) nachweisen läßt.

[1]) Zwei weitere Beweise dieses Satzes befinden sich in den Kapiteln XXI (S. 119 und XXII (S. 127).

e) Übungssätze und Aufgaben.

α) **1.** Das durch die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks bestimmte Dreieck (Mittendreieck) hat mit dem ersteren den Schnittpunkt der Mittellinien (Schwerpunkt) gemeinsam.

2. Jeder der sechs Winkel am Schnittpunkte der Mittelsenkrechten eines gleichseitigen Dreiecks ist gleich $\frac{2}{3} R$.

3. Die drei Dreiecke, die von zwei Symmetralen von Außenwinkeln eines Dreiecks und einer Dreiecksseite gebildet werden, enthalten die gleichen Winkel.

4. In dem gleichschenkligen Dreieck mit dem Winkel $\frac{1}{3} R$ an der Grundlinie teilen die beiden Mittelsenkrechten der Schenkel die Grundlinie in drei gleiche Teile.

5. Im gleichschenkligen Dreieck liegen der Höhendurchschnittspunkt und der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden auf der Mittelsenkrechten zur Grundlinie.

β) **1.** Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von dem die Mittelpunkte der drei Seiten gegeben sind.

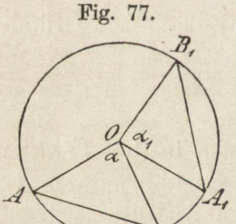
2. Es soll von dem unzugänglichen Scheitel eines Winkels aus die Senkrechte auf eine die beiden Schenkel schneidende Gerade gefällt werden. (Satz 47.)

Kapitel XV.

Kreisbogen, Sehnen und Tangenten.

a) In Kapitel IV wurde gezeigt, daß ein von zwei Halbmessern gebildeter Winkel ein **Zentriwinkel** (Mittelpunktswinkel) genannt wird.

Fig. 77.



Sind in Fig. 77 die beiden Zentriwinkel $AOB = \alpha$ und $A_1 OB_1 = \alpha_1$ einander gleich, so lassen sich die beiden Winkel durch Drehung zur Deckung bringen. Dabei fällt, weil die Kreislinie bei jeder Drehung um ihren Mittelpunkt O ihre Spur nicht verlassen kann, auch der Bogen AB auf den Bogen $A_1 B_1$, ebenso die Sehne AB auf die Sehne $A_1 B_1$, der Sektor AOB auf den Sektor $A_1 OB_1$ und das Segment AB auf das Segment $A_1 B_1$. Dasselbe Ergebnis erhält man auch, wenn man in kongruenten Kreisen gleiche Zentriwinkel betrachtet.

Satz 49. In einem Kreise oder in kongruenten Kreisen gehören zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Bogen, Sehnen, Sektoren und Segmente.

Welche Umkehrungen ergeben sich aus Satz 49?

Lassen wir in obiger Figur den einen Zentriwinkel AOB größer werden, so vergrößert sich gleichzeitig die Sehne AB, der Bogen AB und der Sektor AOB.

Zusatz. In einem oder in kongruenten Kreisen gehören zu dem größeren Zentriwinkel der größere Bogen, die größere Sehne und der größere Sektor.

Welche Umkehrungen läßt dieser Zusatz zu?

Was kann man über die Bogen und Sektoren aussagen, die zu einem spitzen, rechten, stumpfen, gestreckten, überstumpfen und vollen Zentriwinkel gehören?

In einem Kreise oder in kongruenten Kreisen ist der Bogen, die Sehne, der Sektor und das Segment eine **Funktion** des **Zentriwinkels.**

b) Verbindet man die Endpunkte einer Sehne mit dem Mittelpunkte eines Kreises, so ist das entstehende Dreieck nach der Erklärung des Kreises ein gleichschenkliges. Wenden wir auf dieses Dreieck den Satz 14 an, so ergibt sich:

Satz 50. Das vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne gefällte Lot und die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit der Sehnenmitte fallen mit der Symmetrale der Sehne und der Symmetrale des zu ihr gehörigen Zentriwinkels zusammen.

Insbesondere folgt hieraus, daß jede Sehnensymmetrale durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Da jeder Punkt der Sehnensymmetrale Mittelpunkt eines Kreises sein kann, der durch ihre Endpunkte geht, so ergibt sich:

Geometrischer Ort 6. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, ist die Symmetrale dieser Punkte.

Zur Bestimmung des Mittelpunktes eines Kreises sind mithin zwei Sehnen erforderlich. Da aber durch drei Punkte zwei einen gemeinsamen Punkt besitzende Sehnen gegeben sind, so ist dadurch der Mittelpunkt und der Kreis selbst bestimmt.

Zusatz. Durch drei Punkte läßt sich nur ein Kreis hindurchlegen.

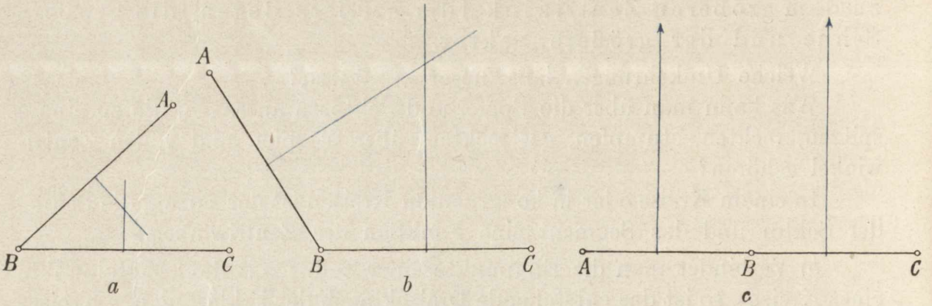
Aufgabe. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der durch drei gegebene Punkte geht.

Die Lösung ergibt sich unmittelbar.

Diskussion der Lösung. (Fig. 78 *a*, *b*, *c*.) Die Größe des Kreises hängt von der Lage der drei Punkte A, B, C ab. Ist der Winkel der Linien AB und AC klein, so haben die Mittellote zu ihnen nur geringe Länge bis zu ihrem Schnittpunkt. Wächst der Winkel ABC, so wird der Radius des Kreises größer, da der Schnittpunkt der Mittellote weiter fortrückt.

Lassen wir den Winkel ABC wachsen bis er ein gestreckter wird, so rückt der Schnittpunkt der Mittellote immer weiter fort, der Radius des Kreises wird immer größer. Im Grenzfalle, bei dem der Winkel ABC ein gestreckter ist, sagen wir, der Radius sei unendlich groß geworden. Da die

Fig. 78.

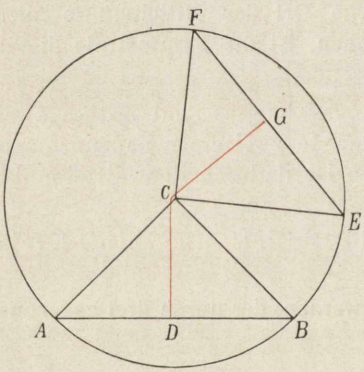


Punkte A, B, C immer in gerader Linie liegen, so ist der Kreis in diesem Grenzfalle selbst eine Gerade.

Jede Gerade läßt sich als ein Kreis mit unendlich großem Radius auffassen.

Lassen wir die drei Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, immer näher zusammenrücken, bis sie zusammenfallen, so wird der Radius der Kreislinie immer kleiner bis im Grenzfalle der Kreis mit seinem Mittelpunkte zusammenfällt, der Radius also Null wird.

Fig. 79.

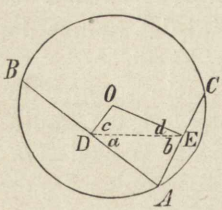


Jeder Punkt läßt sich als ein Kreis mit dem Radius Null auffassen.

Es seien in Figur 79 die Sehnen AB und EF einander gleich. Dann müssen nach Lehrsatz 49 auch die zugehörigen Zentriwinkel ACB und FCE gleich sein. Diese letzteren lassen sich durch Drehung zur Deckung bringen. Dann fällt der Fußpunkt G des Lotes CG mit dem Fußpunkte D des Lotes CD zusammen, da man von einem Punkte aus nur ein Lot auf eine Gerade fällen kann. Mithin ist $CD = CG$, d. h.:

Satz 51. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

Fig. 80.



Ist von zwei Sehnen AB und AC (Fig. 80) eines Kreises $AB > AC$, so ist, wenn man von dem Mittelpunkte auf die Sehnen die Lote OD und OE fällt und D mit E verbindet, in dem Dreieck DEA nach Satz 16:

$$\sphericalangle b > \sphericalangle a;$$

mithin ist in dem Dreieck ODE $\sphericalangle c > \sphericalangle d$ und daher nach Satz 17 auch $OE > OD$, d. h.:

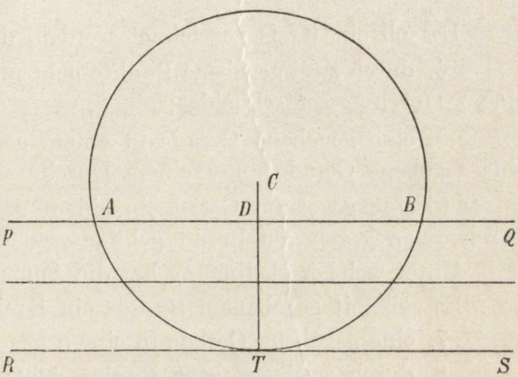
Satz 52. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die größere den kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Durchläuft der Abstand der Sehne vom Mittelpunkte alle Werte von 0 bis r, so erlangt die Sehne alle Werte von $2r$ bis 0. Mithin ist die **Länge der Sehne** eine **Funktion** ihres **Abstandes** vom Mittelpunkte.

c) Erklärung. Eine gerade Linie, die den Kreis schneidet, heißt eine **Sekante.**

Verschieben wir in Figur 81 die Sekante PQ, die vom Mittelpunkte des Kreises den Abstand CD hat, parallel mit sich selbst, so daß ihr Abstand vom Mittelpunkte größer wird, so wird die auf ihr liegende Sehne AB kleiner. Wird der Sekantenabstand vom Mittelpunkte CT gleich dem Kreishalbmesser, so wird die auf dieser Sekante liegende Sehne gleich Null. Eine solche Sekante RS hat mit dem Kreise zwei in einen Punkt zusammenfallende Punkte gemeinsam. Sie **berührt** den Kreis und heißt eine **Tangente** (Berührende).

Fig. 81.



In Figur 81 fallen in den Berührungspunkt T der Tangente RS nicht nur die Endpunkte der auf ihr liegenden Sehne (Nullsehne), sondern auch ihr Mittelpunkt zusammen. Da aber nach Satz 50 die Verbindungslinie des Sehnenmittelpunktes mit dem Kreismittelpunkte auf der Sehne senkrecht steht, so muß auch CT senkrecht zu RS sein. Wir nennen die Linie CT den Berührungsradius der Tangente RS. Es folgt hieraus:

Satz 53. Jede Tangente steht auf ihrem Berührungsradius senkrecht.

Welche Umkehrungen ergeben sich aus dem Satze 53?

Aufgabe. Es soll an einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte die Tangente gezeichnet werden.

Aus Satz 53 ergibt sich:

Geometrischer Ort 7. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, ist das in diesem Punkte auf der Geraden errichtete Lot.

Übungssatz. Unter allen Sehnen, die man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises ziehen kann, ist diejenige die kleinste, die in diesem Punkte halbiert wird.

Übungsaufgaben.

1. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises bestimmt werden, der einen gegebenen Halbmesser hat und

a) durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht,

b) eine gegebene Gerade berührt. (Vgl. Geometrischer Ort 4.)

2. Es soll der geometrische Ort der Halbierungspunkte aller Sehnen eines Kreises bestimmt werden, die eine gegebene Länge haben.

3. Es soll der geometrische Ort aller Punkte bestimmt werden, von denen aus man Tangenten von gegebener gleicher Länge an einen gegebenen Kreis ziehen kann.

Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der

4. durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade unter einem Durchmesser schneidet;

5. eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und eine gegebene Gerade unter einem Durchmesser schneidet;

6. eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Unter welcher Bedingung hat die Aufgabe keine Lösung?

Es soll mit gegebenem Radius ein Kreis gezeichnet werden, der

7. eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt;

8. durch zwei gegebene Punkte geht;

9. zwei gegebene Geraden berührt;

10. durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade unter einem Durchmesser schneidet;

11. durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt.

12. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises bestimmt werden, der einen gegebenen Halbmesser hat und eine gegebene Gerade unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

13. Es soll mit gegebenem Halbmesser ein Kreis gezeichnet werden, der zwei gegebene Geraden unter Sehnen von gegebener Länge schneidet.

14. Es soll in einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge gezeichnet werden, so daß die Sehne *a*) durch eine gegebene Sehne, *b*) durch einen den ersten Kreis schneidenden zweiten Kreis halbiert werde.

15. Es soll ein Punkt bestimmt werden, von dem aus man an zwei gegebene Kreise Tangenten von gleicher Länge ziehen kann.

16. Es soll an einen gegebenen Kreis eine Tangente so gezeichnet werden, daß sie

a) einer gegebenen Geraden parallel,

b) zu einer gegebenen Geraden senkrecht ist,

c) mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

Kapitel XVI.

Peripheriewinkel.

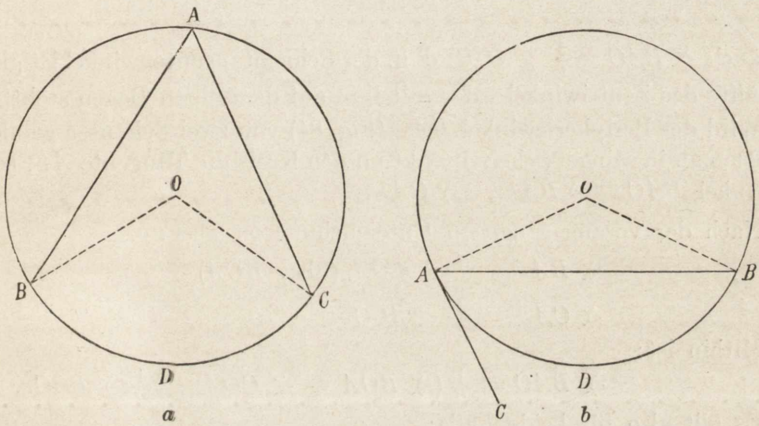
a) Erklärung.

Ein Winkel, dessen Schenkel zwei von demselben Punkte der Kreislinie ausgehende Sekanten sind, heißt ein **Peripheriewinkel** (Sehnenwinkel).

Wir sagen von dem Peripheriewinkel, daß er auf dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen steht; so steht der Winkel BAC auf dem Bogen BDC. (Fig. 82 *a*.)

Da die Tangente als ein Grenzfall der Sekante aufzufassen ist, so kann der eine Schenkel des Peripheriewinkels auch eine Tangente sein. Einen solchen Peripheriewinkel nennt man einen **Sehnentangentenwinkel.**

Fig. 82.



In Figur 82 *b* ist BAC ein Sehnentangentenwinkel, der auf dem Bogen ADB steht.

Zu jedem Peripheriewinkel gehört ein Zentriwinkel, der mit ihm auf dem gleichen Bogen steht; in Figur 82 *a* gehört zu dem Peripheriewinkel BAC der Zentriwinkel BOC, in Figur 82 *b* gehört zu dem Sehnentangentenwinkel BAC der Zentriwinkel AOB.

Ändert in beiden Fällen der Peripheriewinkel seine Größe, so ändert auch der Bogen seine Größe und damit auch der auf dem Bogen stehende Zentriwinkel. Es muß daher zwischen der Größe des Peripheriewinkels und des zugehörigen Zentriwinkels eine Beziehung bestehen.

Zur Ableitung dieser Beziehung betrachten wir zunächst den Sehnentangentenwinkel BAC (Fig. 83) und ziehen die Symmetrale OE des zugehörigen Zentriwinkels, die auf AB senkrecht steht. Da außerdem $AC \perp AO$ ist (Satz 53), so ergänzen $\sphericalangle AOE$ und $\sphericalangle BAC$ denselben Winkel OAE zu einem Rechten und sind daher einander gleich. Da aber $\sphericalangle AOE = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$,

Fig. 83.

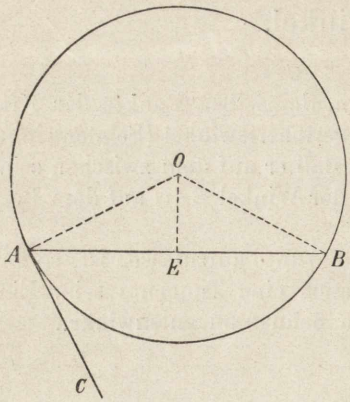
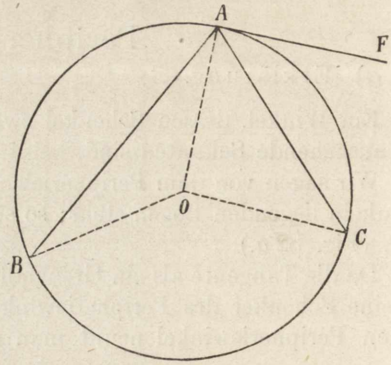


Fig. 84.



so ist auch $\sphericalangle\ BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle\ AOB$; d. h. der Sehnentangentenwinkel ist gleich der Hälfte des Zentriwinkels, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Wird der Peripheriewinkel BAC (Fig. 84) von zwei Sekanten gebildet, und legt man in seinem Scheitelpunkt an den Kreis die Tangente AF, so ist der Winkel $BAC = \sphericalangle BAF - \sphericalangle\ CAF$.

Nach der vorangegangenen Untersuchung ist aber:

$$\sphericalangle\ BAF = \frac{1}{2} \sphericalangle\ BOA \text{ (über } BCA)$$

$$\sphericalangle\ CAF = \frac{1}{2} \sphericalangle\ AOC$$

Mithin ist:

$$\sphericalangle\ BAC = \frac{1}{2} (\sphericalangle\ BOA - \sphericalangle\ COA) = \frac{1}{2} \sphericalangle\ BOC.$$

Es gilt also für beide Fälle:

Satz 54. Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß als der Zentriwinkel, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Da der Zentriwinkel über einem Halbkreis gleich einem gestreckten Winkel ist, so folgt:

Zusatz 1. Der Peripheriewinkel über dem Halbkreise ist ein Rechter.

(Satz des Thales; Thales von Milet, 600 v. Chr.)

Es läßt sich über demselben Bogen nur ein Zentriwinkel, aber unzählige Peripheriewinkel zeichnen; diese haben daher alle gleiche Größe.

Da zu gleichen Bogen eines Kreises (oder gleicher Kreise) gleiche Zentriwinkel gehören, so sind auch alle Peripheriewinkel, die auf gleichen Bogen stehen, einander gleich.

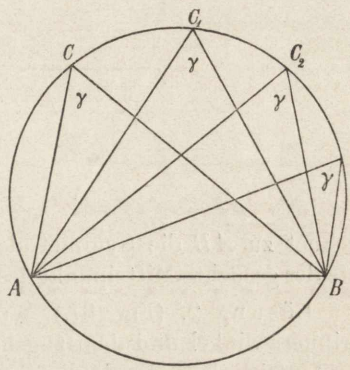
Zusatz 2. Peripheriewinkel, die auf demselben oder gleichen Bogen (eines Kreises oder gleicher Kreise) stehen, sind einander gleich.

Bezeichnen wir zwei Bogen, die sich zu einem ganzen Kreis ergänzen, als entgegengesetzte Bogen, so folgt:

Zusatz 3. Peripheriewinkel, die auf entgegengesetztem Bogen stehen, betragen zusammen zwei Rechte.

Da die Peripheriewinkel (Fig. 85), die über der Sehne AB stehen, nach Zusatz 2 einander gleich sind, so ist der Kreisbogen ACB der geometrische Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel γ, deren Schenkel durch die Punkte A und B gehen.

Fig. 85.



Ist der Winkel γ ein spitzer, so ist der Bogen ACB größer, ist $\gamma = 1\ R$, so ist der Bogen gleich, und ist γ ein stumpfer Winkel, so ist der Bogen kleiner als der Halbkreis.

Da durch die Verbindungslinien der Punkte des Kreisbogens ACB mit den Endpunkten der Sehne AB Dreiecke entstehen, welche die Seite AB und den ihr gegenüberliegenden Winkel γ gemeinsam haben, so sprechen wir das Ergebnis, wie folgt aus:

Geometrischer Ort 8. Der geometrische Ort für die dritten Eckpunkte aller Dreiecke mit einer gegebenen Seite c und dem ihr gegenüberliegenden Winkel γ ist der Kreisbogen, der die Seite c als Sehne und den Winkel γ als Peripheriewinkel faßt.

Folgerung. Der entgegengesetzte Bogen ist der geometrische Ort für die dritten Eckpunkte aller Dreiecke, welche die Seite c und als gegenüberliegenden Winkel den Supplementwinkel von γ d. h. den $\sphericalangle (2\ R - \gamma)$ enthalten.

Ist in Figur 85 der Winkel γ ein Rechter, die Sehne AB mithin ein Durchmesser und der Bogen ACB ein Halbkreis, so sind die Dreiecke rechtwinklige mit gemeinsamer Hypotenuse. Wegen des häufigen Auftretens dieses Sonderfalles, sprechen wir dieses Ergebnis als besonderen geometrischen Ort aus.

Geometrischer Ort 9. Der geometrische Ort für die Scheitel der rechten Winkel aller rechtwinkligen Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse ist der Kreis, der die Hypotenuse als Durchmesser hat.

b) Aufgabe. Es soll der Kreisbogen gezeichnet werden, der eine gegebene Strecke (s) als Sehne und einen gegebenen Winkel (γ) als Peripheriewinkel faßt.

Lösung 1. (Fig. 86.) Wir benutzen die Eigenschaft des Sehnentangentenwinkels und tragen an der gegebenen Strecke $AB = s$ in A den gegebenen Winkel γ an. Es muß dessen freier Schenkel AD Tangente an den gesuchten Kreisbogen sein. Errichtet man daher auf AD in A das Lot und

Fig. 86.

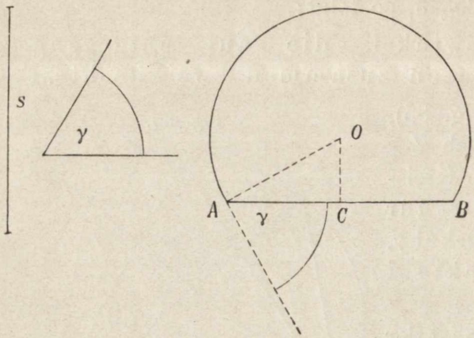
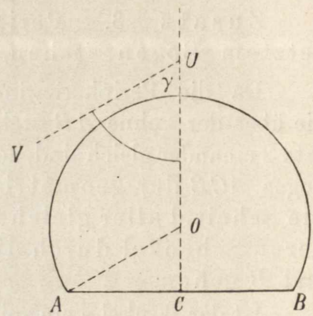


Fig. 87.



zeichnet zu AB die Symmetrale, so muß deren Schnittpunkt O mit dem Lote der gesuchte Mittelpunkt des Kreisbogens und OA sein Halbmesser sein.

Lösung 2. (Fig. 87.) Wir benutzen die Beziehung zwischen dem Peripheriewinkel und dem zugehörigen Zentriwinkel sowie die Eigenschaft des Zentriwinkels durch die Symmetrale der zugehörigen Sohne halbiert zu werden. Man trage in einem beliebigen Punkte U der Symmetralen der gegebenen Strecke AB den gegebenen Winkel γ an, ziehe durch A zu dessen freien Schenkel UV die Parallele, welche die Symmetrale zu AB in dem gesuchten Mittelpunkte O trifft.

c) Folgerungen für das Dreieck.

Zufolge des geometrischen Ortes 8 ist durch eine Seite c und den ihr gegenüberliegenden Winkel γ der Radius r des Umkreises des Dreiecks bestimmt. Es sind mithin c, γ, r abhängige Stücke derart, daß aus zwei derselben sich das dritte bestimmen läßt. Aus c und γ kann man r, aus c und r kann man γ und aus r und γ kann man c finden.

Läßt man für einen gegebenen Wert von c den Winkel γ wachsen, so nimmt r ab. Für $\gamma = 90^0$ wird $r = \frac{c}{2}$; wird der Winkel γ ein stumpfer, so nimmt r wieder zu.

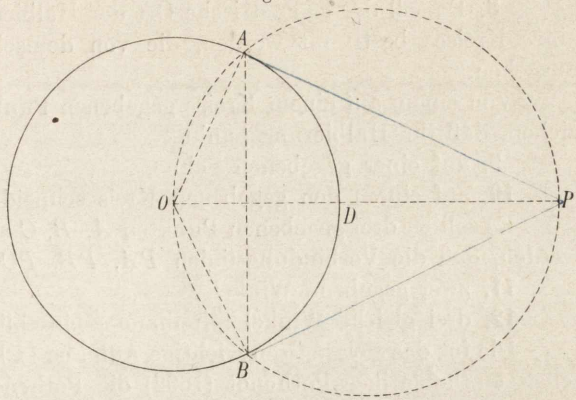
Wächst bei einem gegebenen Werte von α die Seite c, so wächst auch r. Mithin ist r eine Funktion von c und γ. Entsprechend ist c eine Funktion von r und γ, γ eine Funktion von c und r.

d) Zieht man in zwei beliebigen Punkten eines Kreises Tangenten, so werden sich dieselben im allgemeinen im Endlichen schneiden. Man kann daher umgekehrt von jedem Punkte außerhalb eines Kreises an den Kreis zwei Tangenten zeichnen.

Aufgabe. Es sollen von einem Punkte außerhalb eines Kreises an den Kreis die beiden Tangenten gezeichnet werden.

Konstruktion. (Fig. 88.) Man verbinde den gegebenen Punkt P mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises und schlage über OP als Durch-

Fig. 88.



messer den Kreis, der den gegebenen Kreis in zwei Punkten A und B schneidet. Die Verbindungslinien PA und PB sind dann die verlangten Tangenten.

Verbindet man A mit B, so sind die Sehnentangentenwinkel PAB und PBA, da sie auf demselben Bogen ADB stehen, einander gleich; mithin ist das Dreieck PAB gleichschenklig und $PA = PB$.

Da auch das Dreieck ABO ein gleichschenkliges ist, so ist OP die gemeinschaftliche Symmetrale der beiden über AB stehenden gleichschenkligen Dreiecke. Da ferner OP auch durch den Kreismittelpunkt geht, so ist diese Linie auch die Symmetrale des Kreises; d. h. die ganze Figur ist zu der Verbindungsgeraden OP symmetrisch. Es wird daher auch der Winkel APB durch OP halbiert.

Satz 55. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises an den Kreis die Tangenten, so sind die Strecken bis zu den Berührungspunkten einander gleich; die Verbindungslinie des Punktes mit dem Kreismittelpunkte halbiert den von den Tangenten gebildeten Winkel.

Übungsaufgaben.

1. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises bestimmt werden, der

a) die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels,

b) zwei sich schneidende Geraden berührt.

2. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises bestimmt werden, der zwei gegebene parallele Linien berührt.

3. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der zwei gegebene Geraden, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt.

4. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der zwei parallele Gerade berührt und eine die ersteren Geraden schneidende Gerade unter einem Durchmesser schneidet.

5. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der drei gegebene gerade Linien berührt. (Drei Fälle.)

6. Es soll durch einen Punkt innerhalb eines gegebenen Kreises eine Sehne von gegebener Länge gezogen werden.

7. Es soll durch einen Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante so gezogen werden, daß die auf ihr liegende Sehne eine gegebene Länge hat.

8. Es soll der geometrische Ort der Halbierungspunkte aller Sehnen eines Kreises bestimmt werden, die von demselben Punkte des Kreises ausgehen.

Von einem auf einem Kreise gegebenen Punkte aus eine Sehne so zu ziehen, daß ihr Halbierungspunkt

9. auf einer gegebenen Sehne,

10. auf einem den gegebenen Kreis schneidenden Kreis liegt.

Es soll zu drei gegebenen Punkten A, B, C ein vierter P so bestimmt werden, daß die Verbindungslinien PA, PB, PC

11. zwei gegebene Winkel,

12. drei gleiche Winkel miteinander einschließen

Die für das Feldmessen wichtige Aufgabe 11 heißt nach dem französischen Mathematiker Pothenot (1692) die Pothenotsche Aufgabe; sie war schon früher (1617) von dem Holländer Snellius behandelt worden[1]).

13. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebener Hypotenuse c gezeichnet werden, wenn der Scheitel des rechten Winkels

a) auf einer gegebenen Geraden,

b) auf einem gegebenen Kreise liegt.

Es soll mit gegebener Hypotenuse c ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn außerdem gegeben ist:

14. h_c; **15.** p.

16. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus c, h_a, h_b.

Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

17. c, γ, h_c; **18.** c, γ, h_a; **19.** p, q, γ;
20. c, γ, m_c; **21.** u, v, γ; **22.** a, α, $b+c=s$;
23. c, γ, $a-b=d$; **24.** $a+b+c=s$, h_a, α;
25. $a-b=d$, $\alpha-\beta=\delta$, h_a.

Es soll ein Parallelogramm gezeichnet werden aus:

26. a, ε, h_a; **27.** b, ε, h_b; **28.** e, f_1, α;
29. e, β, ε; **30.** e, $\sphericalangle\, a f_1$, $\sphericalangle\, b f_1$,

Kapitel XVII.

Zwei Kreise.

a) Erklärungen.

1. Zwei Kreise heißen konzentrisch oder exzentrisch, je nachdem sie den Mittelpunkt gemeinsam haben oder nicht.

2. Haben zwei konzentrische Kreise ungleiche Halbmesser, so schließen ihre Umfänge eine Fläche ein, die Kreisring genannt wird.

---

[1]) Die Pothenotsche Aufgabe findet in der Trigonometrie eine rechnerische Behandlung.

3. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier exzentrischer Kreise wird die Zentralstrecke der Kreise genannt. Die unbegrenzte Gerade, auf der die Zentralstrecke liegt, heißt die Zentrale der beiden Kreise.

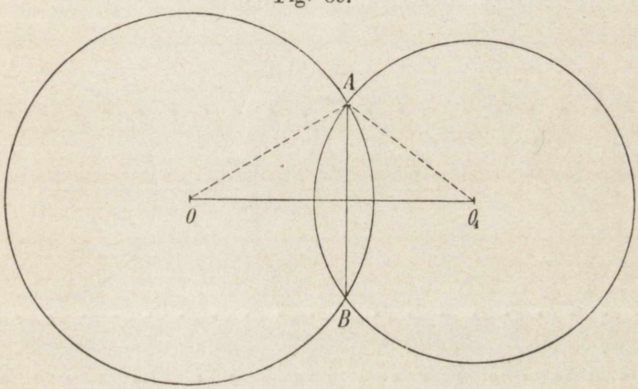
Da nach Kapitel XV, *b* ein Punkt als ein Kreis mit dem Halbmesser Null aufgefaßt werden kann, so bezeichnet man auch die Verbindungslinie eines Punktes mit dem Mittelpunkt eines Kreises als Zentrale des Punktes und des Kreises.

Die Zentrale zweier Kreise ist Symmetrieachse für beide Kreise. Zwei Kreise ergeben, wie sie immer liegen mögen, stets eine symmetrische Figur.

b) Kreise mit zwei gemeinsamen Punkten.

Da durch drei gegebene Punkte nur ein Kreis gelegt werden kann, so können zwei Kreise höchstens zwei Punkte miteinander gemeinsam haben, wenn sie nicht in ihrem ganzen Verlauf nach zusammenfallen und demnach alle Punkte gemeinsam haben sollen. Zwei solche Kreise schneiden einander.

Fig. 89.



Es seien (Fig. 89) O und O_1 die Mittelpunkte der Kreise mit den Radien r und r_1; A und B seien die Schnittpunkte.

Die Zentrale OO_1 steht als Symmetrale beider Kreise zur gemeinsamen Sehne AB senkrecht und halbiert dieselbe. Die Zentralstrecke OO_1 ist, wie sich aus dem Dreieck OAO_1 ergibt, kleiner als die Summe $r + r_1$ und größer als die Differenz $r - r_1$.

c) Kreise mit einem gemeinsamen Punkte.

1. Halten wir den größeren Kreis O fest und verschieben den kleineren Kreis O_1 so, daß sein Mittelpunkt sich von O entfernt, so rücken die Punkte A und B näher zusammen und fallen schließlich auf der Zentralen zusammen. (Fig. 90.) Aus der gemeinsamen Sekante wird eine gemeinsame Tangente deren Berührungspunkt C auf der Zentrale liegt. Die Kreise **berühren** einander von **außen**; ihre Zentralstrecke ist gleich der Summe $r + r_1$.

2. Verschieben wir den kleineren Kreis in umgekehrter Richtung, so daß sich der Mittelpunkt O_1 dem Mittelpunkte O nähert, so entfernen sich

Fig. 90.

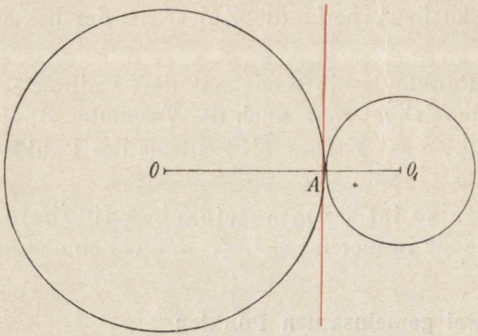
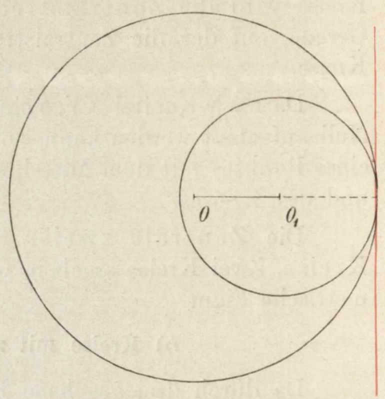
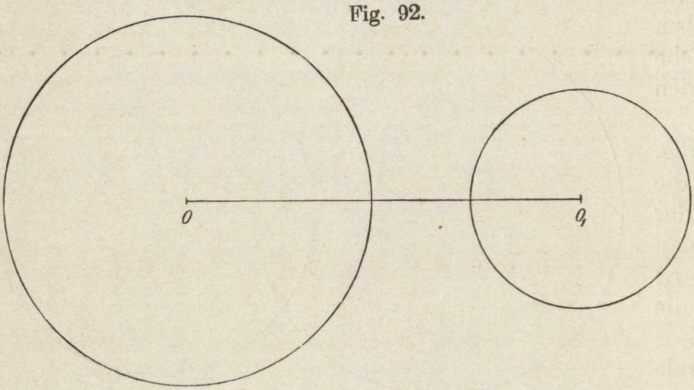


Fig. 91.



zunächst die Punkte A und B voneinander, nähern sich dann aber einander und fallen schließlich in einen Punkt der Zentrale zusammen. (Fig. 91.)

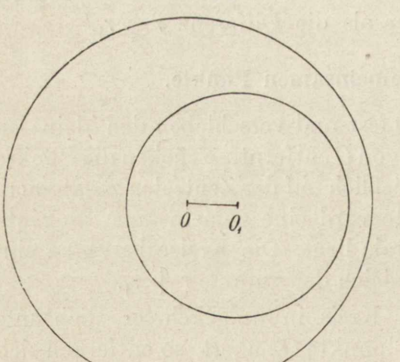
Fig. 92.



Der kleinere Kreis liegt innerhalb des größeren und **berührt** ihn von **innen.** Die Zentralstrecke ist dann gleich der Differenz $r - r_1$.

Wir sagen in diesem Falle auch der größere Kreis berührt den kleineren **umschließend.**

Fig. 93.



d) Kreise mit keinem gemeinsamen Punkte.

1. Entfernen sich im Falle *c*, 1) die Kreise noch weiter voneinander, so haben die Kreise keinen Punkt mehr gemeinsam, **sie liegen ganz auseinander.** Die Zentralstrecke OO_1 ist **größer** als die **Summe** $r + r_1$. (Fig. 92.)

2. Wird im Falle *c*, 2) die **Zentralstrecke** OO_1 **kleiner als die Differenz**

$r - r_1$, so haben die Kreise ebenfalls keinen Punkt mehr gemeinsam; der **kleinere Kreis** liegt ganz **innerhalb** des **größeren.** (Fig. 93.)

3 Wird im vorhergehenden Falle die **Zentralstrecke** OO_1 **gleich Null,** so sind die Kreise **konzentrisch.**

e) Zusammenfassung.

1. Die Zentralstrecke zweier sich schneidenden Kreise ist kleiner als die Summe und größer als die Differenz ihrer Halbmesser.

2. Berühren sich zwei Kreise von außen, so ist ihre Zentralstrecke gleich der Summe, berühren sie sich von innen, so ist sie gleich dem Unterschiede ihrer Halbmesser. Der Berührungspunkt liegt auf der Zentralen.

3. Liegt von zwei Kreisen der eine innerhalb des andern, so ist ihre Zentralstrecke kleiner als der Unterschied, liegt er außerhalb, so ist sie größer als die Summe ihrer Halbmesser.

f) Geometrische Örter.

Unter den zur Zeichnung eines Kreises gegebenen Bedingungen kann sich jetzt auch die finden, daß der gesuchte Kreis einen gegebenen Kreis berühren soll. Da der gegebene Kreis in eine Gerade (Halbmesser unendlich groß), oder in einen Punkt (Halbmesser gleich Null) übergehen kann, so ist diese Bedingung die allgemeinste und enthält die Bedingungen, daß der gesuchte Kreis eine gegebene Gerade berühren oder durch einen gegebenen Punkt gehen soll, als spezielle Fälle.

Es ergeben sich daher aus den Betrachtungen unter *c* die folgenden geometrischen Örter.

Geometrischer Ort 10. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, ist die durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehende Gerade.

Anmerkung. Man untersuche, welche Punkte der Geraden nicht Mittelpunkte werden können, ferner auf welchem Teile der Geraden der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegen muß, damit Berührung von außen, innen oder umschließende Berührung stattfindet.

Inwiefern ist der geometrische Ort 7 (Kapitel XV *c*) ein Spezialfall des geometrischen Ortes 10?

Geometrischer Ort 11. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren und einen gegebenen Halbmesser haben, besteht aus zwei dem gegebenen Kreise konzentrischen Kreisen, deren Halbmesser gleich der Summe und Differenz der gegebenen Halbmesser sind.

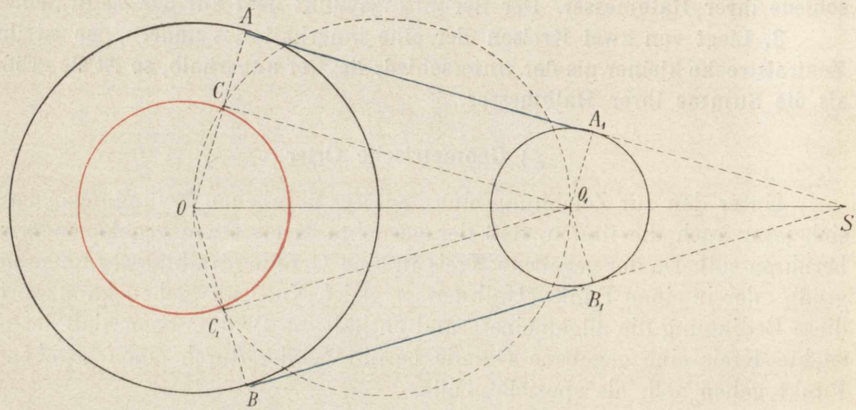
Anmerkung. In welchem Falle erhalten wir als geometrischen Ort nur einen Kreis? Auf welchem Kreise liegen die Mittelpunkte der von außen und auf welchem Kreise die Mittelpunkte der von innen berührenden Kreise? Wann tritt umschließende Berührung ein?

Inwiefern sind die in den Übungsaufgaben 1 *a*, *b*, Kapitel XV, abzuleitenden geometrischen Örter Spezialfäl'e des geometrischen Ortes 11?

g) Gemeinschaftliche Tangenten zweier Kreise. (L.)

1. Es seien (Fig. 94) O und O_1 die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise, die ganz auseinander liegen sollen. In diesem Falle gibt es zunächst

Fig. 94.



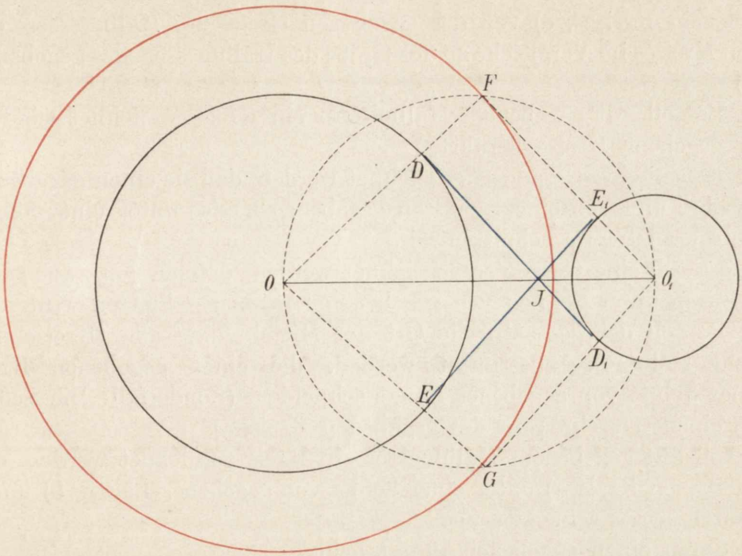
zwei Tangenten AA_1 und BB_1, die je auf gleichen Seiten der Kreise liegen; solche gemeinsame Tangenten nennen wir **äußere gemeinschaftliche Tangenten.**

Denkt man sich die Tangenten AA_1 und BB_1 parallel zu sich selbst verschoben bis A_1 und B_1 mit O_1 zusammenfallen, so werden diese Linien in den Lagen O_1C und O_1C_1 Tangenten an einem dem Kreise O konzentrischen Kreis, dessen Halbmesser gleich der Differenz der Halbmesser der gegebenen Kreise ist. Diese Linien kann man daher mittels des Kreises über OO_1 als Durchmesser leicht finden. Mittels der Punkte C und C_1 erhält man dann die Punkte A und B und durch Parallelen von O_1 zu OA und OB auch die Punkte A_1 und B_1.

2. Außer den äußeren Tangenten gibt es noch zwei gemeinsame Tangenten DD_1 und EE_1 (Fig. 95), die je auf verschiedenen Seiten der Kreise liegen. Diese Tangenten heißen **innere gemeinschaftliche Tangenten.**

Denken wir uns DD_1 und EE_1 so parallel mit sich selbst verschoben bis D_1 und E_1 mit O_1 zusammenfallen, so werden diese Linien in den Lagen O_1F und O_1G Tangenten an einem dem Kreise O konzentrischen Kreise, dessen Halbmesser gleich der Summe der Halbmesser der gegebenen Kreise ist. Die Punkte F und G findet man dann wie in 1.

Fig. 95.



Da die Kreise in bezug auf die Zentrale symmetrisch liegen, so müssen sich sowohl die äußeren als auch die inneren gemeinsamen Tangenten auf der Zentrale schneiden.

Determination der Aufgabe. Man untersuche folgende Fälle: 1) Die beiden Kreise berühren sich von außen oder von innen. 2) Die Kreise schneiden sich. 3) Von den beiden Kreisen umschließt der eine den andern.

h) Übungsaufgaben.

1. Es soll der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kreise bestimmt werden, die zwei gegebene **konzentrische Kreise** berühren.

2. Es soll um einen gegebenen Mittelpunkt ein Kreis gezeichnet werden, der einen gegebenen Kreis berührt.

(Man untersuche die Anzahl der Lösungen für die verschiedenen Lagen des gegebenen Punktes.)

3. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der durch einen gegebenen Punkt P geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkt $P^{\prime}$ berührt.

4. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt. (Anzahl der Lösungen!)

5. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte und einen gegebenen Kreis berührt. (Anzahl der Lösungen!)

6. Es soll mit gegebenem Halbmesser ein Kreis gezeichnet werden, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt. (Die Anzahl der Lösungen hängt ab *a*) von der Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises, *b*) von der gegebenen Größe des Halbmessers des gesuchten Kreises im Vergleiche zu der Größe des Halbmessers des gegebenen Kreises.)

7. Es soll mit gegebenem Halbmesser ein Kreis gezeichnet werden, der zwei gegebene Kreise berührt.

8. Es soll eine Gerade so gezeichnet werden, daß sie einen gegebenen Kreis berührt und von einem zweiten gegebenen Kreise unter einer Sehne von gegebener Länge geschnitten wird.

9. Es soll eine Gerade so gezeichnet werden, daß sie von zwei gegebenen Kreisen unter Sehnen von gegebenen Längen geschnitten wird.

10. Es soll der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise mit gegebenem Halbmesser bestimmt werden, die einen gegebenen Kreis unter einer Sehne von gegebener Länge schneiden. (Sonderfall: Die Sehne ist gleich einem Durchmesser des gegebenen Kreises.)

Es soll mit gegebenem Halbmesser ein Kreis gezeichnet werden, der einen gegebenen Kreis *a*) unter einer Sehne von gegebener Länge, *b*) unter einem Durchmesser schneidet und

11. durch einen gegebenen Punkt geht,

12. eine gegebene Gerade berührt,

13. einen gegebenen Kreis berührt.

Es soll mit gegebenem Halbmesser ein Kreis gezeichnet werden, der zwei gegebene Kreise

14. unter Durchmessern,

15. unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Kapitel XVIII.

Ein- und umbeschriebene Figuren.

a) Erklärungen.

1. Eine geradlinige Figur heißt einem Kreise **einbeschrieben,** wenn ihre Eckpunkte auf dem Umfang eines Kreises liegen, ihre Seiten also Kreissehnen sind.

Der Kreis ist dann der Figur umbeschrieben und heißt der **Umkreis** der Figur; sein Halbmesser wird gewöhnlich mit r bezeichnet. Damit um eine gegebene Figur ein Kreis beschrieben werden kann, muß es einen Punkt geben, der von allen Ecken der Figur gleichweit entfernt ist.

2. Eine geradlinige Figur heißt einem Kreise **umbeschrieben,** wenn ihre Seiten Tangenten des Kreises sind.

Der Kreis ist der Figur **einbeschrieben** und er heißt der **Inkreis** der Figur; sein Halbmesser wird gewöhnlich mit ϱ bezeichnet.

3. Berührt ein Kreis eine Seite einer geradlinigen Figur von außen und zwei andere von innen, so nennt man den Kreis einen **Ankreis** der Figur.

Man bezeichnet die Halbmesser solcher Kreise nach den Seiten der Figur, die sie von außen berühren, mit ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c.

Damit **in** oder **an** eine gegebene Figur ein Kreis beschrieben werden kann, muß es einen Punkt geben, der von den Seiten der Figur gleichweit entfernt ist.

b) Ein- und umbeschriebene Dreiecke.

Aus Satz 45, Kapitel XIV *a*) folgt:

Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Ebenso folgt aus Satz 46, Kapitel XIV *b*:

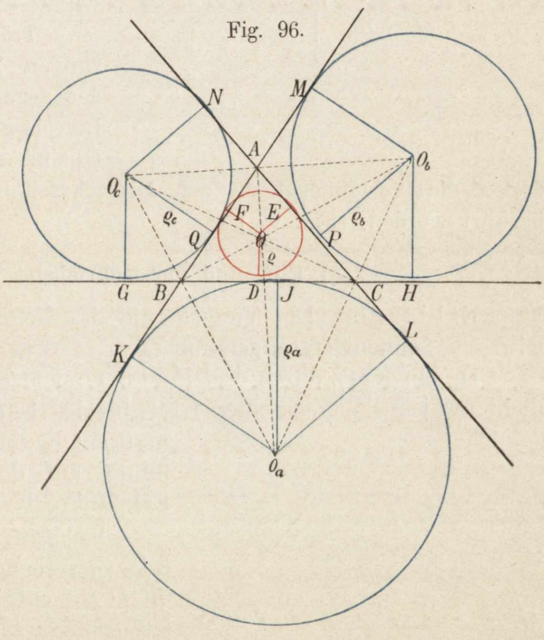
In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Endlich folgt aus Satz 46, Zusatz, Kapitel XIV *b*:

An jedes Dreieck lassen sich drei Kreise beschreiben.

Bezeichnet man die Seiten des Dreieckes ABC (Fig. 96) mit a, b, c, seinen Umfang $a + b + c$ mit $2s$, so daß

Fig. 96.



$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

ist, ferner die von den Ecken des Dreiecks A, B, C an den Inkreis gehenden Tangentenstrecken $AF = AE$ mit x, $BF = BD$ mit y, $CD = CE$ mit z, so ist:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s$$
$$x + y + z = s$$
$$x = s - (y + z) = \boldsymbol{s - a}$$
$$y = s - (x + z) = \boldsymbol{s - b}$$
$$z = s - (x + y) = \boldsymbol{s - c}.$$

Bezeichnen wir die aus B und C an den um O_a gezeichneten Ankreis gezogenen Tangenten $BJ = BK$ mit x_2 und $CJ = CL$ mit x_3, so ist:

$$x_2 + x_3 = a$$

Ferner ist:

$$AK = c + x_2$$
$$AL = b + x_3$$

und $$AK + AL = b + c + x_2 + x_3 = a + b + c = 2s.$$

Da aber $AK = AL$ ist, so folgt:

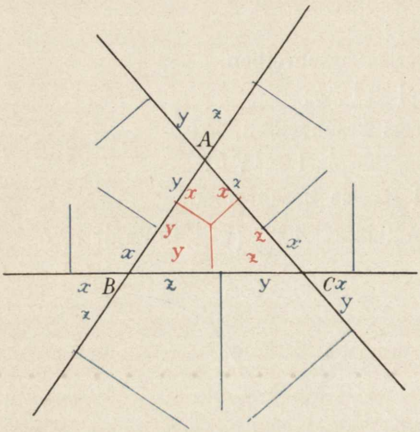
$$AK = AL = s, \text{ d. h.:}$$

Die aus einer Ecke eines Dreiecks an den gegenüberliegenden Ankreis gehende Tangentenstrecke ist gleich dem halben Umfange des Dreiecks.

Da $\quad c + x_2 = s; \quad b + x_3 = s,$

so ist: $\quad x_2 = s - c = z; \quad x_3 = s - b = y$, d. h.:

Fig. 97.



Trägt man auf jeder Seite eines Dreiecks die beiden an den Inkreis gehenden Tangentenstrecken in umgekehrter Reihenfolge ab, so sind ihre Endpunkte die Punkte, in denen die Seiten des Dreiecks von den drei Ankreisen berührt werden.

Es ist ferner:

$$BK = CE = s - c$$
$$CL = BF = s - b, \quad \text{d. h.:}$$

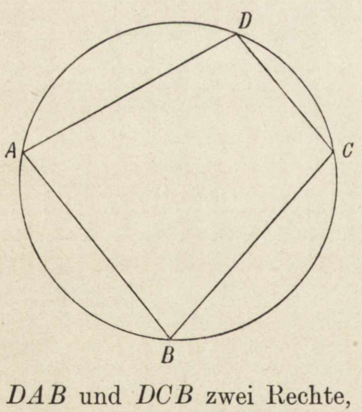
Trägt man auf den Verlängerungen jeder Dreiecksseite die aus der gegenüberliegenden Ecke an den Inkreis gehende Tangentenstrecke ab, so sind die Endpunkte die Punkte, in denen die Verlängerungen der Dreiecksseiten von den drei Ankreisen berührt werden. (Fig. 97.)

c) Ein- und umbeschriebene Vierecke.

Erklärung. Ein Viereck, um das sich ein Kreis beschreiben läßt, wird ein **Sehnenviereck** genannt.

Da ein Kreis durch drei Punkte eindeutig bestimmt ist, so kann man nicht um jedes Viereck einen Kreis beschreiben, sondern das Sehnenviereck muß der Bedingung genügen, daß ein Eckpunkt auf dem durch die drei anderen Eckpunkte bestimmten Kreise liegt.

Fig. 98.



Ist $ABCD$ (Fig. 98) ein Sehnenviereck, so stehen die Gegenwinkel BAD und BCD auf entgegengesetzten Bogen und es ist nach Satz 54, Zusatz 3, ihre Summe gleich 2 R. Dasselbe gilt auch von den Winkeln ABC und ADC.

Satz 56. In jedem Sehnenviereck ist die Summe zweier Gegenwinkel gleich 2 R.

Beträgt umgekehrt in einem Viereck $ABCD$ die Summe zweier Gegenwinkel DAB und DCB zwei Rechte, so muß die durch drei Eckpunkte A, B, D desselben gelegte Kreislinie auch durch den vierten Eckpunkt gehen, da der geometrische Ort der vierten Ecke ein Bogen dieser Kreislinie ist. (Geometrischer Ort 8, Folgerung.)

Satz 57. Betragen in einem Viereck zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte, so läßt sich um das Viereck ein Kreis beschreiben.

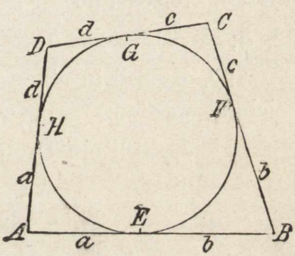
Folgerungen. 1. Um jedes Rechteck, Quadrat und um jedes gleichschenklige Trapez läßt sich ein Kreis beschreiben.

2. Der Mittelpunkt des um ein Rechteck oder Quadrat beschriebenen Kreises ist der Schnittpunkt der Diagonalen; der Halbmesser des Kreises ist gleich der halben Diagonale.

Erklärung. Ein Viereck, in das sich ein Kreis einbeschreiben läßt, wird ein **Tangentenviereck** genannt.

Sind drei beliebige gerade Linien gegeben, so läßt sich stets ein Kreis zeichnen, der diese Geraden zu Tangenten hat. Mithin kann man nicht in jedes Viereck einen Kreis einbeschreiben, sondern ein Tangentenviereck muß der Bedingung genügen, daß eine Seite Tangente des durch die drei anderen Seiten bestimmten Kreises ist.

Fig. 99.



Es seien (Fig. 99) $ABCD$ ein Tangentenviereck und E, F, G, H die Berührungspunkte seiner Seiten mit dem einbeschriebenen Kreise. Durch diese Punkte werden die Seiten in acht Abschnitte geteilt, die paarweise gleich sind, so daß ist:

$$AB = a + b; \quad AD = a + d;$$
$$CD = c + d; \quad BC = b + c.$$

Durch Addition folgt:

$$AB + CD = a + b + c + d = AD + BC, \quad \text{d. h.:}$$

Satz 58. Im Tangentenviereck sind die Summen der Gegenseitenpaare einander gleich.

Ist umgekehrt in einem Viereck $ABCD$ die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen Gegenseiten, so muß der Kreis, der drei Seiten AB, AD und DC des Vierecks berührt, auch die vierte BC berühren, weil die von B und C an den Kreis gezogenen Tangenten zusammen gleich der vierten Seite sind, also mit ihr zusammenfallen.

Satz 59. Ist in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen, so läßt sich in das Viereck ein Kreis beschreiben.

Folgerungen. 1. In jeden Rhombus und in jedes Quadrat kann man einen Kreis beschreiben.

2. Der Mittelpunkt des in einen Rhombus und in ein Quadrat einbeschriebenen Kreises ist der Schnittpunkt der Diago-

nalen. Der Halbmesser des in das Quadrat einbeschriebenen Kreises ist gleich der halben Quadratseite.

d) Übungsaufgaben.

I. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus dem Radius r des Umkreises und

1. a, b; **2.** c, α; **3.** a, β;
4. a, h; **5.** c, h, **6.** c, m_c;
7. h, m_c; **8.** m_c, γ; **9.** $a, \alpha - \beta = \delta$;
10. $b, \alpha - \beta = \delta$; **11.** $b + c = s, \beta$; **12.** $b - c = d, \gamma$;
13. $a, b + c = s$; **14.** $a, b - c = d$; **15.** $a + b + c = u, \gamma$;
16. $a + b - c = d, \gamma$; **17.** $\alpha, b - c = d$; **18.** h_c, w_γ;
19. $h_c, \alpha - \beta = \delta$; **20.** c, m_a,; **21.** γ, m_a.

Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden aus dem Radius des Umkreises und

22. a; **23.** b; **24.** α; **25.** β; **26.** h_a.

27. Es soll in einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck eingezeichnet werden.

II. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus dem Radius ϱ des Inkreises und

28. c, α; **29.** a, β; **30.** a, b; **31.** a, h_b; **32.** h_c, w_γ;
33. c, γ; **34.** $a, s - b$;[1] **35.** $a, s - c$.

Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

36. $c, h_a, s - b$; **37.** $c, \beta, s - b$; **38.** $h_c, \gamma, s - c$;
39. $s - b, s - c, \beta$; **40.** $s - a, a, \beta$; **41.** $s - a, \varrho, s - b$;
42. $s - b, \varrho, a$; **43.** $s - b, s - c, \varrho_a$; **44.** c, β, ϱ_a;
45. $a, s - a, \varrho_b$; **46.** $s - b, \varrho_a, b$; **47.** h_a, β, ϱ_c;
48. a, β, ϱ_a; **49.** s, ϱ_a, b; **50.** s, ϱ_a, c;
51. s, ϱ_b, a; **52.** s, ϱ_b, γ; **53.** s, ϱ_c, h_a;
54. s, ϱ_c, h_b; **55.** ϱ, ϱ_a, a; **56.** ϱ_a, ϱ_b, a;
57. ϱ_a, ϱ_b, s; **58.** $\varrho_a, \varrho_b, s - c$; **59.** $\varrho_a, \varrho_c, s - c$;
60. c, ϱ, ϱ_c; **61.** c, ϱ_a, ϱ_b.

III. Es soll ein Sehnenviereck gezeichnet werden aus dem Radius r des Umkreises und

62. a, b, c;[2] **63.** a, b, α; **64.** a, α, β; **65.** a, c, e;
66. $a, b\, f$; **67.** a, e, f; **68.** a, b, ε; **69.** a, e, ε;
70. e, f, ε; **71.** e, α, ε.

---

[1] $s = \frac{a + b + c}{2}$.

[2] Man vergleiche die Bezeichnungen im Kapitel XIII f.

Es soll ferner ein Sehnenviereck gezeichnet werden aus:

72. a, b, ef; **73.** a, b, e, α; **74.** a, b, f, β;
75. a, b, e, ε; **76.** a, c, e, β; **77.** $a, b, e, \sphericalangle c\varepsilon$;
78. $e, f, \sphericalangle ae, \sphericalangle be$; **79.** $a, c, \sphericalangle ae, \sphericalangle af$; **80.** e, f, a, ε.

IV. Es soll ein Tangentenviereck gezeichnet werden aus dem Radius ϱ des Inkreises und

81. a, e, α; **82.** a, f, α; **83.** a, b, β; **84.** a, β, γ;
85. a, α, γ; **86.** e, α, β; **87.** a, b, α; **88.** b, c, β.

Es soll ferner ein Tangentenviereck gezeichnet werden aus:

89. a, b, c, α; **90.** a, b, e, γ; **91.** a, b, c, e; **92.** a, b, β, γ;
93. a, α, β, γ.

Es soll ein Trapez gezeichnet werden, in das sich ein Kreis einbeschreiben läßt, aus:

94. ϱ, a, b; **95.** ϱ, b, d; **96.** $\varrho, a+c=s, b$;
97. a, b, β; **98.** a, b, e; **99.** b, α, β; **100.** $a-c=s, \alpha, \beta$;

Es soll ein gleichschenkliges Trapez gezeichnet werden, in das sich ein Kreis einzeichnen läßt, aus:

101. $\varrho\, b$; **102.** $\varrho, a+c=s$; **103.** a, α;
104. b, α; **105.** a, c; **106.** b, c; **107.** c, γ.

V. Es soll ein Viereck, in und um das sich ein Kreis beschreiben läßt (Sehnentangentenviereck), gezeichnet werden aus:

108. a, α, β; **109.** ϱ, a, γ; **110.** ϱ, a, β[1]).

Kapitel XIX.

Flächenvergleichung, Verwandlung und Teilung ebener Figuren.

I. Flächenvergleichung.

a) Erklärungen.

1. Unter der **Fläche** einer Figur versteht man den von dem Umfange der Fläche begrenzten Teil der Ebene.

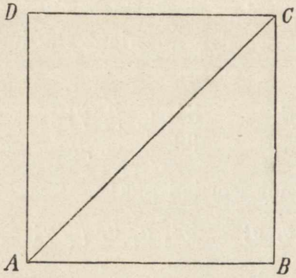
2. Die Größe der Fläche einer Figur wird der **Flächeninhalt** (Inhalt der Fläche) genannt.

---

[1]) Ein Viereck (beziehungsweise Vieleck), das entweder ein Sehnenviereck oder Tangentenviereck ist, heißt monozentrisch, ein Viereck, das Sehnen- und Tangentenviereck zugleich ist, heißt bizentrisch, wenn der ein- und unbeschriebene Kreis verschiedene Mittelpunkte, homozentrisch, wenn beide Kreise denselben Mittelpunkt haben. (Beispiel Quadrat).

Es ergibt sich sofort, daß **kongruente Flächen gleichen Inhalt haben** (flächengleich oder inhaltsgleich oder kurz gleich sind). Umgekehrt aber können Figuren gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne kongruent zu sein.

Fig. 100 *a*.



Teilen wir ein Quadrat $ABCD$ (Fig. 100 *a*) durch die Diagonale BC in zwei Dreiecke ABC und ACD und verschieben das Dreieck ADC längs DC bis AD auf BC fällt, so entsteht das Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ (Fig. 100 *b*); es ist dann das Quadrat $ABCD$ flächengleich dem Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$. Setzen wir das Dreieck ADC so an das Dreieck ABC, daß DC in die Verlängerung von AB zu liegen

Fig. 100 *b*.

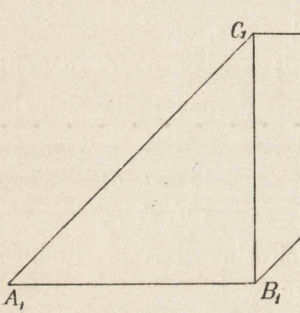
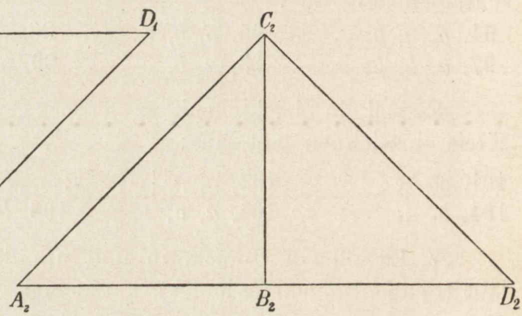


Fig. 100 *c*.



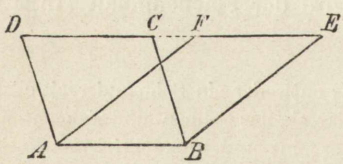
kommt, so entsteht das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck $A_2 C_2 D_2$ (Fig. 100 *c*), das mithin dem Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ und dem Quadrate $ABCD$ inhaltsgleich ist.

Figuren sind also gleich, wenn sie aus kongruenten Stücken zusammengesetzt werden können.

b) Flächengleichheit von Parallelogrammen und Dreiecken.

Wenn zwei Parallelogramme gleiche Höhen haben, so fallen, wenn das eine Paar der zu den Höhen gehörenden Seiten in einer Geraden liegt, auch die parallelen Gegenseiten in eine zu dieser Geraden Parallelen, vorausgesetzt, daß sie auf dieselbe Seite der Geraden zu liegen kommen. Demnach lassen sich zwei Parallelogramme mit gleicher Höhe stets zwischen dieselben Parallelen legen.

Fig. 101.



Haben zwei Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ (Fig. 101) dieselbe Grundlinie und sind ihre Höhen einander gleich, so entsteht, wenn wir sie mit der Grundlinie AB aufeinander legen, das Trapez $ABED$. Da die Dreiecke ADF und BCE einander kongruent sind, so müssen auch die Flächen, die durch Hinwegnahme der kongruenten Dreiecke von dem Trapez $ABED$ entstehen, einander flächengleich sein, d. h.:

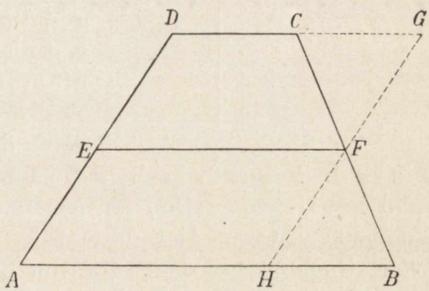
Satz 60. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

Da jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente und daher flächengleiche Dreiecke zerteilt wird, die mit dem Parallelogramm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben, so ist die Fläche jedes Dreieckes gleich der Hälfte eines solchen Parallelogrammes.

Satz 61. Jedes Dreieck ist gleich der Hälfte eines Parallelogrammes, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

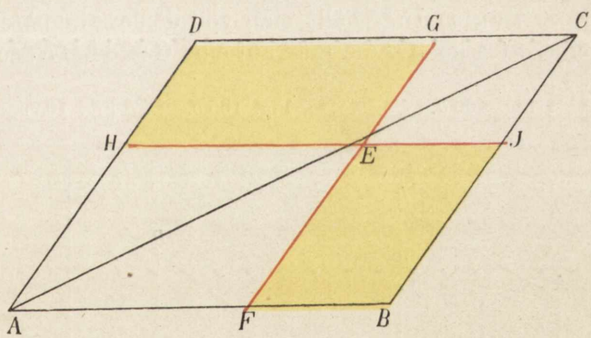
Satz 62. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind flächengleich.

Fig. 102.



Zieht man durch den einen Endpunkt F (Fig. 102) der Mittellinie EF des Trapezes $ABCD$ die Parallele GH zu der Seite AD, so entsteht das Parallelogramm $AHGD$. Da die Dreiecke HBF und CGF durch Drehung um F zur Deckung gebracht werden können (also kongruent sind), so ist das Parallelogramm $AHGD$, dessen Grundlinie gleich der Mittellinie des Trapezes und dessen Höhe gleich der Höhe des Trapezes ist, flächengleich dem Trapez.

Fig. 103.



Satz 63. Jedes Trapez ist flächengleich einem Parallelogramme, das die Höhe des Trapezes zur Höhe und die Mittellinie zur Grundlinie hat.

Zieht man in einem Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 103) durch einen beliebigen Punkt E der einen Diagonale die Parallelen zu den Parallelogrammseiten, so zerfällt das Parallelogramm in vier Parallelogramme. Die beiden von ihnen, durch welche die Diagonale nicht hindurchgeht ($FBJE$ und $HEGD$), heißen **Ergänzungsparallelogramme** oder **Komplemente**.

Es ist:
$$\triangle\, ABC = \triangle\, ACD$$
$$\triangle\, AEF = \triangle\, AEH$$
$$\triangle\, EJC = \triangle\, ECG.$$

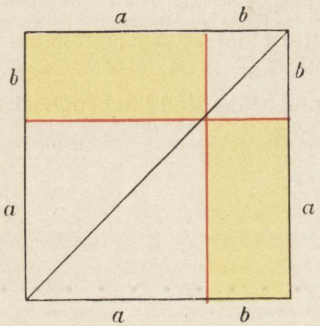
Subtrahiert man die Summe der Dreiecke AEF und EJC von dem Dreieck ABC und die Summe der Dreiecke AEH und ECG von dem Dreieck ACD, so bleibt:

$$FBJE = HEGD.$$

Satz 64. Ergänzungsparallelogramme sind flächengleich.

Die Ergänzungsparallelogramme sind ein Beispiel für flächengleiche Parallelogramme mit verschiedener Grundlinie.

Fig. 104.



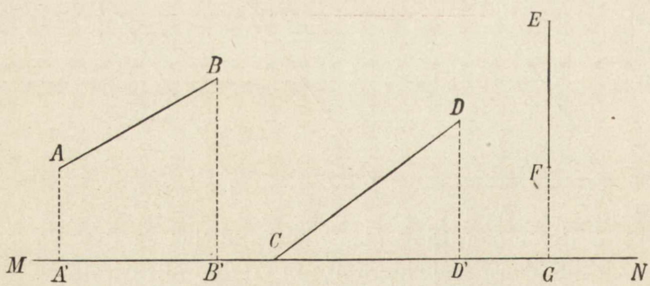
Anmerkung. Ist das Parallelogramm ein Quadrat (Fig. 104), so zerfällt dasselbe, wenn man durch einen Punkt einer Diagonale die Parallelen zu den Quadratseiten zieht, in zwei Quadrate mit den Seiten a und b und in zwei Rechtecke mit den Seiten a und b. Um das Quadrat über der Strecke $a + b$ zu erhalten, muß man zu den Quadraten mit den Seiten a und b die Ergänzungsrechtecke hinzufügen; von dieser Beziehung rührt der Name Komplemente her.

Schneidet man das Quadrat mit der Seite b weg, so erhält man eine Figur, die einem Instrument ähnelt, das zum Zeichnen von rechten Winkeln dient und im Altertume Gnomon genannt wurde. Daher rührt die seit Euklid (um 300 v. Chr., Alexandrien) im Altertume übliche Bezeichnung Satz vom Gnomon für den Satz von den Ergänzungsparallelogrammen.

c) Die euklidischen Sätze und der pythagoreische Lehrsatz.

Erklärung. Fällt man von den Endpunkten A und B (Fig. 105 *a*) einer Strecke AB die Lote auf eine Gerade MN, so heißt die von den Fußpunkten der Lote begrenzte Strecke $A'B'$ der Geraden MN die **Projektion** von AB auf MN. Die Lote heißen die **projizierenden Geraden** oder kurz die Projizierenden.

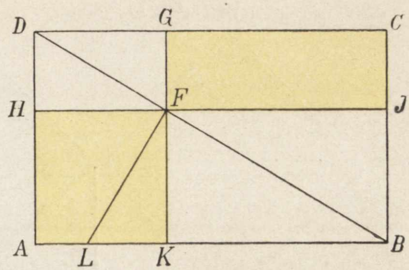
Fig. 105 *a*. Fig. 105 *b*. Fig. 105 *c*.



Liegt der eine Endpunkt C einer Strecke CD auf der Geraden MN (Fig. 105 *b*), so fällt er mit seiner Projektion zusammen, und es ist CD' die Projektion von CD auf MN. Steht die Strecke EF auf MN senkrecht (Fig. 105 *c*), so ist ihre Projektion ein Punkt; die Länge **der Projektion ist gleich Null.**

In dem Rechteck $ABCD$ (Fig. 106) seien durch den Punkt F der Diagonale BD die Parallelen zu den Seiten gezogen; das eine der entstandenen rechtwinkligen Ergänzungsparallelogramme $AKFH$ sei ein Quadrat. (Wie muß der Punkt F bestimmt werden, damit diese Bedingung erfüllt ist?)

Fig. 106.

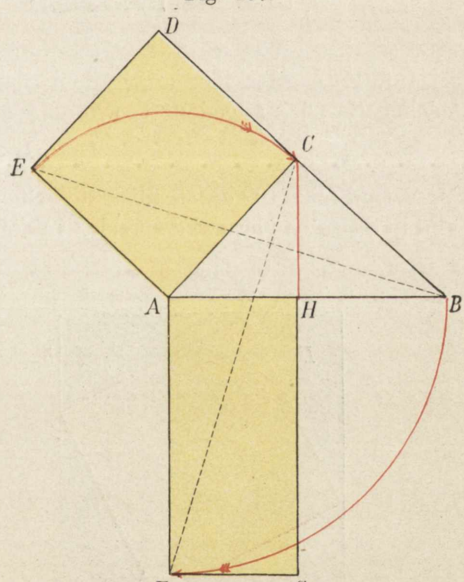


Man drehe das Dreieck FDH um F um einen Winkel von 90°. Es gelangt in die Lage FKL und FL steht auf FB senkrecht, das Dreieck BFL ist rechtwinklig. Die Höhe FK des Dreiecks FBL ist die Projizierende der Katheten FL und FB und KL und KB deren Projektionen, auf die Hypotenuse. Diese Projektionen sind aber gleich den anstoßenden Seiten des dem Quadrat $AKFH$ flächengleichen Rechtecks $FJCG$. Es ergibt sich:

Satz 65. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck, dessen Seiten die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse sind. (II. Satz des Euklid oder Höhensatz).

In dem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 107) sei AH die Projektion der Kathete AC auf die Hypotenuse AB. $AHFG$ sei das Rechteck, dessen Seiten diese Projektion AH und die Hypotenuse AB sind; $ACDE$ sei das Quadrat über der Kathete AC. Zieht man BE und CF, so lassen sich die Dreiecke ACB und ACF durch Drehung um 90° um A zur Deckung bringen; sie sind also flächengleich. (Nachweis der Kongruenz!)

Fig. 107.

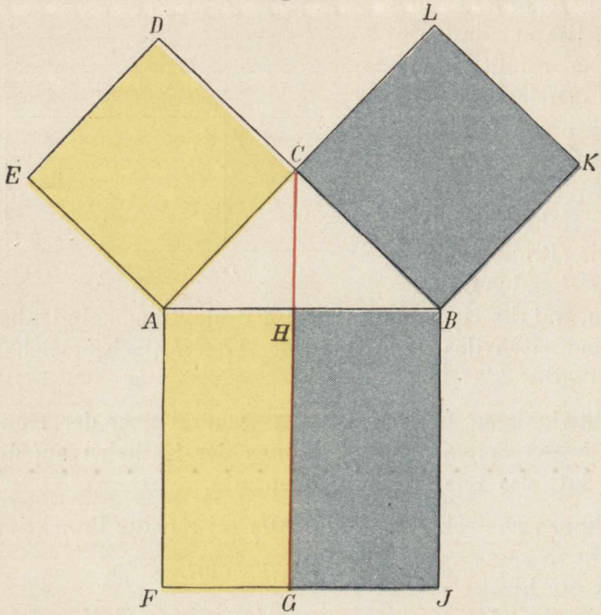


Da nach Satz 61 das Dreieck EAB gleich der Hälfte des Quadrates $ACDE$ und das Dreieck ACF gleich der Hälfte des Rechteckes $AFGH$ ist, so müssen die Hälften dieser Parallelogramme und mithin auch die Parallelogramme selbst flächengleich sein.

Satz 66. Im rechtwinkligen Dreieck ist jedes Kathetenquadrat gleich dem Rechteck gebildet aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse (I. Satz des Euklid oder Kathetensatz).

Durch zweimalige Anwendung des vorstehenden Satzes auf die Katheten AC und BC des rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 108) ergibt sich, daß die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich ist der Summe der Rechtecke $AHGF$ und $HBJG$, die zusammen das Hypotenusenquadrat bilden. Mithin ergibt sich:

Fig. 108.



Satz 67. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate. (Lehrsatz des Pythagoras.)

(Pythagoras von Samos, 6. Jahrhundert v. Chr.)[1]).

Für den pythagoreischen Lehrsatz gibt es eine große Anzahl von Beweisen, eine neuere Schrift zählt deren 46 auf. Es werden hier außer dem obigen euklidischen Beweise noch zwei solcher Beweise angedeutet, während andere später gegeben werden.

2. Beweis.

In Figur 109 a ist über der Strecke $a+b$ ein Quadrat gezeichnet und in dasselbe viermal das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a und b

Fig. 109 a.

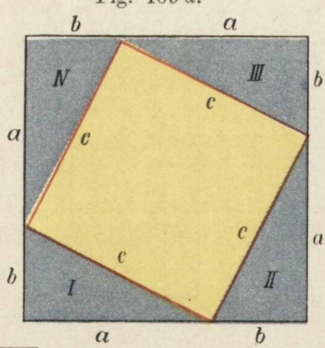
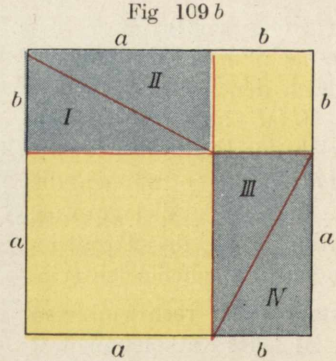


Fig 109 b



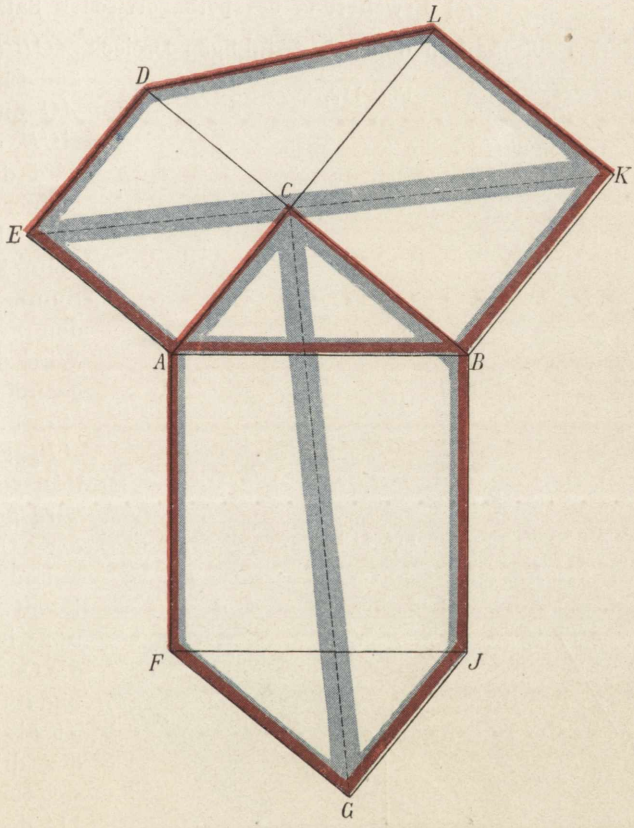
[1]) Ungefähr 1200 Jahre vorher findet sich das spezielle rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5 bei den alten Ägyptern, die dasselbe höchst wahrscheinlich zum Abstecken rechter Winkel benutzten.

hineingelegt, so daß im Innern das Quadrat mit der Seite c entsteht. (Beweis!) In Figur 109 b ist dasselbe Quadrat in zwei Quadrate mit den Seiten a und b und in vier den Dreiecken der ersteren Figur gleiche rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Nimmt man in beiden Figuren die vier Dreiecke weg, so ergibt sich, daß das Hypotenusenquadrat über c gleich der Summe der Kathetenquadrate über a und b ist.

3. Beweis.

In Figur 110 ist $FG \parallel BC$ und $GJ \parallel AC$, ferner DL, CG, EC und CK gezogen; E, C, K liegen in gerader Linie. (Beweis!) Die Vierecke $EKLD$, $EABK$, $ACGF$ und $BCGJ$ sind, da sie in fünf entsprechenden Stücken übereinstimmen, kongruent. Mithin ist das Sechseck $ABKLDE$ flächengleich dem Sechseck $AFGJBC$. Nehmen wir von jedem der Sechsecke die doppelte Dreiecksfläche ABC weg, so bleibt einmal die Summe der Kathetenquadrate, das andere Mal das Hypotenusenquadrat. Somit ist der pythagoreische Satz auch auf diese Weise bestätigt.

Fig. 110.

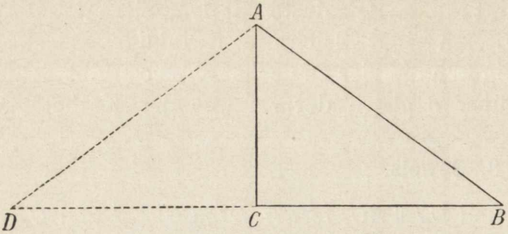


Der pythagoreische Lehrsatz läßt sich auch umkehren.

Es sei in dem Dreieck ABC (Fig. 111) das Quadrat über der Seite AB gleich der Summe der Quadrate über den Seiten AC und BC.

Errichtet man auf AC in C die Senkrechte $CD = CB$, so ist nach dem pythagoreischen Satze das Quadrat über der Hypotenuse AD gleich der Summe der Quadrate über den Katheten AC und DC. Mithin sind die Quadrate über den Seiten AB und DC flächengleich, daher die Seiten

Fig. 111.



AD und BC selbst gleich. Da demnach die Dreiecke ABC und ACD in den drei Seiten übereinstimmen, also kongruent sind, so folgt $\sphericalangle BCA = ACD = 1\,R$, d. h.:

Satz 68. Ist in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig.

d) Erweiterung des pythagoreischen Satzes

Läßt man in dem rechtwinkligen Dreieck ACB (Fig. 112) bei ungeänderter Länge der Seiten AC und CB den Winkel ACB kleiner werden, so wird die dritte Seite AB_1 kleiner als AB; mithin muß das Quadrat dieser Seite kleiner sein als die Summe der Quadrate über den Seiten AC und CB. Wird der Winkel bei ungeänderter Seitenlänge ein stumpfer, so wird die Seite AB_2 größer als AB und das Quadrat dieser Seite wird größer als die Summe der Quadrate über den Seiten AC und CB. Die Beantwortung der Frage, um wieviel im ersten Falle die Quadratsumme kleiner und im zweiten Falle größer ist als das Quadrat über der dritten Seite, ergibt sich aus den Figuren 113 und 114, deren Entstehung ohne weiteres verständlich ist.

Fig. 112.

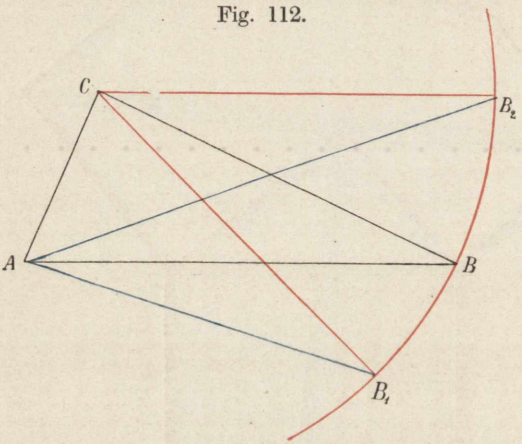
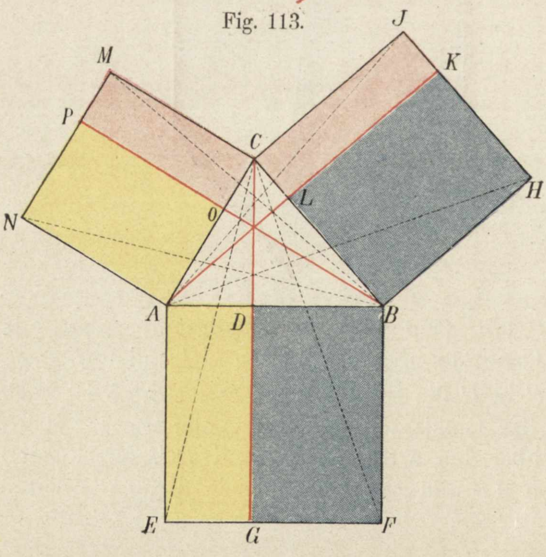


Fig. 113.



Für beide Fälle läßt sich zeigen, daß:

$\triangle ANB \cong \triangle ACE$
$\triangle ABH \cong \triangle FBC,$
$\triangle BCM \cong \triangle ACJ.$

Hieraus folgt die Gleichheit der Rechtecke:

$$ANOP = AEGD,$$
$$BHKL = BDGF,$$
$$COPM = CLKJ.$$

Im ersten Falle ist dann:

$$ANOP + BHKL = AEGD + BDGF,$$
$$\overline{AC}^2 - COPM + \overline{BC}^2 - CLKJ = \overline{AB}^2,$$
$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,COPM = \overline{AB}^2.$$

Im zweiten Falle ist:

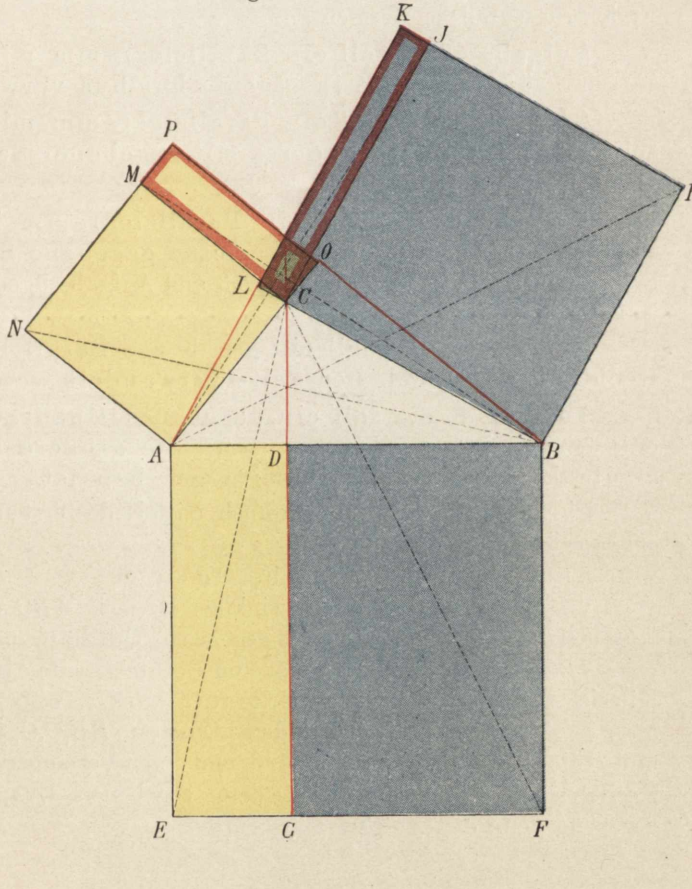
$$ANOP + BHKL = AEGD + BDGF,$$
$$\overline{AC}^2 + COPM + \overline{BC}^2 + CLKJ = \overline{AB}^2,$$
$$AC^2 + BC^2 + 2\,COPM = \overline{AB}^2.$$

Wir erhalten den **erweiterten pythagoreischen Lehrsatz:**

Satz 69. In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten vermindert oder vermehrt um das doppelte Rechteck aus der zweiten Seite und der Projektion der dritten Seite auf die zweite, je nachdem die erste Seite einem spitzen oder stumpfen Winkel gegenüberliegt.

Es soll angegeben werden, inwiefern der pythagoreische Satz für das rechtwinklige Dreieck aus dem allgemeinen pythagoreischen Satze folgt.

Fig. 114.



II. Verwandlungsaufgaben.

Erklärung. Eine Figur verwandeln heißt ihr eine andere Gestalt geben, ohne den Flächeninhalt zu ändern.

Aufgabe 1. Es soll ein Parallelogramm unter Beibebehaltung einer Seite in ein anderes mit einem gegebenen Winkel verwandelt werden.

Aufgabe 2. Es soll ein Parallelogramm mit Beibehaltung einer Seite in ein Rechteck verwandelt werden.

Aufgabe 3. Es soll ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Seite verwandelt werden.

Man unterscheide die beiden Fälle; *a*) die gegebene Seite ist größer als die kleinere Höhe des gegebenen Parallelogrammes, *b*) sie ist kleiner als diese Höhe.

Im letzteren Falle verwandelt man entweder das gegebene Parallelogramm zuerst in ein anderes mit einer solchen Seite, daß die zu ihr gehörige Höhe kleiner ist als die gegebene Seite, oder man wendet den Satz von den Ergänzungsparallelogrammen an.

Aufgabe 4. Es soll ein Parallelogramm mit Beibehaltung seiner größeren Seite in einen Rhombus verwandelt werden.

Aufgabe 5. Es soll ein Parallelogramm mit Beibehaltung seiner Winkel in ein anderes mit gegebener Seite verwandelt werden. (Satz 64.)

Aufgabe 6. Es soll ein Parallelogramm in ein anderes verwandelt werden, so daß es eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel hat. (Aufgabe 3 und Aufgabe 5, oder Aufgabe 1 und Aufgabe 5.)

Aufgabe 7. Es soll ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck mit gegebener Seite verwandelt werden.

Aufgabe 8. Es soll ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck verwandelt werden, *a*) wenn die größere Rechtecksseite, *b*) die kleinere Rechtecksseite gegeben ist.

Die Lösungen ergeben sich auch mittels des ersten oder des zweiten euklidischen Satzes.

Anmerkung zu Aufgabe 8 *a*.

Verschiebt man das rechtwinklige Dreieck ABC (Fig. 115), dessen Kathete BC gleich der Seite a des gegebenen Quadrates und dessen Hypotenuse AB gleich der gegebenen größeren Rechtecksseite c ist, auf CC_1 parallel mit sich selbst um die Quadratseite ($CC_1 = BC = a$), so ist das Parallelogramm ABB_1A_1 flächengleich dem Quadrat BB_1C_1C. Fällt man von A und B die Lote AD und BE auf A_1B_1 und deren Verlängerung, so ist auch das Rechteck $ABDE$ flächengleich dem gegebenen Quadrat und hat die gegebene Seite c.

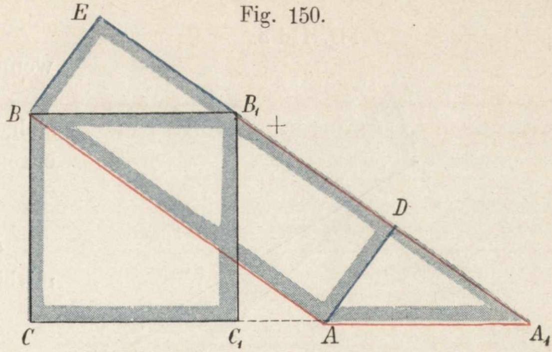


Fig. 150.

Was ergibt sich, wenn man das Dreieck BB_1E um B um 90^0 dreht, so daß B_1 auf C fällt?

Aufgabe 9. Es soll ein Dreieck mit Beibehaltung einer Seite in ein anderes verwandelt werden.

Wieviel Lösungen hat die Aufgabe? Welches ist der geometrische Ort für die dritten Eckpunkte aller flächengleichen Dreiecke?

Aufgabe 10. Es soll ein Dreieck mit Beibehaltung der Seite c in ein anderes verwandelt werden, das eine Seite b_1 von gegebener Größe hat.

Aufgabe 11. Es soll ein Dreieck mit Beibehaltung der Seite c in ein anderes verwandelt werden, so daß ein der Seite c anliegender Winkel eine gegebene Größe β_1 hat.

Spezialfall: $\beta_1 = 1\ R$.

Aufgabe 12. Es soll ein Dreieck mit Beibehaltung der Seite c in ein anderes verwandelt werden, so daß der der Seite c gegenüberliegende Winkel eine gegebene Größe γ_1 hat.

Aufgabe 13. Es soll ein Dreieck in ein Parallelogramm verwandelt werden, das mit dem Dreieck *a*) eine Seite, *b*) die Höhe zu einer Seite gemeinsam hat.

Anleitung. Im ersten Falle muß die zu der Seite gehörige Parallelogrammhöhe halb so groß sein als die entsprechende Dreieckshöhe, im zweiten Falle die zu der Höhe gehörige Parallelogrammseite halb so groß sein als die entsprechende Dreiecksseite.

Aufgabe 14. Es soll ein Parallelogramm in ein Dreieck verwandelt werden, das mit ihm *a*) eine Seite, *b*) die zu einer Seite gehörige Höhe gemeinsam hat.

Aufgabe 15. Es soll ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels in ein anderes verwandelt werden, wenn *a*) eine diesem Winkel anliegende Seite gegeben, *b*) die zu einer ihm anliegenden Seite gehörige Höhe eine gegebene Größe hat.

Lösung zu *a*). (Fig. 116 *a*.) Es sei ABC das gegebene Dreieck, c^1 die gegebene Seite ($c^1 > AB$). Man trage auf der Verlängerung der dem beizubehaltenden Winkel α anliegenden Seite AB die Strecke $AD = c^1$ ab, verbinde D mit C, ziehe $BE \parallel CD$ und verbinde D mit E.

Fig. 116 *a.*

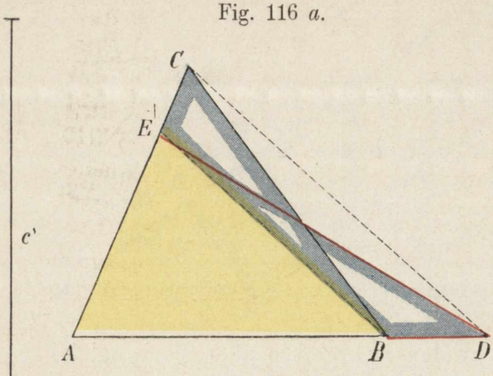
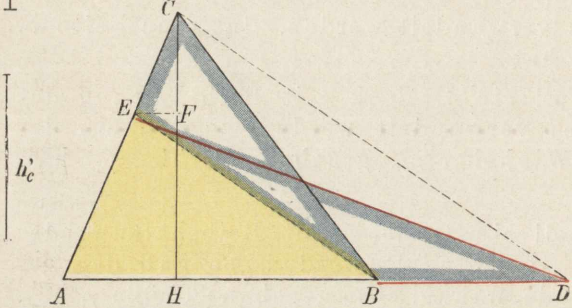


Fig. 116 *b.*



Die Lösung ist die gleiche, wenn $c' < AB$.

Die Lösung zu *b*) ergibt sich, wie aus der Figur 116*b* zu erkennen ist, in ähnlicher Weise.

Beweis (*a*). Es ist:

$$\triangle\, EBC = \triangle\, EBD,$$

mithin ist auch:

$$\triangle\, AEB + \triangle\, EBC = \triangle\, AEB + \triangle\, EBD,$$

oder:

$$\triangle\, ABC = \triangle\, AED.$$

Aufgabe 16. Es soll ein Dreieck unter Beibehaltung der Lage einer Seite in ein anderes verwandelt werden, wenn der Eckpunkt, der der Seite gegenüberliegt, eine gegebene Lage hat.

Der Eckpunkt kann auf einer andern Seite des gegebenen Dreieckes oder deren Verlängerung, innerhalb oder außerhalb des gegebenen Dreieckes liegen.

Aufgabe 17. Es soll ein Vieleck in ein anderes verwandelt werden, das einen Eckpunkt weniger hat.

Anleitung. Man schneide durch eine Diagonale von dem Vieleck ein Dreieck ab und verwandle es unter Beibehaltung der Diagonale als Seite in ein flächengleiches, von dem der Eckpunkt, welcher der Diagonale gegenüberliegt, in die Verlängerung einer an die Diagonale anstoßenden Vielecksseite fällt.

Aufgabe 18. Es soll ein Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden.

Die Lösung ergibt sich durch wiederholte Anwendung der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 19. Es soll ein Vieleck in ein Rechteck verwandelt werden.

Die Lösung ergibt sich durch Anwendung der Aufgaben 18, 13, 2.

Aufgabe 20. Es soll ein Rechteck in ein Quadrat verwandelt werden.

Jeder der beiden euklidischen Sätze (Satz 65 und Satz 66) liefert eine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 21. Es soll ein Vieleck in ein Quadrat verwandelt werden.

Mittels der vorstehenden Aufgabe gelingt, es den Flächeninhalt jeder beliebigen geradlinigen Figur durch ein Quadrat darzustellen. (Geometrische Quadratur der Vielecke.)

III. Teilungsaufgaben.

Aufgabe 22. Es soll ein Parallelogramm in n gleiche Teile geteilt werden, so daß die Teilungslinien einer der Parallelogrammseiten parallel sind. (L.)

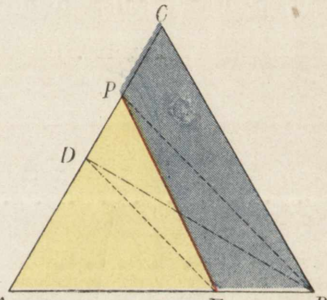
Aufgabe 23. Es soll ein Dreieck von einem Eckpunkt aus in n gleiche Teile geteilt werden. (L.)

Aufgabe 24. Es soll ein Parallelogramm von einem Eckpunkt aus in n gleiche Teile geteilt werden, wenn n

a) eine gerade, *b*) eine ungerade Zahl ist. (L.)

Aufgabe 25. Es soll ein Dreieck von einem auf einer Seite gegebenen Punkt aus in zwei gleiche Teile geteilt werden.

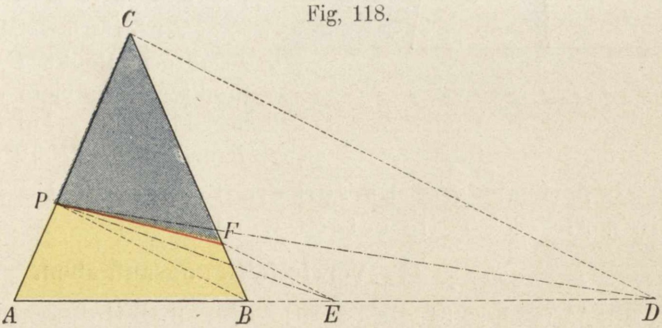
Fig. 117.



Anleitung 1. (Fig. 117.) Man verbinde den Mittelpunkt D von AC und den gegebenen Punkt P mit B, ziehe $DE \parallel PB$ und verbinde P mit E, so ist PE die gesuchte Teilungslinie. (Der Beweis ist leicht.)

Anleitung 2. (Fig. 118.) Man verwandle das gegebene Dreieck ABC in ein anderes APD, dessen Grundlinie AP ist und teile das Dreieck von P aus in zwei gleiche Teile. Fällt dabei ein Stück der Teilungslinie außerhalb des gegebenen Dreiecks, so verfahre man wie es aus Fig. 118 ersichtlich ist.

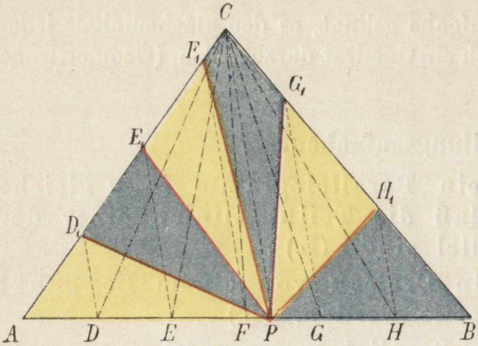
Fig. 118.



Aufgabe 26. Es soll ein Dreieck von einem auf einer Seite gegebenen Punkte aus in n gleiche Teile geteilt werden. (L.)

Anleitung. (Fig. 119.) Man teile die Seite AB, auf welcher der gegebene Punkt P liegt, in n ($n = 6$) gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt C. Verbindet man C mit P, zieht durch D, E, F, G, H die Parallelen DD_1, EE_1 usw. zu CP und verbindet D_1, E_1, F_1, G_1, H_1 mit P, so sind diese Verbindungslinien die gesuchten Teilungslinien. (Der Beweis ist leicht.)

Fig. 119.

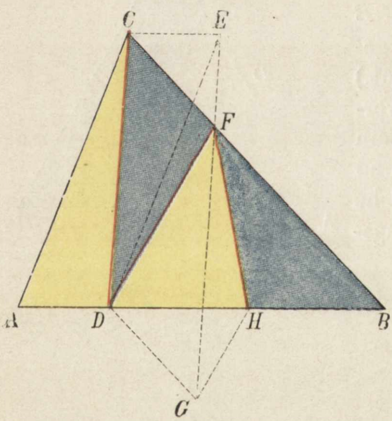


Aufgabe 27. Es soll ein gegebenes Viereck durch Teilungslinien, die von einem auf einer Seite liegenden Punkte ausgehen, in n gleiche Teile geteilt werden. (L.)

Anleitung. Man verwandle das Viereck in ein Dreieck, dessen einer Eckpunkt der gegebene Punkt ist.

Aufgabe 28. Es soll ein Dreieck durch eine von einem Eckpunkte ausgehende Zickzacklinie in n gleiche Teile geteilt werden. (L.)

Fig. 120.



Die Lösung für $n = 4$ ist aus Figur 120 ersichtlich, in der $AD = \frac{1}{4} AB$ ist.

Aufgabe 29. Es soll ein Dreieck von einem Punkte innerhalb desselben in zwei gleiche Teile so geteilt werden, daß die Teilungslinie nach einem Eckpunkte hin geht.

Anleitung. Man verbinde den gegebenen Punkt P mit einem Eckpunkte A, halbiere die A gegenüberliegende Seite BC in D, verbinde D mit P und ziehe $AE \parallel PD$.

Aufgabe 30. Es soll ein Trapez auf die einfachste Art in n gleiche Teile geteilt werden. (L.)

IV. Vervielfältigungsaufgaben.

Aufgabe 31. Es soll ein Parallelogramm gezeichnet werden, das n-mal so groß ist als ein gegebenes Parallelogramm.

Aufgabe 32. Es soll dieselbe Aufgabe für das Dreieck gelöst werden.

Aufgabe 33. Es soll zu zwei gegebenen Quadraten ein drittes so gezeichnet werden, daß das letztere *a*) gleich der Summe, *b*) gleich der Differenz der beiden gegebenen Quadrate ist.

Aufgabe 34. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden, das *a*) doppelt, *b*) dreimal, *c*) fünfmal, *d*) n-mal so groß ist wie ein gegebenes Quadrat.

Anleitung. 1. Man lege das gegebene Quadrat n-mal aneinander und erhält ein Rechteck, das den n-fachen Inhalt des gegebenen Quadrates hat. Hierauf verwandelt man das Rechteck nach Aufgabe 20 dieses Paragraphen in ein Quadrat.

2. In vielen Fällen gestaltet sich die Lösung einfacher.

a) Ist n eine Quadratzahl 4, 9, ... s^2, so ist das Quadrat über der doppelten, dreifachen ..... s-fachen Seite des gegebenen Quadrates das verlangte.

b) Läßt sich n als Summe oder Differenz der Quadrate zweier anderer Zahlen darstellen, so kann man die Aufgabe 33 direkt anwenden. Ist z. B.: $n = 13$, so beachte man, daß $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$, mithin die Seite des verlangten Quadrates die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen Katheten gleich der doppelten und dreifachen Seite des gegebenen Quadrates sind. Ist $n = 12$, so erhält man, da $12 = 16 - 4 = 4^2 - 2^2$ ist, die gesuchte Quadratseite als die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse und andere Kathete gleich der vierfachen und doppelten Seite des gegebenen Quadrates sind.

Bemerkenswert ist, daß sich jede ungerade Zahl als Differenz der Quadrate zweier Zahlen und jede Primzahl von der Form $(4n + 1)$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellen läßt.

Aufgabe 35. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden, dessen Inhalt gleich *a*) der Hälfte, *b*) dem dritten Teile, *c*) dem n-ten Teile eines gegebenen Quadrates ist.

Anleitung zu *a*). Das Quadrat über der halben Diagonale des gegebenen Quadrates ist das verlangte.

Zu *b*) und *c*). Man beachte Aufgabe 22 und Aufgabe 20.

Kapitel XX.

Flächenberechnung ebener Figuren.

Erklärung. Eine Größe durch eine andere messen, heißt angeben, wie oft die letztere in ihr enthalten ist. Die Größe, durch welche gemessen wird, heißt **Maß** oder **Maßeinheit,** die Zahl, welche angibt, wie oft das Maß in der zu messenden Größe enthalten ist, heißt **Maßzahl.**

Jede Größe kann nur durch ein ihr gleichartiges Maß gemessen werden, also Strecken durch Strecken, Winkel durch Winkel, Flächen durch Flächen.

I. Messen und Vergleichen von Strecken.

Erklärung 1. Das Maß von Strecken heißt **Längenmaß** oder **Längeneinheit.**

Im praktischen Leben benutzt man als Längeneinheit das Meter (*m*), d. i. die Länge des im Archiv zu Sèvres bei Paris aufbewahrten Urmetermaßstabes (mètre des archives) und dessen Unterabteilungen Zentimeter (*cm*) und Millimeter (*mm*). Bei dem Messen großer Strecken benutzt man das Tausendfache des Meters, das Kilometer (*km*).

Erklärung 2. Eine Strecke wird durch die Längeneinheit (1 *m*, 1 *cm*, 1 *mm*.....) gemessen, indem man die letztere auf ihr von dem einen Endpunkte aus nacheinander so oft abträgt, wie es möglich ist, und die Zahl der abgetragenen Längeneinheiten, die Maßzahl, angibt.

Hierbei können zwei Fälle eintreten:

1. Die Messung geht auf, d. h. der Endpunkt der zuletzt angetragenen Längeneinheit fällt mit dem Endpunkte der Strecke zusammen; die Maßzahl ist dann eine **ganze** Zahl.

Ist die Längeneinheit ein Meter, so ist auch jeder Bruchteil des Meters, insbesondere 1 *cm*, 1 *mm*, $\frac{1}{10}$ *mm*, $\frac{1}{100}$ *mm*, $\frac{1}{1000}$ *mm* usf. in der Strecke enthalten.

2. Die Maßzahl geht nicht auf, sondern es bleibt ein Rest, der kleiner als die Längeneinheit ist. Dann kann folgendes eintreten:

a) Entweder geht irgendein Bruchteil der Längeneinheit in dem Rest, olglich auch in der ganzen Strecke auf; die Maßzahl ist ein **Bruch.**

b) Es geht kein Bruchteil der Lägeneinheit also z. B. 1 *cm*, 1 *mm*, $\frac{1}{10}$ *mm*, $\frac{1}{100}$ *mm*, $\frac{1}{1000}$ *mm* usf. in dem Reste, folglich auch in der ganzen Strecke auf; dann ist die Maßzahl weder eine ganze, noch eine gebrochene Zahl, sondern eine **irrationale Zahl.**

Eine solche Irrationalzahl kann nicht genau durch rationale (ganze und gebrochene) Zahlen, wohl aber mit jedem beliebigen Grade der Annäherung durch einen Dezimalbruch bis zu jeder mit Meßinstrumenten erreichbaren Genauigkeit angegeben werden; der hierdurch gemachte Fehler geht unter die Grenze der selbst mit Vergrößerungsinstrumenten erreichbaren Sichtbarkeit herunter.

c) Werden zwei verschiedene Strecken miteinander verglichen, so unterscheiden wir zwischen dem praktischen und dem geometrischen Verfahren. Bei dem praktischen Verfahren bestimmen wir für die zu vergleichenden Strecken a und b ihre Maßzahlen für das Meter oder dessen dezimale Unterabteilungen. Ist z. B.: $a = 1{,}7$ *m*, $b = 0{,}734$ *m*, so lassen sich für beide Strecken die Maßzahlen in Millimeter angeben, $a = 1700$ *mm*, $b = 734$ *mm*, wir können dann die Strecken vergleichen, indem wir ihre Maßzahlen in bezug auf das gemeinschaftliche Maß, hier das Millimeter, vergleichen. Dieses Verfahren wird auch angewendet, wenn eine der Maßzahlen oder beide für das Metermaß oder eine seiner dezimalen Unterabteilungen irrational sind. Wir ersetzen dann die irrationale Zahl durch eine rationale, deren Unterschied gegen die irrationale Zahl wir, wie oben angegeben ist, beliebig klein machen können und verfahren wie vorher. Wäre z. B.: $a = 1{,}7\ cm$, $b = 7{,}3451..\ mm$ und beschränken wir uns auf eine Genauigkeit bis zu $\frac{1}{1000}\ mm$, so sind die Maßzahlen für $\frac{1}{1000}\ mm$ als Maßeinheit für a 17000, für b 73451.

Sollen in der Geometrie zwei Strecken verglichen werden, so bestimmen wir eine Strecke, die in beiden Strecken ohne Rest enthalten ist.

Erklärung. 3. Eine Strecke, die ein Maß für zwei oder mehrere zu vergleichende Strecken ist, heißt ein **gemeinschaftliches Maß** der zu vergleichenden Strecken.

Besitzen zwei oder mehrere Strecken ein gemeinschaftliches Maß m, so besitzen sie unendlich viele gemeinschaftliche Maße. Teilt man das gemeinschaftliche Maß m in n gleiche Teile, so ist auch $\frac{1}{n} \cdot m$ ein gemeinschaftliches Maß beider Strecken. Von allen gemeinschaftlichen Maßen zweier oder mehrerer Strecken ist für die Messung das größte das bequemste (Grund!); wir benutzen daher immer dieses Maß als gemeinschaftliches Maß.

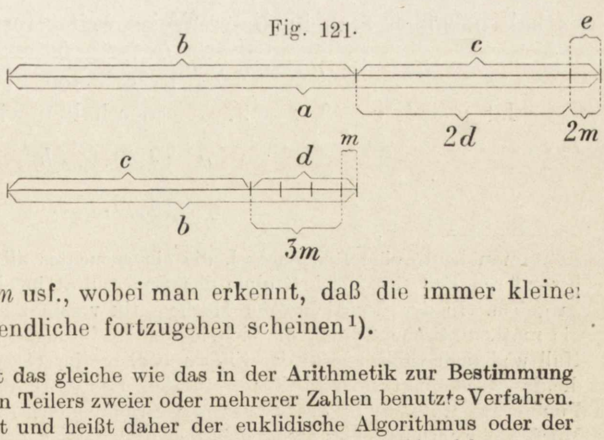
Erklärung 4. Zwei Strecken werden miteinander verglichen, indem man ihre Maßzahlen in bezug auf ein gemeinschaftliches Maß miteinander vergleicht.

Aufgabe. Es soll das größte gemeinschaftliche Maß zweier Strecken gesucht werden.

Die gegebenen Strecken sind a und b.

Man trage (Fig. 121) die kleinere Strecke b so oft auf der größeren a ab, als es möglich ist. Bleibt kein Rest, so ist b das größte gemeinschaftliche Maß von a und b. Bleibt aber ein Rest c, so trage man denselben so oft auf b ab, als es möglich ist. Bleibt noch ein Rest d, so fahre man fort bis zu den Resten e, m usf., wobei man erkennt, daß die immer kleiner werdenden Reste ins Unendliche fortzugehen scheinen¹).

Fig. 121.



¹) Dieses Verfahren ist das gleiche wie das in der Arithmetik zur Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier oder mehrerer Zahlen benutzte Verfahren. Es war schon Euklid bekannt und heißt daher der euklidische Algorithmus oder der Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Teilers. „Unter einem Algorithmus ver-

Bleibt kein Rest, so ist der letzte Rest das größte gemeinschaftliche Maß beider Strecken. Wir sagen in diesem Falle, die Strecken sind **kommensurabel.** Wird keiner der Reste gleich Null, haben also die Strecken kein gemeinschaftliches Maß, so nennen wir die Strecken **inkommensurabel.**

Um in dem vorliegenden Beispiele der kommensurabelen Strecken a und b ihre Maßzahlen zu bestimmen, verfahren wir wie folgt. Es ist:

$$\begin{array}{l|l} a = 1\,.\,b + c & = 39\,m \\ b = 1\,.\,c + d & = 23\,m \\ c = 2\,.\,d + e & = 16\,m \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} d = 3\,e + m & = 7\,m \\ e = 2\,m + 0 & = 2\,m \end{array}$$

Mithin erhält man: $a = 39\,m$
$b = 23\,m.$

Erklärung 5. Unter dem **Verhältnis** zweier Strecken versteht man den Quotienten ihrer Maßzahlen in bezug auf ein gemeinschaftliches Maß.

Im vorliegenden Falle der kommensurabelen Strecken a und b ist das Verhältnis $\frac{a}{b} = a : b = \frac{39}{23} = 39 : 23$ und folglich

$$a = \frac{39}{23}\,b.$$

Im Falle kommensurabeler Strecken ist das Verhältnis eine rationale Zahl.

Sind zwei Strecken inkommensurabel, so können wir zur Bestimmung der Maßzahlen und des Verhältnisses nicht in obiger Weise verfahren, da wir keinen Anfang zum Rückwärtseinsetzen in die oben erhaltenen Gleichungen haben. Aber auch in diesem Falle können wir das Verhältnis mit beliebiger Annäherung wie folgt bestimmen.

Es sei b in a u-mal enthalten, und es bleibe ein Rest c.

Wir untersuchen dann etwa am einfachsten, wie oft $\frac{b}{10}$ in c enthalten ist; es möge v-mal im Reste c enthalten sein und es bleibe ein Rest d. Wir untersuchen dann weiter wie oft $\frac{b}{100}$ in d enthalten ist; es sei z-mal darin enthalten. Fährt man in dieser Weise weiter fort, so erhalten wir:

$$a = u\,b + v\,\frac{b}{10} + z\,.\,\frac{b}{100} + \ldots\ldots$$

Ist $u = 4$, $v = 3$, $z = 9\ldots.$, so erhalten wir:

$$a = 4{,}39\ldots \cdot b,$$

$$\frac{a}{b} = 4{,}39\ldots\ldots$$

---

steht man heute eine Rechenregel, die ein gesuchtes allgemeines Resultat für jeden besonderen Fall finden lehrt, ohne das Endresultat in einer abgeschlossenen Gestalt zu geben. In der Geschichte der Mathematik versteht man unter „Algorithmikern" die mathematische Schule, die sich in der Rechnung der indischen Ziffern mit der Null und dem Stellenwerte der Ziffern bedient, im Gegensatze zu den „Abacisten", die das Rechenbrett, den Abakus, benutzten. Das Wort Algorithmus ist zufolge neuerer Funde die Entstellung des arabischen Eigennamens Alchwarizmî (Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî), eines arabischen Schriftstellers, der schon im Beginn des neunten Jahrhunderts das Rechnen mit den indischen Ziffern lehrte."

Da das Verfahren wegen der Inkommensurabilität der Strecken zu keinem Ende führt, so muß der Dezimalbruch unendlich und außerdem nicht periodisch sein.

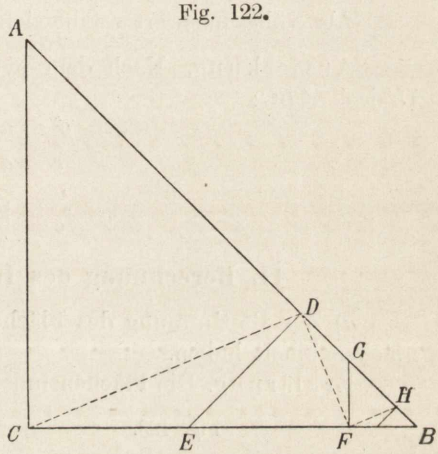
Dieses nicht absolut genau anzugebende Verhältnis zweier inkommensurabelen Strecken ist irrational.

Dasselbe läßt sich, wie schon vorher angegeben ist, bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen, wenn wir nur hinreichend viele Dezimalstellen berechnen.

Im übrigen sei nur noch darauf hingewiesen, daß das Verfahren bei inkommensurabelen Strecken wegen des beschränkten Unterscheidungsvermögens unserer Sehwerkzeuge tatsächlich doch einmal zu einem Ende, d. h. zu einem für unser Auge als Null erscheinendem Reste führt.

Als ein Beispiel für zwei inkommensurabele Strecken seien hier die Kathete und Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks (beziehungsweise die Seite und Diagonale eines Quadrats) genannt. Um die Inkommensurabilität nachzuweisen, verfahren wir abweichend von dem obigen Vorgehen in geometrischer Weise wie folgt.

Fig. 122.



Man trage (Fig. 122) die Kathete $AC = AD = a$ auf der Hypotenuse $AB = c$ ab; dann ist:

$$AB = AD + DB \quad \text{oder:}$$

1. $$c = a + r.$$

Man errichte $DE \perp AB$ und mache $EF = ED$ dann ist, da das Dreieck DEB gleichschenklig rechtwinklig ist:

$$DE = DB = CE.$$

2. $$CB = a = 2\,r + r_1.$$

Errichtet man $FG \perp BC$, und macht $GH = GF$, so ist $BF = GF = GH = DG$ und

3. $$r = 2\,r_1 + r_2$$

Dieses Verfahren kann man beliebig weit fortführen, ohne daß es zu einem Ende führt, und wir erhalten entsprechend:

$$4. \left\{\begin{array}{l} r_1 = 2\,r_2 + r_3. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n = 2\,r_{n+1} + r_{n+2}. \end{array}\right.$$

Damit ist die Inkommensurabilität der Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks zu seiner Kathete bewiesen.

Das Verhältnis $\frac{c}{a}$ läßt sich dann wie folgt näherungsweise berechnen:

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{r}{a}, \quad \frac{c}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_1}{r}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_2}{r_1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_3}{r_2}}}}$$

$$\frac{a}{r} = 2 + \frac{r_1}{r}$$

$$\frac{r}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_4}{r_3}}}}} \qquad = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}$$ [1]

Als Näherungswert ergibt sich hieraus: $\frac{c}{a} = 1{,}4142\dots.$

Anmerkung. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz folgt aus dem Dreieck ABC:

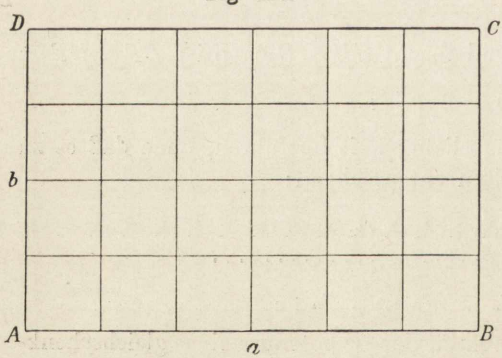
$$c^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2$$
$$c = a\sqrt{2}$$
$$\frac{a}{c} = \sqrt{2} = 1{,}414213\dots.$$

II. Berechnung des Inhaltes ebener Figuren.

a) Zur Bestimmung des Flächeninhaltes von Figuren muß man eine Flächeneinheit haben.

Erklärung. Die **Flächeneinheit** ist die **Fläche des Quadrates,** das die **Längeneinheit** zur Seite hat.

Fig. 123.



Es entspricht dem Meter als Längeneinheit das Quadratmeter (*qm*) als Flächeneinheit; ebenso entsprechen den Längeneinheiten des Zentimeters, Millimeters, Kilometers als Flächeneinheiten das Quadratzentimeter (*qcm*), das Quadratmillimeter (*qmm*), das Quadratkilometer (*qkm*).

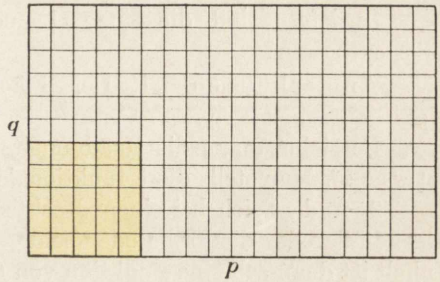
1. Die Seite AB des Rechtecks $ABCD$ (Fig. 123) habe a und die Seite AD b Längeneinheiten, wobei a und b zunächst ganze

[1]) Einen solchen Ausdruck nennt man einen Kettenbruch.

Zahlen seien. Trägt man die Längeneinheit auf den Seiten ab und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zu den Seiten, so entstehen $a \cdot b$ Quadrate, die gleich der Flächeneinheit sind. Mithin ist der Inhalt des Rechteckes gleich $a \cdot b$ Flächeneinheiten.

2. Sind die Maßzahlen der Seiten a und b Brüche (Fig. 124), so kann man sie auf gleiche Nenner bringen; es sei $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$. Dann läßt sich $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit auf a p-mal und auf b q-mal abtragen und es entstehen $p \cdot q$ Quadrate, deren Seiten gleich $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit sind. Das Quadrat der Längeneinheit läßt sich aber in $n \cdot n = n^2$ solcher Quadrate durch Parallelen zerlegen. Daher ist der Inhalt des Rechtecks $\frac{p \cdot q}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = a \cdot b$. Flächeneinheiten.

Fig. 124.



3. Sind a und b irrationale Zahlen, so lassen sich dieselben, wie in I a dieses Kapitels gezeigt wurde, durch zwei rationale gebrochene Zahlen ersetzen, deren Unterschied gegen die irrationalen Zahlen beliebig klein gemacht werden kann. Wir erhalten dadurch ein Rechteck, dessen Fläche gegen die des gegebenen Rechtecks einen beliebig klein zu machenden Unterschied besitzt.

Es ergibt sich daher für alle drei Fälle, wenn wir die Bezeichnung der Flächeneinheit, die durch die Längeneinheiten bestimmt ist, weglassen:

Satz 70. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte der Maßzahlen zweier anstoßenden Seiten (oder auch kürzer: gleich dem Produkte zweier anstoßenden Seiten).

Faßt man die eine Rechtecksseite als Grundlinie und die andere als Höhe auf, so ergibt sich für das Rechteck, und nach Satz 60 auch für jedes Parallelogramm:

Satz 71. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Für das Quadrat folgt aus diesem Satze:

Zusatz. Der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz der Maßzahl seiner Seite.

Aus Satz 61 folgt für das Dreieck:

Satz 72. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Da man bei dem rechtwinkligen Dreieck die eine Kathete als Grundlinie und die andere als Höhe auffassen kann, so folgt:

Zusatz. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Produkte der Katheten.

Aus Satz 63 erhält man:

Satz 73. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der Mittellinie und der Höhe.

Inwiefern sind die Sätze 71 und 72 in letzterem Satze als Sonderfälle enthalten?

Anmerkungen. 1. Der Flächeninhalt eines Quadrats ist eine Funktion seiner Seite.

Bezeichnet man die Quadratseite mit x, den Flächeninhalt mit y, so ist $y = x^2$. Man stelle diese funktionale Abhängigkeit graphisch dar.

2. Ändert sich bei einem Rechteck, Parallelogramm oder Dreieck die Grundlinie oder die Höhe oder beide, so ändert sich auch der Inhalt; der Inhalt ist demnach eine Funktion von Grundlinie und Höhe. Bei gegebenem konstanten Inhalte ist die Grundlinie eine Funktion der Höhe und umgekehrt. Ist z. B. der gegebene Inhalt eines Rechtecks gleich a^2, die Grundlinie y und die Höhe x, so ist:

$$y = \frac{a^2}{x}.$$

In Figur 125 ist diese Funktion graphisch dargestellt; es ist darin $a = 2\,cm$ und der Reihe nach $x = \frac{a}{2}, \frac{3a}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{6a}{4}, 2a, \frac{5}{2}a, 3\,a, 4\,a$ gesetzt. Die erhaltene Kurve ist ein Teil einer gleichseitigen Hyperbel. Nimmt man x negativ, so muß auch y negativ werden, damit $xy = a^2$ wird. Man erhält dann einen zweiten Teil (Ast) der Hyperbel.

3. Der Inhalt des Trapezes ist eine Funktion der Mittellinie und der Höhe, somit auch der Grundlinien und der Höhe.

---

b) Den Flächeninhalt eines beliebigen Vielecks kann man bestimmen, indem man dasselbe entweder durch Diagonalen oder durch Linien, die man von einem Punkte im Innern des Vielecks nach den Ecken zieht, in Dreiecke zerlegt, deren Grundlinien und Höhen man durch Messung bestimmt und die Summe der Dreiecksinhalte bildet.

Besonders einfach gestaltet sich die Inhaltsbestimmung, wenn man in das Vieleck einen Kreis einbeschreiben kann. Zerlegt man ein solches Tangentenvieleck in Dreiecke, deren Spitzen im Mittelpunkte des Inkreises liegen, so haben alle Dreiecke die gleiche Höhe, gleich dem Radius ϱ des Inkreises. Bezeichnet man die Vielecksseiten mit a, b, $c \ldots n$, so ist der Gesamtinhalt des Vielecks:

$$F = \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} + \cdot\cdot \frac{n\varrho}{2} = \frac{(a + b + c + \ldots + n)}{2} \cdot \varrho, \text{ d. h.:}$$

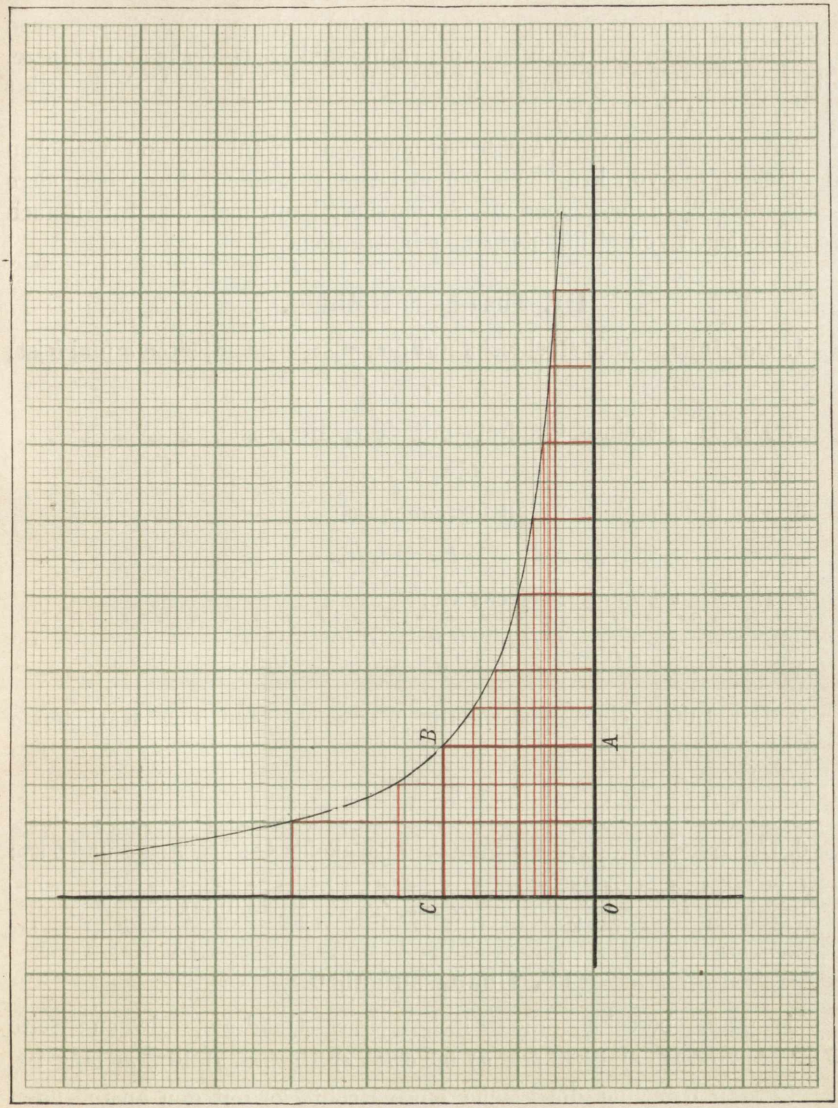


Fig. 125.

Der Flächeninhalt eines jeden Vielecks, in das sich ein Kreis einzeichnen läßt, ist gleich dem halben Produkte aus seinem Umfange und dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises.

Insbesondere ist für das Dreieck, da wir den halben Umfang desselben mit s bezeichnet haben,

$$F = \varrho \,.\, s.$$

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Flächeninhaltes eines Vielecks besteht darin, daß man in der Richtung der längsten Diagonale eine Achse zieht und die Seiten des Vielecks auf diese Achse projiziert. Mißt man sämtliche Projizierenden (Ordinaten) und sämtliche Projektionen (Abszissen), so kann man die Inhalte der rechtwinkligen Dreiecke und Trapeze, in die das Vieleck zerlegt wurde, und damit den Inhalt des Vielecks selbst finden. (Siehe Aufgabe 17.)

Auf mechanischem Wege berechnet man die Inhalte von Vielecken und Flächen, die von krummen Linien begrenzt werden, durch besondere Instrumente, Planimeter genannt. Angenähert kann man den Inhalt auch durch Überlegen von Millimeterpapier bestimmen.

III. Zusammenstellung.

1. Der Inhalt eines **Rechtecks** mit den anstoßenden Seiten a und b ist:

$$F = a\,b.$$

2. Der Inhalt eines **Quadrats** mit der Seite a ist:

$$F = a^2.$$

3. Der Inhalt eines **Parallelogramms** ist:

$$F = a\,h_a = b\,h_b.$$

4. Der Inhalt eines **Dreiecks** ist:

$$F = \frac{a\,h_a}{2} = \frac{b\,h_b}{2} = \frac{c\,h_c}{2} = \varrho\,s.$$

5. Der Inhalt eines **rechtwinkligen Dreiecks** mit den Katheten a und b ist:

$$F = \frac{a\,b}{2}.$$

6. Der Inhalt eines **Trapezes** mit den parallelen Gegenseiten a und b ist:

$$F = \frac{(a + c)\,h}{2} = m\,.\,h, \text{ (}m\text{ die Mittellinie).}$$

IV. Übungsaufgaben.

1. Man berechne die Fläche eines Quadrats, dessen Seite *a*) 5 m; *b*) 26 cm; *c*) 19,48 m; *d*) 6,3 cm; *e*) $15\frac{3}{4}$ m; *f*) $104\frac{4}{5}$ m lang ist.

2. Man berechne die Fläche eines Rechtecks mit den anstoßenden Seiten a und b, wenn

a) $a = 14\,m,\ b = 27\,m$; *d*) $a = 2{,}34\,m,\ b = 37\,cm$;

b) $a = 265\,m,\ b = 313\,m$; *e*) $a = 29\frac{3}{4}\,m,\ b = 37\frac{3}{5}\,m$;

c) $a = 25{,}4\,m,\ b = 91{,}7\,m$; *f*) $a = 19{,}8\,m,\ b = 47\frac{1}{2}\,m$.

3. Ein rechteckiger Platz von 12,5 m Länge und 6,75 m Breite soll mit quadratischen Steinplatten von 30 cm Seitenlänge belegt werden. Wieviel Platten sind hierzu erforderlich?

4. Man berechne aus der Fläche F und der einen Seite a eines Rechtecks die andere Seite b, wenn:

a) $F = 442\,qm \quad a = 17\,m$; $\quad F = 5{,}1975\,qcm \quad a = 27\,mm$.

b) $F = 229{,}5\,qm \quad a = 13{,}5\,m$; $\quad F = 294\frac{19}{24}\,qm \quad a = 8\frac{1}{3}\,m$.

5. Ein quadratisches Grundstück von $s = 98\,m$ Seitenlänge soll gegen ein flächengleiches rechteckiges, dessen Tiefe $a = 28\,m$ beträgt, umgetauscht werden. Wie breit muß das letztere sein?

6. Man berechne die Fläche eines Parallelogramms aus der Seite a und der zu ihr gehörigen Höhe h, wenn:

a) $a = 4{,}5\,cm,\ h = 8{,}7\,m$; $\quad$ b) $a = 13{,}67\,cm,\ h = 9{,}3\,cm$ ist.

7. In einem Parallelogramme ist:

a) $a = 72\,cm,\ b = 25\,cm,\ h_a = 15\,cm$; man berechne h_b;

b) $a = 14\frac{2}{5}\,m,\ h_a = 3\frac{1}{2}\,m$; $h_b = 2\frac{1}{4}\,m$; man berechne b;

c) $a = 7{,}7\,m,\ b = 15{,}4\,m,\ h_b = 3{,}3\,m$; man berechne h_a.

In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Hypotenuse c, die Katheten a und b, die Höhe h, die Projektionen von a und b auf c seien p und q, der Flächeninhalt F, dann ist:

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2};$$
$$a^2 = c^2 - b^2; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)};$$
$$b^2 = c^2 - a^2; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)};$$
$$h^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2; \quad h = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{b^2 - q^2};$$
$$h^2 = p \cdot q; \qquad h = \sqrt{p \cdot q};$$
$$a^2 = c \cdot p; \qquad a = \sqrt{c \cdot p};$$
$$b^2 = c \cdot q; \qquad b = \sqrt{c \cdot q}.$$

8. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben:

a) $a = 49\,cm,\ b = 168\,cm$; gesucht $c,\ F$;

b) $c = 50{,}4\,cm,\ a = 44{,}1\,cm$; gesucht $p,\ F$;

c) $c = 16\,m,\ p = 9\,m$; gesucht $a,\ b,\ h,\ F$;

d) $p = 75\,cm,\ q = 12\,cm$; gesucht $h,\ a,\ b,\ F$;

e) $a = 111\,cm,\ h = 105\,cm$; gesucht $b,\ c,\ p,\ q,\ F$;

f) $h = 5\,m,\ p = 2\,m$; gesucht $q,\ c,\ a,\ b,\ F$;

g) $F = 2{,}55\,qm,\ a = 1{,}5\,m$; gesucht $b,\ c,\ h$.

9. In einem Dreieck ist:

a) $b = 15{,}6\,cm,\ h_b = 4{,}8\,cm,\ h_a = 2{,}6\,cm$; man berechne a;

b) $a = 16\frac{1}{4}\,cm,\ b = 24\,cm,\ h_a = 8\frac{2}{5}\,cm$; man berechne h_b.

10. Die Fläche eines Dreiecks ist gleich der eines Rechtecks, dessen Seiten $8{,}4\,m$ und $12{,}8\,m$ lang sind. Wie groß ist die Höhe des Dreiecks, wenn seine Grundlinie $9{,}6\,m$ beträgt?

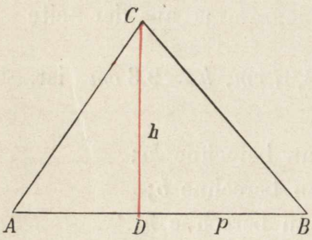
11. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Grundlinie $a = 64\,cm$, $h_a = 126\,cm$. Wie lang sind die Schenkel und wie groß ist der Flächeninhalt?

12. Man berechne den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Grundlinie a und dem Schenkel b.

13. Man berechne den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a.

14. Es soll der Flächeninhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten a, b, c berechnet werden.

Fig. 126.



Lösung. (Fig. 126.) Es ist der Flächeninhalt

$$F = \frac{c\,h}{2} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

In dieser Gleichung muß h durch die drei Seiten ausgedrückt werden. Es ist (Fig. 126.)

$$h^2 = a^2 - p^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$$h^2 = b^2 - (c-p)^2 = b^2 - c^2 + 2\,c\,p - p^2 \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

$$a^2 - p^2 = b^2 - c^2 + 2\,c\,p - p^2$$

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c}.$$

Setzt man diesen Wert von p in (2) ein, so erhält man:

$$h^2 = (a+p)(a-p) = \left(a + \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,c}\right)\left(a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,c}\right)$$

$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2\,c} \cdot \frac{b^2-(a-c)^2}{2\,c}.$$

Hieraus folgt:

$$4\,c^2\,h^2 = \left[(a+c)^2 - b^2\right] \cdot \left[b^2 - (a-c)^2\right] =$$

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c).$$

$$2\,c\,h = \sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}.$$

$$F = \frac{c\,h}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Wir setzen der Übersichtlichkeit wegen:

$$a+b+c = 2\,s,$$

dann ist:

$$-a+b+c = 2\,s - 2\,a = 2\,(s-a)$$

$$a-b+c = 2\,s - 2\,b = 2\,(s-b)$$

$$a+b-c = 2\,s - 2\,c = 2\,(s-c)$$

und:

$$F = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Diese Formel, die den Flächeninhalt eines Dreiecks als Funktion der drei Seiten darstellt, heißt die **Heronische Formel** (Hero von Alexandrien, erstes Jahrhundert v. Chr.[1]).

Ist $a = 15$, $b = 14$, $c = 13$, so folgt:

$s = 21$, $s - a = 6$ $s - b = 7$, $s - c = 8$,

$F = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} = 84.$

Man nennt drei Zahlen, die als Maßzahlen der drei Seiten eines Dreiecks aufgefaßt, für den Inhalt eine rationale Zahl ergeben, **heronische** Zahlen; die Dreiecke selbst heißen **heronische** Dreiecke. Zwei pythagoreische Dreiecke, d. h. rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten, die in einer Kathete übereinstimmen, lassen sich zu einem heronischen Dreieck zusammensetzen.

Es ergeben sich z. B. aus den rechtwinkligen Dreiecken mit den Seiten 37, 35, 12; 20, 16, 12; 15, 12, 9; 13, 12, 5 die heronischen Dreiecke mit den Seiten 37, 20, 51; 37, 15, 44; 37, 13, 40; 20, 15, 25; 20, 13, 21; 15, 13, 14.

Anmerkung. Alle pythagoreischen Dreiecke sind auch heronische. Ist $m > n$, m und n relativ prim und eine der Zahlen gerade, die andere ungerade, so erhält man als Lösungen der Gleichung:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a = 2\,m\,n, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2.$$

Es ergibt sich daher:

$s = m^2 + m\,n$; $s - a = m^2 - m\,n$, $s - b = m\,n + n^2$, $s - c = m\,n - n^2$,

$$F = \sqrt{(m^2 + m\,n)(m^2 - m\,n) \cdot (m\,n + n^2)(m\,n - n^2)} =$$
$$= \sqrt{m^2 n^2 (m + n)(m - n)(m + n)(m - n)} = m\,n\,(m + n)(m - n) =$$
$$= m\,n\,(m^2 - n^2) = \frac{2\,m\,n\,(m^2 - n^2)}{2} = \frac{ab}{2}.$$

15. Es ist von einem Trapez mit den parallelen Gegenseiten a und b der Höhe h, der Mittellinie m und dem Flächeninhalt F gegeben:

a) $a = 28\,cm$,	$b = 15\,cm$,	$h = 13\,cm$;	man berechne F;
b) $a = 24{,}3\,cm$,	$b = 35{,}7\,m$,	$h = 8{,}3\,cm$;	man berechne F;
c) $F = 250{,}625\,qm$,	$a = 24{,}3\,m$,	$b = 15{,}8\,m$;	man berechne h;
d) $F = 938{,}98\,qcm$,	$h = 33{,}25\,cm$;	man berechne m;	
e) $F = 205\frac{1}{4}\,qm$,	$h = 8\frac{3}{4}\,m$,	$b = 29\frac{2}{5}\,m$;	man berechne a.

[1]) Hero von Alexandrien ist der Vertreter der praktischen und technischen Geometrie unter den griechischen Mathematikern. In seinen Werken finden sich die Formeln für die Flächenberechnungen geradliniger Figuren, wie wir sie in diesem Abschnitte gegeben haben.

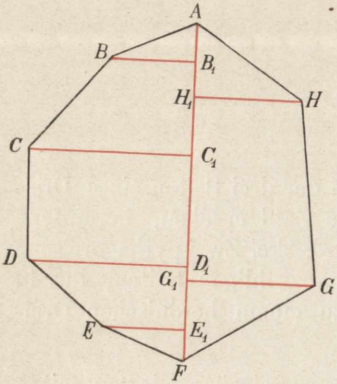


Fig. 127.

16. Man berechne die Seite und die Fläche eines Rhombus aus den Diagonalen $e = 22{,}4\ cm$ und $f = 13{,}2\ cm$.

17. Es soll der Inhalt des Vielecks $ABCDEFGH$ (Fig. 127) berechnet werden, wenn BB, CC_1, DD_1, EE_1, $HH_1 \perp AF$ und

$BB_1 = 10{,}4\ cm$	$AB_1 = 3{,}5\ cm$
$CC_1 = 17{,}8\ cm$	$BH_1 = 2{,}9\ cm$
$DD_1 = 16{,}9\ cm$	$H_1C_1 = 5{,}4\ cm$
$EE_1 = 8{,}3\ cm$	$C_1D_1 = 14{,}8\ cm$
$GG_1 = 15{,}9\ cm$	$D_1G_1 = 1{,}7\ cm$
$HH_1 = 13{,}4\ cm$	$E_1G_1 = 4{,}5\ cm$
	$E_1F = 3{,}7\ cm$

V. Anwendungen der Flächensätze.

1. Geometrische Veranschaulichung der arithmetischen Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \quad \text{(Vgl. Anmerkung zu Satz 64.)}$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

Fig. 128 *a*.

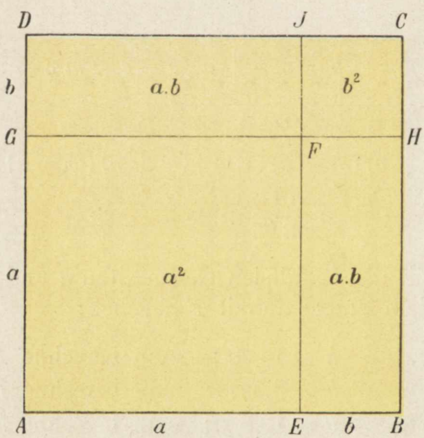
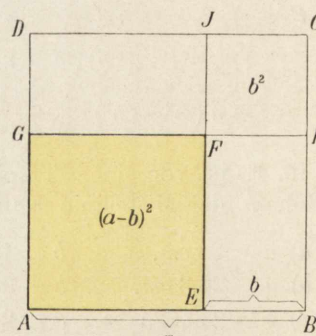


Fig. 128 *b*.



Aus dem Lehrsatze 70 folgt, daß man das Produkt zweier Strecken geometrisch durch die Fläche des aus diesen Strecken gebildeten Rechtecks darstellen kann. Ebenso wird die zweite Potenz einer Strecke geometrisch durch die Fläche des über der Strecke als Seite gezeichneten Quadrates veranschaulicht. Mit Benutzung dieser Beziehung lassen sich die obigen drei Gleichungen auch geometrisch deuten, wie man sofort aus den Figuren *a*, *b*, *c* erkennt.

Wie lassen sich die drei Gleichungen geometrisch aussprechen?

Fig. 128 c.

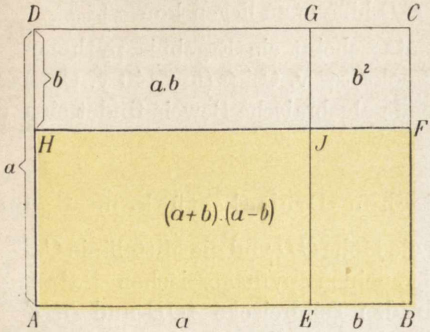
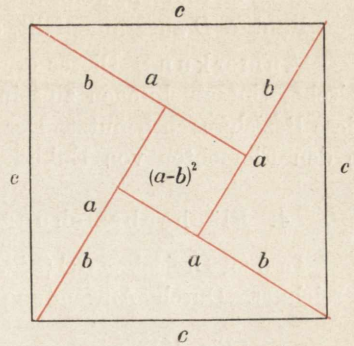


Fig. 129.



2. Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes.

Der früher gegebene zweite Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes (Fig. 109 *a*) läßt sich mit Benutzung der unter 1 angedeuteten Beziehungen in abgekürzter Form wie folgt geben:

$$c^2 = (a + b)^2 - 4\,\frac{a\,b}{2} = a^2 + b^2.$$

Ein weiterer Beweis des pythagoreischen Satzes folgt aus der Figur 129 Es ist:

$$c^2 = (a - b)^2 + 4\,\frac{a\,b}{2} = a^2 + b^2.$$

Anmerkung. Der letztere Anschauungsbeweis ist indischen Ursprunges. Von den Indern entlehnten die Araber den Beweis. Eine Nachschrift der Vorlesungen Abu'l Wafa's (940—998, Bagdad) enthält die vorstehende Zeichnung.

3. Neuer Beweis des erweiterten pythagoreischen Satzes.

Zeichnet man in dem Dreieck ABC die Höhe CD und wendet auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke den pythagoreischen Lehrsatz an, so erhält man für beide Figuren (130 *a* und 130 *b*):

$$h^2 = a^2 - (c \mp q)^2$$
$$= b^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq,$$

d. i. der erweiterte pythagoreische Lehrsatz für das spitz- und stumpfwinklige Dreieck.

Fig. 130 *a*.

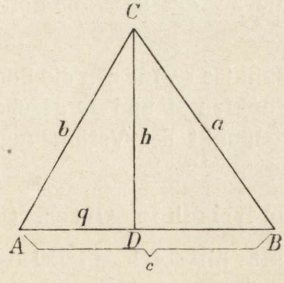
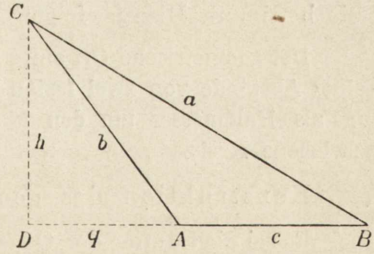


Fig. 130 *b*.



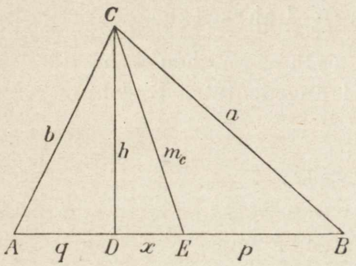
Was ergibt sich, wenn man in Figur 130 *a* CA und C dreht, bis A mit dem Punkte D zusammenfällt, oder über D hinaus zu liegen kommt?

Anmerkung. Dieser erweiterte Satz scheint ein Ergebnis pythagoreischer Untersuchungen zu sein, da Hippokrates v. Chios (um 440 v. Chr.) diese Beziehungen benutzt. Der vorstehende algebraische Beweis findet sich in den Elementen von Euklid.

4. Flächenbeziehungen zwischen Dreiecksstücken.

In dem Dreieck ABC (Fig. 131) ist die Höhe CD und die Mittellinie CE gezeichnet. Durch Anwendung des allgemeinen pythagoreischen Satzes auf die beiden Teildreiecke ACE und BCE folgt, wenn man DE mit x bezeichnet,

Fig. 131.



$$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 - 2\,\frac{a}{2}\,x$$

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 + 2\,\frac{a}{2}\,x$$

Durch Addition der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$a^2 + b^2 = 2\,.\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2\,m_c^2,$$

oder: $$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2\,m_c^2, \quad \text{d. h.:}$$

In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate über zwei Seiten gleich der Summe aus dem halben Quadrate der dritten Seite und dem doppelten Quadrate der zu letzterer Seite gehörigen Mittellinie.

Aus der vorhergehenden Ableitung folgt:

$$m_c^2 = \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right],$$

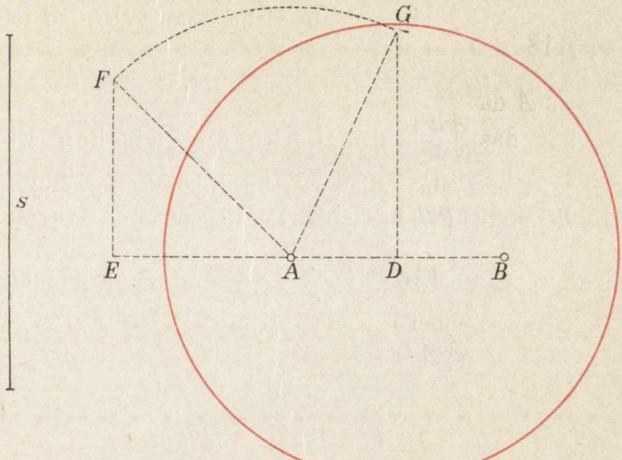
d. h. durch die Summe der Quadrate der Seiten a und b und durch die dritte Seite c eines Dreiecks ist die zu der letzteren Seite gehörige Mittellinie bestimmt. Hieraus folgt:

Der geometrische Ort eines Punktes C, für den die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten A und B gegeben ist, ist der mit m_c als Halbmesser um den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke AB beschriebene Kreis.

Konstruktion des geometrischen Ortes. (Fig. 132.)

Es sei die Summe der Quadrate über AC und BC als Quadrat mit der Seite s gegeben. Man verlängere die Verbindungsstrecke $BA = c$ der ge-

Fig. 132.



gebenen Punkte B und A um $AE = \frac{s}{2}$, errichte auf AE in E das Lot $EF = \frac{s}{2}$ und verbinde A mit F. Man errichte auf AB die Mittelsenkrechte, schlage um A mit AF den Kreis, der die Mittelsenkrechte in G trifft, so ist DG die Länge der Mittellinie und der um D mit DG beschriebene Kreis der geometrische Ort des Punktes C. Denn es ist: $DG^2 = AG^2 - AD^2 = AF^2 - AD^2 = AE^2 + EF^2 - AD^2$

$$= \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}s^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Aus Figur 131 folgt:

$$\begin{array}{r} a^2 = h^2 + p^2 \\ b^2 = h^2 + q^2 \\ \hline a^2 - b^2 = p^2 - q^2, \end{array}$$ d. h.

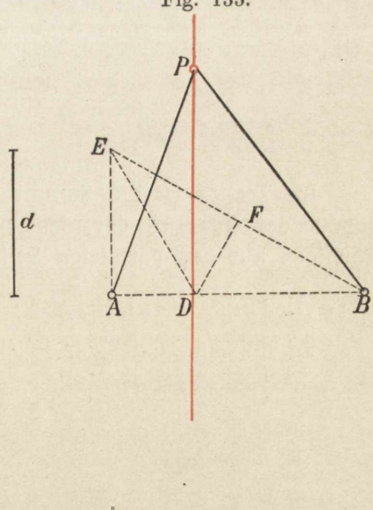
Der Unterschied der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Unterschiede der Quadrate ihrer Projektionen auf die dritte Seite.

Für jeden Punkt P der Verlängerung des Lotes DC (Fig. 131) gilt die Gleichung:

$$PB^2 - PA^2 = p^2 - q^2,$$

mithin folgt:

Fig. 133.



Der geometrische Ort eines Punktes, für den der Unterschied der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten eine gegebene Größe besitzt, ist ein auf der Verbindungsstrecke der gegebenen Punkte errichtetes Lot.

Konstruktion des geometrischen Ortes. (Fig. 133.)

Die gegebene Differenz der Quadrate der Entfernungen von den gegebenen Punkten A und B sei als Quadrat mit der Seite d gegeben. Man errichte auf AB

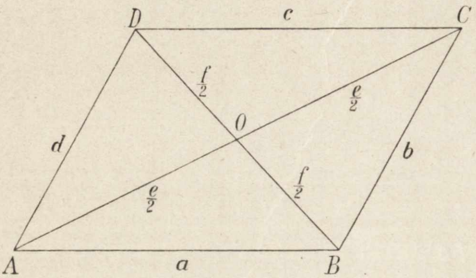
in A das Lot $AE = d$, verbinde E mit B und errichte auf EB das Mittellot, das AB in D trifft. Das in D auf AB errichtete Lot ist der gesuchte geometrische Ort, denn zieht man DE, so folgt für den beliebigen Punkt P des Lotes:

$$PB^2 - PA^2 = BD^2 - AD^2 = DE^2 - AD^2 = AE^2 = d^2.$$

5. Flächenbeziehungen zwischen Vierecksstücken.

Wendet man die unter 4 abgeleitete Beziehung auf die beiden Dreiecke ABC und ADC, in die das Parallelogramm $ABCD$ durch die Diagonale AC zerlegt wird (Fig. 134), an, so erhält man die Gleichungen:

Fig. 134.

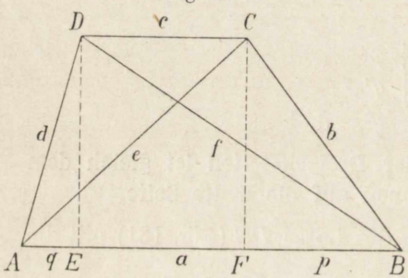


$$\begin{array}{l} a^2 + b^2 = \dfrac{e^2}{2} + 2 \cdot \left(\dfrac{f}{2}\right)^2 \\ c^2 + d^2 = \dfrac{e^2}{2} + 2 \cdot \left(\dfrac{f}{2}\right)^2 \\ \hline a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2, \end{array}$$

d. h.:

Im Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

Fig. 135.



Bezeichnet man in dem Trapez $ABCD$ (Fig. 135) die Projektionen der nicht parallelen Seiten AD und BC auf AB mit q und p, so ergibt sich nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatze:

$$\begin{array}{rl} e^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,p \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2\,a\,q \\ \hline e^2 + f^2 &= 2\,a^2 + b^2 + d^2 - 2\,a\,(p + q) \\ &= 2\,a^2 + b^2 + d^2 - 2\,a\,(a - c) \\ &= 2\,a^2 + b^2 + d^2 - 2\,a^2 + 2\,a\,c \\ e^2 + f^2 &= b^2 + d^2 + 2\,a\,c, \end{array}$$

d. h.:

Im Trapez ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der nicht parallelen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus den parallelen Seiten.

Übungsaufgaben.

Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

1. $c,\ a^2 + b^2 = s^2,\ a$; **2.** $c,\ a^2 + b^2 = s^2,\ \gamma$; **3.** $c,\ a^2 + b^2 = s^2,\ h_c$;

4. $p, q, a^2 + b^2 = s^2$; **5.** $c, a^2 + b^2 = s^2, h_a$; **6.** $a^2 + b^2 = s^2, r, \gamma$;
7. $c, a^2 + b^2 = s^2, m_a$; **8.** $c, a^2 - b^2 = d^2, a$; **9.** $c, a^2 - b^2 = d^2, \gamma$;
10. $c, a^2 - b^2 = d^2, h_c$; **11.** $c, a^2 - b^2 = d^2, h_a$; **12.** $p, a^2 - b^2 = d^2, t_a$.

Kapitel XXI.

Verhältnisgleichheit von Strecken.

Die Schenkel des Winkels A oder ihre Verlängerungen über A werden von den Parallelen BD und CE geschnitten. (Fig. 136 a, b.) Die Abschnitte AB und BC des einen Schenkels sollen das gemeinschaftliche Maß m haben, das in AB p-mal und in BC q-mal enthalten ist. Wird dieses Maß auf AB p-mal und auf BC q-mal abgetragen und durch die Teilpunkte Parallelen zu den gegebenen Parallelen BD und CE gezogen, so wird nach Kapitel XIII e) AD in p und DE in q unter sich gleiche Teile geteilt. Daher folgt:

Fig. 136 a

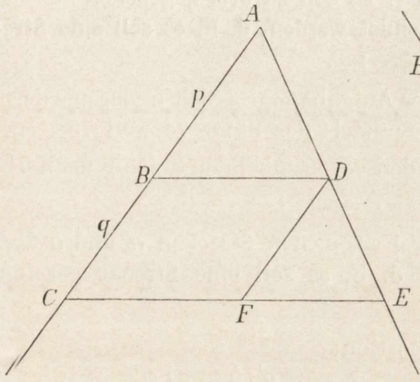
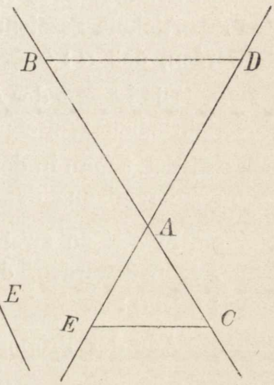


Fig. 136 b.



$$AB : BC = p : q$$
$$AD : DE = p : q$$

Mithin ist:

$$AB : BC = AD : DE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ferner ist:

$$AC : AB = (p + q) : p$$
$$AE : AD = (p + q) : p,$$

also auch:

$$AC : AB = AE : AD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$AC : BC = (p + q) : q$$
$$AE : DE = (p + q) : q$$
$$AC : BC = AE : DE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Satz 74. Werden die Schenkel eines Winkels (oder ihre Verlängerungen über den Scheitel hinaus) durch zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte des einen Schenkels wie die entsprechenden Abschnitte des andern.

Zieht man in Figur 136 a) DF parallel zu AC, so ergibt sich durch Anwendung des Satzes 74 auf den Winkel E:

$$CE : CF = AE : AD,$$

oder, da $CF = BD$ ist,

$$CE : BD = AE : AD = AC : AB, \text{ d. i.:}$$

Satz 75. Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Parallelen wie die vom Scheitel bis zu ihnen gemessenen Abschnitte jedes Schenkels.

Wie lauten die Sätze 74 und 75 für das Dreieck, in dem man zu einer Seite eine Parallele zieht?

Grundaufgabe 1. Es soll zu drei gegebenen Strecken a, b, c die vierte Proportionale gezeichnet werden, d. h. es soll eine Strecke x so gezeichnet werden, daß $a : b = c : x$.

Die Lösung der Aufgabe ergibt sich in der aus den Figuren 137 a, b, c, d ersichtlichen Weise mittels der Sätze 74 und 75.

Setzt man in den voranstehenden Zeichnungen überall $c = b$, so erhält man die Lösung der Aufgabe:

Es soll zu zwei gegebenen Strecken a und b die dritte Proportionale gezeichnet werden, d. h. es soll eine Strecke gezeichnet werden, so daß $a : b = b : x$.

Aus der Proportion:

$$a : b = c : x$$

folgt:

$$x = \frac{b \,.\, c}{a};$$

x ist also eindeutig durch a, b, c bestimmt. Wenn man daher in den Figuren 137 a, b, c die Strecke x auf dem Winkelschenkel AN von E, beziehungsweise von A aus abträgt, so muß ihr anderer Endpunkt auf den Endpunkt der durch B zu CE

Fig. 137 a.

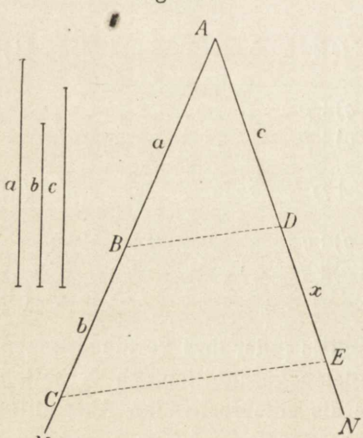


Fig. 137 b.

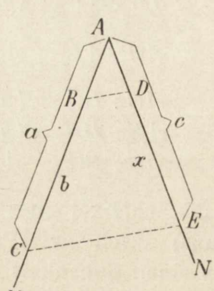
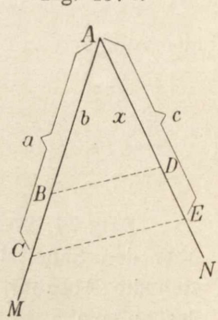
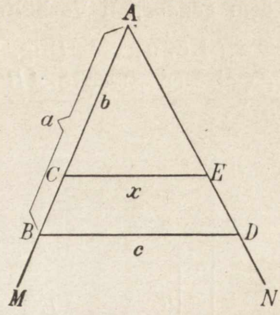


Fig. 137 c.



gezogenen Parallelen zu liegen kommen. Ferner ergibt sich aus der Figur 137 *d*, daß, wenn man auf der durch C zu BD gezogenen Parallelen die Strecke x von C aus abträgt, ihr zweiter Endpunkt mit dem Schnittpunkt E der durch C gezogenen Parallelen und der Geraden AD zusammenfallen, d. h. der Punkt E auf AD liegen muß.

Fig. 137 *d*.



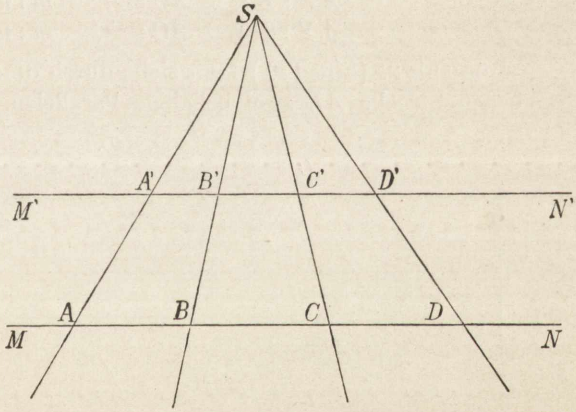
Es folgen daher als Umkehrsätze der Sätze 74 und 75 die Sätze:

Satz 76. Werden auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitelpunkte aus verhältnisgleiche Strecken abgetragen, so sind die Verbindungslinien entsprechender Teilpunkte einander parallel.

Satz 77. Zieht man von zwei Punkten eines Strahles parallele Strecken, die sich wie die Abstände dieser Punkte von dem Endpunkte des Strahles verhalten, so geht die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Strecken durch den Endpunkt des Strahles.

Schneidet man die Strahlen eines Strahlenbüschels S (Fig. 138) durch zwei Parallelen MN und $M'N'$, so folgt durch wiederholte Anwendung von Satz 74: $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D'$.

Fig. 138.



Satz 78. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich je zwei Abschnitte der einen Parallelen zueinander wie die entsprechenden auf der andern.

Umgekehrt folgt:

Werden auf zwei Parallelen hintereinander verhältnisgleiche Strecken abgeschnitten, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Teilpunkte durch einen Punkt.

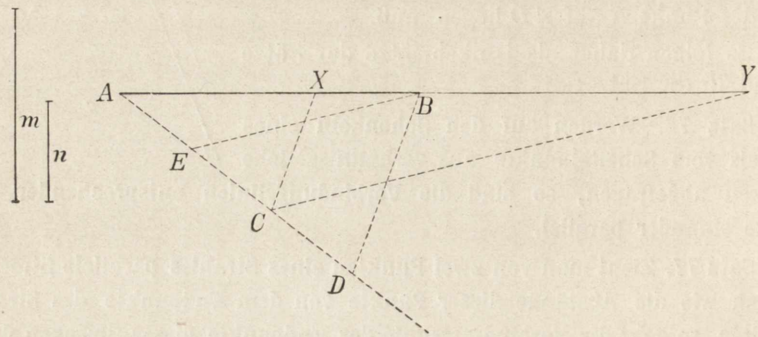
Erklärung. Eine Strecke wird durch jeden auf ihr selbst liegenden Punkt **innen**, durch jeden auf ihren Verlängerungen liegenden Punkt **außen** geteilt.

Abschnitte der Strecke sind die Abstände des Teilpunktes von den Endpunkten der Strecke.

Grundaufgabe 2. Es soll eine gegebene Strecke innen und außen in dem gegebenen Verhältnis $m:n$ geteilt werden.

Lösung 1. (Fig. 139.) Man ziehe durch den einen Endpunkt A der gegebenen Strecke AB einen Strahl, trage auf ihm $AC = m$, $CD = n$ ab,

Fig. 139.



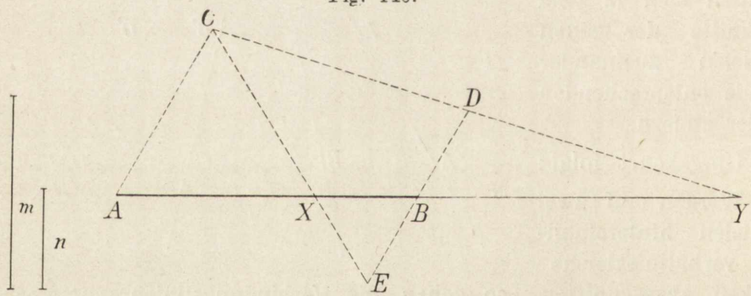
verbinde D mit B und ziehe CX parallel BD, so ist X der innere Teilpunkt. Um den äußeren Teilpunkt Y zu erhalten, trägt man auf dem durch A gezogenen Strahle $AC = m$ und rückwärts $CE = n$ ab, verbindet E mit B und zieht CY parallel BE.

Nach Satz 74 folgt:

$$AX : BX = AC : CD = m : n$$
$$AY : BY = AC : EC = m : n$$

Lösung 2. (Fig. 140.) Man ziehe durch die Endpunkte A und B der gegebenen Strecke AB zwei beliebige Parallelen, trage auf der einen von

Fig. 140.



ihnen $AC = m$, auf der andern beiderseits von B aus $BD = BE = n$ ab und verbinde C mit E, so schneidet CE die Strecke AB im inneren Teilpunkte X; die Verbindungslinie CD trifft die Verlängerung von AB im äußeren Teilpunkte Y.

Der Beweis folgt aus Satz 75[1]).

[1]) Die zweite Lösung rührt von dem Alexandriner Pappus (3. Jahrhundert u. Chr.) her.

Anmerkung. Soll die gegebene Strecke nach dem Verhältnis zweier gegebenen Zahlen, etwa 4 : 3, geteilt werden, so ersetze man das Zahlenverhältnis durch das Verhältnis $4n : 3n$, wo n eine beliebige Strecke ist.

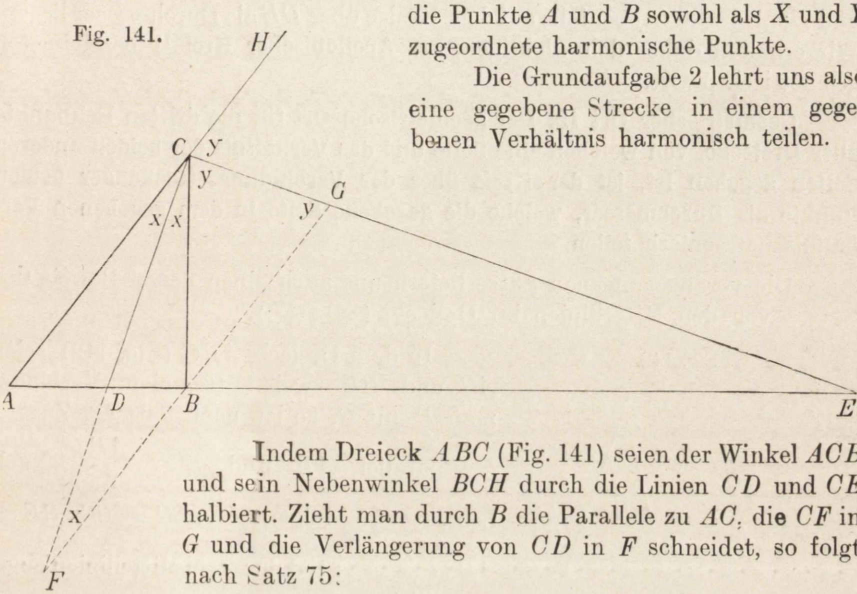
Erklärung. Eine Strecke, welche innen und außen in demselben Verhältnis geteilt ist, heißt **harmonisch** geteilt.

In Figur 139 und Figur 140 ist:

$$AX : BX = AY : BY.$$

Die vier Punkte A, B, X, Y heißen **harmonische Punkte,** und zwar die Punkte A und B sowohl als X und Y zugeordnete harmonische Punkte.

Fig. 141.



Die Grundaufgabe 2 lehrt uns also eine gegebene Strecke in einem gegebenen Verhältnis harmonisch teilen.

Indem Dreieck ABC (Fig. 141) seien der Winkel ACB und sein Nebenwinkel BCH durch die Linien CD und CE halbiert. Zieht man durch B die Parallele zu AC, die CF in G und die Verlängerung von CD in F schneidet, so folgt nach Satz 75:

$$1)\quad AD : DB = AC : BF.$$

Da das Dreieck FCB gleichschenklig ist, so ist $BF = BC$ und mithin

$$AD : DB = AC : BC.$$

$$2)\quad AE : BE = AC : BG.$$

Da auch das Dreieck BCG gleichschenklig ist, so ist $BG = BC$ und daher

$$AE : BE = AC : BC,$$

d. h. in Worten:

Satz 79. Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die gegenüberliegende Dreiecksseite innen und außen im Verhältnis der beiden anderen Dreiecksseiten, d. h. sie teilen die Seite harmonisch.

Da die innere und äußere Teilung einer Strecke in einem gegebenen Verhältnis (in obigem Satze der einen Dreiecksseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten) nur auf eine Art möglich ist, so läßt sich der Satz 79 umkehren. Wie lautet die Umkehrung?

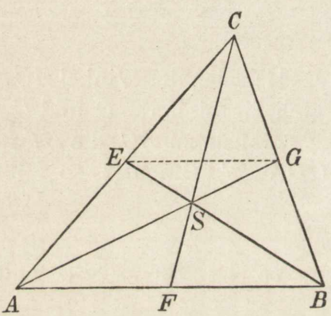
Die Halbierungslinien eines Winkels und seines Nebenwinkels stehen aufeinander senkrecht; es liegt daher der Punkt C auf dem Kreise, der die Verbindungsstrecke DE der beiden Teilpunkte als Durchmesser hat.

Zeichnet man über AB ein zweites Dreieck ABC^{I}, in dem das Seitenverhältnis $AC^{\text{I}} : BC^{\text{I}} = AC : BC$ ist, so stehen in demselben die Halbierungslinien des Innen- und Außenwinkels bei C^{I} ebenfalls aufeinander senkrecht und teilen diese Linien die gemeinsame Seite AB in denselben Punkten D und E; also muß C^{I} ebenfalls auf dem Kreise über DE als Durchmesser liegen. Wir erhalten daher den wichtigen, als **Apollonischer Kreis**[1]) bezeichneten geometrischen Ort.

Geometrischer Ort 12. Der geometrische Ort für die dritten Eckpunkte aller Dreiecke, von welchen eine Seite und das Verhältnis der beiden anderen Seiten gegeben ist, ist der Kreis über der Verbindungsstrecke der beiden Punkte als Durchmesser, welche die gegebene Seite in dem gegebenen Verhältnis harmonisch teilen.

Die vorangegangenen Sätze liefern uns auch einen neuen Beweis des Satzes von den Mittellinien im Dreieck. (Satz 47.)

Fig. 142.



In dem Dreieck ABC (Fig. 142) seien AG und BE zwei Mittellinien. Verbindet man E mit G, so ist nach Satz 42, Zusatz, EG parallel AB und $EG = \frac{AB}{2}$. Nach Lehrsatz 75 folgt: $AS : SG = BS : SE = AB : \frac{AB}{2} = 2 : 1$, d. h.: zwei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich im Verhältnis $2 : 1$, d. h. so, daß die oberen Abschnitte doppelt so groß sind wie die unteren.

Ist CF die dritte Mittellinie, so schneiden nach dem Vorangehenden sowohl AG als auch BE auf CF von C aus eine Strecke $\frac{2}{3}\,CF$ ab; AG und BE müssen demnach durch denselben Punkt S von CF gehen, d. h.:

Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Übungsaufgaben.

1. Es soll eine gegebene Strecke in drei Teile geteilt werden, die sich wie $2 : 3 : 4$ oder wie $m : n : p$ verhalten.

---

[1]) Apollonius von Pergä (zwischen 250 und 200 v. Chr. in Alexandria, dann in Pergamum). Er definiert den Kreis als den geometrischen Ort aller der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten ein konstantes Verhältnis haben.

Eine gegebene Strecke so zu verlängern, daß sich

2. die gegebene Strecke zur Verlängerung wie $m:n$ verhält;

3. die verlängerte Strecke zur gegebenen Strecke wie $m:n$ verhält;

4. die verlängerte Strecke zur Verlängerung wie $m:n$ verhält.

5. Es sollen aus der gegebenen Summe s zweier Strecken a und b und aus ihrem Verhältnis $m:n$ die Strecken gesucht werden. (Grundaufgabe 2.)

6. Es sollen aus der gegebenen Differenz d zweier Strecken a und b und aus ihrem Verhältnis $m:n$ die Strecken gesucht werden. (Grundaufgabe 2.)

7. Es soll aus dem gegebenen Verhältnis $m:n$ zweier Strecken und aus einer derselben (a) die andere (b) gefunden werden. (Grundaufgabe 1.)

Anwendung von Aufgabe 7 zur Lösung nachfolgender Dreiecksaufgaben.

Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

8. $a:b=m:n,\ a,\ h_c$;

9. $a:b=m:n,\ a,\ \gamma$;

10. $a:b=m:n,\ h_c,\ p$;

11. $a:b=m:n,\ h_a,\ \gamma$;

12. $p:q=m:n,\ a,\ h_c$;

13. $c:h_c=m:n,\ h_a,\ \beta$;

14. $a:b=m:n,\ r,\ a$;

15. $c:m_c=m:n,\ r,\ \gamma$;

16. $c:m_a=m:n,\ r,\ \gamma$;

17. Es soll das Rechteck mit den anstoßenden Seiten b und c in ein anderes mit der gegebenen Seite a verwandelt werden. (Grundaufgabe 1.)

Anmerkung. Bildet man aus der Streckenproportion $a:b=c:x$ die Produktengleichung $a\,x=b\,.\,c$, so erhält diese Gleichung eine geometrische Deutung, wenn man die entstandenen Produkte nach Satz 70 als Rechtecke auffaßt. Vier Strecken bilden demnach eine geometrische Proportion, wenn das Rechteck aus den Außengliedern gleich dem Rechteck aus den Innengliedern ist.

18. In dem Dreieck ABC wird die Seite AC durch eine zu BC parallele Gerade im Verhältnis $3:4$ geteilt. Wie groß sind die Abschnitte der Seite AB, wenn die letztere gleich $56\,m$ ist?

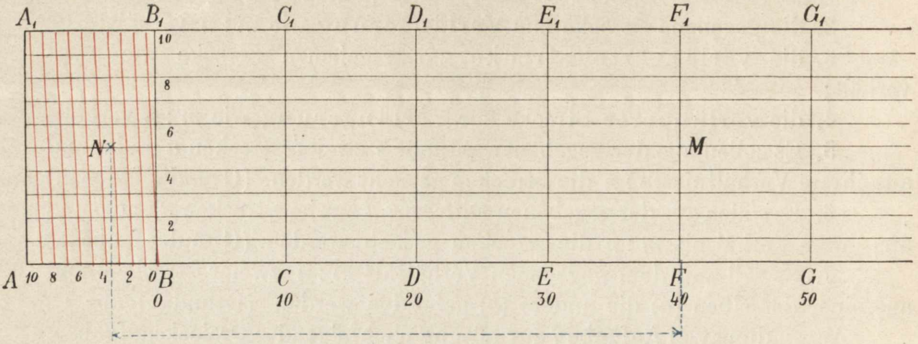
19. Es soll zu einer Seite eines Dreiecks eine parallele Transversale so gezogen werden, daß sie gleich $\frac{1}{3}$ (oder $\frac{2}{5}$) jener Seite ist.

20. Es sei eine Seite eines Dreiecks in zehn gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt die Parallelen zur zweiten Seite, deren Länge $1\,cm$ beträgt, gezogen Man berechne die Längen der in das Dreieck fallenden Parallelstrecken.

21. Es soll ein Transversalmaßstab (Verkleinerungsverhältnis 1 : 500) gezeichnet werden. (Man benutze Aufgabe 20.) (Fig. 143.)

Anmerkung. Der Transversalmaßstab findet im praktischen Leben vielfache Verwendung, z. B. beim Entwerfen von Bau- und Maschinenzeichnungen nach gegebenen Maßen, bei Geländezeichnungen nach Vermessungen. Soll ein Plan oder eine Zeichnung hergestellt werden, bei der alle Strecken zu den entsprechenden, in Zahlen angegebenen oder durch Messung ermittelten Strecken, im Verhältnis 1 : 500 stehen sollen, so müssen

Fig. 143.



100 m in wirklicher Größe in der Zeichnung durch eine Strecke von $\frac{100}{500}\,m =$ $= 0{,}2\,m$, 10 m durch $\frac{10}{500}\,m = 0{,}02\,m = 2\,cm$, 1 m durch $\frac{1}{500}\,m = 0{,}002\,m =$ $= 2\,mm$ und 0,1 m durch $\frac{0{,}1}{500} = 0{,}0002\,m = 0{,}2\,mm$ dargestellt werden.

Man trage auf AG die Strecken $AB = BC = CD = DE = \ldots.$ 2 cm ab, errichtet AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, usw. senkrecht auf AG und ziehe A_1G_1 parallel AG. Hierauf teilt man AB und A_1B_1 in je zehn gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte in der aus der Figur 143 ersichtlichen Weise. Ferner teilt man AA_1 in zehn gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zu AG. Jeder Teil von AB ist gleich 2 mm und stellt 1 m wahrer Größe dar. Die Parallelstrecken zwischen den Schenkeln der Winkel A_1 und B stellen von oben nach unten, beziehungsweise umgekehrt 0,1, 0,2 m..... 0,9 m in wahrer Größe dar. Die Strecke MN der Figur 143 entspricht dann beispielsweise einer wahren Länge von 43,5 m.

22. Zwischen den Schenkeln eines Winkels A ist ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine die Schenkel in X und Y schneidende Gerade so ziehen, daß sich:

a) $AX : AY = m : n$

b) $PX : PY = m : n$ verhält. (Spezialfall $m : n = 1 : 1$.)

23. Es soll der geometrische Ort eines Punktes bestimmt werden, dessen Abstände von den Schenkeln eines gegebenen Winkels das Verhältnis $m : n$ haben.

A n l e i t u n g. Man ziehe zu dem einen Schenkel im Abstande m, zu dem andern im Abstande n je eine Parallele; verbindet man ihren Schnittpunkt mit dem Scheitel des gegebenen Winkels, so hat jeder Punkt dieser Verbindungslinie die verlangte Eigenschaft.

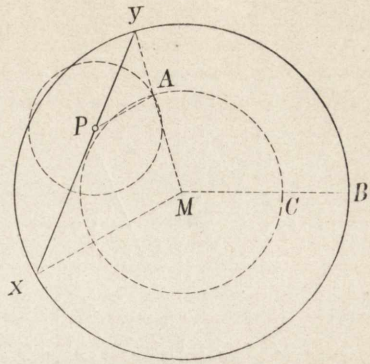
Welchen bekannten geometrischen Ort erhalten wir für $m : n = 1 : 1$?

24. Man soll durch einen Punkt P innerhalb eines Kreises eine Sehne XY so zeichnen, daß sich $PX : PY = m : n$ verhält.

A n l e i t u n g zur Analysis. (Fig. 144.) Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ziehe man PA parallel MX; dann ist: $MA : AY$

$= m : n$ und, da $MX = MY$, auch $PA = AY$. Man teile daher einen beliebigen Halbmesser MB in C nach dem Verhältnis $m : n$, schlage um M mit MC und um P mit BC Kreise und ziehe MA, so trifft diese Linie den gegebenen Kreis in Y.

Fig. 144.



Aufgaben, die mittels Anwendung des Apollonischen Kreises zu lösen sind.

25. Es soll innerhalb eines gegebenen Dreiecks ein Punkt P so bestimmt werden, daß seine Abstände von den drei Eckpunkten des Dreiecks sich wie drei gegebene Strecken $(m : n : o)$ verhalten.

Anleitung. Man wende zweimal den Apollonischen Kreis an.

Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

26. $c,\ a : b = m : n,\ h_c$;
27. $c,\ a : b = m : n,\ r$;
28. $u,\ v,\ h_c\ (u : v = a : b)$;
29. $u,\ v,\ w_\gamma$;
30. $u,\ v,\ m_c$;
31. $c,\ h_c,\ m_a : m_b = n : o$;
32. $p,\ q,\ m_a : m_b = n : o$;
33. $r,\ \gamma,\ m_a : m_b = n : o$.
34. $c,\ a : b = r : s;\ m_a : m_b = n : o$.

Kapitel XXII.

Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

I. Ähnlichkeitslage.

Geometrische Figuren können hinsichtlich ihrer Größe und Gestalt, hinsichtlich ihrer Größe oder nur hinsichtlich ihrer Gestalt miteinander verglichen werden.

Figuren von **gleicher Größe und Gestalt** bezeichnen wir als **kongruent** ($\cong$), Figuren von **derselben Größe** sind einander **gleich** ($=$). Figuren, die nur in der **Gestalt** übereinstimmen, werden **ähnliche** Figuren genannt. Das Zeichen der Ähnlichkeit ist ein liegendes s, $\sim$, von dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes similis (ähnlich).

Zieht man von einem Punkte S (Fig. 145 a) aus nach allen Punkten einer Figur $ABCDE$ Strahlen, und nimmt man auf jedem dieser Strahlen SA, SB, SC, SD, SE oder deren Verlängerungen über S einen weiteren Punkt A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, beziehungsweise A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 an, so werden durch letztere Punkte Figuren $A_1B_1C_1D_1E_1$, beziehungsweise $A_2B_2C_2D_2E_2$ bestimmt, die man **perspektivische Projektionen** der ersteren nennt. Der Punkt

Fig. 145 *a*.

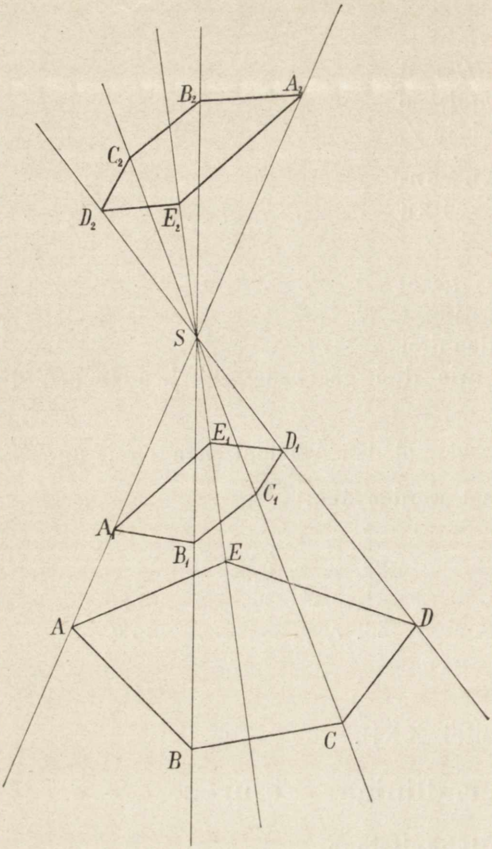
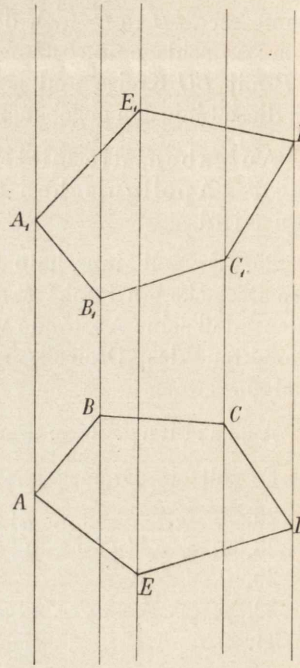


Fig. 145 *b*.



S heißt das **Projektionszentrum,** die von ihm ausgehenden Strahlen heißen **Projektionsstrahlen.**

Als besonderer Fall ist der anzusehen, bei dem die Projektionsstrahlen untereinander parallel sind. (Fig. 145 *b*.)

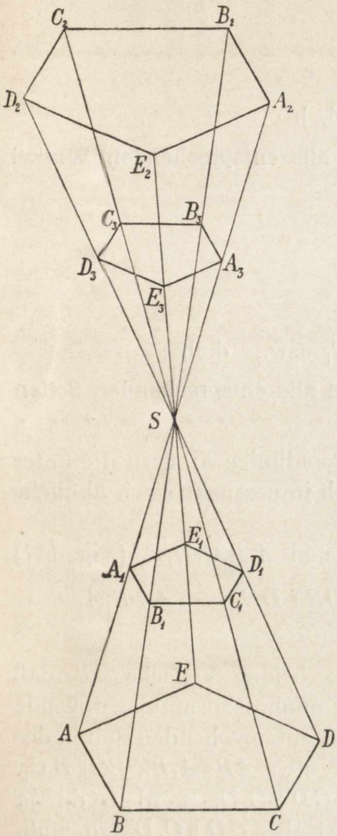
Anmerkung. Unser Sehvorgang beruht auf einer perspektivischen Projektion. Eine solche Projektion erhalten wir auf einem Fenster, wenn wir die Außengegenstände mit unserem Auge durch das Fenster betrachten; wir stellen solche Projektionen her beim perspektivischen Zeichnen; die Schatten der Gegenstände sind ebenfalls solche perspektivische Projektionen.

Die auf denselben Strahlen liegenden Punkte A und A_1, B und B_1 .... heißen **entsprechende Punkte**, die Strecken AB und A_1B_1, BC und B_1C_1 **entsprechende Strecken**. Die Winkel A und A_1, B und B_1.... **entsprechende Winkel**.

Für unsere weiteren Betrachtungen machen wir die **Festsetzung, daß je zwei entsprechende Strecken einander parallel sind** (Fig. 146 *a* und *b*).

1. Sind die Projektionsstrahlen unter dieser Annahme einander ebenfalls parallel (Fig. 146 *b*) oder halbiert das Projektionszentrum die Verbindungs-

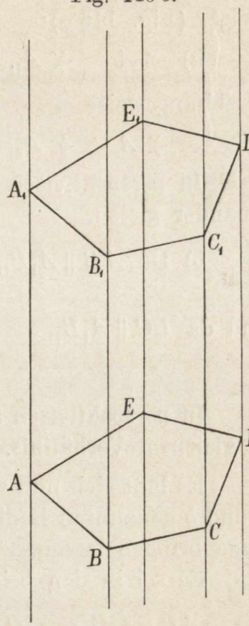
Fig. 146 *a.*



strecken entsprechender Punkte (Fig. 146*a*), so sind die perspektivischen Figuren **kongruent**.

In Figur 146*b* ist $ABCDE \cong A_1B_1C_1D_1E_1$ und in Figur 146 *a* ist $ABCDE \cong A_2B_2C_2D_2E_2$.

Fig. 146 *b.*



Die Gleichheit der Winkel folgt nach Kapitel V, Übungssatz 4; die der Seiten folgt in Figur 146 *b* nach Satz 29, in Figur 146 *a* aus der Kongruenz der Dreiecke SAB und SA_2B_2, SBC und SB_2C_2..... (Die Figuren liegen in bezug auf S auch zentrisch symmetrisch.)

2. Schneiden sich die Projektionsstrahlen in einem anderen Punkte, so sind die perspektivischen Figuren **ähnlich in ähnlicher Lage**. (Fig. 146 *a.*)

Erklärung. Zwei geradlinige Figuren werden ähnlich (∼) genannt, wenn man sie in perspektivisch ähnliche Lage bringen kann, d. h. sie so legen kann, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt gehen und je zwei entsprechende Strecken einander parallel sind.

Das Projektionszentrum wird in letzterem Falle **Ähnlichkeitspunkt**, jeder Projektionsstrahl **Ähnlichkeitsstrahl** genannt.

Der Ähnlichkeitspunkt ist ein **äußerer** oder ein **innerer**, je nachdem er auf derselben Seite zweier entsprechender Punkte oder zwischen ihnen liegt. In Figur 146 *a* ist S äußerer Ähnlichkeitspunkt der Vielecke $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ und innerer Ähnlichkeitspunkt für die Vielecke $ABCDE$ und $A_3B_3C_3D_3E_3$.

Haben zwei Vielecke einen äußeren Ähnlichkeitspunkt, so sind die entsprechenden Seiten gleichgerichtet parallel; für einen inneren sind sie entgegengesetzt gerichtet.

Aus der obigen Erklärung perspektivisch ähnlicher Figuren folgt nun weiter (Fig. 146 *a*):

$a)\ \sphericalangle A = \sphericalangle A_1, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_1 \ldots\ldots,$

beziehungsweise

$\sphericalangle A = \sphericalangle A_2, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_2 \ldots\ldots,$ d. h.:

In perspektivisch ähnlichen Figuren sind alle entsprechenden Winkel einander gleich.

b) Da $AB \parallel A_1B_1$, so folgt:

$$AB : A_1B_1 = BS : B_1S,$$

und da $BC \parallel A_1B_1$,

$$BC : B_1C_1 = BS : B_1S,$$

$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$ usw., d. h.:

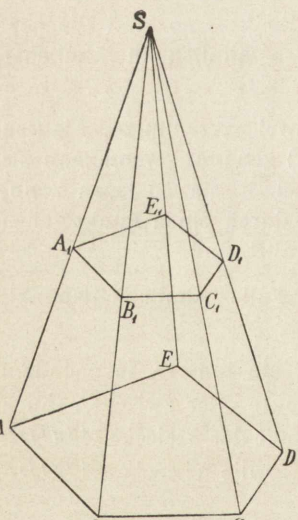
In perspektivisch ähnlichen Figuren stehen alle entsprechenden Seiten in gleichem Verhältnis.

Es läßt sich nun zeigen, daß, wenn zwei geradlinige Figuren die unter *a* und *b* genannten Bedingungen erfüllen, sie sich in perspektivisch ähnliche Lage bringen lassen.

Es sei in den beiden Vielecken $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fig. 147)

$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1 = DE : DE_1 = EA : E_1A_1$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_1, \ldots\ldots$$

Fig. 147.



Man lege die beiden Vielecke so, daß zwei in einem Eckpunkte zusammenstoßende Seiten des einen den entsprechenden Seiten des andern parallel sind, etwa $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, dann muß auch $CD \parallel C_1D_1$ werden, da ja $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$ ist. Ist aber $CD \parallel C_1D_1$, so muß, da $\sphericalangle D = D_1$ ist, $DE \parallel DE_1$ usw., d. h. alle entsprechenden Seiten beider Vielecke werden einander parallel. Dann müssen aber auch die Verbindungsgeraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 sich in einem Punkte schneiden. Ist S der Durchschnittspunkt von AA_1 und BB_1 und würden sich BB_1 und CC_1 in einem andern Punkte S_1 schneiden, so wäre nach Satz 75:

$$AB : A_1B_1 = SB : SB_1$$
$$BC : B_1C_1 = S_1B : S_1B_1$$

Da aber nach Annahme:

$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1,$$

so folgt:

$$SB : SB_1 = S_1B : S_1B_1.$$

Aus dieser Proportion aber ergibt sich:

$$(SB - SB_1) : (S_1B - S_1B_1) = SB : S_1B,$$

oder:

$$BB_1 : BB_1 = SB : S_1B$$

und daher:

$$SB = S_1B, \quad \text{d. h.:}$$

S und S_1 fallen zusammen. In derselben Weise läßt sich zeigen, daß auch DD_1, EE_1 durch S hindurchgehen müssen. Die beiden Vielecke lassen sich in ähnliche Lage bringen, oder sie sind einander ähnlich. Zwei Figuren können also einander auch ähnlich sein, wenn sie sich nicht in den durch Figur 146 *a* angedeuteten Lagen befinden; sie lassen sich dann aber unter den soeben gefundenen Bedingungen stets in ähnliche Lage bringen. Es folgt daher:

Erklärung. Zwei geradlinige Figuren lassen sich in ähnliche Lage bringen, oder sie sind einander ähnlich, wenn je zwei entsprechende Winkel derselben einander gleich, und je zwei entsprechende Seiten in gleichem Verhältnis stehen.

Aus den vorangegangenen Betrachtungen ergab sich, daß die Ähnlichkeit von Vielecken unter gewissen Bedingungen in die Kongruenz derselben überging, daß die Kongruenz nur ein Spezialfall der Ähnlichkeit ist. Diese Beziehung läßt sich noch in anderer Form zum Ausdrucke bringen.

Damit zwei Vielecke $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ einander ähnlich sind, müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

I. Für die Winkel:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_1, \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C_1, \quad \sphericalangle D = \sphericalangle D_1, \quad \sphericalangle E = \sphericalangle E_1.$$

II. Für die Seiten, die wir mit AB, beziehungsweise A_1B_1 beginnend mit a und a_1, b und b_1 usw. bezeichnen, gilt:

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = d : d_1 = e : e_1 = m : n.$$

Behalten wir die Winkelgleichheit bei und lassen das Seitenverhältnis $m : n = 1 : 1$ werden, so gehen die Bedingungen für die Seiten über in:

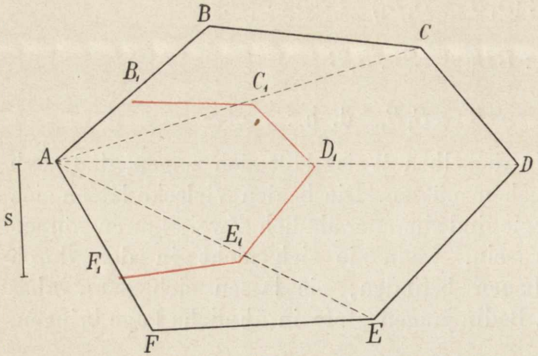
$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1, \quad d = d_1, \quad e = e_1,$$

d. h.: in diesem Falle sind die Vielecke $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ einander kongruent; zu der Gestaltsgleichheit im allgemeinen Falle tritt die Gleichheit in der Größe hinzu.

Aufgabe 1. Es soll ein Vieleck mit einer gegebenen Seite s so gezeichnet werden, daß es einem gegebenen Vieleck ähnlich ist.

Lösung. (Fig. 148.) Es sei $ABCDEF$ das gegebene Vieleck und die gegebene Seite s entspreche der Seite AB des gegebenen Vielecks. Man mache $AB_1 = s$, verbinde A mit den übrigen Eckpunkten des Vielecks und ziehe $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ usw., dann ist $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ das gesuchte

Fig. 148.



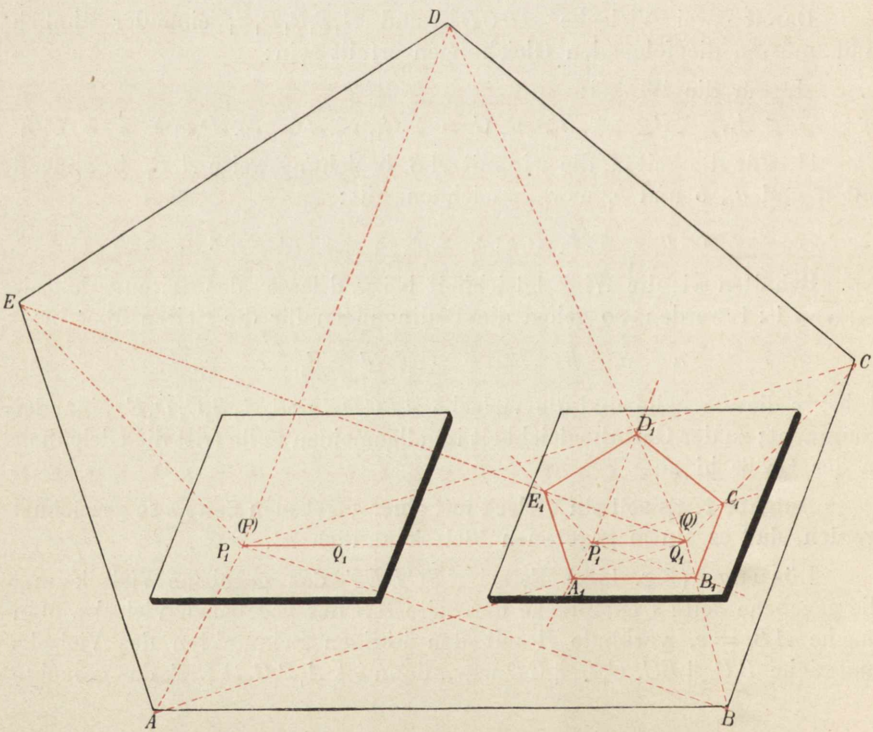
Vieleck, denn es liegt perspektivisch ähnlich zu $ABCDEF$ mit A als Ähnlichkeitspunkt.

Man kann den Ähnlichkeitspunkt auch in einer Seite des gegebenen Vieleckes, innerhalb oder außerhalb desselben annehmen. Welche Lösungen der Aufgabe ergeben sich in diesen Fällen, wenn die gegebene Seite s der Seite BC entsprechen soll?

Anmerkung. Diese Aufgabe findet Verwendung beim Planzeichnen, bei dem eine Zeichnung in verkleinertem Maßstabe auf Grund der im Gelände ermittelten Maße hergestellt wird. Als mechanische Hilfsmittel benutzt man hierbei den Meßtisch und den Storchschnabel.

Aufgabe 2. Es soll mit Hilfe des **Meßtisches** ein Plan eines vermessenen ebenen Flächenstückes in einem gegebenen Maßstabe (etwa 1 : 250) hergestellt werden.

Fig. 149.



Der **Meßtisch** (Fig. 149) ist eine ebene Platte aus Holz oder Glas, die auf einem dreibeinigen Stativ ruht und mit einer Wasserwage genau wagerecht gestellt werden kann. Sie ist mit Zeichenpapier bespannt. Ist ein Plan des Flächenstückes $ABCDE$ aufzunehmen, so wird auf demselben eine Standlinie $(P)(Q)$ gemessen. Um diese in dem vorgeschriebenen Verhältnisse verkleinert als P_1Q_1 auf dem Meßtisch aufzutragen, stellt man den Meßtisch so auf, daß der Punkt P_1 der Meßtischplatte genau senkrecht über dem Punkte (P) des Flächenstücks liegt; dann visiert man nach (Q) und zeichnet die Richtung $P_1(Q)$ auf dem Tische auf. Ebenso visiert man von P_1 nach allen Ecken des aufzunehmenden Flächenstücks und zeichnet auf der Meßtischplatte die Visierlinien auf. Hierauf stellt man den Meßtisch über (Q) so auf, daß der Punkt Q_1 der Meßtischplatte genau senkrecht über (Q), $(Q)P_1$ in die Visierlinie $(Q)(P)$ fällt und visiert von Q_1 ebenfalls nach den Eckpunkten. Die Schnittpunkte entsprechender Visierlinien von P_1 und Q_1 liefern auf dem Meßtisch die Eckpunkte des zu zeichnenden Planes in dem gegebenen Maßstab. Die Vielecke $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ sind einander ähnlich, da sie aus entsprechend ähnlichen Dreiecken bestehen.

Anmerkung. Die Meßtischblätter der preußischen Landesaufnahme sind im Maßstabe 1 : 25 000 hergestellt; einem Kilometer im Gelände entspricht daher eine Strecke von 4 *cm* der Zeichnung.

Aufgabe 3. Es soll mittels eines **Storchschnabels** eine gegebene Figur in einem gegebenen Verhältnis (z. B. 1 : 4) verkleinert (oder vergrößert) werden.

Der **Storchschnabel** (Pantograph) besteht im wesentlichen aus zwei Paaren von Linealen, die zu einem beweglichen Parallelogramm verbunden sind. Es gibt eine ganze Reihe von verschiedenen Systemen, von denen hier nur ein einfaches beschrieben werden soll.

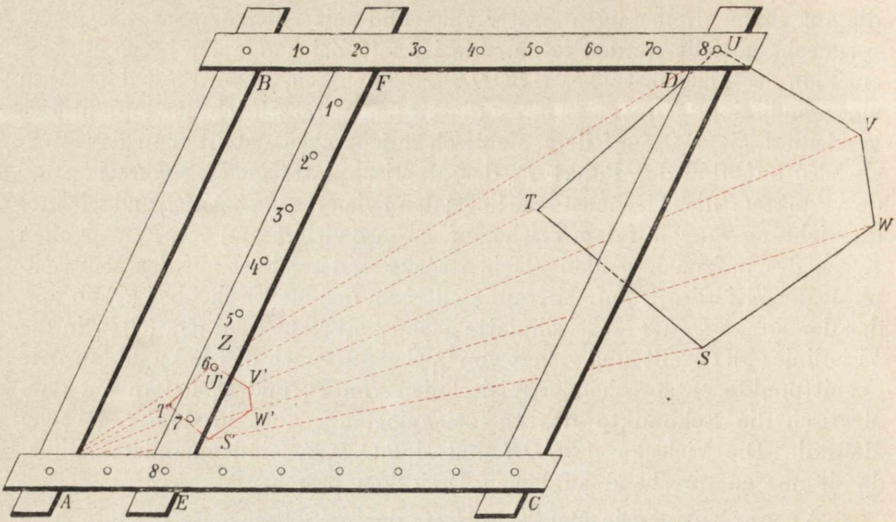
Die vier gleich langen Lineale AB, AC, CD und BD (Fig 150) sind durch Scharniere beweglich zu einem Rhombus verbunden. Das fünfte Lineal, die Leitschiene, kann parallel zu AB und CD an den Linealen BD und AC verstellbar und beweglich angebracht werden. Bei A, dem Drehpunkte, kann der Apparat auf einem Zeichenbrett mit einem Stifte oder einer Schraube befestigt werden. In D ist der metallene Führungsstift angebracht, den man längs der Begrenzungslinien der zu verkleinernden Zeichnung führen kann. Der Zeichenstift Z, unter den das Zeichenblatt zu liegen kommt, befindet sich an der Leitschiene EF. Da AZ und AD stets den Winkel A des beweglichen Rhombus halbieren, so liegen A, Z und D stets in gerader Linie und es verhält sich:

$$AZ : AD = EZ : EF \; (= 2 : 8 = 1 : 4). \quad \text{(Satz 74.)}$$

Fährt man mit dem Führungsstift längs UV, so beschreibt der Zeichenstift Z die Strecke U_1V_1, und es ist nach Satz 75:

$$U_1V_1 : UV = AZ : AD = 1 : 4.$$

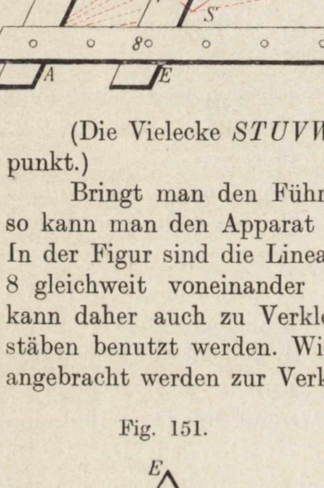
Fig. 150.



(Die Vielecke $STUVW$ und $S_1T_1U_1V_1W_1$ haben A zum Ähnlichkeitspunkt.)

Bringt man den Führungsstift in Z und den Zeichenstift in D an, so kann man den Apparat zur Vergrößerung im Maßstabe 4 : 1 benutzen. In der Figur sind die Lineale AC und BD sowie die Leitschiene EF mit 8 gleichweit voneinander abstehenden Löchern versehen. Der Apparat kann daher auch zu Verkleinerungen (Vergrößerungen) in anderen Maßstäben benutzt werden. Wie muß die Leitschiene und der Zeichenstift Z angebracht werden zur Verkleinerung im Maßstabe 1 : 2?

Fig. 151.



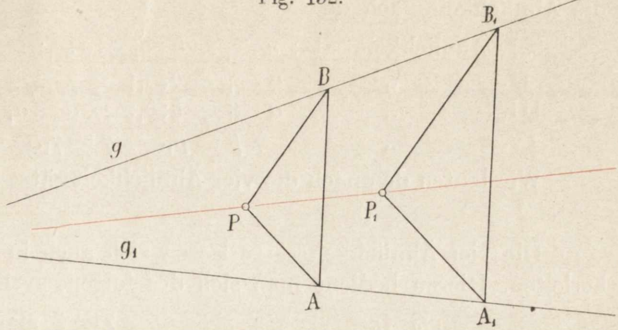
Die Figur 151 gibt eine andere viel gebrauchte Form des Storchschnabels, bei der Z der Zeichenstift, D der Führungsstift und A der Befestigungspunkt ist.

Anmerkung. Die Blätter der Generalstabskarte (Maßstab 1 : 100 000) werden aus den Meßtischblättern (Maßstab 1 : 25 000) durch die oben benutzte Verkleinerung 1 : 4 hergestellt.

Aufgabe 4. Es soll durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden g und g_1 gezogen werden.

Lösung. (Fig. 152.) Man ziehe zwischen den gegebenen Geraden g und g_1 die Parallelen AB und A_1B_1, verbinde P mit A und B und ziehe $B_1P_1 \parallel BP$ und $A_1P_1 \parallel AP$, so ist PP_1 die verlangte Gerade, die als Ähnlichkeitsstrahl der perspektivisch ähnlichen Dreiecke APB und $A_1P_1B_1$ durch den Schnittpunkt von g und g_1 gehen muß.

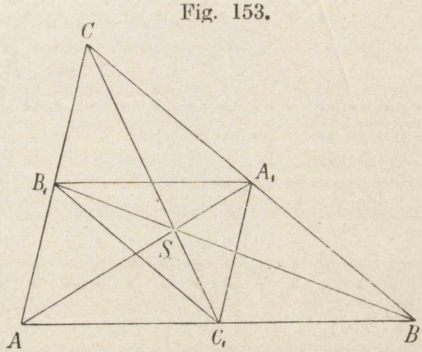
Fig. 152.



Dritter Beweis des Satzes von den Mittellinien eines Dreiecks. (Vgl. Seite 64, 65 und Seite 124.)

Verbindet man die Mittelpunkte der drei Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 153), so erhält man ein Dreieck $A_1B_1C_1$, das dem ersteren perspektivisch ähnlich ist. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte AA_1, BB_1 und CC_1 gehen daher durch einen Punkt S (innerer Ähnlichkeitspunkt) und sie werden in diesem Punkte in dem Seitenverhältnis der ähnlichen Dreiecke, d. h. nach dem Verhältnisse 2 : 1 geteilt.

Fig. 153.



II. Ähnlichkeit der Dreiecke.

In Kapitel X ergab sich, daß zur Übereinstimmung zweier Dreiecke in allen Stücken nur die Gleichheit von drei Stücken, unter denen sich immer eine Seite finden muß, erforderlich ist. Aus der im vorangegangenen Abschnitte erörterten Beziehung zwischen der Kongruenz und der Ähnlichkeit geradliniger Figuren folgt unmittelbar, daß auch zur Ähnlichkeit der Dreiecke nur ein Teil der erforderlichen sechs Beziehungen ausreichend ist. Aus den vier Kongruenzsätzen ergeben sich sofort die Ähnlichkeitssätze, wenn wir bei ersteren die Bedingungen fortlassen, welche die Größengleichheit einer oder mehrerer Seitenpaare angeben.

Bezeichnen wir in zwei Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ die entsprechend gleichen Seiten mit a und a_1, b und b_1, c und c_1 und ebenso die Winkel mit α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, so lauten die Bedingungen für den

I. Kongruenzsatz: $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = 1 : 1$;
II. „ $a : a_1 = b : b_1 = 1 : 1$, $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma_1$;
III. „ $a : a_1 = b : b_1 = 1 : 1$, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$ $(a > b)$;
IV. „ $a : a_1 = 1 : 1$, $\sphericalangle \beta = \beta_1$, $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$.

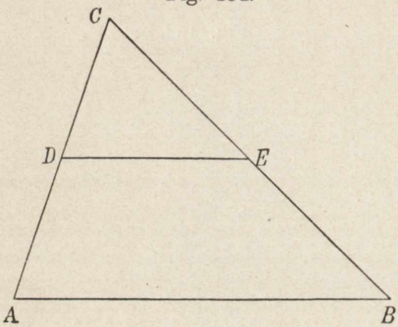
Hieraus ergeben sich in der angegebenen Weise die Bedingungen für die Ähnlichkeit nach dem

I. Ähnlichkeitssatz: $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$;
II. „ $a : a_1 = b : b_1$; $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma_1$;
III. „ $a : a_1 = b : b_1$; $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$ $(a > b)$;
IV. „ $\sphericalangle \beta = \beta_1$, $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$.

Wie lauten demnach die vier Ähnlichkeitssätze in Worten?

Die vier Ähnlichkeitssätze lassen sich auch in anderer Weise einzeln herleiten. Hierzu bedient man sich des folgenden **Hilfssatzes:**

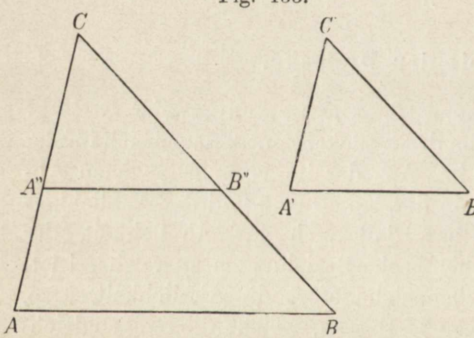
Fig. 154.



Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

Der Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeitslage der Dreiecke ABC und DCE (Fig. 154) in bezug auf C als Ähnlichkeitspunkt oder aus der leicht zu beweisenden Übereinstimmung in allen entsprechenden Winkeln und Seitenverhältnissen. (Satz 74 und 75.)

Fig. 155.



Satz 80. (1. Ähnlichkeitssatz.) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnis der drei Seiten übereinstimmen.

Voraussetzung. (Fig. 155): $A^{I}B^{I} : AB = A^{I}C^{I} : AC = BC : B^{I}C^{I}$.

Behauptung: $\triangle A^{I}B^{I}C^{I} \sim \triangle ABC$.

Beweis. Man trage auf CB die Strecke $CB^{II} = C^{I}B^{I}$ ab und ziehe $B^{II}A^{II}$ parallel BA, dann ist nach dem vorangehenden Hilfssatz

$$\triangle A^{II}B^{II}C \sim \triangle ABC,$$

und es folgt:

$$CA^{II} : CA = CB^{II} : CB.$$

Nach Voraussetzung ist:

$$C^{I}A^{I} : CA = C^{I}B^{I} : CB$$

Da nach Konstruktion

$$CB^{II} = C^{I}B^{I}$$

ist, so muß

$$CA^{II} = C^{I}A^{I} \text{ sein.}$$

Ferner besteht die Proportion:

$$CB^{II} : CB = A^{II}B^{II} : AB.$$

Nach Voraussetzung ist:

$$C^{I}B^{I} : CB = A^{I}B^{I} : AB;$$

da zugleich

$$CB^{II} = C^{I}B^{I}$$

ist, so muß

$$A^{II}B^{II} = A^{I}B^{I} \text{ sein.}$$

Es ist also nach dem I. Kongruenzsatz

$$\triangle\, A^{II}B^{II}C \cong A^{I}C^{I}B^{I},$$

daher auch

$$\triangle\, A^{I}C^{I}B^{I} \sim \triangle\, ABC.$$

Was folgt für die Winkel der gegebenen Dreiecke aus deren Ähnlichkeit?

Satz 81. (2. Ähnlichkeitssatz.) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnis zweier Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Voraussetzung (Fig. 155):

$$A^{I}C^{I} : AC = B^{I}C^{I} : BC; \ \sphericalangle\, C^{I} = \sphericalangle\, C.$$

Behauptung:

$$\triangle\, A^{I}B^{I}C^{I} \sim \triangle\, ABC.$$

Beweis: Man mache dieselbe Hilfskonstruktion wie bei Satz 80, und zeige zunächst, daß $A^{II}C = A^{I}C^{I}$ ist. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle\, C^{I} = \sphericalangle\, C$ ist, so ist nach dem zweiten Kongruenzsatz $\triangle\, A^{II}B^{II}C \cong \triangle\, A^{I}B^{I}C_{I}$ und mithin auch

$$\triangle\, A^{I}B^{I}C^{I} \sim \triangle\, ABC.$$

Was folgt für die übrigen Seitenverhältnisse und Winkel der beiden Dreiecke aus ihrer Ähnlichkeit?

Satz 82. (3. Ähnlichkeitssatz.) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren von diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Voraussetzung (Fig. 155):

$$A^{I}C^{I} : AC = B^{I}C^{I} : BC, \ BC > AC,$$
$$\sphericalangle\, A^{I} = \sphericalangle\, A.$$

Behauptung:

$$\triangle\, A^{I}B^{I}C^{I} \sim \triangle\, ABC.$$

Beweis: Man mache dieselbe Hilfskonstruktion wie bei den vorangehenden Sätzen und zeige zunächst, daß $A^{II}C = A^{I}C^{I}$ ist. Da $\sphericalangle\, A^{II} = \sphericalangle\, A = \sphericalangle\, A^{I}$ ist, so ist nach dem dritten Kongruenzsatze $\triangle\, A^{II}B^{II}C \cong \triangle\, A^{I}B^{I}C^{I}$ und daher auch $\triangle\, A^{I}B^{I}C^{I} \sim \triangle\, ABC$.

Man stelle die Folgerungen aus der Ähnlichkeit bei diesem Satze auf.

Satz 83. (4. Ähnlichkeitssatz.) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkelpaaren übereinstimmen.

Voraussetzung (Fig. 155):

$$\sphericalangle B^{\prime} = \sphericalangle B; \quad \sphericalangle C^{\prime} = \sphericalangle C.$$

Behauptung:

$$\triangle A^{\prime}B^{\prime}C^{\prime} \sim \triangle ABC.$$

Beweis: Mit Anwendung derselben Hilfskonstruktion und den Beziehungen $\sphericalangle B^{\prime\prime} = \sphericalangle B = \sphericalangle B^{\prime}$, $\sphericalangle C^{\prime} = \sphericalangle C$ ergibt sich nach dem vierten Kongruenzsatz $\triangle A^{\prime\prime}B^{\prime\prime}C \cong \triangle A^{\prime}B^{\prime}C^{\prime}$ und daher auch die Richtigkeit der Behauptung.

Was folgt in diesem Falle für die Seitenverhältnisse der ähnlichen Dreiecke?

Aus den Ähnlichkeitssätzen folgt:

1. Die Gestalt eines Dreiecks ist bestimmt:

a) durch das Verhältnis der drei Seiten;

b) durch das Verhältnis zweier Seiten und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel;

c) durch das Verhältnis zweier Seiten und den Gegenwinkel der größeren dieser Seiten;

d) durch zwei Winkel.

2. Die Gestalt eines **rechtwinkligen** Dreiecks ist bestimmt:

a) durch das Verhältnis zweier Seiten;

b) durch einen der spitzen Winkel.

3. Die Gestalt eines **gleichschenkligen** Dreiecks ist bestimmt:

a) durch das Verhältnis der Grundlinie und des Schenkels;

b) durch einen Winkel, der entweder Basiswinkel oder Winkel an der Spitze ist.

Übungssätze.

1. Dreiecke, deren Seiten paarweise parallel laufen, sind ähnlich.

2. Dreiecke, deren Seiten paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind ähnlich.

3. In jedem Dreieck verhalten sich zwei Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

4. Ähnliche Dreiecke werden durch entsprechende Höhen, Winkelhalbierenden, Mittellinien, durch die Halbmesser des Umkreises nach entsprechenden Eckpunkten, durch entsprechende Halbmesser des Inkreises nach seinen Berührungspunkten in paarweise ähnliche Dreiecke zerlegt.

5. In ähnlichen Dreiecken stehen entsprechende Höhen, Winkelhalbierenden, Mittellinien, Halbmesser der Um- und Inkreise im Verhältnisse zweier entsprechenden Seiten.

6. Die Umfänge ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie ein Paar entsprechende Seiten.

Aufgaben.

1. Um auf ebenem Felde die unzugängliche Entfernung zweier Punkte A und B zu bestimmen, nimmt man einen Punkt C an, dessen Entfernung von B zu a (etwa gleich 600 m) gemessen wird. Auf CB ermittelt man durch Visieren einen Punkt B_1, so daß $CB_1 = 25\,m$ ist. Nachdem man mit einem Winkelmeßinstrument den Winkel $CBA = \beta$ bestimmt hat, steckt man von B_1 die Strecke $B_1A_1 = 21\,m$ so ab, daß der Winkel $CB_1A_1 = \beta$ wird und A_1 auf CA liegt. Wie groß ist die Entfernung AB?

2. Eine Telegraphenstange wirft zu einer gewissen Zeit einen $s = 4{,}8\,m$ langen Schatten. Zur gleichen Zeit beträgt die Schattenlänge eines 1,5 m langen, senkrecht zum Erdboden stehenden Stabes 0,6 m. Wie hoch ist die Telegraphenstange?

3. Auf der Höllentalbahn im Schwarzwalde führt von Hirschsprung nach Hinterzarten, das 326 m höher liegt als ersterer Ort, eine 6525 m lange Zahnradstrecke. Wieviel Meter muß man auf dieser Strecke fahren, um 1 m hoch zu steigen? (Steigung der Bahn.)

4. Ein Luftballon von 19,11 m Durchmesser wird durch ein Zehnpfennigstück (dessen Durchmesser 2,1 cm beträgt) verdeckt, wenn man es 90 cm weit vom Auge hält. Wieweit ist der Ballon vom Auge entfernt?

III. Konstruktionsaufgaben, die nach der Ähnlichkeitsmethode zu lösen sind.

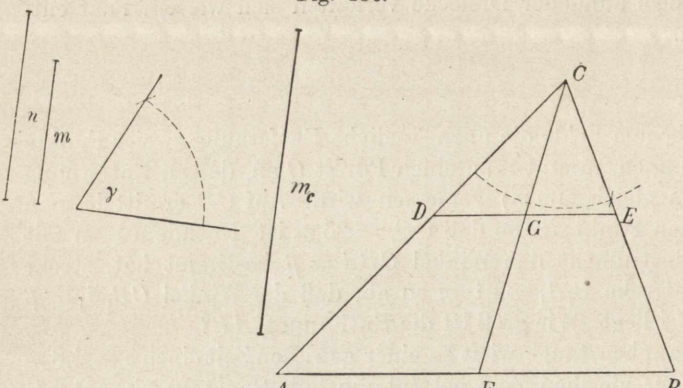
Wenn bei einer Konstruktionsaufgabe solche Stücke gegeben sind, welche die **Gestalt** der zu zeichnenden Figur bestimmen, so wendet man die **Methode der ähnlichen Figuren (Ähnlichkeitsmethode)** an. Es ist hierbei nicht notwendig, daß zur gesuchten Gesamtzeichnung eine ähnliche hergestellt werde, sondern es genügt oft die Herstellung einer ähnlichen Teilfigur, wenn dadurch die Herstellung der Gesamtfigur ermöglicht wird.

Ist **eine Strecke** der zu zeichnenden Gesamtfigur gegeben und sind die übrigen gegebenen Stücke nur Winkel und Seitenverhältnisse, so läßt man die gegebene Strecke zunächst unberücksichtigt und stellt eine ähnliche Figur her, in der die gegebenen Winkel und Verhältnisse in der richtigen Anordnung vorkommen. Die Größe der Figur wird durch Einführung der gegebenen Strecke erhalten.

Beispiel 1. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus dem Verhältnis zweier Seiten $a : b = m : n$, dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel γ und der zur dritten Seite gehörigen Mittellinie m_c.

Analysis. (Fig. 156.) Durch das Verhältnis $a:b=m:n$ und den Winkel γ sind zu dem gesuchten Dreieck unzählig viele ähnliche Dreiecke bestimmt. Man erhält eines derselben, indem wir ein Dreieck CDE zeichnen aus $CE=m$, $CD=n$ und Winkel $DCE=\gamma$. Zieht man in dem Dreieck CDE die Mittellinie CG, so liegt der Endpunkt F der Mittellinie CF auf der Verlängerung der Mittellinie CG und auf dem Kreise um C mit m_c. Die Punkte A und B liegen 1) auf der Parallelen durch F zu DE, 2) auf den Verlängerungen von CD und CE.

Fig. 156.



Die Zeichnung ergibt sich hieraus sehr leicht.

Beweis. Da nach Zeichnung $AB \parallel DE$, so folgt:

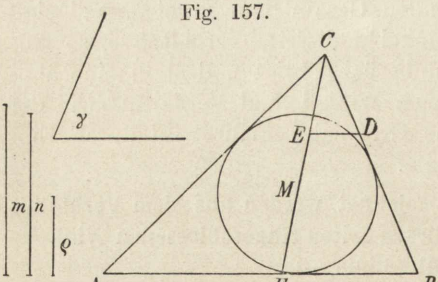
1. $CB:CA=CE:CD=m:n$
2. $\sphericalangle ACB=\gamma$ (nach Zeichnung)
3. $CF=m_c$ (nach Zeichnung) und $AF:FB=DG:GE=1:1$.

Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von dem gegeben ist: *A*) $a:b:c=m:n:o$, oder *B*) $a:b=m:n$, γ oder *C*) $a:b=m:n$, α $(a>b)$, oder *D*) α, β und eines der folgenden Stücke:

1. c; **2.** h_c; **3.** p; **4.** m_c; **5.** w_γ; **6.** u; **7.** h_a; **8.** m_a; **9.** w_α; **10.** r; **11.** ϱ; **12.** ϱ_c.

Beispiel 2. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus dem Verhältnis einer Seite zur Halbierungslinie eines ihr anliegenden Winkels $a:w_\gamma=m:n$, diesem Winkel γ und dem Halbmesser ϱ des Inkreises.

Fig. 157.



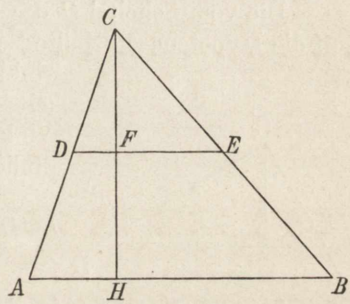
Analysis. (Fig. 157.) Die Winkelhalbierende CF teilt das gesuchte Dreieck ABC in zwei Dreiecke CAF und CFB. Durch das Verhältnis $a:w_\gamma=m:n$ und den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ sind zu dem Teildreieck CBF unzählig viele ähnliche bestimmt. Wir erhalten eines derselben, wenn wir ein Dreieck CED zeichnen aus

$CD = m$, $CE = n$ und Winkel $ECD = \frac{\gamma}{2}$. Der Mittelpunkt M des Umkreises des gesuchten Dreiecks liegt auf der Verlängerung von CE und auf der Parallelen im Abstande ϱ zu CD. Die Punkte A und B liegen auf der zu DE parallelen Tangente des Umkreises; der Punkt B liegt außerdem auf der Verlängerung von CD, der Punkt A auf dem freien Schenkel des an CF in C angetragenen Winkels $FCA = \frac{\gamma}{2}$.

Beispiel 3. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus dem Verhältnis des Umfanges zur Höhe auf einer Seite $(a + b + c) : h_c = m : n$, dem der Seite gegenüberliegenden Winkel γ und einer Seite a.

Analysis. (Fig. 158.) Ist ABC das verlangte Dreieck, so trage man auf der Höhe CH die Strecke $CF = n$ ab und ziehe $DE \parallel AB$; dann ist das Dreieck CDE dem gesuchten Dreiecke ähnlich und es verhält sich $(AB + BC + AC) : CH = (DE + EC + CD) : CF = m : n$; aber da $CF = n$ ist, so muß $DE + EC + CD = m$ sein. Es läßt sich dann das Dreieck nach einer früheren Aufgabe (Kapitel XI, Aufgabe 39) zeichnen. Mittels der Seite a findet man dann leicht das Dreieck ABC.

Fig. 158.



Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

13. $a : h_c, \gamma, c$; **14.** $c : h_c, a, p$; **15.** $h_c : p, \gamma, m_c$;
16. $a : m_c, \beta, p$; **17.** $h_c : m_c, \beta, u$; **18.** $h_c : w_\gamma, \gamma, m_a$;
19. $c : m_c, \gamma, r$; **20.** $h_c : (p - q), a, \varrho$; **21.** $c : (a + b), \beta, h_a$;
22. $c : (a - b), a - \beta, h_c$; **23.** $(a + b + c) : h_c, a, \varrho_a$;
24. $c : r, a, a$; **25.** $r : h_c, \gamma, w_\gamma$; **26.** $c : (h_a + h_b), \gamma, m_a$;
27. $c : \varrho, a, a$.

Beispiel 4. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus dem Verhältnis der drei Seiten $a : b : c = m : n : o$ und der Summe der drei Höhen $h_a + h_b + h_c = s$.

Analysis. Durch $a : b : c = m : n : o$ ist die Gestalt des gesuchten Dreiecks bestimmt, es sei CDE eines der zu dem gesuchten Dreieck ähnlichen Dreiecke. Zur Bestimmung der Größe des gesuchten Dreiecks dient die Summe s. Sind h'_a, h'_b, h'_c die entsprechenden Höhen des Dreiecks CDE, so ist:

$$h'_a : h_a = h'_b : h_b = h'_c : h_c$$

und daher

$$(h'_a + h'_b + h'_c) : (h_a + h_b + h_c) = h'_a : h_a = a' : a,$$

wo a' die a entsprechende Seite des Dreiecks CDE ist. Bezeichnet man die aus dem Dreieck CDE sich ergebende Summenstrecke $h'_a + h'_b + h'$ mit s', so ist:

$$s' : s = a' : a.$$

Es läßt sich also a als vierte Proportionale zu s^1, s, a^1 zeichnen und damit das Dreieck ABC der Größe nach bestimmen.

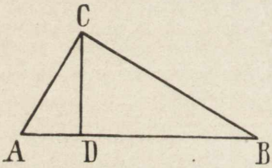
Es soll ein Dreieck gezeichnet werden aus:

28. $a:b,\ \gamma,\ a+b=s$; **29.** $a:b,\ a\ (a>b),\ a-b=d$;
30. $a:w_\gamma,\ \beta,\ a+b-c=d$; **31.** $a:m_c,\ \gamma,\ h_a+h_b=s$;
32. $p:q,\ \alpha,\ c+h_c=s$; **33.** $c:m_c,\ \gamma,\ h_c+w_\gamma=s$;
34. $a:m_c,\ \gamma,\ m_a+m_b=s$; **35.** $c:(a-b),\ \gamma,\ w_\alpha+w_\beta=s$;
36. $(a-b):m_c,\ \gamma,\ h_c+m_c+w_\gamma=s$;
37. $c:(h_a+h_b),\ \gamma,\ w_\beta-w_\alpha=d$; **38.** $h_c:m_c:w_\gamma,\ c+r=s$;
39. $c:\varrho,\ \gamma,\ c+\varrho=s$; **40.** $c:r,\ \alpha,\ c-\varrho=d$.

IV. Proportionen am rechtwinkligen Dreieck und am Kreise.

Die vom Scheitel C des rechten Winkels im Dreieck ABC (Fig. 159) auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte CD teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke, die nach dem ersten Ähnlichkeitssatze infolge der Übereinstimmung in den Winkeln untereinander und dem ganzen Dreieck ähnlich sind.

Fig. 159.



Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und BCD folgt:

$$AD:CD=CD:DB, \quad \text{d. h.:}$$

Satz 84. Im rechtwinkligen Dreieck ist die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Hypotenusenabschnitten.

Ferner ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und ACB

$$AD:AC=AC:AB, \quad \text{d. h.:}$$

Satz 85. Im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse.

Inwiefern sind die Sätze 84 und 85 sachlich mit den Sätzen 65 und 66 übereinstimmend?

Aufgabe. Man beweise mittels des Satzes 85 den pythagoreischen Lehrsatz. (Satz 67.)

Verbindet man die Endpunkte A und D sowie B und C der sich in E schneidenden Sehnen AC und BD eines Kreises (Fig. 160), so sind die Dreiecke EAD und EBC wegen der Übereinstimmung in den Winkeln ähnlich, und es folgt:

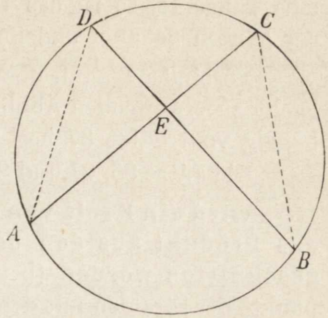
$$AE:DE=EB:EC, \quad \text{oder:}$$
$$AE\,.\,EC=DE\,.\,EB, \quad \text{d. i.:}$$

Satz 86. Schneiden zwei Sehnen eines Kreises einander, so bilden die Abschnitte der einen die inneren und die Abschnitte der andern Sehne die äußeren Glieder einer Proportion.

Oder:

Schneiden zwei Sehnen eines Kreises einander, so ist das Produkt (Rechteck) aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Produkt (Rechteck) aus den Abschnitten der andern Sehne.

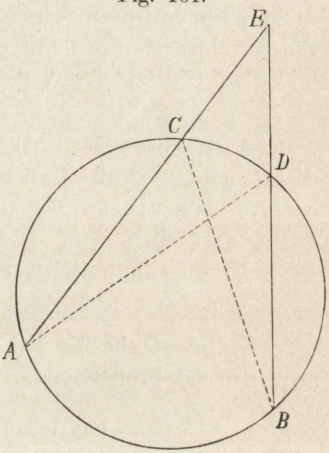
Fig. 160.



Zieht man von einem Punkte E außerhalb des Kreises in den Kreis zwei Sekanten ECA und EDB (Fig. 161), so ergibt sich mittels des gleichen Beweises wie beim vorigen Satze:

$$EA : EB = ED : EC, \quad \text{oder:}$$
$$EA \,.\, EC = EB \,.\, ED.$$

Fig. 161.



Satz 87. Gehen von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Sekanten durch den Kreis, so verhalten sich die ganzen Sekanten umgekehrt wie die äußeren Abschnitte.

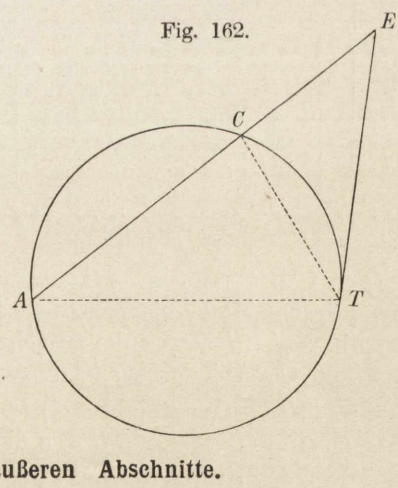
Oder:

Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises, so sind die Produkte (Rechtecke) aus den ganzen Sekanten und ihren äußeren Abschnitten einander gleich.

Da der letztere Satz für jede Lage der Sekanten gilt, so gilt er auch für den Grenzfall, wo die Schnittpunkte B und D der Sekante EB in einen Punkt T zusammenfallen (Fig. 162), und wir erhalten die Proportion:

$$EA : ET = ET : EC, \quad \text{oder:}$$
$$ET^2 = EA : EC, \quad \text{d. i.:}$$

Fig. 162.



Satz 88. Zieht man von einem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkte eine Sekante durch den Kreis und eine Tangente an denselben, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte.

Oder:

Zieht man von einem Punkte nach einem Kreise eine Sekante und eine Tangente, so ist das Quadrat der Tangente gleich dem Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte.

Verbindet man in Figur 162 A und T, so läßt sich der Satz 88 aus der leicht zu erweisenden Ähnlichkeit der Dreiecke EAT und ECT auch unabhängig vom Satze 87 herleiten.

Die Sätze 86, 87 und 88 lassen sich in einen einzigen zusammenfassen:

Wird ein Kreis von einem Strahlenbüschel geschnitten, so ist das Produkt aus den beiden Strecken, die auf jedem Strahl abgeschnitten werden (beide vom Scheitel bis an einen der Durchschnittspunkte der Strahlen mit dem Kreise gerechnet), **für alle Strahlen das gleiche.**

Dieses Produkt heißt die **Potenz**[1]) **des Punktes,** in bezug auf den Kreis. Zieht man von dem festen Punkte aus einen Kreisdurchmesser, so ist die Potenz eines Punktes mit der Entfernung a vom Mittelpunkte des Kreises mit dem Halbmesser r, gleich $(a + r)(a - r) = a^2 - r^2$.

Aufgabe. Es soll mit Benutzung der Sätze 86 und 87 die Grundaufgabe 1 in Kapitel XXI: Zu drei gegebenen Strecken a, b, c die vierte Proportionale zu zeichnen, auf zwei Arten gelöst werden.

Aus der eindeutigen Lösung dieser Aufgabe mittels der Sätze 86 und 87 folgt deren Umkehrbarkeit. Wie lauten die Umkehrsätze?

Grundaufgabe. Es soll zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale gezeichnet werden.

1. Lösung. (Fig. 163 a.) Die Analysis ist im Satze 84 enthalten.

Fig. 163 a.

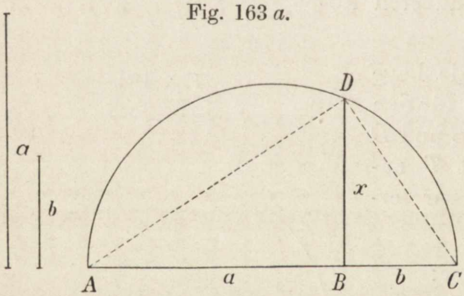
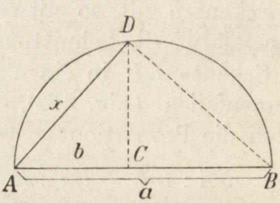


Fig. 163 b.



Man verlängere $AB = a$ um $BC = b$, schlage über AC als Durchmesser den Halbkreis, errichte auf AC in B das Lot, das den Halbkreis in D trifft, so ist $BD = x$ die gesuchte mittlere Proportionale, denn wenn wir A und C verbinden, so folgt nach Satz 84 : $a : x = x : b$.

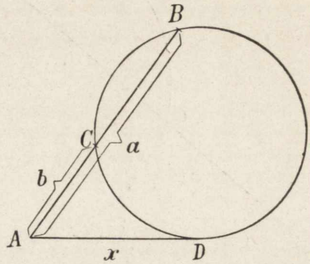
2. Lösung. (Fig. 163 b.) (Die Analysis ist in Satz 85 enthalten.) Man trage auf der Strecke $AB = a$ die Strecke $AC = b$ ab, schlage über AB als

---

[1]) Die Bezeichnung rührt von dem Mathematiker Jakob Steiner (1796–1863, Berlin) her.

Durchmesser den Halbkreis, errichte auf AB in C das Lot, das den Halbkreis D trifft, und verbinde D mit A, so ist $AD = x$ die gesuchte mittlere Proportionale; denn, wenn wir D mit B verbinden, so folgt nach Satz 85: $a : x = x : b$.

Fig. 163 c.



3. Lösung. (Fig. 163 c.) (Die Analysis ist in Satz 88 enthalten.) Man trage auf der Strecke $AB = a$ die Strecke $AC = b$ ab, lege durch B und C einen beliebigen Kreis (am bequemsten einen Kreis, der BC als Durchmesser hat) und ziehe von A an diesen Kreis die Tangente AD, so ist $AD = x$ die gesuchte mittlere Proportionale; denn nach Satz 88 folgt: $a : x = x : b$.

4. Lösung. Siehe Aufgabe 1 zu diesem Abschnitt.

Welche Lösungen ergeben sich für die Zeichnung der dritten Proportionale zu zwei gegebenen Strecken aus diesen Lösungen?

Anmerkung. Da zufolge der dritten Lösung mittels des Satzes 88 sich die mittlere Proportionale eindeutig zeichnen läßt, so ist der Satz 88 umkehrbar. Wie heißt die Umkehrung?

Aufgaben.

1. Es soll die Richtigkeit folgendes Satzes: „Halbiert von zwei Sehnen die eine die andere, so ist die halbe Sehne mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten der halbierenden Sehne" gezeigt und derselbe zur Konstruktion der mittleren und der dritten Proportionale zu zwei gegebenen Strecken benutzt werden.

2. Von zwei Strecken a und b sind ihre Summe und ihr geometrisches Mittel bekannt. Man soll die Strecken a und b bestimmen.

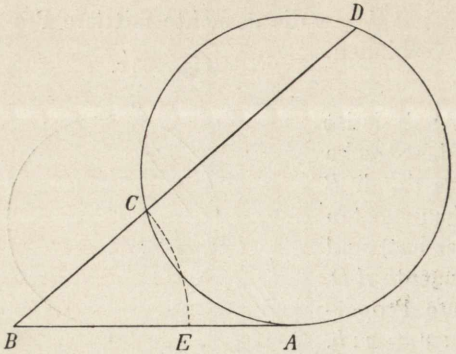
3. Es ist dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn statt der Summe der Strecken ihre Differenz gegeben ist.

Erklärung. Eine Strecke heißt stetig oder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn der größere Abschnitt die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitte ist.

Zeichnet man in einem Punkte A eines Kreises eine Tangente AB (Fig. 164), die kleiner ist als der Kreisdurchmesser, so kann man von B aus in den Kreis stets eine Sekante derart ziehen, daß die auf ihr abgeschnittene Sehne CD gleich AB wird. (Wie zeichnet man die Sekante?) Dann ist nach Satz 88 CD die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante BD und ihrem kleineren Abschnitte BC, d. h. die Sekante BD ist stetig geteilt. Es ergibt sich:

$$BD : CD = CD : BC.$$

Fig. 164.



Trägt man auf BA jetzt $BE = BC$ ab, so folgt mittels des Satzes der korrespondierenden Subtraktion aus der vorangehenden Proportion:

$$(BD - CD) : CD = (CD - BC) : BC$$
$$BE : BA = EA : BE$$

oder:

$$BA : BE = BE : EA,$$

d. h. die Strecke BA ist in E stetig gestellt.

Trägt man demnach den kleineren Abschnitt einer stetig gestellten Strecke auf dem größeren ab, so wird auch dieser stetig geteilt und umgekehrt, wenn man eine stetig geteilte Strecke um ihren größeren Abschnitt verlängert, so wird auch die Summenstrecke stetig geteilt.

Dieses Verfahren der Abtragung kann man beiderseits beliebig oft wiederholen und so erklärt sich die Bezeichnung „stetige Teilung"[1]).

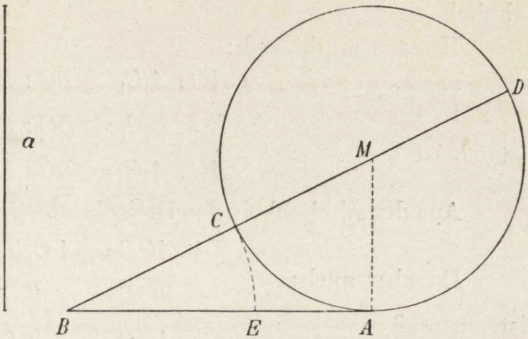
Grundaufgabe. Es soll eine gegebene Strecke $AB = a$ stetig geteilt werden.

Analysis. Nach der vorangegangenen Untersuchung der stetigen Teilung muß man die gegebene Strecke $AB = a$ zur Tangente eines beliebigen Kreises machen und von ihrem Endpunkte B in den Kreis eine Sekante so ziehen, daß die auf ihr liegende Sehne gleich der zu teilenden Strecke wird. Die Zeichnung wird am einfachsten, wenn wir statt eines beliebigen Kreises den Kreis nehmen, bei dem die Sehne der zu zeichnenden Sekante gleich einem Durchmesser wird, d. h. den Kreis mit dem Halbmesser gleich der Hälfte der stetig zu teilenden Strecke.

[1]) Die treffende Bezeichnung „stetige Teilung" findet sich zuerst in einer deutschen Euklidausgabe von Lorenz aus dem Jahre 1781. Weder im Altertum noch im Mittelalter kommt der Ausdruck „goldener Schnitt" (sectio aurea) vor. Eine besondere Hochachtung vor der Wichtigkeit der stetigen Teilung bekundete Luca Paciuolo (1445—1514, Florenz), der seiner 1509 erschienenen Schrift, in der er die Aufgaben der stetigen Teilung behandelt, den Titel „Divina Proportione" gab. Auf ihn ist es zurückzuführen, wenn man späterhin in diesem Teilungsverhältnis eine eigenartige Mystik suchte; namentlich war es Kepler (1571—1630), der eine ganze Symbolik für seine „sectio divina" schuf. Die phantastischen Anschauungen Keplers fanden in der Mitte des 19. Jahrhunderts neue Anhänger. Man glaubte in dem „goldenen Schnitt", wie man jetzt in Anlehnung an die Bezeichnung der Regeldetri als „regula aurea" im Mittelalter die stetige Teilung nannte, das mathematische Gesetz gefunden zu haben, das für die Natur bei allen Maßbeziehungen des menschlichen Körpers, der Tiere und Pflanzen bestimmend sei, und das auch für die Werke der Bau- und Tonkunst, der Plastik und Malerei als Prinzip der Schönheit Gültigkeit haben sollte.

Die Konstruktion ist danach leicht auszuführen. (Fig. 165.)

Fig. 165.



Anmerkung. Diese Konstruktion stammt von dem Alexandriner Heron (1. Jahrhundert v. Chr., vgl. Fußnote S. 113), wie der Araber An-Nairizi (Anaritius, 900 n. Chr.) berichtet.

Bezeichnet man den größeren Abschnitt der stetig geteilten Strecke a mit x, so gilt die Gleichung:

$$a : x = x : a - x,$$

woraus folgt:

$$x^2 = a\,(a - x)$$

$$x^2 + a\,x = a.$$

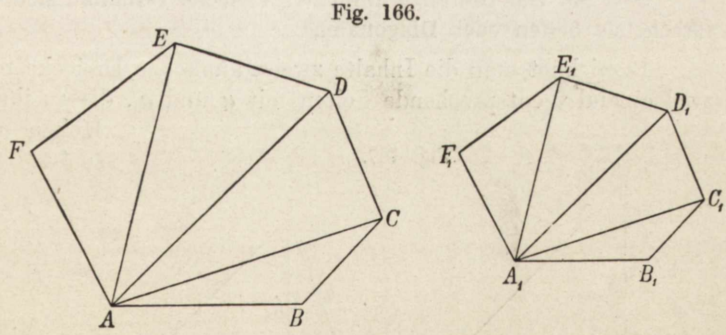
Aus dieser quadratischen Gleichung kann man x berechnen. Der Wert von x ergibt sich auch aus der Figur 165 wie folgt:

$$x = MB - MC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

V. Ähnlichkeit der Vielecke. Umfänge und Inhalte ähnlicher Figuren.

Zerlegt man die ähnlichen Vielecke $ABCDEF$ und $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (Fig. 166) durch Diagonalen von den entsprechenden Eckpunkten A und A_1 aus in Dreiecke, so ist in den Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$:

Fig. 166.



$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B_1.$$

Folglich sind nach Satz 81 die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ einander ähnlich.

Hieraus ergibt sich:

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1$$

Da aber:

$$BC : B_1C_1 = DC : D_1C_1$$

ist, so ist auch:

$$AC : A_1C_1 = DC : D_1C_1.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ folgt auch:

$$\sphericalangle ACB = A_1C_1B_1$$

Da aber auch:

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle B_1C_1D_1$$

ist, so muß

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle A_1C_1D_1$$

sein, und es ist daher auch nach dem zweiten Ähnlichkeitssatze:

$$\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1.$$

In derselben Weise läßt sich zeigen, daß auch die Dreiecke ADE und $A_1D_1E_1$ sowie auch die Dreiecke DEF und $A_1E_1F_1$ einander ähnlich sind. Wir erhalten daher:

Satz 89. Ähnliche Vielecke werden durch Diagonalen von gleichliegenden Eckpunkten aus in paarweise ähnliche Dreiecke zerlegt.

Bezeichnen wir in den ähnlichen Vielecken $ABCDEF$ und $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ die entsprechenden Seiten mit a und a_1, b und $b_1 \ldots$, so ist:

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \ldots\ldots,$$

mithin auch:

$$(a + b + c + \ldots\ldots) : (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots\ldots) = a : a_1.$$

Sind s und s_1 zwei einander entsprechende Diagonalen, so ist auch:

$$s : s_1 = a : a_1.$$

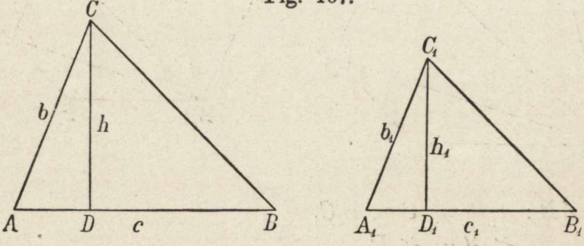
und

$$(a + b + c + \ldots\ldots) : (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots\ldots) = s : s_1, \text{ d. i.:}$$

Satz 90. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie zwei entsprechende Seiten oder Diagonalen.

Bezeichnet man die Inhalte zweier ähnlichen Dreiecke mit F und F_1, zwei einander entsprechende Seiten mit a und a_1, die zu ihnen gehörigen Höhen mit h und h_1, so ist:

Fig. 167.



$$F = \frac{a\,h}{2}$$

$$F_1 = \frac{a_1\,h_1}{2}.$$

Mithin ist:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{a\,h}{a_1\,h} = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{h}{h_1}.$$

Da aber (Übungssatz 5, Kapitel XXIII):

$$\frac{h}{h_1} = \frac{a}{a_1},$$

so folgt:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{a^2}{a_1^2}.$$

Satz 91. Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Ähnliche Vielecke lassen sich durch Diagonalen von entsprechenden Eckpunkten aus in paarweise ähnliche Dreiecke zerlegen. (Satz 89.) Da sich aber je zwei Dreiecke eines solchen Paares wie die Quadrate ihrer entsprechenden Seiten verhalten und die Verhältnisse dieser Quadrate für alle entsprechenden Seitenpaare einander gleich sind, so verhalten sich auch die Summen dieser Dreiecke wie die Quadrate entsprechender Seiten (oder entsprechender Diagonalen).

Satz 92. Die Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten oder Diagonalen.

Zeichnet man über der Katheten a und b sowie der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks als entsprechenden Seiten einander ähnliche Vielecke mit den Inhalten F_a, F_b, F_c, so folgt aus Satz 92:

$$\frac{F_a}{F_c} = \frac{a^2}{c^2} \text{ und } \frac{F_b}{F_c} = \frac{b^2}{c^2}$$

und mithin auch:

$$\frac{F_a + F_b}{F^c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1,$$

$$F_a + F_b = F_c.$$

Satz 93. Errichtet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als entsprechenden Seiten ähnliche Vielecke, so ist die Summe der Vielecke über den Katheten gleich dem Vieleck über der Hypotenuse.

Dieser Satz ermöglicht es aus zwei gegebenen ähnlichen Figuren eine dritte ähnliche zu zeichnen, die gleich ihrer Summe oder ihrem Unterschiede ist.

Zieht man in den Dreiecken ABC und $A_1C_1B_1$ (Fig. 167), die in den Winkeln CAB und $C_1A_1B_1$ übereinstimmen, zu den Seiten AB $(= c)$ und $A_1 B_1$ $(= c_1)$ die Höhen $CD = h$ und $C_1D_1 = h$, so ergibt sich für ihre Flächeninhalte F und F_1:

$$F : F_1 = c\,h : c_1\,h_1 = \frac{c}{c_1} \cdot \frac{h}{h_1}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken ACD und $A_1C_1D_1$ folgt:

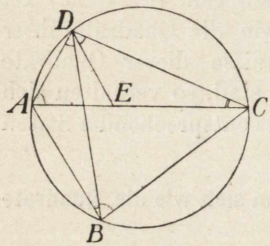
$$\frac{h}{h_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Mithin ist:

$$F : F_1 = \frac{c}{c_1} \cdot \frac{b}{b_1} = c \,.\, b : c_1\, b_1, \quad \text{d. h.:}$$

Satz 94. Die Inhalte zweier Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Fig. 168.



Man mache in dem Sehnenviereck $ABCD$ (Fig. 168) den Winkel CDE gleich dem Winkel ADB, dann ist, da Winkel DCE gleich dem Winkel DBA ist,

$$\triangle\, CDE \sim \triangle\, ABD$$

und daher:

$$CE : AB = DC : BD,$$

oder

$$\text{I)}\ CE \,.\, BD = AB \,.\, DC.$$

Ferner ist:

$$\begin{array}{c} \sphericalangle\, ADE = \sphericalangle\, BDC \\ \sphericalangle\, DAE = \sphericalangle\, DBC \\ \hline \triangle\, DAE \sim \triangle\, BCD \\ \hline AE : BC = AD : BD, \end{array}$$

oder

$$\text{II)}\ AE \,.\, BD = BC \,.\, AD.$$

Durch Addition der Gleichungen I und II folgt:

$$BD\,(AE + EC) = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD$$
$$BD \,.\, AC = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD.$$

Satz des Ptolemäus[1]). (95.) In jedem Sehnenviereck ist das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten.

Ist das Sehnenviereck ein Rechteck mit den gleichen Diagonalen e und den Gegenseiten a und b, so folgt aus dem ptolemäischen Satze:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

d. i. der pythagoreische Lehrsatz.

Aufgaben.

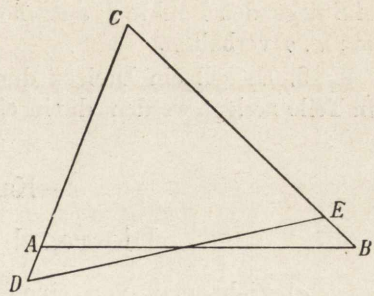
1. Es soll zu einem gegebenen Dreieck (Vieleck) ein ähnliches gezeichnet werden, so daß sein Inhalt 4mal, 9mal, 16mal, n^2-mal so groß ist als der des gegebenen.

---

[1]) Claudius Ptolemäus, einer der berühmtesten griechischen Astronomen, der von 125—151 n. Chr. in Alexandria lebte, leitete mittels dieses Satzes seine berühmten Sehnentafeln ab.

2. Es sind zwei ähnliche Vielecke gegeben. Es soll ein drittes, den gegebenen ähnliches so gezeichnet werden, daß sein Inhalt *a*) gleich der Summe, *b*) gleich der Differenz der gegebenen Vielecke ist.

Fig. 169.



3. Es soll ein gegebenes Dreieck ABC mit Beibehaltung des Winkels γ in ein gleichschenkliges verwandelt werden.

Anleitung. Es sei (Fig. 169) $\triangle CDE = \triangle ABC$. Dann ist:

$$\triangle CDE : \triangle ABC = CD \,.\, CE : CA \,.\, CB \text{ (Satz 94).}$$

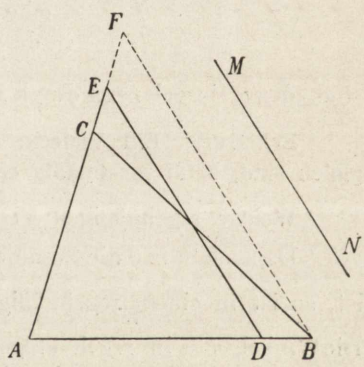
Da $\triangle CDE = \triangle ABC$ und $CD = CE$ sein soll, so ist:

$$CD^2 = CA \,.\, CB \quad \text{usw.}$$

4. Es soll ein gegebenes Dreieck ABC in ein gleichseitiges verwandelt werden.

Anleitung. Man verwandelt das Dreieck ABC in ein anderes mit dem Winkel 60^0, darauf dieses Dreieck mit Beibehaltung dieses Winkels in ein gleichseitiges. (Aufgabe 3.)

Fig. 170.



5. Es soll ein gegebenes Dreieck ABC unter Beibehaltung des Winkels α in ein flächengleiches verwandelt werden, in dem die diesem Winkel gegenüber liegende Seite eine gegebene Richtung hat.

Anleitung. (Fig 170.) Die gegebene Richtung sei MN, ADE das gesuchte Dreieck. Es werde $BF \parallel MN$ gezogen, so ist:

1.) $AB : AD = AF : AE$

Da $\triangle ADE = ABC$ sein soll, so ist nach Satz 94:

$$AB \,.\, AC = AD \,.\, AE$$

oder: 2.) $AB : AD = AE : AC$

Aus 1 und 2 folgt:

3.) $AF : AE = AE : AC.$

Hieraus läßt sich AE zeichnen.

6. Es soll ein gegebenes Dreieck ABC in ein flächengleiches verwandelt werden, das einem zweiten gegebenen Dreieck DEF ähnlich ist. (Aufgabe 5.)

7. Es soll ein Dreieck durch Geraden, die von einer Ecke ausgehen, in Teile zerlegt werden die in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

8. Es soll ein Dreieck ABC durch Geraden, die von einem auf der Seite AB liegenden Punkte P ausgehen, in drei Teile zerlegt werden, die sich wie $m : n : o$ verhalten.

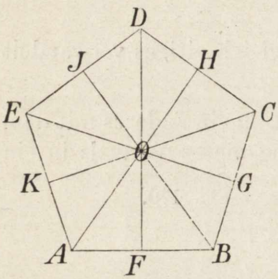
9. Es soll ein Dreieck durch Geraden, die einer Seite parallel sind, in Teile zerlegt werden, die in einem gegebenen Verhältnis $m : n : o$ stehen.

Kapitel XXIII.

Die regelmäßigen Vielecke.

a) Zieht man von einem Punkte O aus n Strahlen (Fig. 171), so daß je zwei Strahlen einen Winkel von $\frac{4}{n} R$ miteinander bilden, so deckt sich die entstandene Figur mit sich selbst, wenn man sie um den Punkt M um einen Winkel von $\frac{4}{n} R$ dreht.

Fig. 171.



Wir nennen die Punkte der Strahlen, die durch die Drehung zur Deckung gebracht werden, einander entsprechende Punkte. Verbinden wir die entsprechenden Punkte A, B, C, D, E der Reihe nach miteinander, so entsteht ein Vieleck, in dem alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind, denn sie gelangen durch Drehung um den Winkel $\frac{4}{n} R$ zur Deckung.

Erklärung. Ein Vieleck, dessen Seiten und dessen Winkel einander gleich sind, heißt regelmäßig oder regulär.

Welche regelmäßigen Vielecke haben wir bis jetzt kennen gelernt?

Da nach Satz 6 die Summe der Winkel eines n-Ecks gleich $(2n - 4) R$ ist, so ist in einem regelmäßigen n-Eck jeder Winkel gleich $\frac{2n-4}{n} R$. Die Winkelgröße im regelmäßigen n-Eck ist eine Funktion der Seitenanzahl.

Dreht man das regelmäßige Vieleck $ABCDE$ um den Punkt O, so gelangen nicht nur seine Seiten und Winkel zur Deckung, sondern es decken sich auch die Strecken OA, OB, ... OE und ebenso die von dem Punkte O auf die Seiten gefällten Senkrechten OF, OG, ... OK. Der Punkt O ist demnach von allen Eckpunkten und allen Seiten des regelmäßigen Vielecks gleichweit entfernt. Es folgt daher:

Satz 96. Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis um- und ein Kreis einbeschreiben.

Der Halbmesser r des Umkreises heißt der **große**, der Halbmesser ϱ des Inkreises heißt der **kleine Halbmesser** des Vielecks.

Die großen Halbmesser teilen das Vieleck in kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Höhen gleich dem kleinen Halbmesser sind. Jedes dieser gleichschenkligen Dreiecke heißt ein **Bestimmungsdreieck** des regelmäßigen Vielecks.

Satz 97. Teilt man den Umfang eines Kreises in n gleiche Teile (n sei eine ganze Zahl) und verbindet die Teilpunkte durch Sehnen, so entsteht ein dem Kreise einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck; zieht man in allen Teilpunkten Tangenten an den Kreis, so entsteht ein dem Kreise umbeschriebenes regelmäßiges n-Eck.

Dreht man die Figur um den Mittelpunkt um den n-ten Teil einer ganzen Umdrehung, so decken sich die beiden Vielecke jedes mit sich selbst.

Folgerungen.

Da in regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl alle Winkel einander gleich und alle Seiten in gleichem Verhältnis 1 : 1 stehen, so folgt:

1. Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich.

2. Die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Halbmesser der Um- und Inkreise.

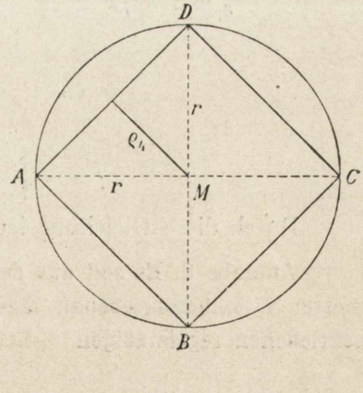
3. Die Inhalte regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser der Um- und Inkreise.

---

b) **Aufgabe 1. Es soll in einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Viereck eingezeichnet und seine Seite, der Halbmesser des Inkreises, Umfang und Inhalt als Funktion des Kreishalbmessers dargestellt werden.**

Lösung. (Fig. 172.) Zieht man in dem Kreise zwei aufeinander senkrechte Durchmesser, so wird der Kreisumfang in vier gleiche Teile geteilt. Verbindet man daher die Endpunkte der Durchmesser miteinander, so erhält man nach Satz 97 ein einbeschriebenes regelmäßiges Viereck.

Fig. 172.



Ist r der Halbmesser des gegebenen Kreises, so ergibt sich aus dem Bestimmungsdreieck AMD für die Seite $AD = s_4$ des Vierecks:

$$s_4^2 = r^2 + r^2$$
$$s_4 = r\sqrt{2}.$$

Für den Halbmesser ϱ_4 des Inkreises erhalten wir aus dem Dreieck *DEM*:

$$\varrho_4^2 = r^2 - \left(\frac{s_4}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}$$

$$\varrho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Hieraus erhalten wir für den Umfang u_4:

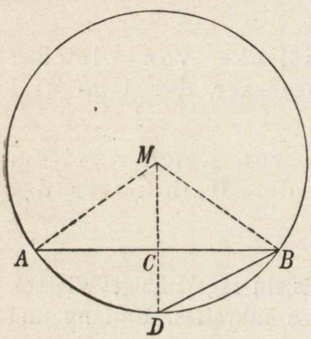
$$u_4 = 4\,r\sqrt{2}$$

und für den Inhalt i_4 des regelmäßigen Vielecks (s. Seite 109):

$$i_4 = \frac{u_4 \cdot \varrho_4}{2} = 2\,r^2.$$

Anmerkung. Durch fortgesetzte Halbierung der Zentriwinkel oder der Bögen des regelmäßigen Vierecks, erhält man das regelmäßige Acht-, Sechzehn-.... $2 \cdot 2^n$-Eck. ($n = 1, 2, 3 \ldots.$)

Fig. 173.



Aufgabe 2. Es soll aus der Seite s_n des einem Kreise mit dem Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks die Seite s_{2n} des eingeschriebenen regelmäßigen 2 -Ecks berechnet werden.

Ist (Fig. 173) *MAB* das Bestimmungsdreieck des regelmäßigen n-Ecks, also $AB = s_n$, so erhält man durch Halbierung des Winkels *AMB* die Seite $BD = s_{2n}$.

Es ist:

$$MC = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}};\; CD = r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$$

$$s_{2n}^2 = CD^2 + \frac{s_n^2}{4} = r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} + r^2 - \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_n^2}{4}$$

$$s_{2n}^2 = 2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$$

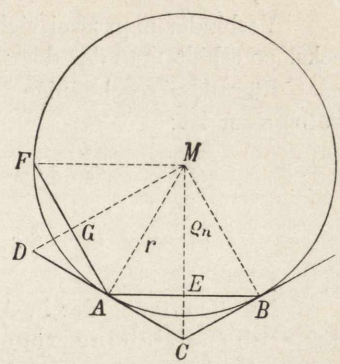
$$s_{2n} = \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

Durch diese Gleichung ist s_{2n} als Funktion von r und s_n dargestellt.

Aufgabe 3. Es soll aus der Seite s_n des einem Kreise mit dem Halbmesser r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks die Seite S^n des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks berechnet werden.

Es sei (Fig. 174) AB die Seite s_n des einbeschriebenen n-Ecks und DC die Seite des umbeschriebenen n-Ecks, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AME und AMC:

Fig. 174.



$$AC : AM = AE : ME$$

oder:

$$\frac{S_n}{2} : r = \frac{s_n}{2} : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$$

$$S_n = \frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

S_n ist also eine Funktion von r und s_n.

Mit Benutzung des in Aufgabe 3 gewonnenen Ergebnisses folgt für das in dem Kreise mit dem Halbmesser r umschriebene regelmäßige Viereck:

$$S_4 = 2\,r$$
$$U_4 = 8\,r$$
$$J_4 = 4\,r^2.$$

Für das ein- und umbeschriebene regelmäßige Achteck erhält man mit Benutzung der in den Aufgaben 2 und 3 erhaltenen Formeln:

$$s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} \qquad i_8 = 2\,r^2\sqrt{2}. \qquad S_8 = 2\,r\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$u_8 = 8\,r\sqrt{2 - \sqrt{2}} \qquad U_8 = 16\,r\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$\varrho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \qquad J_8 = 8\,r^2\,(\sqrt{2} - 1).$$

Aufgabe 4. Es soll in einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck eingezeichnet werden.

Analysis. Der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks des regelmäßigen Sechsecks muß gleich 60⁰ sein; es beträgt daher auch jeder Winkel an der Grundlinie 60⁰ und das Bestimmungsdreieck ist gleichseitig. Daher folgt, **daß die Seite des einem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks gleich dem Halbmesser des Kreises ist**[1]**)**.

Die Lösung der Aufgabe ergibt sich hieraus unmittelbar.

---

[1]) Diese Eigenschaft der Sechsecksseite läßt sich schon bei den Babyloniern nachweisen. Sie ist auf das engste mit den astronomischen Theorien der Chaldäer, ihrer Einteilung des Kreises in 360 Teile und der Bevorzugung der Zahl 6 und ihrer Vielfachen verbunden.

Durch fortgesetzte Halbierung des Zentriwinkels oder des Bogens der Seite des regelmäßigen Sechsecks erhält man die Seiten des regelmäßigen Zwölf-, Vierundzwanzig-..., $3 \cdot 2^n$-Ecks ($n = 1 . 2 \ldots$)

Verbindet man zwei nicht aufeinander folgende Eckpunkte des Sechsecks, so erhält man das dem Kreise einbeschriebene regelmäßige Dreieck.

Für das regelmäßige Sechseck ergibt sich, wenn r der Kreishalbmesser ist:

$$s_6 = r \qquad \varrho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$u_6 = 6\,r \qquad i_6 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}.$$

Mit Benutzung der in Aufgabe 2 abgeleiteten Formel erhält man für das einbeschriebene regelmäßige Zwölfeck:

$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad \varrho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$u_{12} = 12\,r\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad i_{12} = 3\,r^2.$$

Mittels derselben Formel (für $n = 6$):

$$s_6 = \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{{s_3}^2}{4}}}$$

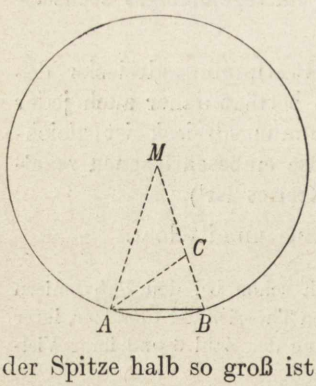
folgt, da $s_6 = r$ ist:

$$s_3 = r\sqrt{3} \qquad \varrho_3 = \frac{r}{2}$$

$$u_3 = 3\,r\sqrt{3} \qquad i_3 = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}.$$

Übungsaufgabe. Man berechne S_{12}, U_{12}, J_{12}, S_3, U_3, J_3.

Fig. 175.



Aufgabe 5. Es soll in einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Zehneck eingezeichnet werden.

Analysis. (Fig. 175.) Ist AB die Seite des gesuchten Zehnecks, so muß der Zentriwinkel $AMB = \frac{360^0}{10} = 36^0 = \frac{2}{5} R$ und daher $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 72^0 = \frac{4}{5} R$ sein. Die gesuchte Seite AB ist mithin die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem gegebenen Schenkel r, in dem der Winkel an der Spitze halb so groß ist als der Winkel an der Grundlinie.

Halbiert man den Winkel MAB durch die Gerade AC, so ist das Dreieck MAC gleichschenklig und $MC = AC$; ebenso ist das Dreieck ABC gleichschenklig und daher $AB = AC$, mithin ist $AB = AC = MC$. Da überdies $\triangle MAB \sim \triangle ABC$, so folgt:

$$MB : AB = AB : BC$$

oder:

$$MB : MC = MC : BC, \quad \text{d. h.:}$$

Die Seite des einem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks ist gleich dem größeren Abschnitte des stetig geteilten Halbmessers.

Durch fortgesetzte Halbierung des Zentriwinkels oder des Bogens der Seite des regelmäßigen Zehnecks erhält man die Seite des regelmäßigen Zwanzig-, Vierzig, ..., $5 \cdot 2^n$-Ecks ($n = 1, 2 \ldots$).

Verbindet man zwei durch einen Eckpunkt getrennte Eckpunkte des regelmäßigen Zehnecks, so erhält man die Seite des demselben Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks.

Für die Seite des dem Kreise mit dem Halbmesser r einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks ergibt sich aus Kapitel XXII, Seite 147:

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

und mithin

$$u_{10} = 5r(\sqrt{5} - 1),$$

$$\varrho_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \qquad i_{10} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Mittels der in Aufgabe 2 abgeleiteten Formel ($n = 10$):

$$s_{10} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_5^2}{4}}}$$

erhält man, da $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ist, für s_5:

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

und ferner:

$$u_5 = \frac{5r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

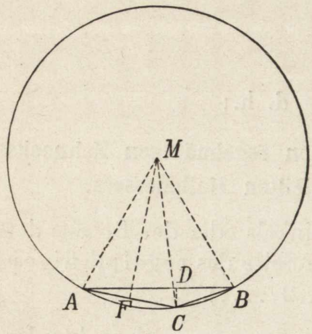
$$i_5 = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$\varrho_5 = \frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1),$$

Übungsaufgabe. Man berechne S_{10}, U_{10}, J_{10}, S_5, U_5, J_5.

Aufgabe 6. Es soll in einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Fünfzehneck eingezeichnet werden.

Fig. 176.



Lösung. (Fig. 176.) Der zur Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks gehörige Zentriwinkel ist $\frac{360^0}{15} = 24^0 = 60^0 - 36^0$. Man trage daher von einem beliebigen Punkte der Kreisperipherie nach derselben Richtung die Sechsecksseite $AB = r$ und die Zehnecksseite AC als Sehnen in den Kreis ein, so ist die Sehne BC die verlangte Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks.

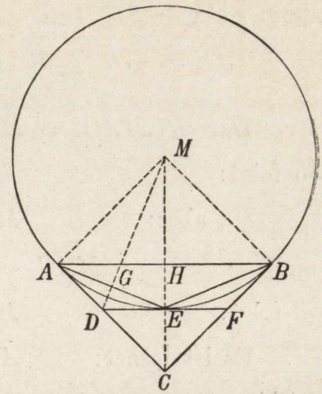
Aus dem regelmäßigen Fünfzehneck erhält man durch fortgesetzte Halbierung seiner Zentriwinkel oder Bögen das regelmäßige Dreißigeck, Sechzigeck, ..., $15 \cdot 2^n$-Eck ($n = 1 . 2 . . . .$)

Anmerkung. Fällt man CD senkrecht zu AB und MF senkrecht zu AC, so ist $\sphericalangle AMF = \sphericalangle CBD = 18^0$ und $\triangle CDB \sim \triangle AMF$. Hierdurch läßt sich BD berechnen und durch Anwendung des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes auf das Dreieck ABC ergibt sich dann die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Fünfzehnecks als Funktion des Kreishalbmessers.

Aus den Lösungen der vorangegangenen Aufgaben folgt, daß man durch geometrische Konstruktion den Umfang eines Kreises in $2 . 2^n$, $3 . 2^n$, $5 . 2^n$, $15 . 2^n$ ($n = 0, 1, 2, 3 . . . . .$) gleiche Teile teilen und demnach entsprechende regelmäßige Vielecke in den Kreis einzeichnen kann. Diese Konstruktionen waren bereits dem griechischen Mathematiker Euklid (300 v. Chr., Alexandria) bekannt. Am Schlusse des 18. Jahrhunderts zeigte der deutsche Mathematiker Gauß (vgl. Seite 64 unten) in seinem 1796 erschienenen großen Werke „Disquisitiones arimethicae", daß man mit Hilfe von Zirkel und Lineal einen Kreis auch in $n = 2^{2^k} + 1$ gleiche Teile teilen kann, wenn n eine Primzahl ist. Für $k = 1$ erhält man $n = 5$, was bereits bekannt war; für $k = 2$ ist $n = 17$, für $k = 3$ ist $n = 257$, $k = 4$ liefert $n = 65\,537$. Für $k = 5$ ist $n = 4294967297$, welche Zahl aber keine Primzahl ist, denn es ist $4294967297 = 641 . 6700417$. Auch die Zahlen $2^{2^{12}} + 1$ und $2^{2^{23}} + 1$ sind bis jetzt als Nichtprimzahlen nachgewiesen worden.

Anmerkung. Von Vorteil für die späteren Berechnungen sind die nachfolgenden Beziehungen zwischen den Umfängen und Inhalten der ein- und umbeschriebenen regelmäßigen n- und $2\,n$-Ecke.

Fig. 177.



1. Wir bezeichnen wie früher mit u_n den Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks (Seite AB), mit U_n den Umfang des entsprechenden umbeschriebenen Vielecks (Seite $2\,AC = 2\,BC$), mit u_{2n} und U_{2n} die Umfänge der entsprechenden Vielecke mit doppelter Seitenzahl (Seiten AE und $2\,AD = 2\,DE$). Dann ist (Fig. 177):

$$AH = \frac{u_n}{2n};$$

$$AC = \frac{U_n}{2n}, \qquad AD = DE = \frac{U_{2n}}{4n},$$

und mithin:

$$AC : AH = U_n : u_n.$$

Da $\triangle\, DCE \sim \triangle\, AHC$,

so folgt: $DC : DE = AC : AH.$

Es ist aber: $DE = AD$

und daher: $DC : AD = AC : AH = U_n : u_n.$

Hieraus erhält man:

$$\frac{DC + AD}{2\,AD} = \frac{u_n + U_n}{2\,u_n};$$

da aber:

$$AD = DE = \frac{U_{2n}}{4n},$$

so ist:

$$\frac{U_n}{U_{2n}} = \frac{u_n + U_n}{2\,u_n}$$

und

$$U_{2n} = \frac{2\,u_n \,.\, U_n}{u_n + U_n} \;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Es ist ferner $\triangle\, ADG \sim \triangle\, AEH$ ($\sphericalangle\, DAE = \sphericalangle\, HAE$)

und folglich: $AD : AG = AE : AH$

Da aber: $AG = \frac{1}{2}\,AE,$

so ist: $2\,AD : AE = AE : AH$, und da: $AE = \dfrac{u_{2n}}{2n}$:

$$U_{2n} : u_{2n} = u_{2n} : u_n$$

$$u_{2n} = \sqrt{u_n \,.\, U_{2n}}\,\text{[1]} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

[1]) Diese Formel wurde zuerst von Snellius (1581—1626, Leiden) in seinem 1621 erschienenen Werke „Cyclometria" aufgestellt; der Beweis stammt von Huygens (1629—1695, Haag und Paris).

2. Es seien i_n, i_{2n}, J_n, J_{2n} die Inhalte der obigen regelmäßigen Vielecke, dann ist:

$$\triangle MAH = \frac{i_n}{2n},\quad \triangle MAE = \frac{i_{2n}}{2n},\quad \triangle MAC = \frac{J_n}{2n},\quad \triangle AMD = \frac{J_{2n}}{4n}.$$

Da $\triangle MAC = \frac{1}{2} MC \,.\, AH$ und $\triangle MAE = \frac{1}{2} ME \,.\, AH$,

so folgt: $$J_n : i_{2n} = MC : ME.$$

Da aber: $$MC : ME = MC : MA$$

und $$\triangle MAC \sim \triangle AHC \; (\sphericalangle AMC = \sphericalangle HAC),$$

so folgt: $$MC : MA = AC : AH.$$

Es ist ferner: $$AC : AH = CD : AD,$$

mithin: $$MC : ME = CD : AD$$

und $$J_n : i_{2n} = CD : AD.$$

Folglich ist auch:

$$(J_n + i_{2n}) : 2\, i_{2n} = AC : 2\, AD.$$

Weiterhin ist:

$$\triangle MAC = \frac{1}{2} AC \,.\, MA,\quad \triangle MAD = \frac{1}{2} AD \,.\, MA$$

$$J_n : J_{2n} = AC : 2\, AD.$$

Daher auch: $$J_n : J_{2n} = (J_n + i_{2n}) : 2\, i_{2n}$$

oder:

$$\boldsymbol{J_{2n} = \frac{2\, J_n \,.\, i_{2n}}{J_n + i_{2n}}} \text{ [1]} \;\ldots\ldots (3).$$

Es ist aber auch:

$$i_n : i_{2n} = \triangle MAH : MAE = MH : ME = MH : MA$$

$$i_{2n} : J_n = \triangle MAE : \triangle MAC = ME : MC = MA : MC.$$

Da $$\triangle MAH \sim \triangle MAC,$$

so folgt: $$MH : MA = MA : MC$$

$$i_n : i_{2n} = i_{2n} : J_n$$

$$\boldsymbol{i_{2n} = \sqrt{i_n \,.\, J^n}} \text{ [2]} \;\ldots\ldots (4).$$

---

[1] Diese Formel rührt von dem englischen Mathematiker James Gregory (1638—1675, Edinburgh) her.

[2] Diese Formel findet sich in einer aus dem 13. Jahrhundert n. Chr. stammenden Schrift „De triangulis“ des Deutschen Jordanus Nemorarius (gestorben 1237, Ordensgeneral der Dominikaner). Unabhängig davon stellte sie Snellius in seiner „Cyclometria“ (1621) noch einmal auf.

Kapitel XXIV.

Umfang und Inhalt des Kreises.

α) Berechnung des Kreisumfanges.

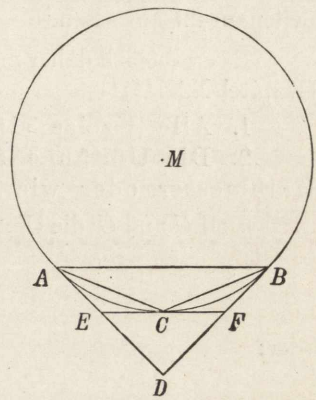
Ist $AB = s_n$ die Seite des einem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und $AC = CB = s_{2n}$ die Seite des dem gleichen Kreise einbeschriebenen regelmäßigen 2 n-Ecks, so ist (Fig. 178):

$$AC + CB > AB$$
$$2\,n\,.\,AC > n\,AB$$

oder mit Benutzung der im vorigen Paragraphen angewandten Bezeichnungen:

$$u_{2n} > u_n.$$

Fig. 178.



Zieht man in A, B und C an den Kreis die Tangenten, so ist:

$$ED + FD > EF.$$

Addiert man beiderseits AE und BF, so erhält man:

$$AD + BD > AE + EF + BF,$$

und mit Benutzung der bereits benutzten Bezeichnungen:

$$S_n > 2\,S_{2n}$$
$$n\,S_n > 2\,n\,S_{2n}$$
$$U_n > U_{2n}.$$

Es folgt daher:

1. Beschreibt man in einen Kreis ein regelmäßiges Vieleck und verdoppelt fortgesetzt dessen Seitenzahl (durch Halbierung der Zentriwinkel oder der Bögen), so wachsen die Umfänge der regelmäßigen Vielecke mit wachsender Anzahl ihrer Seiten und nähern sich mehr und mehr dem Kreis als ihrer Grenze.

2. Beschreibt man um einen Kreis ein regelmäßiges Vieleck und verdoppelt fortgesetzt dessen Seitenzahl, so nehmen die Umfänge der regelmäßigen Vielecke mit wachsender Anzahl ihrer Seiten ab und nähern sich mehr und mehr dem Kreis als ihrer Grenze.

Dasselbe Resultat ergibt sich auch aus folgender Betrachtung. Es ist:

$$u_n = n\,s_n$$

$$U_n = \frac{n\,r\,s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}; \qquad \text{(Kapitel XXIII, Aufgabe 3.)}$$

$$\frac{U_n}{u_n} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}$$

Wächst n über jede Grenze hinaus, so wird $s_n = 0$ und die vorangehende Gleichung geht über in

$$\frac{U_n}{u_n} = \frac{r}{r} = 1,$$

d. h.: Die Umfänge der regelmäßigen ein- und umbeschriebenen Vielecke nähern sich mit wachsender Seitenzahl derselben gemeinschaftlichen Grenze, dem Kreisumfange, d. h.:

Der Kreis läßt sich als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich großer Seitenanzahl auffassen.

Es ergibt sich daher mit Benutzung der Folgerungen 1) und 2) zu Satz 97 (Kapitel XXIII):

1. Alle Kreise sind einander ähnlich.
2. Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser oder wie ihre Durchmesser.

Sind U und U^1 die Umfänge zweier Kreise mit den Halbmessern r und r^1, so ist:

$$\frac{U}{U^1} = \frac{r}{r^1} = \frac{2\,r}{2\,r^1}$$

oder:

$$\frac{U}{2\,r} = \frac{U^1}{2\,r_1}, \quad \text{d. h.}$$

das Verhältnis des Umfanges zum Durchmesser ist für alle Kreise das gleiche.

Erklärung. Die Zahl, die den für alle Kreise gleichen Wert des Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser angibt, bezeichnet man mit π[1]).

Da $$\frac{U}{2\,r} = \pi, \quad \text{so folgt:}$$

$$U = 2\,\pi\,r = \pi\,d,$$

wenn d der Kreisdurchmesser ist.

Satz 98. Der Umfang eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser und der Zahl π.

Anmerkung. Der Umfang eines Kreises ist eine Funktion seines Durchmessers, beziehungsweise seines Halbmessers.

Zur annäherungsweisen Berechnung der Zahl π geht man von der Seite s_n eines der vorher behandelten einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecke aus berechnet aus ihr die Seite s_{2n} des $2\,n$-Ecks, daraus die Seite s_{4n} des $4\,n$-Ecks usf. Multipliziert man die gefundenen Seitenlängen mit der zu-

[1]) Der Buchstabe π findet sich in dieser Bedeutung zum ersten Male 1706 in William Jones' „Synopsis palmariorum matheseos", einer Einleitung in die Mathemathik. Aber erst durch Euler (1707—1783, Basel, Petersburg, Berlin, Petersburg) gelangte die Bezeichnung zur allgemeineren Annahme.

gehörigen Anzahl, so erhält man die Umfänge u_n, u_{2n}, u_{4n} usf. und hiermit eine zunehmende Reihe von Zahlen, die kleiner sind als der gesuchte Kreisumfang, sich ihm aber immer mehr und mehr nähern. Ferner berechne man aus den Seiten s_n, s_{2n}, s_{4n}..... die Seiten der umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke von gleicher Seitenanzahl S_n, S_{2n}, S_{4n}..... und deren Umfänge U_n, U_{2n}, U_{4n}.....; diese Umfänge bilden eine abnehmende Zahlenreihe, von denen jede größer als der gesuchte Kreisumfang ist, sich ihm aber ebenfalls mehr und mehr nähert.

Für den Kreis mit dem Halbmesser $r = \frac{1}{2}$, $(2\,r = 1)$, erhält man ausgehend von der Seite des regelmäßigen Sechsecks die folgenden, in nachstehender Tabelle zusammengestellten Zahlen:

n	s_n	u_n	S_n	U_n
6	0,500000	3,0000000	0,5773503	3,4641016
12	0,2588190	3,1058285	0,2679492	3,2153903
24	0,1305262	3,1326286	0,1316525	3,1596600
48	0,0654031	3,1393502	0,0655435	3,1460863
96	0,0327191	3,1410320	0,0327366	3,1427147
192	0,0163617	3,1414525	0,0163639	3,1418731
384	0,0081811	3,1415577	0,0081814	3,1416628
768	0,0040906	3,1415839	0,0040906	3,1416102
1536	0,0020453	3,1415905	0,0020453	3,1415971

Da $u_{1536} = 3{,}1415905$ und $U_{1530} = 3{,}1415971$, so liegt der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser 1 zwischen diesen Zahlen; demnach ist:

$$\pi = 3{,}14159$$

auf 5 Dezimalstellen genau.

Aufgabe. Man stelle die Ergebnisse der vorstehenden Tabelle graphisch dar, indem man die Seitenanzahlen n als Abszissen, die Umfänge u_n und U_n als Ordinaten betrachtet.

Man erkennt aus der Tabelle und aus der graphischen Darstellung, daß die Differenzen $u_{2n} - u_n$ und $U_n - U_{2n}$ immer kleiner werden; jede folgende ist fast genau $\frac{1}{4}$ der vorhergehenden, so daß die Differenzen eine abnehmende Reihe bilden.

Die Berechnung der Zahl π gestaltet sich bequemer, wenn man nach Kapitel XXIII c, Formel (1) aus u_n und U_n zuerst U_{2n} und nach Formel (2) u_{2n} berechnet.

Geschichtliche Anmerkung. Die Berechnung der Zahl π und die Erforschung ihrer Eigenschaften ist eines der ältesten mathematischen Probleme, das fast 4000 Jahre die Menschheit beschäftigt hat. Die älteste Spur derselben findet sich in dem „Papyrus Rhind des British Museum“, einem mathematischen Handbuche der alten Ägypter, das in der Zeit zwischen 2000 und 1700 v. Chr. von dem Schreiber Ahmes verfaßt wurde. Der hier benutzte Wert von π ist: $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1605$, ein Wert von überraschender Genauigkeit.

Die Babylonier benutzten den Wert $\pi = 3$, der an Genauigkeit weit hinter dem ägyptischen Werte zurückbleibt.

Der Wert $\pi = 3$ ist in einer biblischen Stelle (I, Könige, 7, 23; II Chronika, 4, 2) enthalten. In der Beschreibung des salomonischen Tempelbaues wird ein großes Waschgefäß, Ehernes Meer genannt, erwähnt, dessen Durchmesser auf 10 Ellen und dessen Umfang auf 30 Ellen angegeben wird.

Die erste gründliche Behandlung des vorliegenden Problems verdankt man Archimedes von Syrakus (287—212); er ermittelte mittels der oben entwickelten Methode, durch Benutzung der ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke mittels des 96-Ecks

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

und setzte deshalb $\pi = 3\frac{1}{7}$ ($= 3{,}142857$), ein Wert, der, wenn es sich nur um eine mittlere Genauigkeit handelt, noch heute vielfach benutzt wird. Zur richtigen Würdigung der Leistung des Archimedes ist zu bedenken, daß ihm sowohl die Kenntnis der Dezimalbrüche als auch des arabischen Ziffernsystems abging. Der erste, dem es weiterhin gelang, für die Zahl π einen genaueren Wert zu finden, war der Mathematiker und Festungsingenieur Adriaan Anthonisz, genannt Metius (1527 Metz — 1607); er fand $\pi = \frac{355}{113} = 3{,}1415929$, ein auf sechs Dezimalen genauer Wert.

Mittels der archimedischen Methode berechnete Ludolf van Ceulen (geboren 1539 zu Hildesheim, gestorben als Professor der Mathematik und der Kriegswissenschaften in Leyden 1610), indem er bis zum $60 \cdot 2^{29} = 32212254720$-Eck gelangte, die Zahl π bis auf 35 Dezimalstellen. Trotz der Achtung vor dem riesenhaften Fleiße und der ungeheuren Geduld, die Ludolf hierdurch bekundete, muß es uns doch befremdlich erscheinen, daß man die Zahl π nach ihm die Ludolfsche Zahl nannte, da diese Berechnung keinen Fortschritt in der Lösung des Problems bedeutet.

Mittels der durch die höhere Mathematik gefundenen Methoden kann man die Zahl π jetzt bis zu jeder beliebigen Annäherung berechnen. (Der Engländer Shanks hat sie bis auf 707 Dezimalen berechnet.) Die ersten 30 Dezimalstellen lauten:

$$\pi = 3{,}141592653589793238462643383279.$$

Diese 30 Stellen kann man leicht durch den nachstehenden französischen Merkvers behalten, in dem die aufeinanderfolgenden Worte des Verses durch die Zahl der in ihnen enthaltenen Buchstaben nacheinander die Dezimalstellen von π angeben:

3 1 4 1 5 9
Qué j'aime à faire apprendre
2 6 5 3 5
Un nombre utile aux sages!
8 9 7 9
Immortel Archimède, artiste ingénieux!
3 2 3 8 4 6 2 6
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
4 3 3 8 3 2 7 9
Pour moi ton problème eut de pareils avantages!

Aufgabe 1. Es soll die Länge eines Kreisbogens b als Funktion des zugehörigen Zentriwinkels α und des Kreishalbmessers ausgedrückt werden.

Nach Satz 49 gehören zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gleiche Bogen, die Kreisbögen sind also den Zentriwinkeln proportional. Der Bogen b verhält sich also zum ganzen Kreisumfang wie sein Zentriwinkel zu 360^0,

$$b : 2\pi r = \alpha : 360$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{2\pi r \alpha}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

Aufgabe 2. Es soll der Zentriwinkel eines Kreisbogens als Funktion der Bogenlänge und des Kreishalbmessers ausgedrückt werden.

Es ergibt sich aus der vorangehenden Aufgabe:

$$\alpha = \frac{b}{2\pi r} \cdot 360^0 = \frac{b}{\pi r} \cdot 180^0.$$

Ist insbesondere der Bogen b gleich dem Kreishalbmesser r, so folgt:

$$\alpha = \frac{r}{\pi r} \cdot 180^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57{,}296^0 = 57^0\, 17'\, 45''.$$

Anmerkung. Bezeichnet man den zum Zentriwinkel α im Kreise mit dem Halbmesser 1 gehörigen Bogen mit arcus α (abgekürzt *arc* α), so ist:

$$arc\ 57^0\, 17'\, 45'' = 1.$$

Insbesondere ist:

$$arc\ 360^0 = 2\pi;\quad arc\ 180^0 = \pi;\quad arc\ 90^0 = \frac{\pi}{2}.$$

b) Berechnung des Kreisinhaltes.

Da man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck mit dem Umfang U ansehen kann, so folgt für seinen Inhalt J:

$$\boldsymbol{J} = \frac{U}{2} \cdot r = \pi r^2, \quad \text{d. h.:}$$

Satz 99. Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate seines Halbmessers und der Zahl π.

Anmerkung. Der Inhalt eines Kreises ist eine Funktion seines Halbmessers.

Folgerung. Die Inhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

Den Inhalt des Kreises kann man unabhängig von der vorangegangenen Berechnung der Zahl π auch mittels der im Kapitel XXIII abgeleiteten Formeln 3 und 4 für I_{2n} und i_{2n}, ausgehend von einem der früheren betrachteten regelmäßigen ein- und umbeschriebenen Vielecke, berechnen.

Aufgabe 3. Es soll der Inhalt S eines Kreissektors als Funktion des zugehörigen Zentriwinkels α und des Kreishalbmessers ausgedrückt werden.

Da nach Satz 49 zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Sektoren desselben Kreises gehören, so folgt:

$$S : \pi r^2 = \alpha : 360^0$$

$$S = \frac{\pi \alpha r^2}{360}$$

Aufgabe 4. Es soll der Inhalt S eines Kreissektors als Funktion des zugehörigen Bogens b und des Kreishalbmessers ausgedrückt werden.

Nach Aufgabe 3 ist: $S = \frac{\pi \alpha r^2}{360}$ und nach Aufgabe 1: $b = \frac{\pi \alpha r}{180}$, mithin ergibt sich:

$$S = \frac{b}{2} \cdot r, \quad \text{d. h.:}$$

Der Inhalt eines Kreissektors ist gleich dem eines Dreiecks, dessen Grundlinie der Bogen des Sektors und dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist[1]).

Dieses Ergebnis läßt sich auch durch Zerlegen des Sektors in unendlich kleine Dreiecke ableiten.

Wie kann man den Flächeninhalt eines Kreissegmentes bestimmen?

Aufgabe 5. Es soll der Inhalt I eines Kreisringes (Kapitel XVII, Erklärung 2) aus den Halbmessern r und r_1 $(r > r_1)$ der ihn begrenzenden Kreise berechnet werden.

Resultat: $I = \pi (r^2 - r_1^2)$.

Wie kann man einen Kreis zeichnen, dessen Inhalt gleich dem eines gegebenen Kreisringes ist? (2 Lösungen.)

c) Übungssätze.

1. Errichtet man über der Hypotenuse und den beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks nach derselben Seite Halbkreise, so ist das Dreieck gleich der Summe der beiden halbmondförmigen Flächenstücke zwischen den Halbkreisen. (Lunulae Hippokratis)[2]).

Anleitung. Man beachte, daß die Halbkreise ähnliche Figuren sind und wende Satz 93 an.

---

[1]) Die Sektorformel $S = \frac{b}{2} r$ findet sich zuerst bei Simon Stevin (1548 Brügge, 1620 Leiden, Kaufmann, später im Staatsdienst als Ingenieur).

[2]) Hippokrates von Chios (um 440 v. Chr., Athen); der nach ihm benannte Satz ist aber erst später gefunden worden.

2. Beschreibt man über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks als Sehne den Quadranten nach außen, über den Katheten desselben aber die Quadranten nach innen, so ist das von den drei Quadranten begrenzte Flächenstück gleich dem Dreieck. (Man nennt solche von drei Quadranten begrenzte Figuren Pelekoide, axtähnliche Figuren.)

Anmerkung. Die beiden Sätze liefern Beispiele für die Flächengleichheit gerad- und krummliniger Figuren.

3. Wird der Durchmesser eines Halbkreises durch einen Punkt in zwei Teile geteilt, und errichtet man über diesen Teilen die Halbkreise, so ist das Flächenstück zwischen den drei Kreisumfängen gleich dem Kreise, dessen Durchmesser das im Teilungspunkt errichtete und von größerem Halbkreise begrenzte Lot ist. (Der Arbelus oder die Sichel des Archimedes.)

4. Werden von einer Strecke AB von beiden Endpunkten gleiche Stücke $AC = BD$ abgeschnitten und über der ganzen Strecke und diesen Stücken nach derselben Seite, über dem inneren Abschnitt CD aber nach entgegengesetzter Seite die Halbkreise beschrieben, so ist die Fläche der von den vier Halbkreisen begrenzten Figur gleich dem Kreise, der die Summen der Halbmesser der beiden konzentrischen Halbkreise zum Durchmesser hat. (Das Salinum des Archimedes.)

5. Zieht man in einem Kreise zwei zueinander senkrechte Sehnen und beschreibt über den vier Abschnitten als Durchmesser Kreise, so ist die Summe der Flächen der letzteren Kreise gleich der Fläche des ersteren.

6. Ist eine Strecke in beliebige Abschnitte geteilt und sind über den Abschnitten als Durchmesser abwechselnd nach der einen und der andern Seite Halbkreise gezeichnet, so ist die so entstandene wellenförmige Linie ebenso lang wie der Halbkreis über der ganzen Strecke.

7. Beschreibt man über der Hypotenuse eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks als Sehne einen Quadranten und als Durchmesser einen Halbkreis, so ist die entstehende Lunula flächengleich dem rechtwinkligen Dreieck. (Hippokrates.)

d) Aufgaben.

1. Wie lang ist der Umfang eines kreisrunden Platzes von 15 *m* Durchmesser?

2. Wie lang sind die Reifen der vier Räder eines Wagens zusammen, wenn der Halbmesser des Vorderrades 84 *cm*, der des Hinterrades 98 *cm* ist?

3. Welchen Weg legt die Spitze eines 8 *cm* langen Uhrzeigers zurück

a) nach einer ganzen Umdrehung?

b) wenn er von der Zahl XI bis auf I, von XII bis V, von V bis VI rückt?

4. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang gleich der Summe der Umfänge zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 5\,m$ und $r_2 = 9\,m$ ist?

5. In einem Kreise, dessen Halbmesser gleich $r = 75\,cm$ ist, soll die Länge des Bogens von $\alpha = 47^0$ berechnet werden.

6. Welcher Zentriwinkel α gehört *a*) im Kreise mit dem Halbmesser $r = 2\,m$ zum Bogen $b = 7\,m$, *b*) im Kreise mit dem Halbmesser $r = 25\,cm$ zum Bogen $b = 23{,}6\,cm$?

7. Es soll $arc\,\alpha$ $(r = 1)$ berechnet werden, wenn *a*) $\alpha = 14^0$, *b*) $\alpha = 25^0\,15'$, *c*) $\alpha = 107^0\,42'$, *d*) $\alpha = 40'\,36''$ ist.

8. Es soll der Winkel α berechnet werden, wenn $arc\,\alpha$ *a*) 0,336, *b*) 0,785, *c*) 2,427, *d*) 3,452 ist.

9. Welchen Flächenraum schließt der Umkreis einer Stadt ein, dessen Halbmesser 7 *km* ist?

10. Wie groß ist die flache Seite eines Zweimarkstückes, dessen Durchmesser 2,8 *cm* ist?

11. Wieviel Platten von 282,6 *qcm* Flächeninhalt sind zum Belegen eines kreisförmigen Platzes von 18 *m* Halbmesser erforderlich?

12. Ein Kreis mit dem Halbmesser $r = 50\,cm$ ist von einem Ring umgeben, dessen Inhalt $I = 1{,}9\,qm$ beträgt. Wie breit ist dieser Ring?

13. Ein Kreis, dessen Inhalt $F = 4{,}5216\,qm$, ist von einem Ring, dessen Breite $b = 60\,cm$ ist, umgeben. Wie groß ist der Flächeninhalt des Ringes?

14. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, dessen Fläche *a*) gleich der Summe der Flächen zweier gegebenen Kreise, *b*) gleich der Differenz der Flächen zweier Kreise, *c*) doppelt, dreimal, ..., *n*-mal so groß als eine gegebene Kreisfläche, *d*) halb so groß als eine gegebene Kreisfläche ist.

15. Aus einem Kreise mit dem Halbmesser r ist das eingeschriebene Quadrat ausgeschnitten worden. Welchen Inhalt besitzt die Restfläche?

16. Wie groß ist der Inhalt der Restfläche, wenn der Inkreis aus dem regelmäßigen Sechseck mit der Seite a ausgeschnitten wird?

17. Welches ist der Flächeninhalt eines Sektors, der im Kreise mit dem Halbmesser 15 *m* zum Zentriwinkel $\alpha = 25^0\,6'$ gehört?

18. Welches ist der Flächeninhalt des Sektors, der zu einem Bogen von 4,5 *m* Länge in einem Kreise mit dem Inhalte 50,24 *qm* Inhalt gehört?

19. Wie groß ist der Zentriwinkel desjenigen Sektors, dessen Umfang gleich der Peripherie des Kreises ist?

20. Wie groß ist der Zentriwinkel desjenigen Sektors, dessen Inhalt gleich dem Quadrate des Halbmessers ist?

21. Ein Bogen eines Kreises ist gleich dem Halbmesser. Wie groß ist der zugehörige Zentriwinkel und Sektor?

22. Es soll der Inhalt eines Segmentes, das von einer Seite eines gleichseitigen Dreiecks und einem Bogen des umbeschriebenen Kreises begrenzt wird, aus der Seite a des Dreiecks berechnet werden.

23. Es soll der Inhalt einer von zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks und dem zwischen denselben liegenden kleineren Bogen des einbeschriebenen Kreises begrenzten Figur aus der Seite a des Dreiecks berechnet werden.

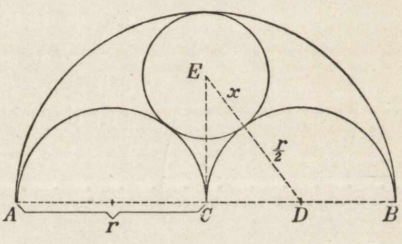
24. Drei gleich große Kreise mit den Halbmessern $r = 5\ m$ berühren einander gegenseitig von außen. Man soll den Umfang und den Flächeninhalt der zwischen ihren Umfängen liegenden krummlinigen dreiseitigen Figur berechnen.

25. Wie groß ist der Umfang und der Flächeninhalt des zwei Kreisen gemeinschaftlichen Flächenstückes, wenn der Mittelpunkt eines jeden derselben auf dem Umfange des anderen liegt?

26. Beschreibt man um jeden Eckpunkt eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seite als Halbmesser Kreise, so entsteht eine sechseckige Sternfigur. Es soll ihr Umfang und Inhalt aus dem Halbmesser berechnet werden.

27. In einem einbeschriebenen gleichseitigen Dreieck sind von den Eckpunkten aus die Durchmesser des Umkreises gezogen. Beschreibt man um die Mitten der Seiten mit dem halben Halbmesser des Umkreises Kreisbogen von einem Durchmesser bis zum andern, so entsteht eine Kreisrosette. Es soll ihr Umfang und Inhalt aus dem Halbmesser r des Umkreises berechnet werden.

Fig. 179.



28. Es soll das nebenstehende Maßwerk (Fig. 179) gezeichnet und die Länge der krummen Begrenzungslinien berechnet werden, wenn $AB = 2r$ gegeben ist.

Analysis. Der Halbmesser des Kreises, der die drei Halbkreise berührt, sei gleich x; aus dem rechtwinkligen Dreieck CED folgt:

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2$$

$$x = \frac{r}{3}.$$

Konstruktion. Die geometrischen Örter für den Mittelpunkt E sind:

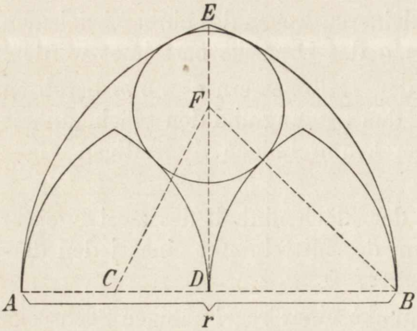
1. Die Senkrechte in C auf AB.

2. Der Kreis um C mit dem Halbmesser $\frac{2}{3}r$.

Anmerkung. Dieses Maßwerk findet sich an vielen Bauten, unter anderen auch an der Synagoge am Börneplatz in Frankfurt a. M.

29. Es soll die Gerippskizze eines Fensters (Fig. 180) gezeichnet und die Länge der krummen Begrenzungslinien berechnet werden, wenn $AB = r$ gegeben ist.

Fig. 180.



Analysis. Der große Bogen ist ein gedrückter Spitzbogen, dessen Mittelpunkte durch Vierteilung von AB gefunden werden. Die beiden anderen Spitzbogen sind gleichseitig. Um den Mittelpunkt F des Kreises mit dem Halbmesser x zu finden, denke man sich die Zentralen CF und BF gezogen; dann folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken CFD und BFD:

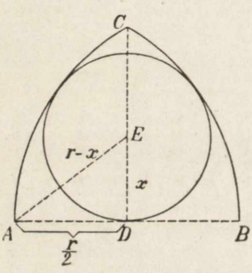
$$CF^2 - CD^2 = BF^2 - BD^2$$

oder:

$$\left(\frac{3}{4} r - x\right)^2 - \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \left(\frac{r}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{r}{5}.$$

Fig. 181.



30. Es soll das Ornament Figur 181 gezeichnet und die Länge der krummen Begrenzungslinien aus $AB =$ berechnet werden.

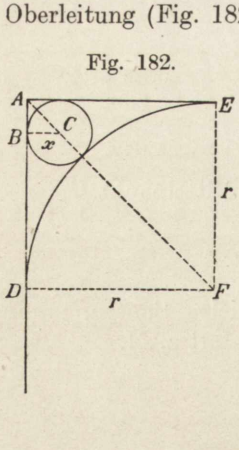
Analysis. Der Halbmesser des in den gleichseitigen Spitzbogen ABC eingezeichneten Kreises mit dem Mittelpunkt E sei x. Dann ist:

$$(r - x)^2 = x^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$x = \frac{3}{8} r.$$

31. Es soll die nachstehende Verzierung des Trägers einer elektrischen Oberleitung (Fig. 182) gezeichnet und die Länge der krummen Linien aus $EF =$ berechnet werden.

Fig. 182.



Analysis. Der Halbmesser des kleineren Kreises sei $BC = x$. Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, so folgt:

$$x = AC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AC = r\sqrt{2} - x - r.$$

Mithin ist: $$\sqrt{2}\, x = r\sqrt{2} - x - r$$

$$x = r\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = r\,(3 - 2\sqrt{2}).$$

Kapitel XXV.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Geometrische Größen wie Strecken, Flächeninhalte, Winkel können unter Benutzung einer gleichartigen Größe als Einheit durch Zahlen dargestellt werden. Man kann daher auf geometrische Größen das Verfahren der Algebra anwenden, durch das aus bekannten Zahlen unbekannte ermittelt werden. Dieses Verfahren besteht darin, daß man aus den bekannten und unbekannten Größen (alle auf diesebe Maßeinheit bezogen) mittels bekannter Beziehungen eine Gleichung aufstellt, diese auflöst und den gefundenen algebraischen Ausdruck geometrisch konstruiert. Die zu zeichnenden Gleichungswurzeln dürfen nur vom ersten und zweiten Grade sein, weil ein Ausdruck dritten Grades keine planimetrische Deutung besitzt.

Die geometrischen Konstruktionen algebraischer Ausdrücke lassen sich auf eine Anzahl von Grundkonstruktionen zurückführen, die zunächst zu behandeln sind.

α) Grundkonstruktionen algebraischer Ausdrücke.

Es sollen a, b, c, d bekannte Strecken, m, n, o unbenannte ganze Zahlen, x, y, z gesuchte Strecken darstellen.

Die Konstruktion der Ausdrücke:

1. $x = a + b$; **2.** $x = a - b$; **3.** $x = a + b - c$;

4. $x = a - b - c + d$; **5.** $x = m a$; **6.** $x = \frac{a}{m}$

ist ohne weiteres klar.

Wird der Wert der Ausdrücke 2 bis 4 negativ, so hat die Aufgabe nur dann einen Sinn, wenn nicht nur die Länge der gesuchten Strecke, sondern auch ihre Richtung zu beachten ist. Es bedeutet dann $-a$ eine Strecke von der Länge a, die von einem bestimmten Anfangspunkte aus in der Richtung abzutragen ist, die der als positiv angenommenen entgegengesetzt ist.

Der Quotient $\frac{a}{b}$ zweier Strecken ist als Verhältnis derselben eine unbenannte Zahl.

Das Produkt $\frac{a}{b} . c$ eines solchen Quotienten mit einer dritten Strecke oder der Ausdruck

$$7.\ x = \frac{a . c}{b}$$

stellt mithin wieder eine Strecke dar. Da aus $x = \frac{a . c}{b}$

$$b : a = c : x$$

folgt, so läßt sich x nach Kapitel XXI als vierte Proportionale zu b, a und c zeichnen.

$$8.\ x = \frac{a^2}{b}.$$

Da $x = a \cdot \frac{a}{b}$, so stellt x eine Strecke dar, die sich wie in 7 als vierte Proportionale zu b und a oder nach Kapitel XXI als dritte Proportionale zu a und b zeichnen läßt.

Wird ein Produkt von Strecken durch ein anderes solches Produkt dividiert, so stellt ein solcher Quotient stets eine Strecke dar, wenn die Anzahl der Faktoren des Nenners um 1 kleiner ist als die der Faktoren des Zählers. Ist z. B.:

$$x = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$$

gegeben, so läßt sich x auch wie folgt schreiben:

$$x = a \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}.$$

Da $\frac{b}{e}, \frac{c}{f}, \frac{d}{g}$ als Streckenquotienten unbenannte Zahlen sind, so ist $a \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$ wiederum eine Strecke.

Um den Ausdruck

$$9.\ x = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$$

zu zeichnen, zeichne man zunächst $p = \frac{a \cdot b}{e}$ als vierte Proportionale, dann ist:

$$x = \frac{p \cdot c \cdot d}{f \cdot g}.$$

Man zeichne nun in gleicher Weise

$$q = \frac{p \cdot c}{f}$$

und dann

$$x = \frac{q \cdot d}{g}.$$

Wie kann man die den Ausdrücken $\frac{a^3}{b\,c}, \frac{a^3}{b^2}, \frac{a\,b^2}{c^2}$ entsprechenden Strecken zeichnen?

Man nennt jeden solchen algebraischen Ausdruck von Strecken, der selbst wieder eine Strecke darstellt, einen **Ausdruck der ersten Dimension.**

Ein Quotient von Streckenprodukten ist demnach von der ersten Dimension, wenn der Zähler einen Faktor mehr enthält als der Nenner.

Die Ausdrücke a^2 und $a \,.\, b$ stellen geometrisch den Flächeninhalt eines Quadrats beziehungsweise eines Rechtecks dar. Ebenso stellt jeder Quotient von Streckenprodukten, bei dem der Zähler zwei Faktoren mehr enthält als der Nenner, geometrisch eine Fläche dar. Ist etwa

$$x = \frac{a \,.\, b \,.\, c \,.\, d}{e \,.\, f},$$

so kann man auch schreiben:

$$x = a \,.\, b \,.\, \frac{c}{e} \,.\, \frac{d}{f},$$

wodurch unsere Behauptung als richtig erwiesen ist.

Man nennt jeden solchen algebraischen Ausdruck von Strecken, der geometrisch eine Fläche darstellt, einen **Ausdruck der zweiten Dimension.**

Da jeder Ausdruck der zweiten Dimension eine Fläche darstellt, so stellt die Quadratwurzel aus einem solchen Ausdruck geometrisch eine Strecke dar, nämlich die Strecke, deren Quadrat der gegebenen Fläche gleich ist.

Ist

$$\textbf{10.}\ \boldsymbol{x = \sqrt{a \,.\, b}},$$

also:

$$x^2 = a \,.\, b$$

oder:

$$a : x = x : b$$

so läßt sich x nach Kapitel XXII als mittlere Proportionale zu den Strecken a und b zeichnen.

Ebenso läßt sich, z. B.:

$$\textbf{11.}\ \boldsymbol{x = \sqrt{\frac{a \,.\, b \,.\, c}{d}}}$$

zeichnen. Man schreibt:

$$x = \sqrt{\frac{ab}{d} \,.\, c}$$

und zeichnet $\frac{ab}{d}$ nach 7) und x als mittlere Proportionale zu den Strecken $\frac{a \,.\, b}{d}$ und c.

Sollen die Größen

$$\textbf{12.}\ \boldsymbol{x = \sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\textbf{13.}\ \boldsymbol{x = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

gezeichnet werden, so ergibt sich mittels des pythagoreischen Lehrsatzes im ersteren Falle x als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den

Katheten a und b und im zweiten Falle als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a und dessen erste Kathete b ist. Schreibt man im zweiten Falle:

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)},$$

so läßt sich x auch als mittlere Proportionale zwischen $(a+b)$ und $(a-b)$ zeichnen.

14. $x = a\sqrt{2}$.

Da $x = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{a \cdot 2a}$, so kann x entweder als Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks oder als Diagonale eines Quadrats mit der Seite a oder auch als mittlere Proportionale zu a und $2a$ gezeichnet werden.

Wie kann man entsprechend $x = a\sqrt{3}$ und $x = a\sqrt{5}$ geometrisch darstellen? Setzt man $a = 1$, so kann man $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ geometrisch darstellen.

15. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Es läßt sich zunächst $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b und

$$x = \sqrt{p^2 + c^2}$$

ebenfalls als Hypotenuse eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten p und c zeichnen.

Wie kann man $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ und $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$ zeichnen?

16. $x = \sqrt{ab \pm cd}$.

Man zeichnet $p = \sqrt{ab}$ und $q = \sqrt{cd}$ als mittlere geometrische Proportionalen und erhält dann:

$$x = \sqrt{p^2 \pm q^2}$$

durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes.

Aufgabe.

Man zeichne:

$$x = \frac{ab}{\sqrt{cd}}, \qquad x = \sqrt{2a^2 - ab}, \qquad x = \sqrt{a^2 + \frac{bcd}{e} - \frac{f^2 \cdot g}{h}}.$$

Anmerkung. Aus dem Vorangegangenen ist ohne weiteres klar, daß man durch Addition und Subtraktion sowie auch durch Gleichsetzen nur Ausdrücke gleicher Dimension miteinander verbinden kann, denn man kann keine Strecke zu einer Fläche addieren, noch kann eine Strecke einer Fläche gleich sein. Gleichungen, die bei der in dem folgenden Abschnitt zu behandelnden algebraischen Lösung geometrischer Aufgaben auftreten, müssen daher in allen ihren Gliedern von gleicher Dimension oder homogen sein.

Übungsaufgaben.

Es sollen folgende Ausdrücke gezeichnet werden:

1. $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; **2.** $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; **3.** $x = a(1 + \sqrt{2})$;

4. $x = a(\sqrt{3} - 1)$; **5.** $x = a(1 + \sqrt{5})$; **6.** $x = a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

7. $x = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$; **8.** $x = a\sqrt{5} - b\sqrt{3}$; **9.** $x = a\sqrt{\frac{2}{3}} - b\sqrt{\frac{1}{2}}$;

10. $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$; **11.** $x = \sqrt{2a^2 - bc}$; **12.** $x = \sqrt{a^2 - \frac{bc}{2}}$;

13. $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$; **14.** $x = \sqrt{a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}}$.

Anleitung zu 14.

$$x = \sqrt{a^2 + \sqrt{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)}} = \sqrt{a^2 + a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}} =$$
$$= \sqrt{a^2 + a\sqrt{a^2 + u^2}} = \sqrt{a^2 + az}.$$

b) Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis.

Aufgabe 1. Es soll eine gegebene Strecke a innen nach stetiger Proportion geteilt werden.

Lösung. Es sei x der größere Abschnitt der zu teilenden Strecke $AB = a$; dann ist der kleinere Abschnitt $a - x$, und man erhält die Bestimmungsgleichung:

$$a : x = x : (a - x),$$

oder:

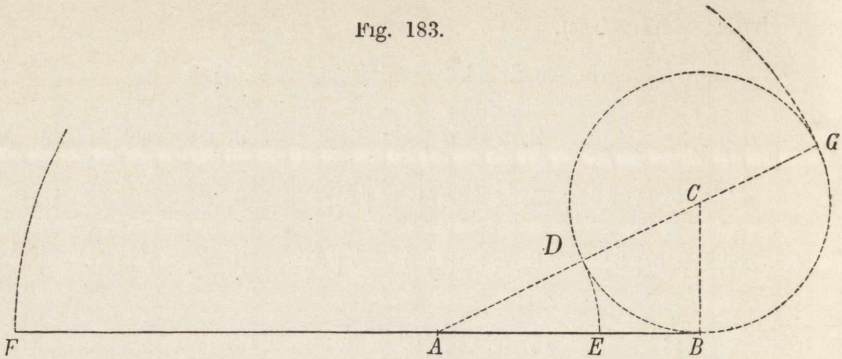
$$x^2 + ax = a^2.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Determination. Da $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ größer ist als $\frac{a}{2}$, so wird x positiv, wenn wir nur das Pluszeichen vor der Wurzel berücksichtigen. Durch Benutzung des unteren Vorzeichens erhält man für x einen negativen Wert, der zu einem Teilungspunkte führt, der auf die Verlängerung von BA fällt; dieser Punkt aber erfüllt nicht die Bedingung, daß die begrenzte Strecke a in der verlangten Weise geteilt wird.

Fig. 183.



Konstruktion. (Fig. 183.) Man errichte auf AB in B das Lot $BC = \frac{a}{2}$, so ist $AC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$; trägt man dann von C aus auf CA die Strecke $CD = \frac{a}{2}$ ab, so ist $AD = x$. Macht man nun noch $AE = AD$, so ist E der gesuchte Teilpunkt. Es ist sofort ersichtlich, daß die sich ergebende Konstruktion mit der in Kapitel XXII, IV. gegebenen identisch ist.

Anmerkung. Der in der Determination ausgeschiedene Wert $x = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}\right)$ ist nicht ohne geometrische Bedeutung. Verlängert man AC bis zum Schnittpunkte G des um C mit $\frac{a}{2}$ geschlagenen Kreises, so ist AG gleich dem absoluten Werte von x. Trägt man auf der Verlängerung von BA die Strecke $AF = AG$ ab, so ist:

$$(a + x) : x = x : a.$$

Der zweite Wert von x liefert also die Lösung der unserer gegebenen Aufgabe verwandten Aufgabe: Es soll eine gegebene Strecke a so verlängert werden, daß die Verlängerung die mittlere Proportionale ist zwischen der gegebenen und der ganzen verlängerten Strecke.

Die beiden Werte von x ergeben mithin die Lösung der allgemeineren Aufgabe: Es soll auf der durch die Punkte A und B bestimmten Geraden ein Punkt so bestimmt werden, daß sein Abstand von A die mittlere Proportionale zwischen seinem Abstande von B und der Entfernung der gegebenen Punkte A und B ist. In dieser Aufgabe sind mithin die beiden vorher behandelten Aufgaben als Spezialfälle enthalten.

In ähnlicher Weise liefert häufig die algebraische Lösung geometrischer Aufgaben, wenn sie für die zu suchende Strecke einen positiven und negativen Wert ergibt, die Lösung einer allgemeineren Aufgabe, in der die gestellte Aufgabe als Sonderfall enthalten ist.

Aufgabe 2. Es soll in einen Kreis mit dem Halbmesser r ein Rechteck mit gegebenem Umfange $2\,s$ gezeichnet werden.

Lösung. Bezeichnet man die Seiten des Rechtecks mit x und y, so muß:

$$1.\ x + y = s$$

sein. Da die Diagonalen des Rechtecks gleich dem Kreisdurchmesser sind, so ergibt sich nach dem pythagoreischen Lehrsatze:

$$2.\ x^2 + y^2 = 4\,r^2.$$

Aus (1) folgt:

$$y = s - x.$$

Setzt man den Wert von y in (2) ein, so erhält man:

$$x^2 + (s - x)^2 = 4\,r^2$$

$$x^2 - s\,x = 2\,r^2 - \frac{s^2}{2}$$

$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{2\,r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$y = \frac{s}{2} \mp \sqrt{2\,r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Da die Werte von x und y sich vertauschen lassen, so hat die Aufgabe nur eine Lösung. Ist x die größere und y die kleinere Seite, so ist:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{2\,r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$y = \frac{s}{2} - \sqrt{2\,r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Determination. Damit die Aufgabe eine Lösung besitzt, müssen:

1. x und y reell,
2. x und y größer als Null und kleiner als $2\,r$ sein.

1. x und y sind reell, wenn:

$$2\,r^2 - \frac{s^2}{4} \geqq 0$$

$$\frac{s^2}{4} \leqq 2\,r^2$$

$$\frac{s}{2} \leqq r\sqrt{2}$$

$$\text{I. } s \leqq 2\,r\sqrt{2}.$$

Für $s = 2r\sqrt{2}$ wird $x = y = \frac{s}{2}$, d. h. das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat. Mithin hat von allen Rechtecken, die man in einen gegebenen Kreis einzeichnen kann, das Quadrat den größten Umfang.

2. x ist immer größer als Null; damit y größer als Null ist, muß:

$$\frac{s}{2} > \sqrt{2r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$\frac{s^2}{4} > 2r^2 - \frac{s^2}{4}$$

$$\frac{s^2}{2} > 2r^2$$

$$\text{II. } s > 2r \text{ sein.}$$

Ist $x < 2r$, so ist selbstverständlich auch $y < 2r$. Damit aber $x < 2r$ bleibt, muß:

$$2r > \frac{s}{2} + \sqrt{2r^2 - \frac{s^2}{4}} \text{ sein.}$$

Hieraus folgt:

$$2r - \frac{s}{2} > \sqrt{2r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$4r^2 - 2rs + \frac{s^2}{4} > 2r^2 - \frac{s^2}{4}$$

$$2r^2 - 2rs + \frac{s^2}{2} > 0$$

$$r^2 - rs + \frac{s^2}{4} > 0$$

$$\left(r - \frac{s}{2}\right)^2 > 0.$$

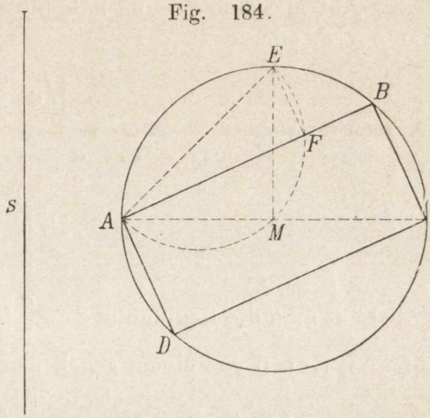
Diese Bedingung ist für alle Werte von s und r erfüllt, wenn nicht $r = \frac{s}{2}$ ist. Damit also die vorliegende Aufgabe eine Lösung besitzt, muß:

$$1)\ s \leqq 2r\sqrt{2}, \qquad 2)\ s > 2r$$

sein.

Konstruktion. (Fig 184.) Man errichte auf dem beliebigen Durchmesser AC im Kreismittelpunkte die Senkrechte $ME = r$, verbinde A mit E, so ist $AE^2 = 2r^2$. Über AE als Durchmesser zeichne man den Halbkreis und trage in denselben $AF = \frac{s}{2}$ als Sehne ein, verbinde F mit E, so ist $EF = \sqrt{2\,r^2 - \frac{s^2}{4}}$. Verlängert man AF bis zum Durchschnittspunkt B mit dem Kreise und verbindet B mit E, so ist $\sphericalangle\, EBF = 45^0$ als Peripheriewinkel über dem Quadranten AE. Da $\sphericalangle\, EFB = 1\,R$, so ist auch $\sphericalangle\, FEB = 45^0$ und mithin $BF = EF$. Also ist $AB = \frac{s}{2} + \sqrt{2\,r^2 - \frac{s^2}{4}} = x$ Verbindet man dann B mit C, zieht CD parallel zu AB und verbindet D mit A, so ist $ABCD$ das gesuchte Rechteck.

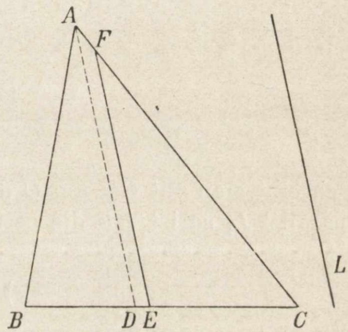
Fig. 184.



Aufgabe 3. Es soll ein gegebenes Dreieck durch eine Gerade von gegebener Richtung halbiert werden.

Lösung. (Fig. 185 a.) Es sei ABC das gegebene Dreieck, seine Seite BC sei gleich a, die gegebene Richtung sei die der Geraden L. Ist EF die verlangte Teilungslinie, so ziehe man AD parallel EF und bezeichne CD mit d. Ist $CE = x$, so folgt:

Fig. 185 a.



$$\triangle\, CEF : \triangle\, ADC = x^2 : d^2 \quad \text{(Satz 91)}$$
$$\triangle\, ADC : \triangle\, ABC = d : a$$
$$\triangle\, CEF : \triangle\, ABC = x^2 : a\,d.$$

Da aber: $\triangle\, CEF = \frac{1}{2}\, \triangle\, ABC$

sein soll, so folgt:

$$1 : 2 = x^2 : a\,d$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\, a\, l$$

$$x = \pm \sqrt{a \cdot \frac{d}{2}}.$$

Determination. Der negative Wert von x liefert keine Lösung der Aufgabe, da E dann außerhalb des gegebenen Dreiecks fällt. Damit unsere Aufgabe eine Lösung hat, muß aber auch F auf CA fallen, es muß also $x < d$, oder

$$\sqrt{a \cdot \frac{d}{2}} < d$$

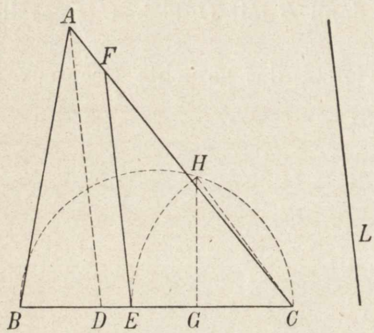
$$\frac{a}{2} < d, \quad \text{oder}$$

$$d > \frac{a}{2} \quad \text{sein.}$$

Läßt man die Bedingung $d > \frac{a}{2}$ fallen, so lösen beide Werte von x die

Aufgabe: Es soll von einem gegebenen Winkel C durch eine Gerade, die der gegebenen Geraden L parallel ist, ein Dreieck abgeschnitten werden, dessen Inhalt gleich der Hälfte des Inhaltes eines gegebenen Dreiecks ABC ist. Der negative Wert von x liefert dann eine Linie für den Scheitelwinkel von C.

Fig. 185 *b*.



Konstruktion. (Fig. 185 *b*.) Man ziehe AD parallel L, errichte über BC den Halbkreis und im Mittelpunkte G von DC das Lot auf BC, das den Halbkreis in H schneidet. Verbindet man H mit C, so ist $CH = \sqrt{a \cdot \frac{d}{2}} = x$. Beschreibt man mit CH um C den Kreis, der BC in E trifft und zieht EF parallel L, so ist EF die gesuchte Halbierungslinie.

c) Übungsaufgaben.

1. Es soll eine gegebene Strecke a so geteilt werden, daß das Quadrat über dem größeren Abschnitt gleich dem doppelten Rechteck aus der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt wird.

2. Es soll eine gegebene Strecke a so geteilt werden, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich der Differenz der Quadrate dieser Abschnitte wird.

3. Es soll eine gegebene Strecke a so geteilt werden, daß die Quadrate der Teile sich wie 2 : 1 verhalten.

4. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden aus der Summe s der Diagonale und der Seite.

5. Es soll ein gleichseitiges Dreieck aus dem Unterschiede d der Seite und Höhe gezeichnet werden.

6. Es soll ein gleichseitiges Dreieck mit gegebenem Inhalt f^2 gezeichnet werden.

7. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden aus der Hypotenuse c und dem Verhältnisse der Katheten $a : b = 1 : 2$.

8. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden aus der einen Kathete a und der Projektion q der andern Kathete b auf die Hypotenuse.

9. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden aus der Hypotenuse c und der Differenz der Katheten $x - y = d$.

10. Es soll ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck aus dem Umfange u gezeichnet werden.

11. Es soll ein gegebenes Quadrat a^2 in ein Rechteck verwandelt werden, von dem der Unterschied der Seiten gleich d ist.

12. Es soll ein gegebenes gleichseitiges Dreieck mit der Seite a in ein Quadrat verwandelt werden.

13. Es soll ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges Dreieck verwandelt werden.

14. Es soll ein gegebenes Trapez durch eine Parallele zu den beiden parallelen Seiten halbiert werden.

15. Es soll in ein gegebenes Quadrat ein anderes mit der gegebenen Seite c einbeschrieben werden.

16. Es soll in einen gegebenen Halbkreis ein Quadrat einbeschrieben werden.

17. In einem gegebenen Kreise ist eine Sehne von der Länge a gezogen. Man soll durch ihren Mittelpunkt eine Sehne so ziehen, daß deren Teile sich wie $1 : 2$ verhalten.

18. An einen gegebenen Kreis ist eine Tangente von der Länge t gezeichnet; man soll von ihrem Endpunkte aus eine Sekante so ziehen, daß sie durch den Kreis halbiert wird.

II. Trigonometrie.

Kapitel I.

Einleitung.

a) In der Planimetrie wurde gezeigt, daß zur Bestimmung eines Dreiecks drei seiner Stücke, unter denen sich eine Seite befinden muß, ausreichend sind, daß also ein Dreieck eindeutig bestimmt ist:

1. durch drei Seiten,
2. durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel,
3. durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der größeren dieser Seiten,
4. durch eine Seite und zwei Winkel.

Es wurde in der Planimetrie ferner gezeigt, wie man durch Zeichnung aus drei der Größe nach gegebenen Stücken eines Dreiecks die übrigen der Größe nach finden kann. Es soll dieses Verfahren hier nochmals an einem Beispiel erläutert werden.

Aufgabe. Es soll die Entfernung x eines Punktes A von dem wegen eines Hindernisses unzugänglichen Punkte B durch Messung bestimmt werden.

Lösung. (Fig. 1.) Man messe von A aus eine Standlinie $AC = b$ und die an ihr liegenden Winkel $BAC = \alpha$ und $BCA = \gamma$, dann ist die gesuchte Entfernung x die eine Seite des völlig bestimmten Dreiecks ABC.

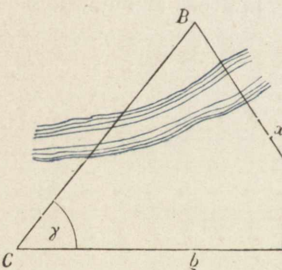
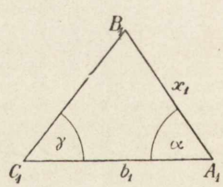


Fig. 1.



Nun zeichnet man das Dreieck in hinreichend verkleinertem Maßstabe $A_1B_1C_1$, indem man z. B. die Seite b 1000 mal verkleinert. Dann mißt man auf dem Zeichenbrette die Seite x_1. Man kennt dann die Standlinie b, die verkleinerte Standlinie b_1 sowie die Seite x_1 des verkleinerten Dreiecks. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ergibt sich die Proportion:

$$x : x_1 = b : b_1$$

$$x = \frac{b\,x_1}{b_1}.$$

Zahlenbeispiel. Man habe B_1 durch Messung gefunden:

$$b = 62{,}2\ m$$
$$\sphericalangle\ \alpha = 75{,}7^0$$
$$\sphericalangle\ \gamma = 69^0.$$

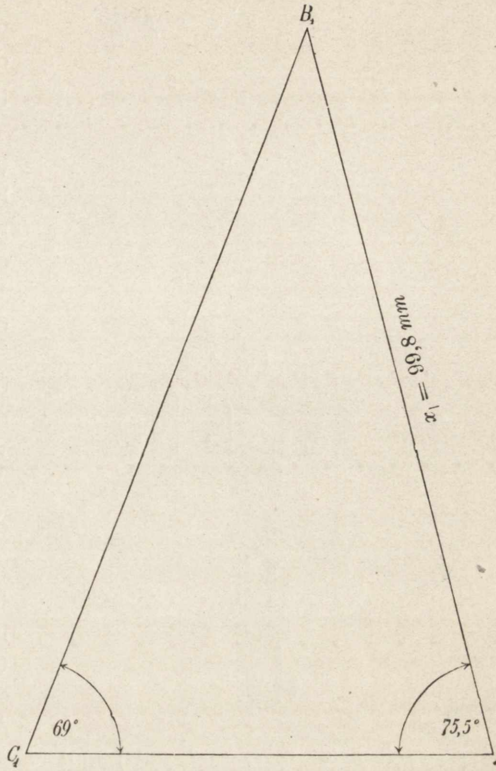
Durch Zeichnung des Dreiecks $A_1B_1C_1$ in wahrer Größe (Fig. 2) erhält man:

$$x_1 = 99{,}8\ mm.$$

Folglich ergibt sich:

$$x = \frac{99{,}8\ mm}{62{,}2\ mm} \cdot 62{,}2\ m =$$
$$= \frac{99{,}8}{62{,}2} \cdot 62{,}2\ m = 99{,}8\ m.$$

Fig. 2.



---

b) **1**. Zum Festlegen einer Standlinie (Basis) benutzt man sogenannte Flucht- oder Absteckstäbe, die zum bequemeren Einstecken mit eisernen Spitzen versehen sind; außerdem sind sie zum leichteren Erkennen von 25 zu 25 *cm* mit zwei oder drei Farben wechselnd angestrichen.

Zu Längenmessungen verwendet man Meßlatten und Meßbänder.

2. Bei den praktischen Anwendungen handelt es sich neben den Längenmessungen hauptsächlich um Winkelmessungen, und zwar meist um die Messung von Winkeln, die von Visierlinien gebildet werden.

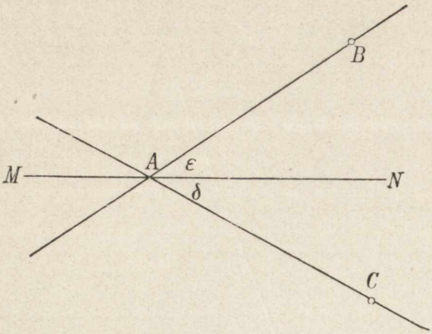
Unter der Visierlinie eines Punktes versteht man die Linie, die durch den Punkt und das Auge des Beobachters geht.

Bei dem Feldmessen handelt es sich hauptsächlich um das Messen von Winkeln in horizontaler Ebene.

Bei Höhenmessungen muß der Winkel bestimmt werden, den die Visierlinie nach einem Punkte des zu messenden Gegenstandes mit einer durch das Auge gezogenen wagerechten Geraden bildet.

Liegt der Winkel ε über der wagerechten Geraden MN (Fig. 3), so nennt man ihn Erhebungswinkel (Elevationswinkel), liegt er unterhalb der wagerechten Geraden ($\sphericalangle\ NAC = \delta$), so heißt er Senkungswinkel (Depressionswinkel).

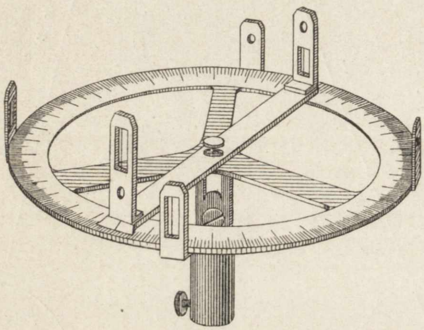
Fig. 3.



Der Sehwinkel (Gesichtswinkel), unter dem eine Strecke AB gesehen wird, ist der Winkel, den die Visierlinien nach den Endpunkten A und B miteinander bilden.

3. Zum Messen der Winkel, welche die Visierlinien miteinander bilden, dienen verschiedene Instrumente, deren Gebrauch sich auf optische Gesetze stützt, so z. B. der Winkelspiegel, das Winkelprisma, der Spiegelsextant, der sogenannte Feldwinkelmesser (von Ohmann) und der Theodolit. Von diesen sollen die beiden letzteren hier beschrieben werden.

Fig. 4.



Die Fig. 4 gibt eine Abbildung des **Ohmannschen Feldwinkelmessers.**

Den Hauptteil des Apparates bildet ein Kreis mit versilberter Teilung (Teilkreis). Er ist in 360 ganze Grade geteilt und durch drei Speichen mit der Mittelachse verbunden. An den vier Hauptteilpunkten des Teilkreises (0°, 90°, 180°, 270°) sind feststehende Visiervorrichtungen angebracht; sie bilden das „Winkelkreuz" des Apparates und dienen zum Abstecken von rechten Winkeln. Die beiden Visiere bei 0° und 90° haben je zwei Sehöffnungen, die beiden anderen dagegen je ein rechteckiges Fenster mit einem Pferdehaar. Durch die vier Visiere sind zwei sich rechtwinklig kreuzende Visierebenen festgelegt. Der Apparat wird mit seiner Achse in der Hülse eines Stativs, dessen Stützen verlängert und verkürzt werden können, befestigt. Mittels einer Wasserwage kann der Apparat zur Messung von Horizontalwinkeln wagerecht gestellt werden. Um den Standpunkt (die Projektion des Mittelpunktes des Apparates) zu erhalten, bringt man an einem in der Mitte angebrachten Haken ein Senkblei an.

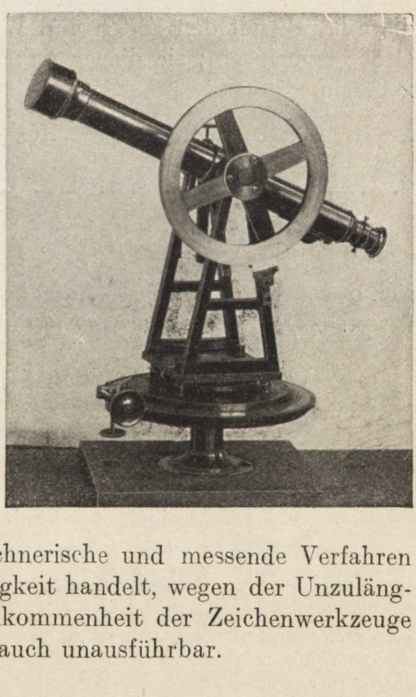
Um mit dem Apparat beliebige Winkel messen zu können, kann man im Mittelpunkte des Teilkreises einen drehbaren Zeiger aufsetzen, der an einem Ende einen Nonius hat. Dieser Zeiger trägt zwei Visiere, die nach demselben Prinzipe gebaut sind, wie die vier festen; sie sind jedoch doppelt, so daß man nach zwei entgegengesetzten Richtungen visieren kann. Der Nonius ist ein Stück eines geteilten Kreises, der von seinem Nullpunkte aus nach beiden Seiten die Länge von 11 Teilen des Hauptkreises hat; er ist in zweimal zwölf gleiche Teile geteilt, so daß ein Noniusteil um $\frac{1}{12}$ kleiner ist als ein Abschnitt des Hauptkreises. Da letzterer in Grade geteilt ist, so gibt ein Noniusabschnitt $\frac{1}{12}^0 = 5'$ an.

Um mit dem Apparate jetzt den Winkel zu messen, den die Visierlinien von einem Endpunkte A oder B einer Standlinie AB nach einem beliebigen Gegenstande mit der Standlinie AB bilden, stellt man den Apparat in A oder B auf, bringt die Visierebene des Zeigers in die Richtung der Standlinie, dreht dann den Zeiger nach rechts oder links, je nach der Lage des Gegenstandes, den man anvisieren will und liest am Nonius die Winkelgröße ab.

Mittels eines an der Hülse des Apparates angebrachten Scharniers kann man den Apparat umklappen und den Teilkreis senkrecht stellen, so daß der Apparat dadurch zum Messen von Höhenwinkeln benutzbar ist. Zum genauen Senkrechtstellen des Teilkreises als Höhenkreis ist am Ende der einen Speiche ein Pendel befestigt, das bei senkrechter Stellung des Kreises gerade auf die gegenüberliegende Dreiecksspitze der unteren Speiche weist.

Der **Theodolit** (Fig. 5), der ebenfalls zum Messen von Winkeln in horizontaler und vertikaler Ebene dient, hat als Hauptbestandteil ein astronomisches Fernrohr, das sowohl um eine horizontale als auch um eine vertikale Achse drehbar ist. In dem Okular des Fernrohres ist ein aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Fäden (Spinnwebefäden) bestehendes Fadenkreuz angebracht. Der Schnittpunkt dieses Fadenkreuzes liegt auf der optischen Achse des Fernrohres und dient dazu auf den zu visierenden Punkt scharf einzustellen. Die Horizontalstellung der Fernrohrachse ermöglicht eine Libelle (Wasserwage). Die Größe der Drehung der Fernrohrachse von der horizontalen Anfangslage aus in horizontaler oder vertikaler Ebene wird an einem Horizontal- beziehungsweise Vertikalkreise mittels des Nonius abgelesen.

Fig. 5.



c) Das unter a) beschriebene zeichnerische und messende Verfahren ist, wenn es sich um möglichste Genauigkeit handelt, wegen der Unzulänglichkeit unserer Sinne und der Unvollkommenheit der Zeichenwerkzeuge nicht ausreichend und in vielen Fällen auch unausführbar.

Da es sich nun in allen Teilen der angewandten Mathematik, in der Geodäsie, der Schiffahrtskunde, der Astronomie, der Mechanik darum handelt, aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke mit möglichster Genauigkeit zu finden, so reicht das zeichnerisch-messende Verfahren in allen diesen Fällen nicht aus. Wir müssen daher ein anderes, von unseren Sinnen und Werkzeugen unabhängiges Verfahren aufsuchen, um diese Aufgaben mit der geforderten Genauigkeit lösen zu können.

Dieses Verfahren bildet den Gegenstand der **Trigonometrie, die lehrt, wie man aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke berechnen kann.**

Alle durch Rechnung erhaltenen Ergebnisse sind von der Unzulänglichkeit unserer Sinne ganz unabhängig und daher ebenso genau und zuverlässig wie die Gesetze des Rechnens selbst.

Die Anfänge der Trigonometrie reichen zurück bis zu den Zeiten des griechischen Mathematikers Hipparch von Nicäa (161—126 v. Chr. in Rhodus und Alexandria); aber erst 1600 Jahre später fand die Aufgabe der Dreiecksberechnung eine nach allen Seiten hin befriedigende Lösung.

Die Hauptschwierigkeit bestand darin, daß Seiten aus Winkeln und umgekehrt berechnet werden müssen, denn zu diesem Zwecke müssen beide Arten von Größen durch Gleichungen verbunden werden. Gleichungen lassen sich nur zwischen gleichartigen Größen aufstellen, also nicht unmittelbar zwischen Winkeln und Seiten. Die Schwierigkeiten wurden überwunden durch die Einführung der trigonometrischen Funktionen; diese haben mit den Seiten und Winkeln die Eigenschaften der absoluten Größe gemeinsam; sie dienen daher als Bindemittel zwischen Seiten und Winkeln.

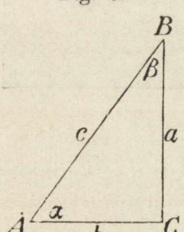
Kapitel II.

Die trigonometrischen Funktionen.

Jedes Dreieck läßt sich durch das Lot von einem Eckpunkte auf die gegenüberliegende Seite in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Es läßt sich daher die allgemeinere Aufgabe der Dreiecksberechnung auf die Lösung derselben Aufgabe für das rechtwinklige Dreieck zurückführen.

a) Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck.

Fig. 6.



Fällt man von dem beliebigen Punkte B des Schenkels eines gegebenen spitzen Winkels α (Fig. 6) das Lot BC auf den andern Schenkel, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $AB = c$ und den Katheten $BC = a$ und $AC = b$. Werden diese Seiten in einer beliebigen Längeneinheit gemessen und durch Zahlen ausgedrückt, so sind die Verhältnisse je zweier dieser Seiten durch die Größe dieses Winkels α vollkommen eindeutig bestimmt. Alle rechtwinkligen Dreiecke, die denselben spitzen Winkel α enthalten, sind dem Dreieck ABC ähnlich und stimmen zufolge der Ähnlichkeit mit ihm in allen Seitenverhältnissen überein.

Zur Bestimmung des Winkels α hat man sechs Seitenverhältnisse:

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},$$

und ihre Umkehrungen:

$$\frac{c}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{b}{a}.$$

Man benutzt von diesen Seitenverhältnissen nur die folgenden vier: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ und bezeichnet:

$\frac{a}{c}$ als Sinus des Winkels α[1]),

$\frac{b}{c}$ als Kosinus des Winkels α,

$\frac{a}{b}$ als Tangente des Winkels α,

$\frac{b}{a}$ als Kotangente des Winkels α,

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha,$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha,$$

$$\frac{a}{b} = tg\ \alpha,$$

$$\frac{b}{a} = cotg\ \alpha.$$

---

[1]) Die Einführung der Sinusfunktion verdanken wir den Indern. Sie erkannten zuerst den Vorteil, der in der Verwendung der halben Sehnen und des halben der Sehne gegenüberliegenden Zentriwinkels lag. Bei dem ältesten indischen Astronomen, dessen Schriften uns bekannt sind, Aryabhatta (geboren 476 n. Chr.) findet man die Sinusgeometrie bereits fertig entwickelt. Die Inder nannten die halbe Sehne des doppelten Winkels ardhajyâ (Halbsehne). Die vielfache Verwendung dieses Fachausdruckes ließ das kurze jyâ oder jîva (Sehne) üblich werden. In dieser Form lernten es die Araber kennen und nahmen es als technisches Fremdwort dschiba, abgekürzt dschb in ihren Sprachschatz auf. Die abgekürzte Bezeichnung wurde wahrscheinlich mit dem echt arabischen Wort dschaib (Busen, Bausch, Tasche) verwechselt, und es fand dieses Wort dann als Fachwort Anerkennung. Das lateinische Wort sinus ist demnach eine wörtliche Übersetzung dieser arabischen Bezeichnung.

In Worten lauten diese Definitionen:

Im rechtwinkligen Dreieck ist

der Sinus eines spitzen Winkels das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse,

der Kosinus eines Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse,

die Tangente (Tangens) eines Winkels das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden,

die Kotangente (Kotangens) eines Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden.

Diese vier von der Größe des Winkels abhängigen Streckenverhältnisse werden die **trigonometrischen Funktionen** des Winkels genannt. Sie sind als Streckenquotienten reine Zahlen.

Für den Winkel β des rechtwinkligen Dreiecks ABC ergibt sich:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha$$

$$tg\,\beta = \frac{b}{a} = cotg\,\alpha$$

$$cotg\,\beta = \frac{a}{b} = tg\,\alpha.$$

Da $\beta = 90^0 - \alpha$, so lassen sich diese Beziehungen auch wie folgt schreiben:

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$$
$$tg\,\alpha = cotg\,(90^0 - \alpha)$$
$$cotg\,\alpha = tg\,(90^0 - \alpha).$$

Sinus und Kosinus einerseits, Tangente und Kotangente anderseits sind zueinander Kofunktionen. Wir haben daher den Satz:

Jede Funktion eines Winkels ist die zugehörige Kofunktion seines Komplementwinkels.

Anmerkung. Aus dieser Beziehung erklärt sich die Entstenung der Wörter Kosinus und Kotangente aus sinus complementi α und tangens complementi α.

Folgerung. Zur Berechnung von Tabellen der Werte der trigonometrischen Funktionen der Winkel ist nur die Berechnung der Werte für die Winkel von 0^0 bis 45^0 erforderlich.

Übungsaufgaben.

1. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben:

$a)$ $\alpha = 30^0$, $b)$ $\alpha = 45^0$.

Es soll das Dreieck der Gestalt nach gezeichnet, seine Seiten mit dem Millimetermaßstabe gemessen und die Seitenverhältnisse bestimmt werden.

2. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben:

$$a)\ \frac{a}{c} = \frac{2}{3}, \quad b)\ \frac{b}{c} = \frac{5}{9}, \quad c)\ \frac{a}{b} = \frac{5}{4}.$$

Es sollen die Dreiecke der Gestalt nach gezeichnet und die Größe ihrer Winkel mit dem Transporteur ermittelt werden.

3. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist $c = 25\,mm$, die Kathete $a = 15\,mm$. Man soll das Dreieck zeichnen und die trigonometrischen Funktionen seiner spitzen Winkel berechnen.

4. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind $a = 37\,mm$, $b = 20\,mm$. Man soll das Dreieck zeichnen und die trigonometrischen Funktionen seiner spitzen Winkel berechnen.

b) Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

1. Aus den unter *a)* gegebenen Definitionen der Funktionen Tangens und Kotangens

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad cotg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

ist ersichtlich, daß die Werte der beiden Funktionen für denselben Winkel zueinander reziprok sind; also ist:

$$\boldsymbol{tg\,\alpha \,.\, cotg\,\alpha = 1}; \quad tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha}; \quad cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}.$$

2. Es ist ferner:

$$\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = tg\,\alpha.$$

$$\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = cotg\,\alpha.$$

$$\boldsymbol{tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}; \quad cotg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}}.$$

3. Da

$$sin\,\alpha = \frac{a}{c}, \quad cos\,\alpha = \frac{b}{c},$$

so ist:

$$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\boldsymbol{sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1.}$$

Aus letzterer Gleichung folgt:

$$\boldsymbol{sin\ a = \sqrt{1 - cos^2 a}\,; \quad cos\ a = \sqrt{1 - sin^2 a}.}$$

Mittels der abgeleiteten Beziehungen ist es möglich aus einer gegebenen Funktion eines Winkels die übrigen Funktionen zu berechnen.

Aufgabe. **1.** Durch Zeichnung eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel a und Ausmessung seiner Seite wurde $sin\ 20^0 = 0{,}34$ gefunden; es sollen die übrigen Funktionen durch Rechnung gefunden werden.

Lösung. Aus der Gleichung:

$$sin^2 20^0 + cos^2 20^0 = 1$$

erhält man:

$$cos^2 20^0 = 1 - sin^2 20^0$$

$$cos\ 20^0 = \sqrt{1 - sin^2 20^0}$$

$$(1) \qquad \boldsymbol{cos\ 20^0} = \sqrt{1 - 0{,}1156} = \sqrt{0{,}8844} = \boldsymbol{0{,}94}.$$

Aus

$$tg\ 20^0 = \frac{sin\ 200}{cos\ 20^0}$$

erhält man

$$(2) \qquad \boldsymbol{tg\ 20^0} = \frac{0{,}34}{0{,}94} = \boldsymbol{0{,}36}.$$

Aus

$$cotg\ 20^0 = \frac{cos\ 20^0}{sin\ 20^0}$$

folgt

$$(3) \qquad \boldsymbol{cotg\ 20^0} = \frac{0{,}94}{0{,}34} = \boldsymbol{2{,}75}.$$

Aufgabe. Es sollen die übrigen Funktionen berechnet werden, wenn eine der vier Funktionen $sin\ a$, $cos\ a$, $tg\ a$, $cotg\ a$ gegeben ist.

Die sich ergebenden Resultate sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt:

Gegeben:	Gesucht:			
	$sin\ a$	$cos\ a$	$tg\ a$	$cotg\ a$
$sin\ a$	—	$\sqrt{1 - sin^2 a}$	$\frac{sin\ a}{\sqrt{1 - sin^2 a}}$	$\frac{\sqrt{1 - sin^2 a}}{sin\ a}$
$cos\ a$	$\sqrt{1 - cos^2 a}$	—	$\frac{\sqrt{1 - cos^2 a}}{cos\ a}$	$\frac{cos\ a}{\sqrt{1 - cos^2 a}}$
$tg\ a$	$\frac{tg\ a}{\sqrt{1 + tg^2 a}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}}$	—	$\frac{1}{tg\ a}$
$cotg\ a$	$\frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2 a}}$	$\frac{cotg\ a}{\sqrt{1 + cotg^2 a}}$	$\frac{1}{cotg\ a}$	—

Anmerkung. Bei der Lösung der vorangehenden Aufgabe kann man auch die folgenden Beziehungen benutzen. Aus dem pythagoreischen Lehrsatze für das rechtwinklige Dreieck, wonach

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ist, folgt, wenn man der Reihe nach durch c^2, b^2 und a^2 dividiert:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2}$$

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

und mit Benutzung der Funktionszeichen:

$$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\,\alpha = \frac{1}{cos^2\,\alpha}$$

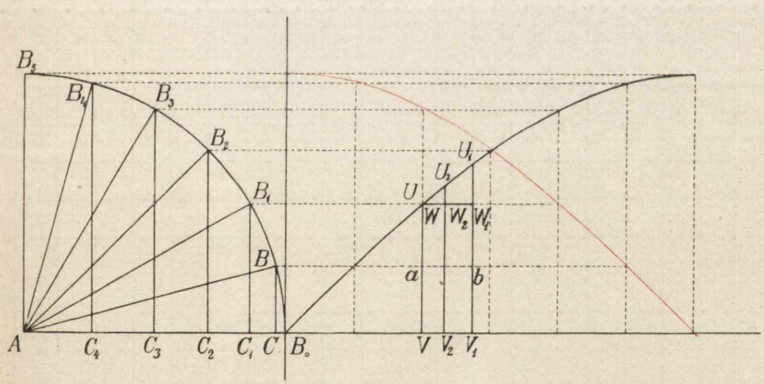
$$1 + cotg^2\,\alpha = \frac{1}{sin^2\,\alpha}$$

c) Verlauf der trigonometrischen Funktionen bei veränderlichem Winkel.

1. Verlauf der Sinusfunktion.

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Hypotenuse AB gleich der Längeneinheit, so bestimmt die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete durch ihre Länge, gemessen durch die Längeneinheit, die Größe des Sinus

Fig. 7.



des Winkels α. Zeichnen wir uns (Fig. 7) eine Anzahl von rechtwinkligen Dreiecken mit der Hypotenuse als Längeneinheit, in denen der Winkel α von 0^0 bis 90^0 wächst, so wächst die diesem Winkel gegenüberliegende

Kathete von 0 bis zu 1. Ist der Winkel BAB_0 gleich Null, d. h. fällt AB auf AB_0, so ist die Kathete BC gleich Null, und es ist

$$sin\, 0^0 = 0$$

Fällt mit wachsendem Winkel AB mit AB_5 zusammen, so wird $BC = AB_5 = 1$, und es ergibt sich

$$sin\, 90^0 = 1.$$

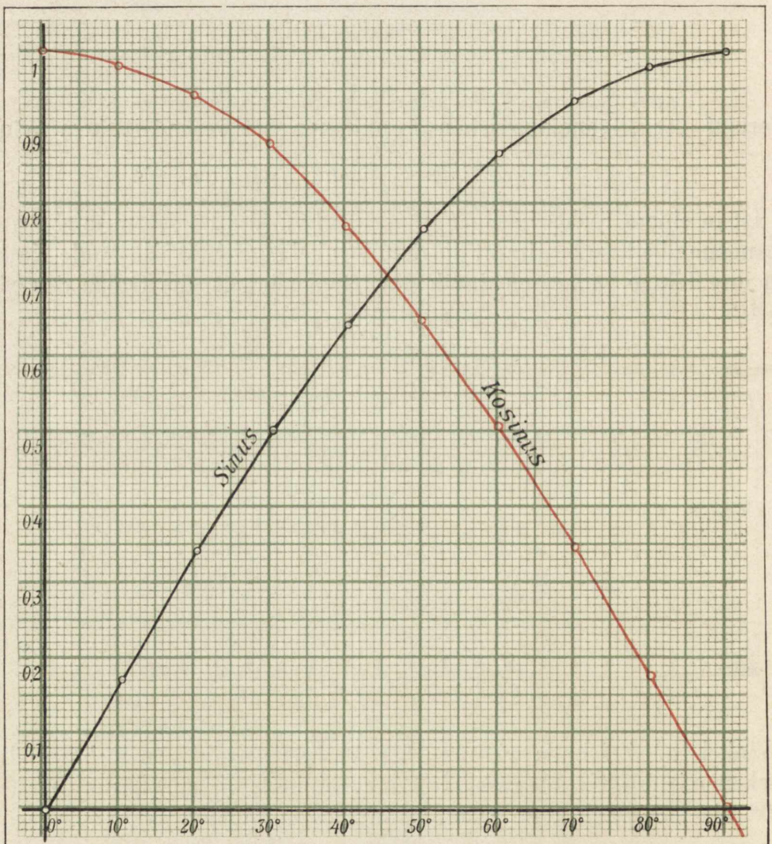
Zur besseren Übersicht sind auf einer Abszissenachse die Längen der Bogen B_0B, $BB_1 \ldots\ldots B_4B_5$ als Abszissen und die zugehörigen Sinuswerte als Ordinaten aufgetragen. Die schwarz ausgezogene Kurve läßt den Verlauf der Sinusfunktion im Intervall von 0^0 bis 90^0 erkennen. Es folgt:

Wächst ein Winkel von 0^0 bis 90^0, so wächst sein Sinus von 0 bis 1.

2. Verlauf der Kosinusfunktion.

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse gleich der Längeneinheit, so bestimmt die dem Winkel α anliegende Kathete durch ihre Länge,

Fig. 8.



gemessen durch die Längeneinheit, die Größe des Kosinus des Winkels α. Aus Figur 7 folgt dann, daß, wenn der Winkel α von 0^0 bis 90^0 wächst, die dem Winkel anliegende Kathete von 1 bis 0 abnimmt. Ist der Winkel BAB_0 gleich Null, so ist die Kathete AC gleich $AB_0 = 1$, daher

$$\cos 0^0 = 1.$$

Wird der Winkel $ABC = 90^0$, so ist die Kathete $AC = 0$ und daher:

$$\cos 90^0 = 0.$$

Auch hier läßt sich der Verlauf der Kosinusfunktion graphisch darstellen; die rote Kurve in Figur 7 stellt den Verlauf dar.

Es folgt:

Wächst ein Winkel von 0^0 bis 90^0, so nimmt sein Kosinus von 1 bis 0 ab.

Um die Zahlenwerte der Sinus- und Kosinusfunktion bequem aus der graphischen Darstellung ablesen zu können, sind die Funktionen in Figur 8 nochmals auf Millimeterpapier gezeichnet. Der Winkel von 1^0 wird durch eine Strecke von 1 *mm* dargestellt; als Längeneinheit für die Sinus- und Kosinuswerte dient eine Strecke von 10 *cm*.

3. Verlauf der Tangensfunktion.

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die dem Winkel $BAC = \alpha$ anliegende Kathete AC gleich der Längeneinheit, so bestimmt die Länge der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete BC gemessen durch die Längeneinheit, die Größe der Tangente des Winkels α. Zeichnen wir uns (Fig. 9) eine Anzahl von rechtwinkligen Dreiecken mit der gemeinsamen Kathete AC gleich der Längeneinheit, in denen der Winkel α von 0^0 bis 90^0 wächst, so wächst die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete von 0 bis zu ∞. Ist der Winkel BAC gleich Null, d. h. fällt AB auf AC, so ist die Kathete $BC = 0$, und es ist

$$tg\, 0^0 = 0.$$

Fällt mit wachsendem Winkel AB mit AD zusammen, so wird die Kathete BC unendlich groß und es folgt

$$tg\, 90^0 = \infty.$$

Auch hier ist der Verlauf der Tangensfunktion graphisch dargestellt

Wächst ein Winkel von 0^0 bis 90^0, so wächst seine Tangente von 0 bis ∞.

4. Verlauf der Kotangensfunktion.

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck die dem spitzen Winkel α gegenüberliegende Kathete gleich der Längeneinheit, so bestimmt die Länge der dem Winkel α anliegenden Kathete, gemessen durch die Längeneinheit, die

Fig. 9.

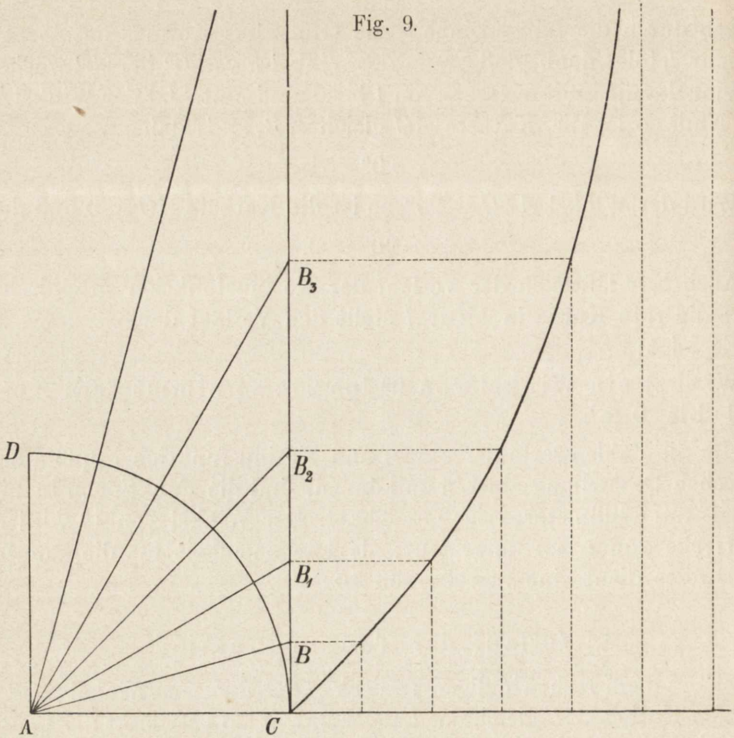
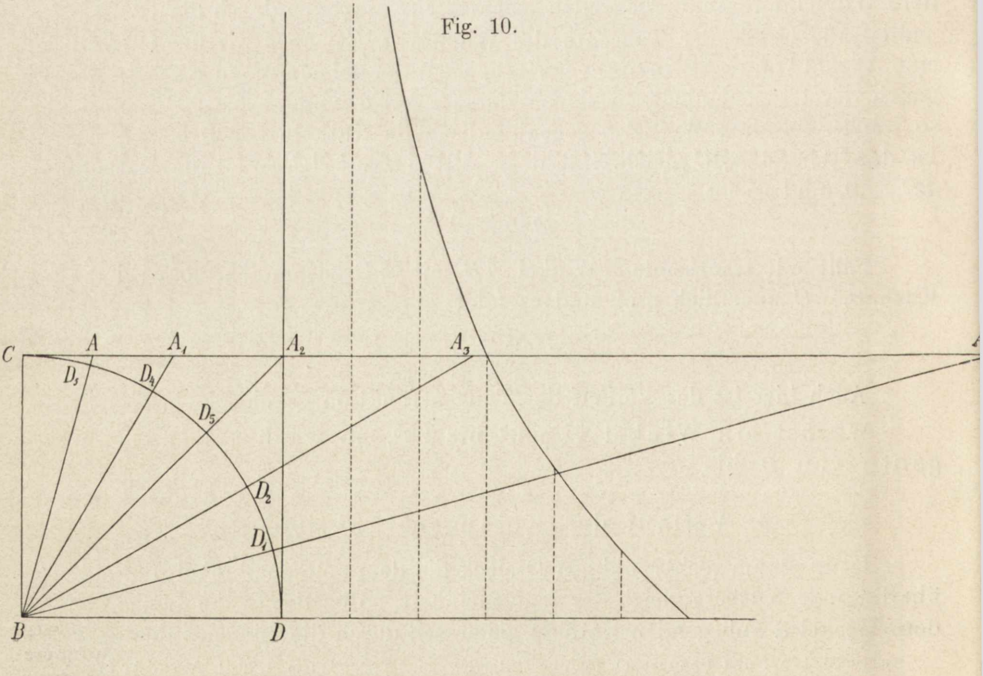
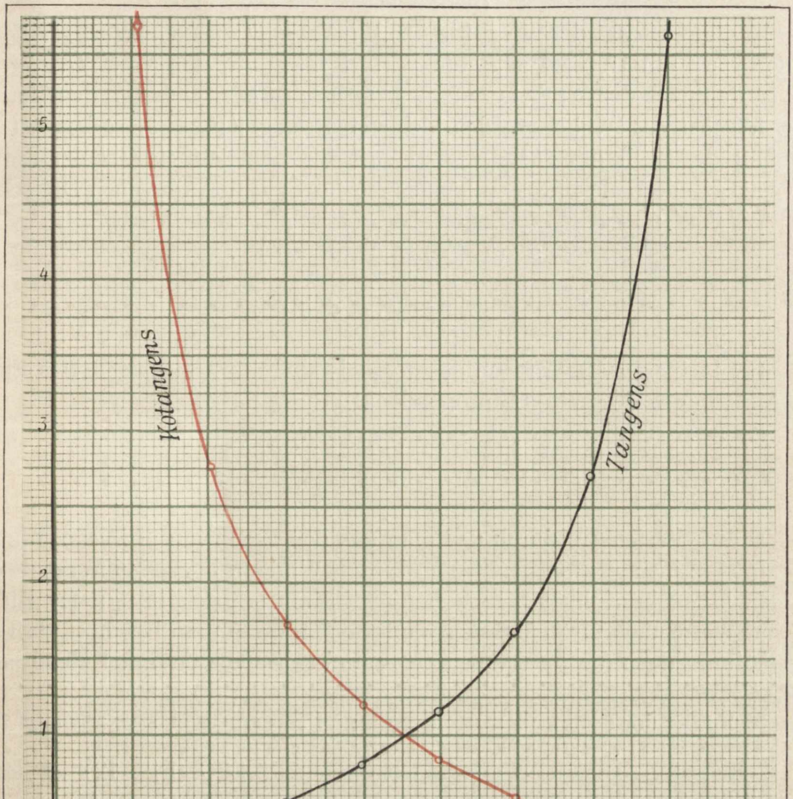


Fig. 10.



Größe der Kotangente des Winkels α. Um solche rechtwinklige Dreiecke mit der gegenüberliegenden Kathete als Längeneinheit zu erhalten, in denen außerdem der Winkel α von 0^0 bis 90^0 wächst, zeichnet man (Fig. 10) um den Scheitel B eines rechten Winkels mit dem Halbmesser gleich der Längeneinheit einen Kreisquadranten, der die Schenkel in D und C trifft. Ferner

Fig. 11.



errichtet man in C auf CB die Senkrechte, so schneiden die Schenkel BD_1, BD_2, $BD_2 \ldots\ldots$ BD_5 auf der letzteren Senkrechten Strecken CA_5, CA_4, $CA_3 \ldots\ldots CA$ ab, die, gemessen durch die Längeneinheit, die Kotangenten der Winkel $D_1BD = CAB$, $D_2BD = CA_3B$ usf. darstellen. Während die Winkel also von 0^0 bis 90^0 wachsen, nimmt die Kotangente ab. Insbesondere ist

$$cotg\ 90^0 = 0$$

$$cotg\ \ 0^0 = \infty\,.$$

Wächst ein Winkel von 0^0 bis 90^0, so nimmt seine Kotangente von ∞ bis 0 ab.

Um auch die Zahlenwerte der Tangens- und Kotangensfunktion aus der graphischen Darstellung ablesen zu können, sind in Figur 11 die Funktionen nochmals auf Millimeterpapier gezeichnet. Der Winkel von 1^0 wird durch eine Strecke von 1 *mm* dargestellt; als Längeneinheit für die Tangens- und Kotangenswerte dient eine Strecke von 2 *cm*.

In Figur 7 habe der Sinus für den Winkel $B_0V = a$ den Wert $UV = a$, für den etwa um 1^0 Grad größeren Winkel $BV_1 = a_1$ den Wert $U_1V_1 = b$. Wächst demnach der Winkel um $a_1 - a$, so wächst der Sinus um den Betrag $b - a$. Wächst der Winkel um den kleineren Betrag $VV_2 = \delta$, so beträgt die Zunahme des Sinus nur $U_2W_2 = x$. Da wir das kleine Stück UU_1 der Sinuskurve als gerade Linie auffassen können, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken UU_1W_1 UU_2W_2:

$$x : (b - a) = \delta : (a_1 - a)$$

$$x = \frac{b - a}{a_1 - a} \cdot \delta, \text{ d. h.:}$$

Bei kleineren Änderungen des Winkels sind die Änderungen des Sinus den Änderungen des Winkels proportional.

Es ist:

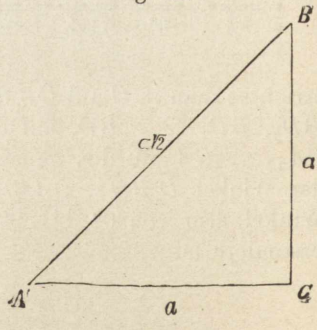
$$\sin (a + \delta) = \sin a + \frac{b - a}{a_1 - a} \delta.$$

Dieses Verfahren, durch das man aus den Sinuswerten zweier Winkel den Sinuswert eines zwischen diesen beiden Winkeln liegenden Winkels berechnen kann, bezeichnet man als Interpolation (Einschaltung). Es gilt in gleicher Weise auch für die übrigen Funktionen, wenn man beachtet, daß beden Kofunktionen die Funktionswerte mit wachsendem Winkel abnehmen.

d) Berechnung der Funktionswerte der Winkel von 45°, 30°, 60°, 18° und 72°.

1. Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 12) ist jeder spitze Winkel gleich 45^0. Bezeichnen wir die gleichen Katheten AC und BC mit a, so ist die Hypotenuse $AB = a\sqrt{2}$. Mithin ist:

Fig. 12.



$$\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

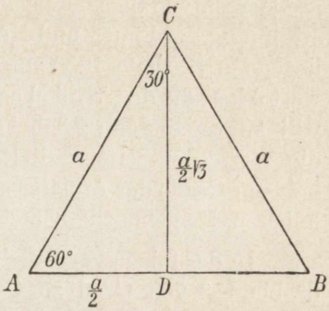
$$\cos 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$tg\ 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$

$$ctg\ 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$

2. Bezeichnet man die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ABC (Fig. 13) mit a, so ist seine Höhe $CD = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $\sphericalangle ACB = 30^0$ und $\sphericalangle CAD = 60^0$.

Fig. 13.



Es ergibt sich:

$$\boldsymbol{sin}\ 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

$$\boldsymbol{cos}\ 30^0 = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\boldsymbol{tg}\ 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\boldsymbol{cotg}\ 30^0 = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\boldsymbol{sin}\ 60^0 = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\boldsymbol{cos}\ 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

$$\boldsymbol{tg}\ 60^0 = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\boldsymbol{cotg}\ 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Wie ergeben sich die Funktionswerte der Winkel von 60^0 aus denen des Winkels von 30^0?

A u f g a b e. Es sollen aus dem Bestimmungsdreieck des einem Kreise mit dem Halbmessser r einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks die Funktionswerte der Winkel von 18^0 und 72^0 berechnet werden.

e) Tafel der Funktionswerte für die Winkel von 0^0 bis 90^0.

Im vorigen Abschnitt haben wir die Funktionswerte für einige Sonderwerte des Winkels berechnet. Um für irgend einen spitzen Winkel die Funktionswerte wenigstens angenähert zu berechnen, stellt man sich möglichst große rechtwinklige Dreiecke (etwa mit der Hypotenuse 1000 *mm* zur Bestimmung der Sinus- und Kosinuswerte, mit der anliegenden oder gegenüberliegenden Kathete 1000 *mm* zur Berechnung der Tangens- oder Kotangenswerte) her, die den Winkel enthalten, dessen Funktionswerte man bestimmen will. Mißt man dann möglichst genau die Seiten dieser Dreiecke, so lassen sich die Werte der Seitenverhältnisse bestimmen. Einfacher und mit jedem beliebigen Grade der Annäherung lassen sich die Werte durch die Verfahren der höheren Mathematik berechnen.

In der folgenden Tabelle sind diese Funktionswerte für die Winkel von 0^0 bis 45^0 von Grad zu Grad zusammengestellt. Da die Funktionen der Winkel gleich den Kofunktionen ihrer Komplementwinkel sind, so ergeben sich aus der Tabelle auch die Funktionswerte der Winkel von 45^0 bis 89^0. Zu dem Zwecke ist die Tafel so eingerichtet, daß für die links stehenden Winkel bis 45^0 die oberen Spaltenbezeichnungen, für die links stehenden Gradzahlen von 45^0 bis 89^0 die untenstehenden Spaltenbezeichnungen gelten.

Mittels der nachstehenden Tabelle können wir die auf Seite 196 graphisch erläuterte Interpolation auf rechnerischem Wege ausführen. Wir können mittels der Tabelle, die nur die Funktionswerte der Winkel von Grad zu Grad enthält, auch die Funktionswerte der zwischen den ganzzahligen Gradwerten liegenden Winkel finden.

Es soll z. B. $sin\ 36{,}4^0 = sin\ 36^0\ 24'$ gefunden werden. Da der Winkel $36{,}4^0$ zwischen 36^0 und 37^0 liegt, so liegt sein Sinus zwischen $sin\ 36^0$ und $sin\ 37^0$. Wächst der Winkel von 36^0 auf 37^0, so nimmt sein Sinus, wie man der Tafel entnimmt, um $0{,}6018 - 0{,}5878 = 0{,}0140$ zu; wächst der Winkel nur um $0{,}4^0$, so wächst sein Sinus um $0{,}0140 \,.\, 0{,}4 = 0{,}0056$. Also ist $sin\ 36{,}4^0 = 0{,}5878 + 0{,}0056 = 0{,}5934$.

Soll $cos\ 36^0{,}4$ aus der Tafel bestimmt werden, so ist zu beachten, daß der Kosinus mit wachsendem Winkel abnimmt. Wächst der Winkel von 36^0 auf 37^0, so nimmt sein Kosinus um $0{,}8090 - 0{,}7986 = 0{,}0104$ ab. Mithin ist $cos\ 36^0{,}4 = 0{,}8090 - 0{,}0104 \,.\, 0{,}4 = 0{,}8048$.

Die Tafel hann auch dazu dienen, zu einem gegebenen Funktionswerte den Winkel zu bestimmen.

Es sei z. B. $tg.\ x = \frac{11}{26} = 0{,}4231$.

Da der Wert 0,4231 zwischen 0,4040 und 0,4245 liegt, so liegt x zwischen 22^0 und 23^0. Der Unterschied zwischeu 0,4231 und 0,4040, d. i. 0,0191 beträgt 0,9 des Unterschiedes zwischen 0,4245 und 0,4040. d. i. 0,0205. Also ergibt sich

$$x = 22{,}9^0.$$

Wertetabelle der trigonometrischen Funktionen.

Grad	Sinus	Tangens	Kotangens	Kosinus	Grad
1	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,6362	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,4300	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	70
21	0,3584	0.3839	2,6051	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52
39	0,6293	0.8098	1,2349	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
Grad	Kosinus	Kotangens	Tangens	Sinus	Grad

Ist ferner $\quad cotg\,x = \frac{9}{11} = 0{,}8173,$

so ergibt sich für x, wenn man beachtet, daß die Abnahme der Kotangente einer Zunahme des Winkels entspricht,

$$x = 50^0 + 0{,}7^0 = 50{,}7^0.$$

Übungsaufgaben.

1. Es soll $sin\ 24^0\,15'$; $cos\ 48^0{,}4$; $tg\ 75^0{,}5$; $cotg\ 80^0\,42'$ aus der Tafel bestimmt werden.

2. Es sollen zu folgenden Funktionswerten die Winkel bestimmt werden: $tg\,x = 2\frac{4}{5}$, $cotg\,x = 1{,}1834$; $sin\,x = \frac{5}{8}$; $cos\,x = \frac{3}{7}$.

3. Es sollen den graphischen Darstellungen (Fig. 8, 10) die Werte für $sin\ 14^0$, $cos\ 72^0$, $tg\ 25^0$, $cotg\ 63^0$ entnommen und mit den Tafelwerten verglichen werden.

Was ist hierbei bei den Werten von $tg\ 25^0$ und $cotg\ 63^0$ zu beachten?

f) Zusammenfassung.

Aus dem Verlaufe der Sinus- und Kosinuskurve sowie aus der Wertetabelle erkennt man für das Intervall von 0^0 bis 90^0:

1. Der Sinus und der Kosinus sind abgesehen von den Grenzwerten 0 und 1 echte Brüche.

2. Mit wachsendem Winkel nimmt der Sinus zu, der Kosinus ab.

3. $sin\ 45^0 = cos\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}71\ldots..$

4. Es ist: $sin\,(90^0 - \alpha) = cos\,\alpha$; $cos\,(90^0 - \alpha) = sin\,\alpha$.

Ebenso ersieht man aus dem Verlaufe der Tangens- und Kotangenskurve. sowie aus der Wertetabelle für das Intervall von 0^0 bis 90^0:

1. Die Tangente und die Kotangente durchläuft alle Werte von 0 bis $+\infty$.

2. Mit wachsendem Winkel nimmt die Tangente zu, die Kotangente ab.

3. $tg\ 45^0 = cotg\ 45^0 = 1$.

4. Es ist: $tg\,(90^0 - \alpha) = cotg\,\alpha$; $cotg\,(90^0 - \alpha) = tg\,\alpha$.

g) Benutzung der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln.

Beim Rechnen mit den trigonometrischen Funktionen bedient man sich meistens der Logarithmen, und es sind daher diese Logarithmen in Tafeln zusammengestellt, die entsprechend eingerichtet sind, wie die auf S. 199 gegebene Funktionstabelle. Sie enthalten ebenfalls nur die Logarithmen der vier trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0^0 bis 45^0, und zwar von Minute zu Minute. Die Logarithmen der Funktionen der Winkel von 45^0 bis 90^0 findet man bei den zugehörigen Komplementwinkeln, die sich in der Spalte auf der rechten Seite der Tafel finden, die von unten nach oben zu lesen sind; zu diesen Winkeln findet man die Funktionsbezeichnungen unten, während zu den Winkeln in der linken Spalte die Funktionsbezeichnungen oben stehen. Um bei den Logarithmen der Funktionen, die echte Brüche sind, die negativen Kennziffern umzuformen, sind alle Logarithmen um 10 Einheiten vergrößert angegeben; man muß daher den der Tafel entnommenen Logarithmen die Kennziffer — 10 hinzufügen.

Auf graphischem Wege wurde gezeigt, daß die Zu-, beziehungsweise Abnahmen der trigonometrischen Funktionen bei kleinen Zunahmen der Winkel diesen Winkelzunahmen proportional sind. Hieraus läßt sich das gleiche auch für die Logarithmen der Funktionen folgern; es lassen sich aus den Werten der Logarithmen in der Tafel auch die Logarithmen für die Funktionswerte der zwischenliegenden Winkelwerte durch Interpolation bestimmen.

Soll der Logarithmus einer trigonometrischen Funktion angegeben werden für einen Winkel, der Dezimalteile von Minuten oder Sekunden enthält, so kann man aus der Tafel den Unterschied zweier aufeinander folgenden Logarithmen für 1 Minute leicht bestimmen. Multipliziert man diese Differenz mit dem Minutendezimalbruche oder bei gegebener Sekundenzahl den 60. Teil der Differenz mit der Sekundenzahl, so erhält man die Zu- oder Abnahme (je nachdem es sich um Funktionen oder Kofunktionen handelt) der Logarithmen der Tabelle für die Dezimalteile der Minuten, beziehungsweise für die Sekundenzahl.

Der Bequemlichkeit halber befinden sich neben den einzelnen Spalten kleinere, welche die Differenzen D zweier Logarithmen oder $\frac{D}{60}$ $(D\,1'')$ enthalten.

Aus der Gleichung

$$tg\, a \,.\, cotg\, a = 1$$

folgt durch Logarithmierung

$$log\, tg\, a = -\, log\, cotg\, a,$$

d. h. vom Vorzeichen abgesehen sind die Logarithmen des Tangens- und Kotangenswertes desselben Winkels und daher auch ihre Differenzen bei Winkeländerungen einander gleich. Aus diesem Grunde findet sich in der Logarithmentafel eine gemeinsame Differenzenreihe (G. D.) für die Logarithmen der Tangenten und der Kotangenten.

Beispiele.

1. *log sin* **24° 27′ 13″.**

Es ist: $log\, sin\, 24^0\, 27' = 9{,}61689 - 10$; D $1'' = 0{,}46$

$$\begin{array}{r} 13 \,.\, 0{,}46 = \quad 6 \\ \hline log\, sin\, 24^0\, 27'\, 13'' = 9{,}61695 - 10. \end{array}$$

2. *log cos* **24° 27′ 13″.**

$$\begin{array}{r} log\, cos\, 24^0\, 27' = 9{,}95920 - 10;\; D\, 1'' = 0{,}10 \\ 13 \,.\, 0{,}10 = \quad 1 \\ \hline log\, cos\, 24^0\, 27'\, 13'' = 9{,}95919 - 10. \end{array}$$

3. $\log tg\, 68^0\, 51',7$.

$$
\begin{array}{rl}
\log tg\, 68^0\, 51' = & 10{,}41243 - 10;\quad D = 38 \\
0{,}7 \cdot 38 = & \phantom{10{,}412}27 \\
\hline
\log tg\, 68^0\, 51',7 = & 10{,}41270 - 10.
\end{array}
$$

4. $\log cotg\, \mathbf{68^0\, 51',7}$.

$$
\begin{array}{rl}
\log cotg\, 68^0\, 51' = & 9{,}58757 - 10;\quad D = 38 \\
0{,}7 \cdot 38 = & \phantom{9{,}587}27 \\
\hline
\log cotg\, 68^0\, 51',7 = & 9{,}58730 - 10.
\end{array}
$$

Ist umgekehrt zu dem gegebenen Logarithmus einer Funktion der Winkel zu suchen, so schlägt man, falls der Logarithmus nicht in der Tafel sich findet, den Sinus und Tangens des nächst kleineren, bei Kosinus und Kotangens den nächst größeren auf und findet in der ersten oder letzten Spalte die Anzahl der Grade und Minuten des gesuchten Winkels.

Um die Dezimalteile der Minuten beziehungsweise die Anzahl der Sekunden zu finden, bestimmt man die Differenz d des gegebenen und des in der Tafel aufgeschlagenen Logarithmus und dividiert diese durch D oder $D\, 1''$.

Beispiele.

1.
$$
\begin{array}{rl}
\log sin\, x = & 9{,}74617 - 10 \\
\hline
\log sin\, 33^0\, 52' = & 9{,}74606 - 10 \\
\hline
d = & \phantom{9{,}746}11 \\
D \cdot 1'' = & 0{,}31 \\
\frac{11}{0{,}31} = & 35 \\
x = & 33^0\, 52'\, 35''.
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{rl}
\log cotg\, x = & 10{,}49529 - 10 \\
\hline
\log cotg\, 17^0\, 43' = & 10{,}49558 - 10 \\
\log cotg\, x = & 10{,}49529 - 10 \\
\hline
d = & \phantom{10{,}495}29 \\
D = & 43; \\
\frac{29}{43} = & 0{,}67 \\
x = & 17^0\, 43' 67''.
\end{array}
$$

Kapitel III.

Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke.

α) Das rechtwinklige Dreieck.

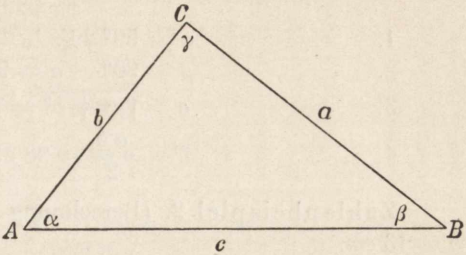
Ein rechtwinkliges Dreieck ist bestimmt:

1. durch die beiden Katheten (a, b);
2. durch die Hypotenuse und eine Kathete (c, a oder c, b);
3. durch eine Kathete und einen der spitzen Winkel (a, α; a, β; b, α; b, β).

4. durch die Hypotenuse und einen der spitzen Winkel (c, α oder c, β).

Es ergeben sich daher für die trigonometrische Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks vier Fälle.

Fig. 14.



Aufgabe 1. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck aus den beiden Katheten a und b berechnet werden.

Gegeben a, b. Gesucht α, β, c.

Lösung. Zur Bestimmung der drei gesuchten Größen sind drei Gleichungen erforderlich. Da die Gegenkathete und die Ankathete des gesuchten Winkels α gegeben sind, so folgt:

1. $$tg\,\alpha = \frac{a}{b}.$$

Für β ergibt sich aus der Winkelsumme:

2. $$\beta = 90^0 - \alpha.$$

Die gesuchte Hypotenuse berechnet sich nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

3. $$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Anmerkung. Sind die Zahlenwerte für a und b große Zahlen oder Dezimalbrüche, so ist die Berechnung von c mittels der Gleichung 3 unbequem. Man zieht in diesem Falle die trigonometrische Berechnung von c vor unter Benutzung des aus der Gleichung 1 berechneten Winkels α. In diesem Falle erhält man

$$sin\,\alpha = \frac{a}{c}; \quad c = \frac{a}{sin\,\alpha}.$$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich:

4. $$F = \frac{a\,b}{2}.$$

Zahlenbeispiel 1. (Lösung ohne Logarithmen.) $a = 56\ m$, $b = 33\ m$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{56}{33} = 1{,}6970.$$

In der Tafel (S. 199) findet sich:

$$tg\,60^0 = 1{,}7321$$
$$tg\,59^0 = 1{,}6643.$$

Der gesuchte Winkel liegt zwischen 59° und 60°. Die Differenz beider Tangenten ist 0,0678; die Differenz zwischen $tg\, \alpha$ und $tg\, 59°$ ist 0,0327 Mithin erhält man zur Bestimmung der Minutenanzahl x die Proportion:

$$x : 60 = 327 : 678$$
$$x = 29'.$$

1. $\alpha = 59^0\, 29'.$
2. $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 59^0\, 29' = 30^0\, 31'.$
3. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3136 + 1089} = \sqrt{4225} = 65\; m.$
4. $F = \frac{a\, b}{2} = 28 \,.\, 33 = 924\; qm.$

Zahlenbeispiel 2. (Berechnung mittels Logarithmen.) $a = 84\; cm$, $b = 13\; cm$.

1. $tg\, \alpha = \frac{a}{b}$; $\;\; log\, tg\, \alpha = log\, a - log\, b$

$$log\, a = 1{,}92428$$
$$log\, b = 1{,}11394$$
$$log\, tg\, \alpha = 10{,}81034 - 10$$
$$\alpha = 81^0\, 12'\, 9'',4$$

2. $\beta = 90^0 - \alpha = 8^0\, 47'\, 50'',\, 6$
3. $c = \frac{a}{sin\, \alpha}$; $\;\; log\, c = log\, a - log\, sin\, \alpha$

$$log\, a = 1{,}92428$$
$$log\, sin\, \alpha = 9{,}99486 - 10$$
$$log\, c = 1{,}92942$$
$$c = 85\; cm.$$

4. $F = \frac{84\,.\,13}{2} = 546\; qcm.$

Aufgabe 2. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse c und der Kathete a berechnet werden.

Gegeben c, a. Gesucht α, β, b.

Lösung. Zur Bestimmung der gesuchten Größen ergeben sich die drei Gleichungen:

1. $sin\, \alpha = \frac{a}{c}.$
2. $\beta = 90^0 - \alpha.$
3. $cos\, \alpha = \frac{b}{c}$; $\; b = c\, cos\, \alpha\; [b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a)\,(c - a)}]$

Außerdem erhält man:

4. $F = \frac{a\, b}{2}.$

Zahlenbeispiel. $c = 593{,}4\; m$, $a = 426{,}5\; m$. (Lösung ohne oder mit Logarithmen.)

Aufgabe 3. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck aus der Kathete a und dem Winkel α berechnet werden.

Gegeben: a, α. Gesucht: β, c, b.

Lösung. Man erhält zur Bestimmung der gesuchten Größen die drei Gleichungen:

1. $$\beta = 90^0 - \alpha.$$

2. $$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \qquad c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

3. $$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}; \quad b = a \operatorname{cotg} \alpha.$$

Ferner ist:

4. $$F = \frac{a\,b}{2} = \frac{a^2}{2} \operatorname{cotg} \alpha.$$

Zahlenbeispiel. $a = 683{,}25\,m$, $\alpha = 61^0\,5'\,8''$.

Aufgabe 4. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse c und dem Winkel α berechnet werden.

Gegeben: c, α. Gesucht: β, a, b.

Lösung: Man erhält die drei Bestimmungsgleichungen:

1. $$\beta = 90^0 - \alpha.$$

2. $$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \qquad a = c \sin \alpha.$$

3. $$\cos \alpha = \frac{b}{c}; \qquad b = c \cos \alpha.$$

Außerdem ist:

4. $$F = \frac{a\,b}{2} = \frac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Zahlenbeispiel. $c = 23{,}3\,cm$, $\alpha = 63^0\,12{,}'9$.

Übungsaufgaben. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck berechnet werden aus:

1. $a = 38{,}313\,m$, $b = 19{,}522\,m$;
2. $a = 13{,}7\,cm$, $b = 16{,}9\,cm$;
3. $c = 8590\,m$, $a = 4476\,m$;
4. $c = 20{,}5\,m$, $b = 15{,}427\,m$;
5. $a = 57\,cm$, $\alpha = 26^0\,40'\,40''$;
6. $a = 50{,}937\,m$, $\beta = 46^0\,11'\,59''$;
7. $c = 57{,}54\,m$, $\alpha = 44^0\,54'\,50''$;
8. $c = 3{,}644\,m$, $\beta = 39^0\,59{,}'8$;
9. $F = 2{,}3184\,qm$, $a = 2{,}24\,m$;
10. $F = 5610\,qcm$, $b = 85\,cm$;
11. $p = 23{,}04\,cm$, $h = 6{,}72\,cm$[1]);
12. $a = 41{,}184\,m$, $h = 21\,m$;
13. $h = 60\,cm$, $\alpha = 67^0\,22'\,48'',5$;
14. $p = 109{,}512\,m$, $\alpha = 69^0\,23'\,25''$.
15. $a : b = 24 : 7$; $h = 168\,m$;
16. $F = 1320\,qm$; $\alpha = 48^0\,53'\,16''$.

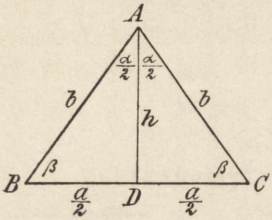
---

[1]) h ist die zur Hypotenuse c gehörige Höhe, p und q die Projektionen von a und b auf die Hypotenuse.

b) Das gleichschenklige Dreieck.

I. Fällt man in dem gleichschenkligen Dreieck ABC (Fig. 15) mit der Grundlinie a und dem Schenkel b die Höhe $AD=h$ zur Grundlinie, so zerfällt dasselbe in zwei rechtwinklige Dreiecke. Die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks läßt sich somit auf die des rechtwinkligen Dreiecks zurückführen. Es ergeben sich hierbei drei Hauptfälle, je nachdem gegeben sind:

Fig. 15.



1. Die Grundlinie und der Schenkel (a, b);
2. die Grundlinie und ein Winkel $(a, \alpha$ oder $a, \beta)$;
3. der Schenkel und ein Winkel $(b, \alpha$ oder $b, \beta)$.

Aufgabe 1. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck aus der Grundlinie a und dem Schenkel b berechnet werden.

Gegeben: a, b. Gesucht: α, β.

Lösung.

$$1.\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b}.$$

$$2.\quad \beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Außerdem ergibt sich:

$$3.\quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{\frac{a}{2}};\ h = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\ \left[h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}\right].$$

$$4.\quad F = \frac{a\,h}{2} = \frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\ \left[F = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)}\right].$$

Zahlenbeispiele. **1.** $a = 14\ cm$, $b = 25\ cm$; **2.** $a = 6{,}6\ m$; $b = 6{,}5\ m$.

Aufgabe 2. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck aus der Grundlinie a und dem Winkel α an der Spitze berechnet werden.

Gegeben: a, α. Gesucht: b, β.

Lösung:

$$1.\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b};\quad b = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$2.\quad \beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Ferner erhält man:

3. $$cotg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{h}{\frac{a}{2}};\quad h=\frac{a}{2}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}.$$

4. $$F=\frac{a}{2}\,h=\frac{a^2}{4}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}.$$

In gleicher Weise berechnet man das gleichschenklige Dreieck aus a und β.

Zahlenbeispiele. **1.** $a = 72\,cm$, $\alpha = 12^0\,43'\,10''$; **2.** $a = 408\,m$, $\alpha = 51^0\,7',2$.

Aufgabe 3. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck aus dem Schenkel b und dem Winkel an der Spitze berechnet werden.

Gegeben: b, α. Gesucht: a, β.

Lösung.

1. $$sin\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{b};\quad a=2\,b\,sin\,\frac{\alpha}{2}.$$

2. $$\beta=90^0-\frac{\alpha}{2}.$$

Außerdem ergibt sich:

3. $$cos\,\frac{\alpha}{2}=\frac{h}{b};\quad h=b\,cos\,\frac{\alpha}{2}.$$

4. $$F=\frac{a\,h}{2};\quad F=b^2\,sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}.$$

Ebenso berechnet man das gleichschenklige Dreieck aus b und β.

Zahlenbeispiele. **1.** $b = 0{,}295\,m$, $\alpha = 43^0\,39'\,42''$; **2.** $b = a = 7{,}71\,m$, $\beta = 34^0\,35'\,36''$.

Übungsaufgaben. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck berechnet werden aus:

1. $a = 147\,m$, $h_a = 70\,m$;
2. $a = 63\,cm$, $h_a = 10{,}8\,cm$;
3. $b = 6{,}71\,m$, $h_a = 6{,}6\,m$;
4. $b = 227{,}5\,m$, $h_a = 196\,m$;
5. $h_a = 6{,}6\,m$; $\beta = 79^0\,36'\,40''$;
6. $h_a = 3{,}19\,m$, $\beta = 63^0\,41'\,18''$;
7. $h_b = 27{,}5\,cm$, $a = 37{,}3\,cm$;
8. $h_b = 12\,m$, $\beta = 53^0\,7'\,48''$;
9. $F = 22638\,qm$; $h_a = 196\,m$.

II. Die Bestimmungsdreiecke der regelmäßigen Vielecke sind gleichschenklige Dreiecke. Im regelmäßigen n-Eck ist der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks $\alpha = \frac{360^0}{n}$; zur Berechnung des Vielecks ist daher nur noch ein Stück eines solchen Bestimmungsdreiecks erforderlich.

Übungsaufgaben.

1. Man soll die Seite s_n, den Halbmesser ϱ_n, den Umfang u_n und den Inhalt i_n des einem Kreise mit dem Halbmesser r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks berechnen.

$a)$ $n = 9$, $r = 42\ cm$; $b)$ $n = 14$, $r = 8{,}14\ m$.

2. Man berechne den Halbmesser r des Umkreises, den Halbmesser ϱ des Inkreises eines regelmäßigen n-Ecks mit der Seite s_n.

$a)$ $n = 8$, $s_8 = 0{,}82\ m$; $b)$ $n = 10$, $s_{10} = 51{,}7\ cm$.

3. Man berechne die Seite S_n, den Halbmesser r des Umkreises und den Inhalt I_n des dem Kreise mit dem Halbmesser ϱ umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

$a)$ $n = 11$, $\varrho = 7{,}423\ m$; $b)$ $n = 17$, $\varrho = 24\ cm$.

4. Der Umfang eines regelmäßigen Zwölfecks beträgt $40\ cm$ Wie groß ist der Halbmesser r seines Umkreises?

5. Der Umfang eines regelmäßigen Zwanzigecks beträgt $1{,}4\ m$. Wie groß ist der Halbmesser ϱ seines Inkreises?

III. Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit den Endpunkten einer Sehne, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie die Sehne s, dessen Schenkel der Halbmesser r und dessen Winkel an der Spitze α der zur Sehne gehörige Zentriwinkel α ist. Mithin kann man die Berechnung von Sehnen und Bogenlängen sowie die Berechnung von Kreisaus- und -abschnitten auf die Berechnung gleichschenkliger Dreiecke zurückführen.

Übungsaufgaben.

1. Man soll in einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 50\ cm$ die zum Zentriwinkel $\alpha = 27^0\ 42'$ gehörige Sehne, sowie den Inhalt des zugehörigen Kreisabschnittes berechnen.

Anmerkung. Der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes ist gleich dem Unterschiede aus dem Flächeninhalte des Sektors, dessen Zentriwinkel gleich dem der Sehne ist und des gleichschenkligen Dreiecks über der Sehne als Grundlinie und mit dem Halbmesser als Schenkel.

2. In einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 1\ m$ ist eine Sehne $s = 1{,}54\ m$ eingetragen. Wie groß ist der zur Sehne gehörige Bogen?

3. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, in dem die Sehne $s = 69{,}8\ cm$ zum Zentriwinkel $\alpha = 36^0$ gehört? Wie groß ist der Abstand der Sehne vom Mittelpunkte des Kreises?

4. Ein Sektor eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 30\ cm$ hat den Inhalt $I = 15\ \pi\ qcm$. Wie groß ist der zugehörige Bogen, der zugehörige Zentriwinkel und die zugehörige Sehne?

5. Die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise ist $s = 75{,}4\ cm$ und erscheint von den beiden Mittelpunkten aus unter den Winkeln $\alpha = 75^0$ und $\alpha_1 = 92^0$. Wie groß ist der Inhalt des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Flächenstückes?

IV. Das Rechteck wird durch jede Diagonale in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, der Rhombus durch jede Diagonale in zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt; es lassen sich daher aus zwei Stücken eines Rechtecks oder eines Rhombus die übrigen Stücke berechnen.

Übungsaufgaben. Man berechne ein Rechteck von dem gegeben sind:

1. die Seiten $a = 49\ cm$, $b = 38\ cm$;

2. die Diagonale $d = 30\ m$ und der Winkel $\alpha = 24^0\,35'$, den sie mit einer Seite bildet;

3. die Diagonale $c = 40\ cm$ und der Winkel der Diagonalen $\varepsilon = 124^0\,30'\,6''$.

Man berechne einen Rhombus, von dem gegeben sind:

4. die Seite $a = 20\ cm$ und der spitze Winkel $\alpha = 65^0$;

5. die Seite $a = 5\ m$ und die Diagonale $e = 9\ m$;

6. die Seite $a = 36\ m$ und die kürzere Diagonale $f = 12\ m$;

7. die beiden Diagonalen $e = 5{,}23\ m$, $f = 2{,}06\ m$;

8. die längere Diagonale $e = 25\ cm$ und der spitze Winkel $\alpha = 42^0\,30'$;

9. der Flächeninhalt $F = 32\ qm$ und $\alpha = 74^0\,24'\,48''$;

10. der Flächeninhalt $F = 312{,}5\ qm$ und der Umfang $u = 100\ m$.

c) Eingekleidete Aufgaben.

1. Eine Leiter von $l = 6{,}45\ m$ Länge soll mit der wagerechten Bodenfläche einen Winkel $\alpha = 67^0\,34{,}5'$ bilden; wie hoch an der Wand muß sie angestellt werden?

2. *a*) Ein $h = 12{,}6\ m$ hoher Flaggenmast wirft einen $l = 15{,}7\ m$ langen Schatten. Wie hoch steht die Sonne?

2. *b*) Wie lang ist der Schatten eines auf einer Horizontalebene senkrecht stehenden Stabes von $h = 50\ cm$ Länge, wenn die Sonne $\alpha = 48^0\,35'\,24''$ hoch steht? (Gnomon oder Sonnenzeiger; Bedeutung desselben im Altertume und seine Anwendung zur Zeitbestimmung.)

3. Ein Fesselballon schwebt senkrecht über dem Aufstiegort und wird von einem Orte, der $a = 650$ von der Aufstiegstelle entfernt ist, unter einem Erhebungswinkel $\alpha = 49^0\,25'\,10''$ gesehen. In welcher Höhe befindet sich der Ballon?

4. Wie weit muß man sich von dem Turme des Frankfurter Domes, der $h = 95\ m$ hoch ist, entfernen, damit das $a = 1{,}25\ m$ hohe Winkelmeßinstrument, das auf einen Erhebungswinkel $\alpha = 42^0\,35'$ eingestellt ist, auf die Turmspitze gerichtet ist?

5. Auf dem $h = 25\ m$ hohen Mittelbau des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. befindet sich ein $l = 4{,}5\ m$ hoher Mast. Unter welchem Winkel erscheint der Mast von einer Stelle der Moltkeallee aus, die $a = 154\ m$ von dem Gebäude entfernt ist?

6. Wieviel Grad und wieviel Prozent beträgt die durchschnittliche Steigung auf dem $l = 17{,}5\ km$ langen Weg von Partenkirchen nach der Zugspitze; Partenkirchen hat eine Höhe $h = 717\ m$, die Zugspitze eine solche $h_1 = 2964\ m$?

Anmerkung. Die Steigung einer Straße (Eisenbahnstrecke) beträgt $p\ \%$, wenn bei einer wagerechten Entfernung von $100\ m$ die Erhebung $p\ m$ beträgt.

7. Von einem $h = 9\ m$ hohen Balkon eines Hauses erscheint ein Fabrikschornstein unter einem Erhebungswinkel $\alpha = 16^0\ 18'\ 24''$ und der Fuß desselben unter einem Senkungswinkel $\alpha_1 = 6^0\ 5'\ 12''$. Wieviel Meter beträgt die Schornsteinhöhe?

8. Am Ufer eines Flusses steht ein $h = 15\ m$ hoher Mast. Unmittelbar am gegenüberliegenden Ufer beobachtet man mit einem $h_1 = 1{,}2\ m$ hohen Winkelmeßinstrument einen Erhebungswinkel $\alpha = 12^0\ 15'$. Es soll die Flußbreite berechnet werden, wenn die Verbindungslinie des Standortes und des Fußpunktes des Mastes mit der Breitenrichtung des Flusses einen Winkel $\beta = 42^0\ 48'$ bildet.

9. Zwei Punkte liegen mit dem Fuße eines $h = 30\ m$ hohen Turmes in derselben Horizontalebene und auf derselben geraden Linie. Wie weit sind die Punkte voneinander entfernt, wenn sie von der Plattform des Turmes unter den Senkungswinkeln $\alpha = 30^0\ 25'\ 30''$ und $\beta = 14^0\ 30'\ 45''$ erscheinen?

10. Ein Schiff, das in der Stunde $c = 8{,}3$ Seemeilen zurücklegt und den Kurs WNW hat, peilt einen $d = 10{,}42$ Seemeilen entfernten Leuchtturm in WzS. In welchem Abstande und binnen welcher Zeit wird es an ihm vorübersegeln?

Anmerkungen.

1. Unter „Kurs“ versteht der Seemann die Fahrtrichtung im allgemeinen und im besonderen den Winkel, den diese Richtung mit dem durch den Schiffsort gehenden Meridian bildet.

2. Der Viertelkreis (Quadrant) der als Kugel angenommenen Erde wird zu $10\,000\,000\ m = 10\,000\ km$ angenommen. Da der Viertelkreis in 90^0 und 1^0 in $60'$ eingeteilt wird, so hat 1^0 die Länge von $111{,}111\ km$ und $1'$ die Länge von $1{,}852\ km$. Die Länge von $1852\ m$ heißt eine Seemeile (*sm*) und ist die Maßeinheit für die Entfernungen zur See.

3. „Peilen“ heißt die Richtung bestimmen (visieren). Zur Richtungsbestimmung auf der See dient der Kompaß. Die Kreisscheibe, welche die Magnetnadel (beziehungsweise die Magnetstäbe) trägt, ist entweder in 360^0 oder in 32 Striche eingeteilt. Die vier Hauptstriche bekommen die Bezeichnungen Nord, Ost, Süd, West (N, O, S, W). Die Striche von N bis O tragen die Bezeichnungen: N; NzO; NNO; NOzN; NO; NOzO; ONO;

OzN; O; entsprechend sind die übrigen Striche bezeichnet. Auf jeden Strich kommen demnach $11\frac{1}{4}^0$; die Striche werden noch in halbe und Viertelstriche eingeteilt.

4. Bei den Anwendungen auf die Schiffahrtkunde handelt es sich in Wirklichkeit nicht um ebene Dreiecke; der Seemann aber nimmt bei Entfernungen bis zu 300 Seemeilen den betreffenden Teil der Erdoberfläche als eben an und macht dadurch einen kaum merklichen Fehler.

11. Aus einem Hafen segeln gleichzeitig zwei Schiffe, das eine nach NWzW $a = 18{,}5\ sm$ bis A, das andere nach SWzS $b = 9{,}2\ sm$ bis B. In welcher Richtung und wie weit liegt B von A?

12. Ein Schiff fährt östlich; ein anderes, $a = 25\ sm$ südlich davon befindliches Schiff, fährt gleichzeitig ab und trifft mit dem ersteren nach einer Fahrt von $c = 30\ sm$ zusammen. Welchen Kurs hat es gesteuert?

13. Ein Schiff hat scheinbar einen Weg von $a = 21\ sm$ nach WSW zurückgelegt; der Weg ist aber ein größerer, da ein nach SSO gerichteter Strom das Schiff um $2\frac{3}{4}$ Striche von dem scheinbaren Wege abgelenkt hat. Wieviel Seemeilen beträgt der wahre Weg?

14. Welchen Umfang hat der durch Frankfurt a. M. gehende Parallelkreis, wenn die Erde als vollkommene Kugel betrachtet wird, und der Umfang des Äquators 40 031 *km* beträgt. Die geographische Breite von Frankfurt a. M. ist $\varphi = 50^0\ 7'$.

15. Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt zu Frankfurt a. M. ($\varphi = 50^0\ 7'$) infolge der Achsendrehung der Erde? Der Erdhalbmesser ist $r = 6370{,}4\ km$.

16. Welche Länge hat ein Grad des durch Berlin ($\varphi = 52^0\ 30{,}'3$) gehenden Parallelkreises?

17. Naumburg und Görlitz haben dieselbe geographische Breite $\varphi = 51^0\ 9'$. Die geographische Länge von Naumburg beträgt $l_1 = 29^0\ 27'\ 44''$, die von Görlitz $l_2 = 32^0\ 38'\ 42''$. Man berechne die Entfernung beider Orte auf dem Breitenkreise.

18. Die Horizontalparallaxe der Sonne beträgt $\alpha = 8{,}80''$, der Erdhalbmesser $r = 6370\ km$. Man berechne die Entfernung der Mittelpunkte beider Himmelskörper *a*) in Erdhalbmessern, *b*) in Kilometern.

Anmerkung. Unter der Horizontalparallaxe α eines Gestirnes S versteht man den Winkel, unter dem der Halbmesser der Erde von S aus gesehen erscheint.

19. Die Horizontalparallaxe des Mondes beträgt $\alpha = 57'\ 20''$, der Erdhalbmesser $r = 6370\ km$. Man berechne die Entfernung der Mittelpunkte beider Himmelskörper *a*) in Erdhalbmessern, *b*) in Kilometern.

20. Zwei Kräfte $P = 21\ kg$ und $Q = 14{,}5\ kg$ wirken unter einem rechten Winkel auf einen Körper. Wieviel Kilogramm beträgt die Mittelkraft, und welchen Winkel bildet sie mit den Seitenkräften?

21. Eine Kraft $R = 278{,}8\,kg$ wird in zwei zueinander senkrechte Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine $P = 188{,}07\,kg$ beträgt. Wie groß ist die zweite Seitenkraft und welchen Winkel bildet ihre Richtung mit der Richtung der gegebenen Kraft?

22. Auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel $\alpha = 43^0\,5'\,25''$ ist, befindet sich eine Last $Q = 600\,kg$. Wie groß ist die parallel der Grundlinie wirkende Kraft, die der Last das Gleichgewicht hält, und wie groß ist der Druck gegen die schiefe Ebene?

23. Der Neigungswinkel einer schiefen Ebene ist $\alpha = 25^0\,37'\,10''$; eine auf ihr liegende Last wird durch eine parallel der schiefen Ebene wirkende Kraft von 225 *kg* im Gleichgewichte gehalten. Wie groß ist das Gewicht der Last und der Druck gegen die schiefe Ebene?

24. Ein Eisenbahnzug fährt mit einer Geschwindigkeit $c = 20\,m$; senkrecht fallende Regentropfen scheinen, vom Wagen aus betrachtet, einen Winkel $\alpha = 25^0$ mit der Senkrechten zu bilden; mit welcher Geschwindigkeit fallen die Tropfen?

25. Ein Dampfboot hat eine Geschwindigkeit $c = 4{,}5\,m$; es wird senkrecht zur Richtung eines Flusses gesteuert, aber durch die Strömung um $\alpha = 20^0\,30'$ vom Steuerkurs abgelenkt. Wieviel Meter beträgt die Stromgeschwindigkeit? Wieviel Meter beträgt die Breite des Flusses, und welchen Weg hat das Boot zurückgelegt, wenn es nach einer Fahrzeit von $4^m\,30^s$ das jenseitige Ufer erreicht?

26. Es sind die Radien zweier Rollen gegeben $R = 60\,cm$, $r = 20\,cm$, sowie der Abstand ihrer Mittelpunkte $d = 1{,}20\,m$. Es soll die Länge l eines um die Rollen zu legenden Riemens berechnet werden. Wie groß ist die Länge des Riemens, wenn er gekreuzt ist?

Kapitel IV.

Erweiterung des Funktionsbegriffes für beliebige Winkel.

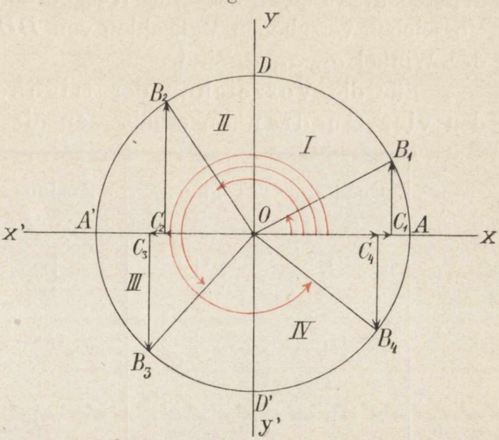
a) Die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0^0 bis 360^0.

Da im Dreieck auch stumpfe und im Viereck überstumpfe Winkel auftreten können, so ist es nötig, daß wir die in Kapitel II *a* für spitze Winkel im rechtwinkligen Dreieck gegebenen Erklärungen der trigonometrischen Funktionen erweitern. Diese Erweiterung ergibt sich unter Benutzung der in Kapitel II *c* benutzten Darstellung.

Wir beschreiben um den Anfangspunkt O (Fig. 16) eines Koordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser gleich der Längeneinheit und tragen einen beliebigen Winkel α (in Fig. 16 einen spitzen Winkel) als Zentriwinkel so ein, daß der eine Schenkel stets mit der positiven Richtung der Abszissenachse zusammenfällt; für den Winkel $\alpha = 90^0$ fällt der zweite Schenkel mit der positiven Richtung der Ordinatenachse zusammen.

Die Koordinatenachsen teilen den Kreis in vier Quadranten. Wir sprechen dann von Winkeln im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten, je nachdem der bewegliche Schenkel im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten liegt.

Fig. 16.

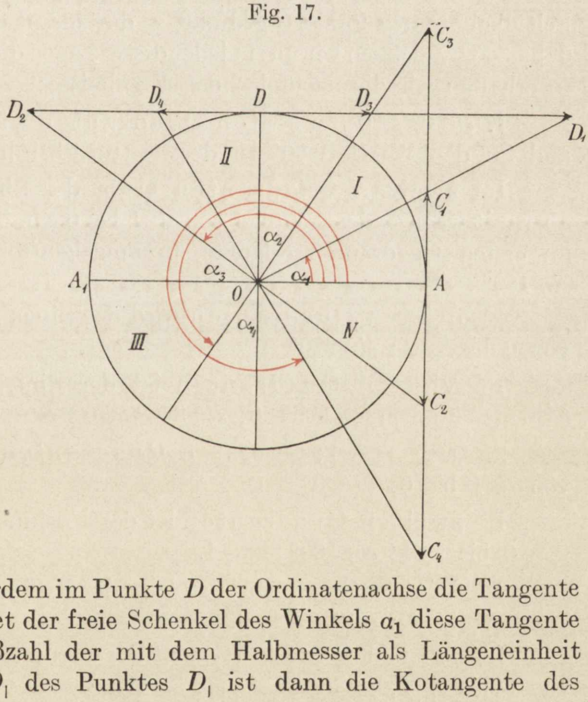


Fällen wir von dem Endpunkte des beweglichen Schenkels in jeder Lage auf die Abszissenachse XX^1 das Lot, so stellt in Übereinstimmung mit den Festsetzungen in Kapitel II *a* die Ordinate des Endpunktes gemessen durch den Halbmesser als Längeneinheit den Sinus, die Abszisse den Kosinus des Winkels dar.

Für die Vorzeichen der Strecken (Abszisse und Ordinaten) gelten die Festsetzungen, die durch die graphischen Darstellungen bekannt sind.

Errichtet man im Punkte A (Fig. 17) der Abszissenachse die Tangente an den um O mit der Längeneinheit beschriebenen Kreis, so schneidet der freie Schenkel des Winkels α_1 diese Tangente in C_1. Die Maßzahl der durch den Halbmesser als Längeneinheit gemessenen Ordinate C_1A des Punktes C_1 ist dann gleich der Tangente von α_1. In entsprechender Weise ergibt sich, daß die mit den richtigen Vorzeichen versehenen Maßzahlen von AC_2, AC_3, AC_4 die Tangenten der Winkel α_2, α_3, α_4 sind.

Fig. 17.



Zeichnet man außerdem im Punkte D der Ordinatenachse die Tangente an den Kreis, so schneidet der freie Schenkel des Winkels α_1 diese Tangente im Punkte D_1. Die Maßzahl der mit dem Halbmesser als Längeneinheit gemessenen Abszisse DD_1 des Punktes D_1 ist dann die Kotangente des

Winkels α_1. In entsprechender Weise erhält man, daß die mit den richtigen Vorzeichen versehenen Maßzahlen von DD_2, DD_3 und DD_4 die Kotangenten der Winkel α_2, α_3, α_4 sind.

Für die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen in den vier Quadranten erhält man die nachstehende Tabelle:

Quadrant	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
I.	+	+	+	+
II.	+	—	—	—
III.	—	—	+	+
IV.	—	+	—	—

b) Werteänderungen der trigonometrischen Funktionen in den vier Quadranten.

Lassen wir in Fig. 16 und 17 den beweglichen Schenkel des Winkels zuerst mit dem festen zusammenfallen, und denken wir uns dann diesen Schenkel um den Punkt O gedreht, so durchläuft der Winkel alle Werte von 0^0 bis 360^0. Zeichnen wir uns in jeder dieser Lagen die zugehörigen Funktionen, so erhalten wir die nachfolgenden Ergebnisse:

1. $\sin 0^0 = 0$; im ersten Quadranten wächst der Sinus von 0 an und für den Winkel 90^0 ist der Sinus gleich $+1$.

Im zweiten Quadranten bleibt der Sinus positiv; er nimmt aber mit wachsendem Winkel von $+1$ bis 0 ab, indem er die Werte, die er im ersten Quadranten erlangte, in umgekehrter Reihenfolge durchläuft; $\sin 180^0 = 0$.

Im dritten Quadranten wird der Sinus negativ und nimmt ab von 0 bis -1; $\sin 270^0 = -1$.

Im vierten Quadranten ist der Sinus ebenfalls negativ und nimmt zu von -1 bis 0; $\sin 360^0 = 0$.

2. $\cos 0^0 = +1$; im ersten Quadranten nimmt der Kosinus ab von $+1$ bis 0; $\cos 90^0 = 0$.

Im zweiten Quadranten ist der Kosinus negativ; er nimmt ab von 0 bis -1; $\cos 180^0 = -1$.

Im dritten Quadranten bleibt der Kosinus negativ; er nimmt zu von -1 bis 0; $\cos 270^0 = 0$.

Im vierten Quadranten ist der Kosinus positiv und nimmt zu von 0 bis $+1$; $\cos 360^0 = +1$.

3. $tg\,0^0 = 0$; im ersten Quadranten wächst die Tangente von 0 bis $+\infty$; $tg\,90^0 = +\infty$; im zweiten Quadranten ist sie negativ und wächst von $-\infty$ bis 0; $tg\,180^0 = 0$; im dritten Quadranten verhält sie sich wie im ersten, im vierten wie im zweiten Quadranten. Es ist $tg\,270^0 = \infty$, $g\,360^0 = 0$.

4. $cotg\,0^0 = \infty$; im ersten Quadranten nimmt die Kotangente von ∞ bis 0 ab; $cotg\,90^0 = 0$; im zweiten Quadranten ist sie negativ und nimmt von 0 bis $-\infty$ ab; $cotg\,180^0 = -\infty$; im dritten Quadranten verhält sie sich wie im ersten und im vierten wie im zweiten. Es ist $cotg\,270^0 = 0$; $cotg\,360^0 = +\infty$.

Zur bequemeren Übersicht stellen wir die ausgezeichneten Werte der Funktionen in folgender Tabelle zusammen:

	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
0^0	0	$+1$	0	$+\infty$
90^0	$+1$	0	$+\infty$	0
180^0	0	-1	0	$-\infty$
270^0	-1	0	$+\infty$	0
360^0	0	$+1$	0	$+\infty$

c) Beziehungen zwischen den Funktionen der Winkel, die größer als 90⁰ sind und den Funktionen der Winkel im ersten Quadranten.

1. Es sei (Fig. 18 *a*) Winkel $B_1OA = \alpha$ ein spitzer Winkel, infolgedessen Winkel $B_2OA = 90^0 + \alpha$ ein stumpfer Winkel. Auf Grund der in *a*) getroffenen Festsetzungen, ergibt sich unter Benutzung der Kongruenz von rechtwinkligen Dreiecken:

$$\left.\begin{aligned} sin\,(90^0 + \alpha) &= + cos\,\alpha \\ cos\,(90^0 + \alpha) &= - sin\,\alpha \\ tg\,(90^0 + \alpha) &= - cotg\,\alpha \\ cotg\,(90^0 + \alpha) &= - tg\,\alpha \end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

$$\left.\begin{aligned} sin\,(180^0 - \alpha) &= + sin\,\alpha \\ cos\,(180^0 - \alpha) &= - cos\,\alpha \\ tg\,(180^0 - \alpha) &= - tg\,\alpha \\ cotg\,(180^0 - \alpha) &= - cotg\,\alpha \end{aligned}\right\}\ \text{II.}$$

Aus den Formeln I und II erkennt man, daß die Funktionen von stumpfen Winkeln sich auf zwei Arten durch Funktionen spitzer Winkel

Fig. 18 *a*.

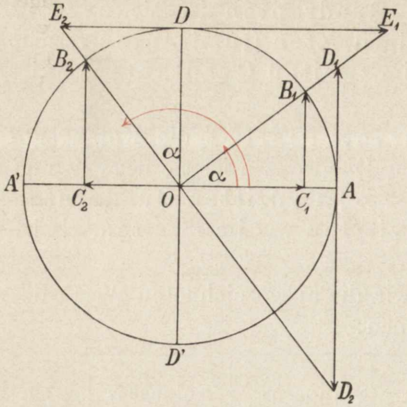
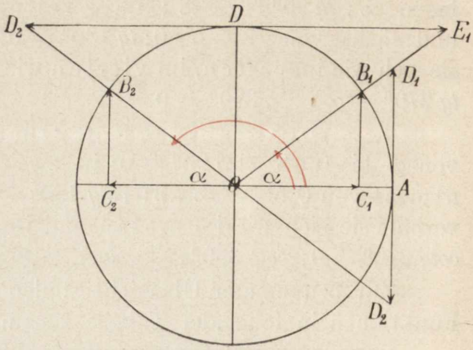


Fig. 18 *b*.



ausdrücken lassen. Von besonderer Bedeutung sind die Formeln II, die aussagen, daß jede Funktion eines stumpfen Winkels gleich ist der Funktion seines Nebenwinkels, der Sinus mit dem gleichen, die anderen Funktionen mit entgegengesetzten Vorzeichen.

Fig. 19 *a*.

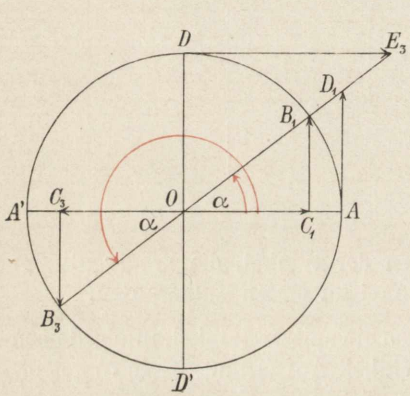
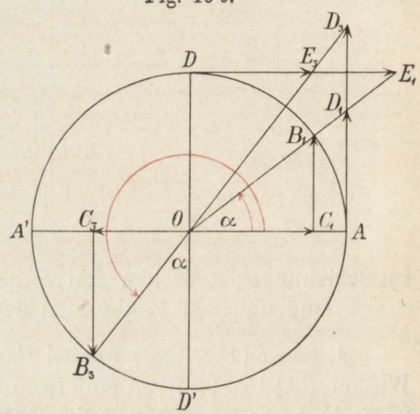


Fig. 19 *b*.



2. Jeder Winkel im dritten Quadranten kann entweder in der Form $180^0 + a$ oder $270^0 - a_1$ geschrieben werden, wo a und a_1 spitze Winkel sind. Aus den Figuren 19 *a* und 19 *b* ergeben sich wie bei den stumpfen Winkeln die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^0 + \alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(180^0 + \alpha) &= -\cos\alpha \\ tg(180^0 + \alpha) &= +tg\,\alpha \\ cotg(180^0 + \alpha) &= +cotg\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(270^0 - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \cos(270^0 - \alpha) &= -\sin\alpha \\ tg(270^0 - \alpha) &= +cotg\,\alpha \\ cotg(270^0 - \alpha) &= +tg\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{IV.}$$

3. Es ergeben sich entsprechend für die Winkel im vierten Quadranten (Fig. 20 *a* und 20 *b*) die Formeln:

Fig. 20 *a*.

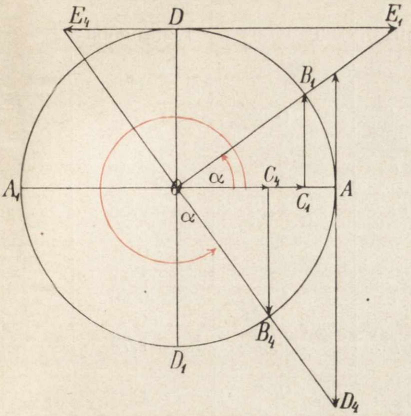
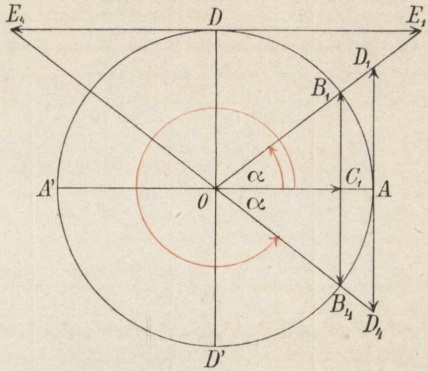


Fig. 20 *b*.



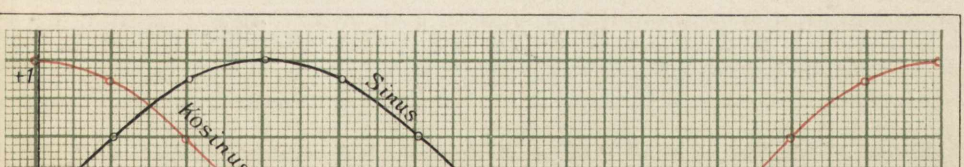
$$\left.\begin{aligned} \sin(270^0+\alpha) &= -\cos\alpha \\ \cos(270^0+\alpha) &= +\sin\alpha \\ tg(270^0+\alpha) &= -cotg\,\alpha \\ cotg(270^0+\alpha) &= -tg\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{V.}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(360^0-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(360^0-\alpha) &= +\cos\alpha \\ tg(360^0-\alpha) &= -tg\,\alpha \\ cotg(360^0-\alpha) &= -cotg\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{VI.}$$

d) Graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen im Intervall von 0⁰ bis 360⁰.

Zur graphischen Darstellung (Fig. 21 und 22) benutzen wir die nachstehende Wertetabelle, deren Zahlen sich mittels der vorher abgeleiteten Beziehungen aus

Fig. 21. Sinus- und Kosinuskurve.



der Funktionstabelle (Seite 199) bei Abrundung auf zwei Dezimalstellen ergeben.

Wertetabelle.

	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
0^0	0	$+1$	0	$+\infty$
30^0	$+0,50$	$+0,87$	$+0,58$	$+1,73$
60^0	$+0,87$	$+0,50$	$+1,73$	$+0,58$
90^0	$+1$	0	$+\infty$	0
120^0	$+0,87$	$-0,50$	$-1,73$	$-0,58$
150^0	$+0,50$	$-0,87$	$-0,58$	$-1,73$
180^0	0	-1	0	$-\infty$
210^0	$-0,50$	$-0,87$	$+0,58$	$+1,73$
240^0	$-0,87$	$-0,50$	$+1,73$	$+0,58$
270^0	-1	0	$+\infty$	0
300^0	$-0,87$	$+0,50$	$-1,73$	$-0,58$
330^0	$-0,50$	$+0,87$	$-0,58$	$-1,73$
360^0	0	$+1$	0	$-\infty$

e) Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel.

Die im Kapitel II *b* abgeleiteten Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels:

$$1.\ tg\,\alpha \,.\, cotg\,\alpha = 1;\quad 2.\ tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha};\ cotg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha};$$

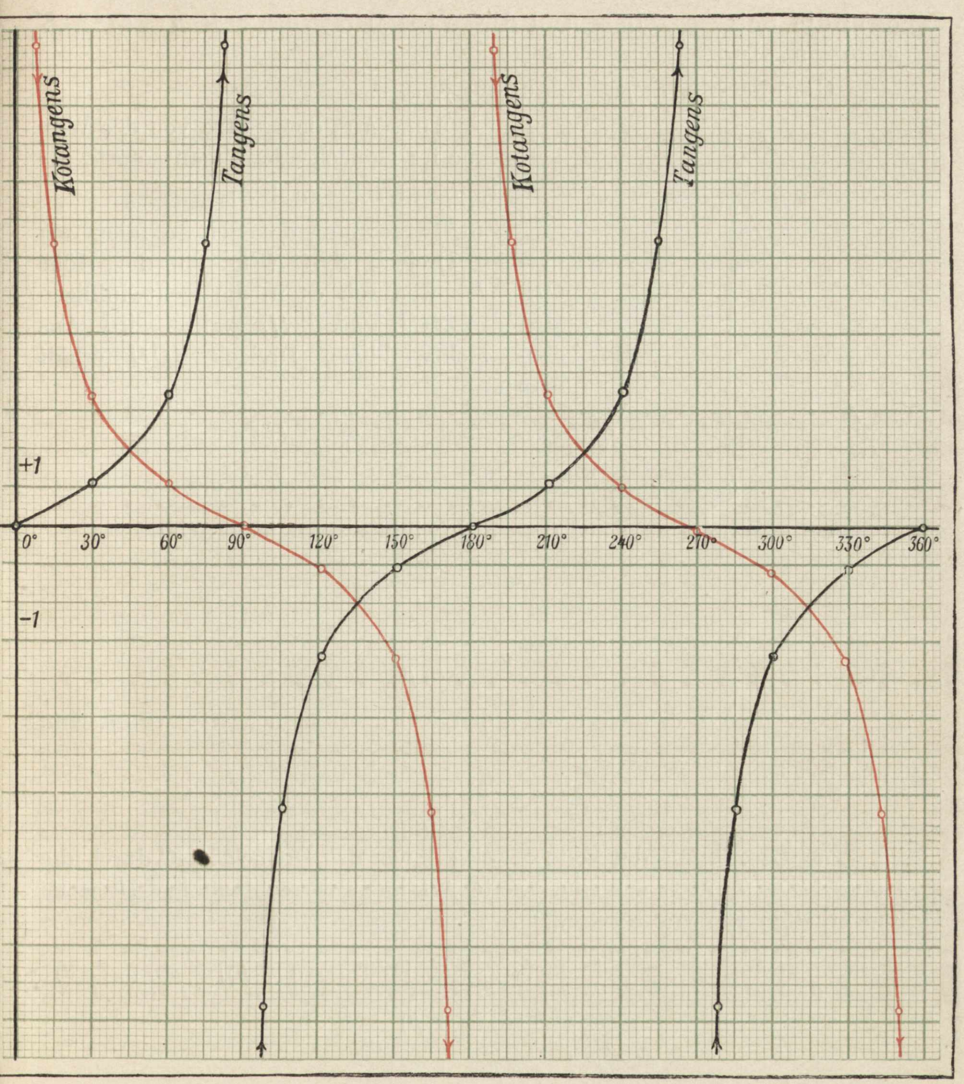
$$3.\ sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

gelten zunächst nur für spitze Winkel.

Daß die beiden ersten Beziehungen auch für beliebige Winkel gültig sind, folgt unmittelbar aus den erweiterten Definitionen für die Funktionen.

Die allgemeine Gültigkeit der dritten Gleichung leuchtet ebenfalls unmittelbar ein, wenn wir beachten, daß die Größen $sin^2\,\alpha$ und $cos^2\,\alpha$ auch für negative Werte von $sin\,\alpha$ und $cos\,\alpha$ nur positive Werte besitzen.

Fig. 22. Tangens- und Kotangenskurve.



Kapitel V.

Die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke.

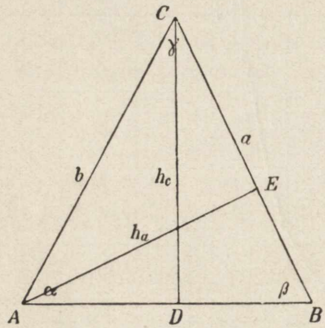
a) Einleitung.

Die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke läßt sich durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke ausführen. Es soll diese Berechnung zunächst an einem Zahlenbeispiel erläutert werden.

Aufgabe. Es soll ein Dreieck berechnet werden, von dem die Seite $b = 15\,m$ und die Winkel $\alpha = 59^0\,29{,}4'$, $\beta = 67^0\,22{,}8'$ gegeben sind.

Gegeben: b, α, β. Gesucht: γ, a, c.

Fig. 23.



Lösung. Aus dem Satze von der Winkelsumme im Dreieck erhält man sofort:

1. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Zur Berechnung der Seite a fällen wir in dem Dreieck ABC (Fig. 23) die Höhe $CD = h_c$, wodurch es in die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD zerlegt wird. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ACD erhält man:

$$\frac{h_c}{b} = \sin \alpha$$

$$h_c = b \sin \alpha.$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD

$$\frac{h_c}{a} = \sin \beta$$

$$a = \frac{h_c}{\sin \beta}.$$

Setzt man in den Wert von a den vorher erhaltenen Wert von h_c ein, so folgt:

2. $$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Zur Berechnung der Seite c zerlegen wir das Dreieck ABC durch die Höhe $AE = h_a$ noch auf eine zweite Art in zwei rechtwinklige Dreiecke und erhalten wie vorher:

$$\frac{h_a}{b} = \sin \gamma = \sin\,[180^0 - (\alpha + \beta)] = \sin\,(\alpha + \beta)$$

$$h_a = b \sin\,(\alpha + \beta)$$

$$\frac{h_a}{c} = \sin \beta$$

$$c = \frac{h_a}{\sin \beta}.$$

3. $$c = \frac{b \sin\,(\alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

Zahlenbeispiel.

1. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$; $\gamma = 180^0 - (59^0\,29{,}4' + 67^0\,22{,}8')$ $= 180^0 - 126^0\,52{,}'2 = \mathbf{53^0\,7',8}$.

2. $a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$; $\log a = \log b + \log \sin \alpha - \log \sin \beta$.

$$\begin{array}{rl} \log b = & 1,17609 \\ \log \sin \alpha = & 9,93528 - 10 \\ \hline & 11,11137 - 10 \\ \log \sin \beta = & 9,96524 - 10 \\ \hline \log a = & 1,14613 \\ a = & \mathbf{14}\ m. \end{array}$$

3. $c = \frac{b \sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta}$; $\log c = \log b + \log \sin (\alpha + \beta) - \log \sin \beta$.

$$\begin{array}{rl} \log b = & 1,17609 \\ \log \sin (\alpha + \beta) = & 9,90309 - 10 \\ \hline & 11,07918 - 10 \\ \log \sin \beta = & 9,96524 - 10 \\ \hline \log c = & 1,11394 \\ c = & \mathbf{13}\ m. \end{array}$$

b) Der Sinussatz.

Bei der Zerlegung eines Dreiecks in rechtwinklige Dreiecke und der Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke ergeben sich einfache Beziehungen zwischen den Seiten und Winkel des allgemeinen Dreiecks, deren Kenntnis die jedesmalige Zerlegung überflüssig macht.

Fig. 24 *a*.

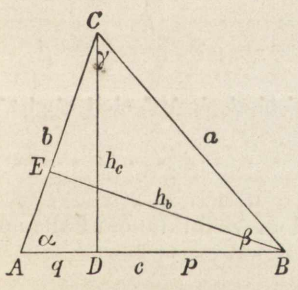
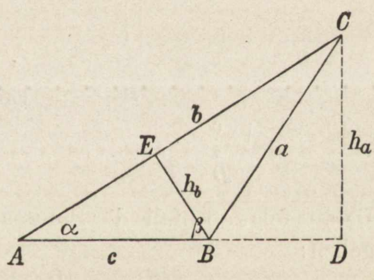


Fig. 24 *b*.



Aus Fig. 24 *a*, in der das Dreieck ABC auf zwei Arten durch die Höhen CD und BE in rechtwinklige Dreiecke zerlegt ist, erhält man:

1. $\frac{h_c}{b} = \sin \alpha$; 2. $\frac{h_c}{a} = \sin \beta$.

Durch Division von 1 durch 2 erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

In gleicher Weise erhält man:

3. $\dfrac{h_b}{c} = \sin \alpha$; 4. $\dfrac{h_b}{a} = \sin \gamma$

und durch Division von 3 durch 4:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

Mithin ergibt sich allgemein:

$$\boldsymbol{a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.}$$

Sinussatz. In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel[1]).

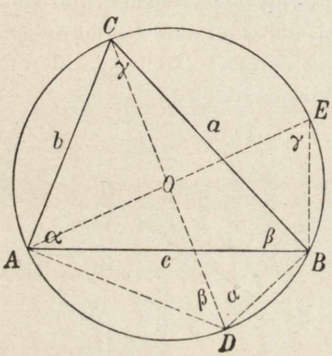
Anmerkung. Die Beweisführung bleibt bei dem stumpfwinkligen Dreieck (Fig. 24 *b*) die gleiche, da

$$\sin (180^0 - \beta) = \sin \beta = \frac{h_c}{a}$$

ist.

Der Sinussatz läßt sich noch auf eine zweite Art herleiten. Man zeichne zu dem Zwecke um das Dreieck ABC (Fig. 25) den Umkreis, ziehe den durch C gehenden Durchmesser CD desselben und verbinde D mit A und B. Aus den rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD erhält man, wenn man den Durchmesser des Umkreises mit $2r$ bezeichnet:

Fig. 25.



$$\frac{a}{2r} = \sin \alpha; \quad \frac{b}{2r} = \sin \beta.$$

Entsprechend ergibt sich auch:

$$\frac{c}{2r} = \sin \gamma.$$

Hieraus folgt ebenfalls der Sinussatz, dem wir in diesem Falle noch die Form geben:

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r.}$$

[1]) Die Begründer der Trigonometrie, die griechischen Mathematiker, und die Förderer derselben, die arabischen Mathematiker, führen die Berechnung allgemeiner Dreiecke auf die der rechtwinkligen Dreiecke zurück. Der Sinussatz, die erste allgemeine Beziehung zwischen den Stücken eines allgemeinen Dreiecks, wurde zuerst von dem persischen Astronomen Nasir Eddin Tusi (1201—1274), einem Günstling des Mongolenführers Hulagu, in seiner Schrift „Schakl al Kattâ" („Über die Figur der Schneidenden") aufgestellt.

Aus letzterer Gleichung folgt die schon in der Planimetrie (Kapitel XVI *c*) erwähnte Beziehung zwischen jeder Dreiecksseite, ihrem Gegenwinkel und dem Halbmesser des Umkreises, wonach durch zwei dieser Größen die dritte bestimmt ist.

c) Diskussion des Sinussatzes und Anwendung desselben zur Lösung der beiden ersten Grundaufgaben.

Die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

die der algebraische Ausdruck des Sinussatzes ist, enthält vier Dreiecksstücke. Sind drei der Stücke gegeben, so kann man das vierte mittels der Gleichung berechnen. Es kann gegeben sein:

1. a, α, β, man findet b; 2. a, b, α, man findet β.

I. Grundaufgabe. Es soll ein Dreieck berechnet werden aus einer Seite a und den beiden Winkeln α und β.

Gegeben: a, α, β. Gesucht: γ, b, c.

Lösung. Zur Bestimmung der drei gesuchten Größen sind drei Gleichungen erforderlich.

Aus dem Satze der Winkelsumme folgt:

1. $$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Nach dem Sinussatz erhält man:

2. $$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

3. $$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

Außerdem ist:

4. $$F = \frac{a\, h_a}{2} = \frac{a\, c \sin \beta}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

Zahlenbeispiele:

1. $a = 150\, m$;	$\alpha = 96^0\, 43'\, 58''$;	$\beta = 9^0\, 31'\, 38''$.
2. $b = 630{,}78\, m$;	$\alpha = 77^0$;	$\beta = 37^0\, 58'$.
3. $c = 730{,}5\, m$;	$\alpha = 75^0\, 41'\, 15''$;	$\beta = 49^0\, 12'\, 54''$.
4. $c = 451{,}68\, m$;	$\alpha = 44^0\, 17'\, 20''$;	$\gamma = 104^0\, 54'\, 10''$.

II. Grundaufgabe. Es soll ein Dreieck aus zwei Seiten a und b und dem Gegenwinkel α einer Seite berechnet werden.

Gegeben: a, b, α. Gesucht: β, γ, c.

Lösung. Durch den Sinussatz erhält man:

1. $$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

Mittels des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks ergibt sich:

2. $$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Die Seite c berechnet man nach dem Sinussatz und erhält:

3. $$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Diskussion der Lösung. 1. Fall. $a > b$. In diesem Falle muß der Winkel β, der der kleineren Seite gegenüberliegt, ein spitzer sein, und er ist durch Gleichung 1 eindeutig bestimmt. Die Aufgabe liefert in diesem Falle nur eine Lösung:

2. Fall. $a < b$. In Übereinstimmung mit der Konstruktion (Planimetrie, Kapitel X c, III) ergeben sich auch hier für die zu suchenden Dreiecksstücke β, γ und c je zwei Werte.

Aus $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ erhält man für β, da $\sin \beta = \sin (180^0 - \beta)$, zwei Werte, nämlich den spitzen Tafelwinkel und seinen Supplement winkel $\beta^{\prime}$. Es ergeben sich daher auch für γ und c je zwei Werte.

Zahlenbeispiel.

$a = 24{,}4\ m$; $b = 12{,}5\ m$; $\beta = 10^0\, 23'\, 20''$.

1. $$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1{,}38739 \\ \log \sin \beta &= 9{,}25606 - 10 \\ \hline &\ 10{,}64345 - 10 \\ \log b &= 1{,}09691 \\ \hline \log \sin \alpha &= 9{,}54654 - 10 \\ \alpha &= 20^0\, 36'\, 35'' \\ \alpha_1 &= 159^0\, 23'\, 25'' \\ \gamma &= 149^0\ \ 0'\ \ 5'' \\ \gamma_1 &= 10^0\, 13'\, 15'' \end{aligned}$$

2. $$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1{,}38739 \\ \log \sin \gamma &= 9{,}71182 - 10 \\ \hline &\ 11{,}09921 - 10 \\ \log \sin \alpha &= 9{,}54654 - 10 \\ \hline \log c &= 1{,}55267 \\ c &= 35{,}5\ m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1{,}38739 \\ \log \sin \gamma_1 &= 9{,}24906 - 10 \\ \hline &\ 10{,}63645 - 10 \\ \log \sin \alpha_1 &= 9{,}54654 - 10 \\ \hline \log c_1 &= 1{,}08991 \\ c_1 &= 12{,}3\ m. \end{aligned}$$

Zahlenbeispiele.

1. $a = 35\ m$,	$c = 14{,}29\ m$,	$\alpha = 123^0\, 39'\, 42''$.
2. $b = 43{,}3\ m$,	$c = 65{,}1\ m$,	$\beta = 38^0\, 52'\, 48''$.
3. $a = 1{,}94\ m$,	$b = 1{,}45\ m$,	$\alpha = 83^0\, 16'\ \ 2''$.
4. $a = 6{,}50\ m$,	$b = 4{,}33\ m$,	$\beta = 38^0\, 52{,}'6$.

d) Der Kosinussatz.

Aufgabe. Es soll ein Dreieck berechnet werden, von dem die drei Seiten $a = 7\,m$, $b = 8\,m$, $c = 5\,m$ gegeben sind.

Gegeben: a, b, c. Gesucht: α, β, γ.

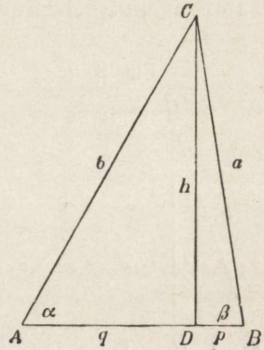


Fig. 26.

Lösung. Man zerlege das zu berechnende Dreieck ABC (Fig. 26) durch die Höhe $CD = h$ in zwei rechtwinklige Dreiecke ACD und BCD und bezeichne die Projektionen von a und b auf die Seite AB mit $BD = p$ und $AD = q$. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz erhält man:

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - q^2 \\ h^2 &= a^2 - p^2 = a^2 - (c - q)^2 \\ \hline b^2 - q^2 &= a^2 - (c - q)^2 \\ q &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}. \end{aligned}$$

Mit Benutzung der Werte von q und p ergibt sich:

$$p = c - q = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c}.$$

1. $$\cos \alpha = \frac{q}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}.$$

2. $$\cos \beta = \frac{p}{a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}.$$

Zerlegt man das Dreieck ABC noch auf eine zweite Art, etwa durch die Höhe von A aus in rechtwinklige Dreiecke, so erhält man auf gleiche Weise $\cos \gamma$ und damit γ. Einfacher ergibt sich der Winkel γ aus der Winkelsumme des Dreiecks, wenn man α und β berechnet hat.

3. $$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Zahlenbeispiel.

1. $$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{64 + 25 - 49}{80} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \mathbf{60^0}.$$

2. $$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} = \frac{49 + 25 - 64}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} \log \cos \beta &= \log 1 - \log 7 \\ \log 1 &= 10{,}00000 - 10 \\ \log 7 &= 0{,}84510 \\ \hline \log \cos \beta &= 9{,}15490 - 10 \\ \beta &= \mathbf{81^0\,47'\,12''}. \end{aligned}$$

3. $$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = \mathbf{38^0\,12'\,48''}.$$

Anmerkung. In dieser Weise führten die Mathematiker des Altertums und des Mittelalters die Berechnung durch; erst der französische Mathematiker und Staatsbeamte Vieta (1540 — 1603, Paris) faßte 1593 die beiden obigen Operationen, die Berechnung der Seitenabschnitte und die Berechnung der Winkel durch die Kosinusfunktion, trigonometrisch zusammen und gelangte so zu dem Kosinussatz.

Fig. 27 *a*.

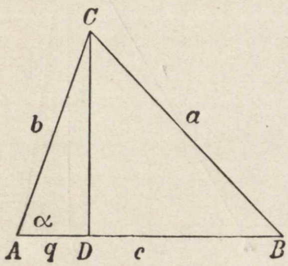
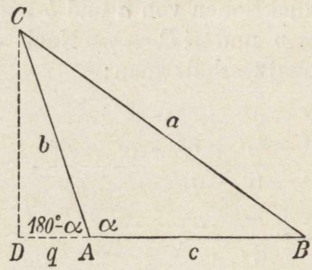


Fig. 27 *b*.



Ist in dem Dreieck ABC (Fig. 27 *a* u. *b*) die Strecke $AD = q$ die Projektion der Seite AC auf AB, so ist, wenn α ein spitzer Winkel ist, nach dem verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz (Planimetrie, Kapitel XIX *d*, Satz 69 und Kapitel XX, V 3):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q$$

Da $q = b \cos \alpha$, so folgt:

1. $$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha.}$$

Ist α ein stumpfer Winkel, so ist (s. o.):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c\,q$$

In diesem Falle ist $q = b \cos (180^0 - \alpha) = - b \cos \alpha$ und daher auch:

1. $$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha.}$$

Auf gleiche Weise ergibt sich:

2. $$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\cos\beta.}$$

3. $$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma.}$$

Die Gleichungen 1—3 enthalten den verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz in trigonometrischer Form oder den sogenannten **Kosinussatz**, der mithin lautet:

Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Dreiecksseiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

e) Diskussion des Kosinussatzes und Anwendung desselben zur Lösung der beiden anderen Grundaufgaben.

Die Gleichung:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha,$$

die der algebraische Ausdruck des Kosinussatzes ist, enthält vier Dreiecksstücke. Sind drei der Stücke gegeben, so kann man das vierte mittels der Gleichung berechnen.

1. Es seien b, c, α gegeben; dann findet man aus der Gleichung die Seite a.

2. Es seien a, b, c gegeben; dann findet man aus der Gleichung den Winkel α.

III. Grundaufgabe. Es soll ein Dreieck berechnet werden aus zwei Seiten b und c und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α.

Gegeben: b, c, α. Gesucht: a, β, γ.

Lösung. Zur Bestimmung der drei gesuchten Größen sind drei Gleichungen erforderlich. Mittels des Kosinussatzes erhält man die dritte Seite:

1. $$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha}.$$

Die beiden Winkel berechnet man mittels des Sinussatzes; man erhält:

2. $$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}.$$

3. $$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a}.$$

Außerdem erhält man den Flächeninhalt F aus der Gleichung:

4. $$F = \frac{c\,h_c}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}.$$

Wie lautet die Gleichung 4 in Worten?

Zahlenbeispiele.

1. $b = 75\,m$, $c = 29\,m$, $\alpha = 117^0\,20'\,33''$.
2. $a = 13\,m$, $c = 15\,m$, $\beta = 59^0\,29'\,23''$.

IV. Grundaufgabe. Es soll ein Dreieck aus den drei Seiten a, b, c berechnet werden.

Gegeben: a, b, c. Gesucht: α, β, γ.

Lösung. Zur Bestimmung der drei gesuchten Winkel erhält man aus dem Kosinussatze die drei Gleichungen (s. S. 226):

1. $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}.$$

2. $$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}.$$

3. $$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}.$$

Der Flächeninhalt F des Dreiecks berechnet sich nach der heronischen Formel. (S. Planimetrie, Kapitel XX, IV, Aufgabe 14.)

Zahlenbeispiele.

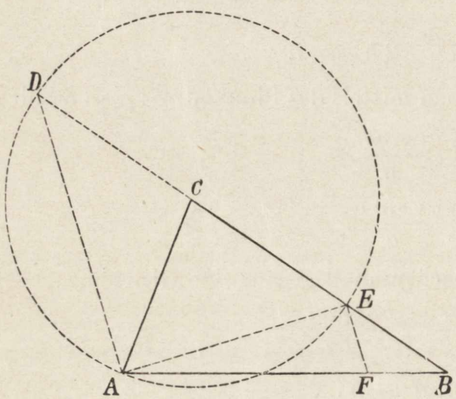
1. $a = 40\,cm$, $b = 37\,cm$, $c = 23\,cm$.
2. $a = 424\,m$, $b = 318\,cm$, $c = 522\,m$.

Anmerkung. Bei größeren Zahlen ist die Berechnung der Seiten und Winkel mittels der Formeln, die sich aus dem Kosinussatz ergeben, da sich diese nicht zur logarithmischen Berechnung eignen, unbequem. Es sollen daher im folgenden Abschnitt noch andere Sätze zur Lösung der dritten und vierten Grundaufgabe abgeleitet werden.

f) Der Tangentensatz und die Mollweideschen Formeln.

1. Der Tangentensatz.

Fig. 28.



Man schlage um den Eckpunkt C des Dreiecks ABC (Fig. 28) mit CA als Halbmesser den Kreis, der CB in E und die Verlängerung von BC in D schneidet, so ist:

$$BD = a + b$$
$$BE = a - b.$$

Verbindet man A mit E und D, so ist der Winkel DAE ein Rechter; zieht man EF parallel AD, so ist auch Winkel AEF ein Rechter. Es verhält sich dann:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AD}{EF} = \frac{AE \,.\, tg\, DEA}{AE \,.\, tg\, EAF} = \frac{tg\, DEA}{tg\, EAF}, \quad \text{oder:}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\, DEA}{tg\, EAF}.$$

Aus dem gleichschenkligen Dreieck CAE erhält man:

$$\sphericalangle\, CAE = \sphericalangle\, CEA = 90^0 - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\, EAF = \sphericalangle\, CAF - \sphericalangle\, CAE = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Es ergibt sich daher:

$$1. \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$2. \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{tg\,\frac{\beta+\gamma}{2}}{tg\,\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

3. $$\frac{c+a}{c-a}=\frac{tg\,\frac{\gamma+\alpha}{2}}{tg\,\frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

Die Gleichungen 1—3 enthalten den **Tangentensatz**[1]), der mithin lautet:

In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Dreiecksseiten zu ihrem Unterschiede wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel zur Tangente des halben Unterschiedes derselben Winkel.

Schreibt man die Gleichung 1 in der Form:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{cotg\,\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}\quad\left[\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2}\right],$$

so enthält sie zwei Dreiecksseiten a, b, den von ihnen eingeschlossenen Winkel γ und den halben Unterschied der den Seiten gegenüberliegenden Winkeln. Sind daher von einem Dreieck zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben, so kann man mittels der Gleichung den halben Unterschied der diesen Seiten gegenüberliegendenWinkel berechnen: es folgt:

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\,cotg\,\frac{\gamma}{2}.$$

Da außerdem aber:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2},$$

so kann man aus $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ die Winkel α und β finden. Die fehlende Seite c erhält man dann mittels des Sinussatzes.

Wir erhalten dadurch eine für die logarithmische Rechnung bequeme Lösung der dritten Grundaufgabe. (S. 227.)

Zahlenbeispiel.

Es soll ein Dreieck berechnet werden, von dem gegeben sind die Seiten $a=1459\,m$, $b=399\,m$ und der eingeschlossene Winkel $\gamma=92^0\,11'\,18''$.

Lösung.

1. $$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\,cotg\,\frac{\gamma}{2}.$$

2. $$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2}.$$

---

[1]) In dieser Form stammt der Tangentensatz von Vieta (vgl. S. 226).

3. $$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

$$\begin{aligned} a &= 1459 \\ b &= \;\;399 \\ \hline a - b &= 1060 \\ a + b &= 1858 \\ \frac{\gamma}{2} &= 46^0\, 5'\, 39'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(a-b) &= \;\;3{,}02531 \\ \log \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} &= \;\;9{,}98341 - 10 \\ \hline & \;\;\;\;13{,}00872 - 10 \\ \log(a+b) &= \;\;3{,}26905 \\ \hline \log tg \frac{\alpha-\beta}{2} &= \;\;9{,}73967 - 10 \\ \frac{\alpha-\beta}{2} &= 28^0\, 46'\, 20''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+\beta}{2} &= 43^0\, 54'\, 21'' \\ \frac{\alpha-\beta}{2} &= 28^0\, 46'\, 20'' \\ \hline \alpha &= \mathbf{72^0\, 40'\, 41''} \\ \beta &= \mathbf{15^0\;\; 8'\;\; 1''} \\ \log a &= \;\;3{,}16406 \\ \log \sin \gamma &= \;\;9{,}99968 - 10 \\ \hline & \;\;\;\;13{,}16374 - 10 \\ \log \sin \alpha &= \;\;9{,}97985 - 10 \\ \hline \log c &= \;\;3{,}18389 \\ c &= \mathbf{1527{,}2\, m.} \end{aligned}$$

2. Die Mollweideschen Formeln.

In dem Dreieck ABD (Fig. 28) ist:

$$\sphericalangle ADB = \frac{\gamma}{2}.$$

$$\sphericalangle DAB = \frac{\gamma}{2} + \alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^0 + \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Mittels des Sinussatzes erhält man aus dem Dreieck ABD:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin DAB}{\sin ADB} = \frac{\sin\left(90^0 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}},$$

oder:

$$\text{I.} \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

In dem Dreieck ABE ist:

$$\sphericalangle AEB = 180^0 - \sphericalangle CEA = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^0 + \frac{\gamma}{2}.$$

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CAE = \alpha - \left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Es folgt daher nach dem Sinussatz aus dem Dreieck ABE:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{\sin BAE}{\sin AEB} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \left(90^0 + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}},$$

oder:

$$\text{II.} \quad \frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Die Gleichungen I und II heißen die **Mollweideschen Formeln**[1]).

Auf gleiche Weise erhält man die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{b + c}{a} &= \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ \frac{b - c}{a} &= \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}\right|$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{c + a}{b} &= \frac{\cos \frac{\gamma - \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \\ \frac{c - a}{b} &= \frac{\sin \frac{\gamma - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \end{aligned}\right|$$

Anmerkung. Durch Division der Mollweideschen Formeln (I : II) erhält man:

$$\frac{a + b}{a - b} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}.$$

[1]) Mollweide (Astronom 1774—1825, Leipzig) veröffentlichte diese Gleichungen 1808.

Es ist aber:

$$cotg \frac{\gamma}{2} = tg \frac{\alpha + \beta}{2}$$

und daher:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg \frac{\alpha+\beta}{2}}{tg \frac{\alpha-\beta}{2}},$$

d. i. der Tangentensatz.

Anwendung der Mollweideschen Formeln.

Die Mollweideschen Formeln enthalten 5 Größen a, b, c, $\frac{\alpha - \beta}{2}$, γ. Da man aus zwei Gleichungen nur zwei Größen berechnen kann, so müssen von diesen Größen drei gegeben sein. Sind zwei Seiten a und b sowie der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben, so kann man durch Division der Gleichungen c fortschaffen und erhält eine Gleichung zur Bestimmung von $\frac{\alpha - \beta}{2}$; da aber außerdem durch γ auch $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ gegeben ist, so kann man α und β berechnen. Aus einer der Mollweideschen Formeln berechnet sich dann c. Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung, wenn man die Gleichungen I und II in der folgenden Form schreibt:

$$(a-b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(a+b) \sin \frac{\gamma}{2} = c \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Zahlenbeispiel.

$a = 75\ m$, $b = 29\ m$, $\gamma = 117^0\, 20'\, 33''$.

$$a + b = 104; \quad a - b = 46; \qquad \frac{\gamma}{2} = 58^0\, 40'\, 16,''5.$$

$\log (a-b) = 1{,}66276;$	$\log (a+b) = 2{,}01703$
$\log \cos \frac{\gamma}{2} = 9{,}71596 - 10;$	$\log \sin \frac{\gamma}{2} = 9{,}93156 - 10$
$A = 11{,}37872 - 10;$	$B = 11{,}94859 - 10$
$\log \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}41493 - 10;$	$\log \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}98481 - 10$
$\log c = 1{,}96379$	$\log c = 1{,}96378$

$$\boldsymbol{c = 92\ m}.$$

$$A = 11{,}37872 - 10$$
$$B = 11{,}94859 - 10$$
$$A - B = \log tg \frac{\alpha - \beta}{2} = 9{,}43013 - 10$$
$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 15^0\ 4'\ 7''$$
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 31^0\ 19'\ 43,''5.$$
$$\boldsymbol{\alpha = 46^0\ 23'\ 50,''5}$$
$$\boldsymbol{\beta = 16^0\ 15'\ 36,''5.}$$

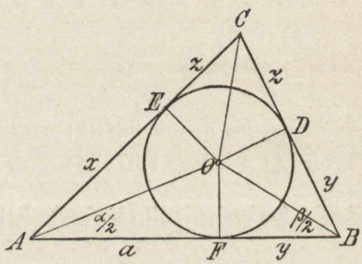
Zahlenbeispiele.

1. $a = 244\ m,\quad c = 123\ m,\quad \beta = 10^0\ 23'\ 20''.$
2. $b = 819{,}4\ m,\quad c = 605{,}9\ m,\quad \alpha = 82^0\ 52'.$
3. $a = 95{,}78\ m,\quad b = 43{,}01\ m,\quad \gamma = 32^0\ 16'\ 16''.$
4. $b = 3{,}476\ m,\quad c = 7{,}713\ m,\quad \alpha = 32^0\ 28'\ 19''.$
5. $a = 215{,}18\ m,\quad c = 297{,}92\ m,\quad \beta = 24^0\ 4'\ 38''.$

g) Zweite Lösung der Grundaufgabe IV (S. 227).

Es sei in das Dreieck ABC (Fig. 29) der Inkreis mit dem Mittelpunkt O gezeichnet; man ziehe in demselben die Berührungshalbmesser $OD = OE = OF = \varrho$ und verbinde O mit A, B und C, dann ist (vgl. Planimetrie, Kapitel XVIII, *b*):

Fig. 29.



$$AE = AF = s - a,$$
$$BD = BF = s - b,$$
$$CD = CE = s - c,$$

wo
$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken AOF, BOD und COE erhält man:

1. $$tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s - a}$$

2. $$tg \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s - b}$$

3. $$tg \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s - c}.$$

In der Planimetrie (Kapitel XX, II, und Kapitel XX, III, Aufgabe 14) fanden wir:

$$F = \varrho\, s;$$
$$F = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$

Hieraus folgt:

$$4. \qquad \varrho = \frac{F}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Die heronische Formel $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ liefert uns den Flächeninhalt.

Anmerkung. Setzt man den Wert von ϱ aus 4 in die Gleichungen 1—3 ein, so erhält man die Formeln:

$$1_a) \quad tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

$$2_a) \quad tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}.$$

$$3_a) \quad tg\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Zahlenbeispiel.

$a = 205\,m, \quad b = 53\,m, \quad c = 228\,m,$

$s = 243, \quad s-a = 38, \quad s-b = 190, \quad s-c = 15$

$$\begin{aligned} \log(s-a) &= 1{,}57978 \\ \log(s-b) &= 2{,}27875 \\ \log(s-c) &= 1{,}17609 \\ \hline &\ 5{,}03462 \\ \log s &= 2{,}38561 \\ \hline &\ 2{,}64901 \\ \log \varrho &= 1{,}32451 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \varrho &= 1{,}32451; \\ \log(s-a) &= 1{,}57978; \\ \hline \log tg\,\frac{\alpha}{2} &= 9{,}74473 - 10; \\ \frac{\alpha}{2} &= 29^0\,3'\,17''; \\ \alpha &= 58^0\,6'\,34''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \varrho &= 1{,}32451; \\ \log(s-b) &= 2{,}27875; \\ \hline \log tg\,\frac{\beta}{2} &= 9{,}04576 - 10; \\ \frac{\beta}{2} &= 6^0\,20'\,25''; \\ \beta &= 12^0\,40'\,50''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \varrho &= 1{,}32451 \\ \log(s-c) &= 1{,}17609 \\ \hline \log tg\,\frac{\gamma}{2} &= 10{,}14842 - 10 \\ \frac{\gamma}{2} &= 54^0\,36'\,18'' \\ \gamma &= 109^0\,12'\,36''. \end{aligned}$$

$$F = \sqrt{243.38.190.15} = \sqrt{3^6.2^2.19^2.5^2} = 3^3.2.19.5 = 27.2.19.5$$
$$= 5130\ qm.$$

Zahlenbeispiele.

1. $a = 35{,}44\ m$, $b = 27{,}79\ m$, $c = 40{,}13\ m$.
2. $a = 2{,}81\ m$, $b = 1{,}78\ m$, $c = 1{,}53\ m$.
3. $a = 5134\ m$, $b = 7268\ m$, $c = 9313\ m$.

h) Einfachere Aufgaben zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke aus Bestimmungsstücken, die nicht nur Seiten und Winkel desselben sind.

1. $c = 11\ cm$, $h_a = 6{,}6\ cm$, $b = 13\ cm$.
2. $b = 533\ m$, $h_c = 308\ m$, $\beta = 76^0\, 18'\, 52''$.
3. $b = 175\ m$, $h_c = 140\ m$, $p = 48\ m$.
4. $b = 445\ m$, $q = 203\ m$, $\gamma = 38^0\, 33'\, 43''$.
5. $p = 72\ m$, $q = 20\ m$, $h_c = 21\ m$.
6. $h_c = 16\ m$, $c = 18\ m$, $\beta = 64^0\, 12'\, 18''$.
7. $F = 234\ qm$, $b = 15\ m$, $c = 41\ m$.
8. $a = 145\ m$, $c = 150\ m$, $r = 75{,}52\ m$.
9. $c = 13\ m$, $\alpha = 59^0\, 29'\, 23''$, $r = 8{,}125\ m$.
10. $h_c = 105\ m$, $r = 82{,}17\ m$, $\alpha = 61^0\, 55'\, 39''$.
11. $h_a = 4{,}8\ m$, $h_b = 3\ m$, $\gamma = 36^0\, 52'\, 12''$.
12. $h_a = 516{,}5\ m$, $h_b = 740{,}15\ m$, $\beta = 43^0\, 33'\, 33''$.
13. $a + b = s = 584\ m$, $h_c = 51\ m$, $\beta = 6^0\, 43'\, 59''$.
14. $a - b = d = 1702\ m$, $h_c = 105\ m$, $\alpha = 50^0\, 2'$.
15. $h_c = 144\ m$, $m_c = 161{,}77\ m$; $c = 113\ m$.
16. $h_c = 160\ m$, $w_\gamma = 210{,}86\ m$, $a = 281\ m$.
17. $a + b = s = 1928\ m$, $c = 1916\ m$, $\gamma = 165^0\, 14'\, 59''$.
18. $a + b = s = 1134\ m$, $c = 116\ m$, $\alpha - \beta = \delta = 133^0\, 46'\, 54''$.
19. $a - b = d = 37{,}962\ m$, $c = 75{,}924\ m$, $\gamma = 40^0$.
20. $b - c = d = 26\ m$, $\alpha = 130^0\, 27'$, $\beta = 36^0\, 52'\, 12''$.
21. $b - c = d = 240\ m$, $a = 400\ m$, $\beta - \gamma = \delta = 18^0\, 41'\, 52''$.
22. $p - q = d = 292\ m$, $a = 389\ m$, $\beta = 29^0\, 4'\, 8''$.
23. $p - q = d = 80\ m$, $a = 109\ m$, $b = 61\ m$.
24. $r = 34\ m$, $\alpha = 36^0\, 25'$, $\beta = 51^0\, 27'\, 40''$.
25. $b + c = s = 1256\ m$, $\beta = 4^0\, 34'\, 52''$, $r = 1984{,}4\ m$.
26. $r = 13{,}54\ m$, $a = 25\ m$, $b = 26\ m$.
27. $r = 2025\ m$, $a = 597\ m$, $\beta - \gamma = \delta = 5^0\, 41'\, 47''$.
28. $\varrho = 250\ m$, $\alpha = 50^0\, 12'\, 25''$, $\beta = 74^0\, 4'\, 40''$.
29. $\varrho = 21\ m$, $c = 77\ m$, $\alpha = 53^0\, 7'\, 48''$.
30. $\varrho = 9\ m$, $a + b + c = 2\,s = 140\ m$, $\alpha = 22^0\, 37'\, 11''$.
31. $h_a + h_b = s = 31{,}98\ m$, $c = 21\ m$, $\gamma = 75^0\, 45'$.
32. $h_a + h_c = s = 62{,}12\ m$, $a = 197\ m$, $c = 240\ m$.
33. $h_c - h_a = d = 22{,}2\ m$, $b = 41\ m$ $\beta = 36^0\, 52'\, 12''$.
34. $h_c - h_a = d = 257{,}82\ m$, $a - c = d_1 = 259\ m$, $\alpha = 69^0\, 50'\, 39''$.

i) Eingekleidete Aufgaben.

1. Eine Kraft $R = 150\,kg$ soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, die mit ihr Winkel $\alpha = 50^0\,20'$ und $\beta = 25^0\,40'$ bilden. Wieviel Kilogramm betragen die beiden Seitenkräfte?

2. Eine $l = 1{,}50\,m$ lange Stange bildet mit dem wagerechten Erdboden einen Winkel $\alpha = 70^0\,40'$. Wie lang ist ihr Schatten, wenn sich die Sonne mit ihr in derselben Vertikalebene befindet und ihr Höhenwinkel $\beta = 48^0\,9'\,30''$ beträgt?

3. Um die Entfernung zweier durch einen Fluß getrennter Punkte A und B zu bestimmen, hat man auf dem horizontalen Ufer von B aus eine Standlinie $BC = 245\,m$ und die Winkel $ABC = 35^0\,56'\,36''$ und $ACB = 63^0\,15'\,24''$ gemessen. Wieviel Meter beträgt die Entfernung AB?

4. In einem Punkte A auf der Fahrt eines Schiffes erblickt man einen Leuchtturm L in NNW; nachdem das Schiff $a = 15\,sm$ nach WzN gesegelt hat, peilt man in B den Leuchtturm in NO. Wie weit ist das Schiff in B von dem Leuchtturm entfernt?

5. Auf einen Körper wirken unter einem Winkel $\alpha = 52^0\,10'\,24''$ zwei Kräfte $P_1 = 25\,kg$ und $P_2 = 48\,kg$. Welches ist die Größe und Richtung ihrer Resultante?

6. Am Rande eines Waldes läuft ein Weg $BC = 1{,}616\,km$; von dem Endpunkte B führt unter dem Winkel $\beta = 36^0\,6'$ nach einem Forsthaus A eine $1{,}362\,km$ lange Schneise. Von C aus soll ein Weg nach A angelegt werden; wie lang ist dieser Weg, und unter welchem Winkel muß er gegen BC angelegt werden?

6 *a*). In einem Bergwerke gehen von einem Punkte A aus zwei Stollen, von denen der eine $AB = 1{,}4\,km$, der andere $AC = 1{,}845\,km$ lang ist; ihre Richtungen bilden einen Winkel $BAC = \alpha = 102^0\,48'$ miteinander. Von B aus soll ein Verbindungsstollen nach C getrieben werden. Unter welchem Winkel ist derselbe anzulegen und wie lang wird der Stollen?

7. Ein Schiff fährt scheinbar $c = 120\,sm$ nach SO, während eine Strömung das Schiff um $a = 56{,}8\,sm$ nach NzO treibt. Welches ist die Länge und der Kurs des wahren Weges?

8. Eine Kraft $R = 420\,kg$ soll in zwei Seitenkräfte $P = 367\,kg$ und $Q = 275\,kg$ zerlegt werden. Unter welchen Winkeln gegen R greifen die Seitenkräfte an?

9. Bei einer trigonometrischen Vermessung hat man die Seiten eines Dreiecks $a = 1480\,m$, $b = 1752\,m$, $c = 1539\,m$ gefunden. Wie groß sind die Winkel und der Inhalt des Dreiecks?

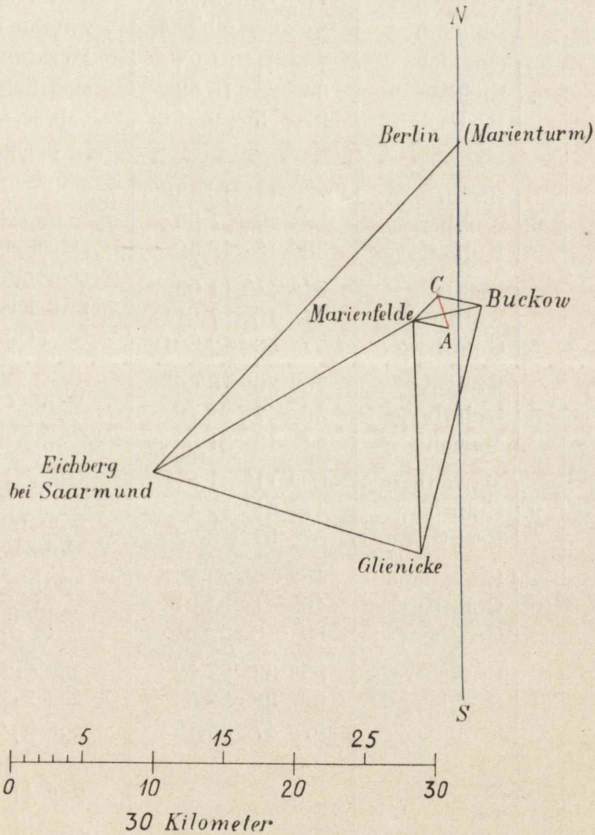
10. Um die Entfernung zweier Punkte A und B, zwischen denen sich ein Teich befindet, zu bestimmen, hat man von A aus unter einem Winkel $\alpha = 53^0\,20'\,25''$ gegen die Visierlinie AB eine Standlinie $AC = 171{,}7\,m$ und dann die Entfernung $CB = 206{,}5\,m$ gemessen. Wieviel Meter beträgt die Entfernung AB?

11. Unter welchem Gesichtswinkel erscheint ein geradliniger Waldrand $AB = 1825\ m$, wenn das Auge von dem Endpunkt A um $2385\ m$ und von dem andern $1675\ m$ entfernt ist?

12. Landesaufnahme und Gradmessung. (Nach Martus, Astronomische Geographie, der auch die Figuren 30 und 31 entnommen sind.)

Bei der Landesaufnahme und bei der Bestimmung der Länge des Meridianbogens (Gradmessung) wendet man das Triangulationsverfahren von Snellius (vgl. Planimetrie, S. 159, Anmerkung) an. Das zu vermessende Gebiet wird in Dreiecke zerlegt (trianguliert), deren Ecken weithin sichtbare Gegenstände (z. B. Kirchtürme) oder sogenannte trigonometrische Zeichen sind. Die letzteren bestehen aus drei Mastbäumen, die man in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks aufstellt und durch Querhölzer miteinander fest verbindet, so daß sie eine dreiseitige Pyramide bilden. Die Verlängerung der Pyramidenhöhe wird durch eine Stange markiert. Der Fußpunkt der Höhe wird mittels eines Senkbleies auf einer 1 m tief in die Erde gegrabenen Steinplatte bezeichnet. Hierüber wird ein Steinblock gesetzt und auf seiner oberen Grenzfläche der Fußpunkt des Lotes durch ein eingeritztes Kreuz festgelegt. Von einer einzigen, sehr genau gemessenen Grundlinie aus werden dann nur durch Winkelmessungen die Seiten der einzelnen Dreiecke des Dreiecksnetzes berechnet.

Fig. 30.



Bei der im Jahre 1846 vorgenommenen Gradmessung wurde 11 km südlich von Berlin zwischen den Dörfern Mariendorf und Lichtenrode eine Grundlinie (s. Fig. 30) $AC = 2{,}3363885\ km$ gemessen.

Von den Endpunkten der Grundlinie AC aus wurde nach den in der Fig. 30 angegebenen Punkten visiert und von diesen aus nach den folgenden, wie es die Verbindungslinien angeben. Aus den Beobachtungsresultaten, die in nachstehender Tabelle zusammengestellt sind, wurde die Strecke Berlin—Eichberg berechnet.

	Namen der Dreieckseckpunkte:	Winkel an diesen Eckpunkten:
1.	*A*	57° 46′ 17,91″
	C	67 54 53,98
	Marienfelde	54 18 48,11
2.	*C*	126° 50′ 40,83″
	Marienfelde	27 8 21,18
	Buckow	26 0 58,49
3.	Marienfelde	102° 3′ 1,95″
	Buckow	63 33 8,54
	Glienicke	14 23 49,51
4.	Marienfelde	60° 13′ 32,787″
	Glienicke	72 12 52,007
	Eichberg	47 33 35,206
5.	Glienicke	78° 31′ 34,93″
	Eichberg	64 23 15,53
	Berlin	37 5 9,54
6.	Berlin	83° 14′ 10,13‴
	Eichberg	58 27 1,55
	Kolberg	38 18 48,32
7.	Eichberg	54° 41′ 11,092″
	Kolberg	47 19 7,844
	Golmberg	77 59 42,304
8.	Kolberg	76° 39′ 16,66″
	Golmberg	39 7 21,78
	Marienberg	64 13 21,56
9.	Marienberg	80° 11′ 1,81″
	Golmberg	41 51 17,47
	Brautberg	57 57 40,72
10.	Brautberg	48° 50′ 23,20″
	Golmberg	46 1 33,91
	Großberg	85 8 2,89
11.	Brautberg	53° 33′ 27,08″
	Großberg	68 38 59,50
	Strauch	57 47 33,42

Aufgabe. Es soll die Strecke Berlin—Eichberg unter Benutzung der nebenstehenden Winkelwerte 1—5 berechnet werden. (Resultat: 30,5589 *km*.)

Anmerkungen zur Lösung. 1. Die Dreiecke sind als ebene Dreiecke angenommen.

2. Bei der Berechnung mit fünfstelligen Logarithmen sollen auch die Dezimalen der fünften Stelle mitberücksichtig werden. (Beispiel: $log\ AC = 0{,}36854.4.$)

Die Strecke Berlin—Eichberg wird dann als Grundlinie eines zweiten Dreiecksnetzes am Berliner Meridian in der aus Figur 31 ersichtlichen Weise benutzt. Die Ergebnisse der Winkelmessungen sind in der nebenstehenden Tabelle zusammengestellt.

Aufgabe. Es sollen die Teilstrecken der in Fig. 31 stärker gezeichneten Strecke Berlin—Strauch mit Benutzung der Winkelwerte 6—11 berechnet werden.

Man bestimme ferner den Winkel Eichberg — Berlin — Süd zu 41° 23′ 14,55″

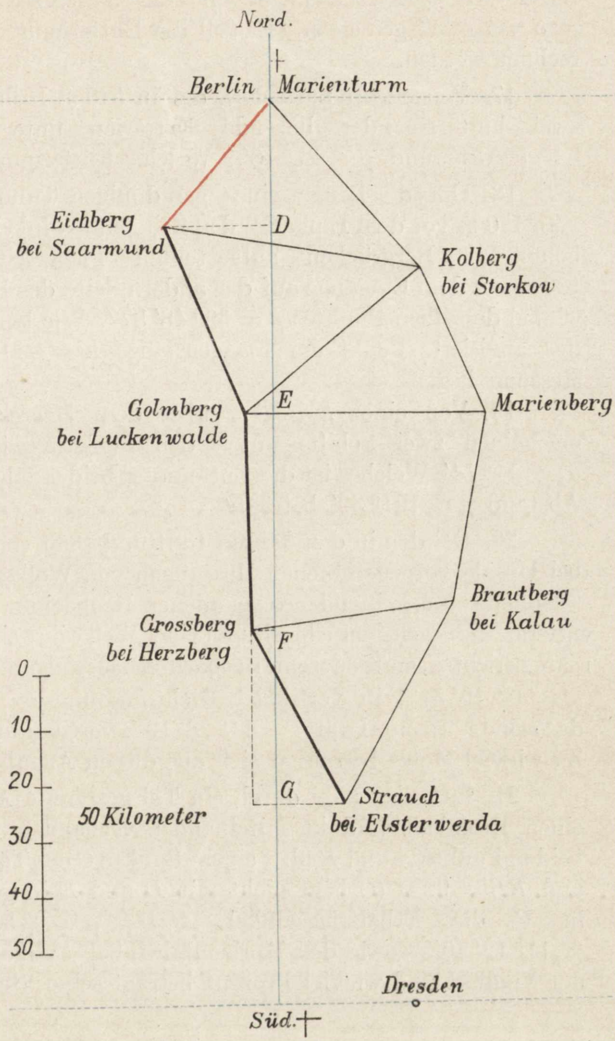
Da aus den berechneten Winkeln der Dreiecke 6—11 sich der Winkel Berlin—Eichberg—Golmberg zu 113° 8′ 14,957″ ergibt, so findet man die folgenden Winkel:

Eichberg—Golmberg—Nord 25° 28′ 30,493″,

Großberg—Golmberg—Ost 89° 31′ 28,411″,

Strauch — Großberg — Süd 26° 41′ 26,965″.

Fig. 31.



Aufgabe. Es sollen unter Benutzung dieser Winkel und der Ergebnisse der vorangehenden Aufgabe die Meridianabschnitte Berlin — D, DE, EF, FG und der Meridianbogen Berlin — G berechnet werden. (Resultat: 126,355 *km*.)

13. Um die Entfernung einer Insel von der Küste zu bestimmen, hat man von zwei $a = 2500\ m$ voneinander entfernten Punkten der Küste nach demselben Punkte C der Insel visiert und die Winkel $\beta = 67^0\,18'\,30''$ und $\gamma = 74^0\,19'\,25''$ gemessen. Wieweit ist die Insel von der Küste entfernt?

14. Um die Höhe SF eines der Türme des Kölner Domes zu bestimmen, hat man eine horizontale Standlinie $AB = a = 60\ m$ abgesteckt, deren Verlängerung durch den Fuß F des Turmes geht und in A und B die Erhebungswinkel $\alpha = 58^0\,11'\,48''$, $\beta = 76^0\,46'\,31''$ gemessen. Welche Höhe hat der Turm?

15. Man berechne die Breite AB eines Flusses, wenn in der Verlängerung von AB unter einem Winkel $\alpha = 64^0\,15'\,27$ gegen diese eine Standlinie $CD = a = 60\ m$ angelegt ist, die mit den Visierlinien von D nach den beiden Ufern die Winkel $CDA = \beta = 18^0\,21'\,36''$, $CDB = \gamma = 49^0\,10'\,46''$ bildet.

16. Um die Entfernung zweier unzugänglichen Punkte X und Y zu bestimmen, hat man eine Standlinie $AB = a = 300\ m$ und die Winkel

$XAY = \alpha = 72^0 29'$, $YAB = \beta = 22^0 35'$, $XBA = \gamma = 17^0 5'$ und $XBY = \delta = 75^0 32'$ gemessen. Es soll die Entfernung XY auf zwei Arten berechnet werden.

17. Von einem Luftschiff, das in 540 *m* Höhe schwebt, erblickt man zwei hintereinander liegende Batterien unter den Senkungswinkeln $\alpha = 50^0 34'$ und $\beta = 27^0 18'$. Welche Entfernung haben die Batterien?

18. Um die Länge eines geradlinigen Tunnels zu bestimmen, mißt man 120 *m* vor dem Eingange den Erhebungswinkel einer auf dem zu durchbohrenden Bergrücken aufgestellten Flaggenstange $\alpha = 43^0 22' 27''$; 120 *m* vor dem Eingange auf der andern Seite des Berges ist der Erhebungswinkel desselben Punktes $\beta = 39^0 48' 57''$. Wie lang wird der Tunnel, wenn der anvisierte Punkt der Flaggenstange $h = 590$ *m* über der Ebene der Messung liegt?

19. Von einer $h = 50$ *m* über dem Meeresspiegel gelegenen Stelle erscheinen zwei Schiffe unter den Senkungswinkeln $\alpha_1 = 13^0 49'$ und $\alpha_2 = 11^0 14'$. Welches ist die Entfernung beider Schiffe, wenn ihr scheinbarer Abstand $\beta = 101^0 39'$ beträgt?

20. Bei den in den Jahren 1884 und 1885 von Ekholm und Hagström bei Upsala vorgenommenen Messungen von Wolkenhöhen waren die beiden telephonisch miteinander verbundenen Beobachter $a = 1302$ *m* voneinander entfernt. Um nach demselben Punkt einer Wolke ihre einander zugekehrten Fernrohre zu richten, mußte der eine Beobachter das seinige in horizontaler Richtung um $\alpha = 33^0 19' 54''$, in vertikaler Richtung um $\gamma = 78^0 10' 12''$, der andere das seine horizontal um $\beta = 14^0 28' 12''$, vertikal um $\delta = 65^0 19' 9''$ drehen. Zu wieviel Meter berechnet sich aus diesen Angaben die Höhe der Wolke?

21. Es sollen zwei durch ein Tal getrennte Anhöhen A und B durch einen Eisenbahnviadukt miteinander verbunden werden. Die Höhen der beiden Punkte A und B über einem Punkte C des Tales sind $AD = a = 60$ *m* und $BE = 92$ *m* (C liegt nicht mit D und E in gerader Linie). Man mißt in C die Erhebungswinkel $ACD = \alpha = 9^0 50' 24''$ und $BCE = \beta = 11^0 12' 40''$, sowie den Horizontalwinkel $\gamma = 95^0 10' 15''$. Wie lang wird der Viadukt und wieviel Prozent beträgt seine Steigung?

III. Stereometrie.

Kapitel I.

Die Lage von Geraden und Ebenen im Raume.

a) Die Lage von Punkten und Geraden gegen eine Ebene.

1. Eine Ebene ist eine Fläche von der Beschaffenheit, daß jede Gerade, die zwei Punkte derselben enthält, ganz in der Fläche liegt.

2. Eine Gerade, die nicht ganz in einer Ebene liegt, kann mit ihr entweder nur einen oder gar keinen Punkt gemeinsam haben. Im ersteren Falle schneidet die Gerade die Ebene; der gemeinsame Punkt heißt der Schnittpunkt (Spurpunkt) der Geraden; im andern Falle heißen die Gerade und Ebene parallel.

3. Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene lassen sich unzählig viele parallele Geraden zu der Ebene legen.

4. Durch eine Gerade lassen sich unzählig viele Ebenen hindurchlegen.

5. Durch eine Gerade und einen außerhalb derselben gelegenen Punkt läßt sich nur eine Ebene legen.

6. Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben und in einer Ebene liegen, heißen parallele Geraden.

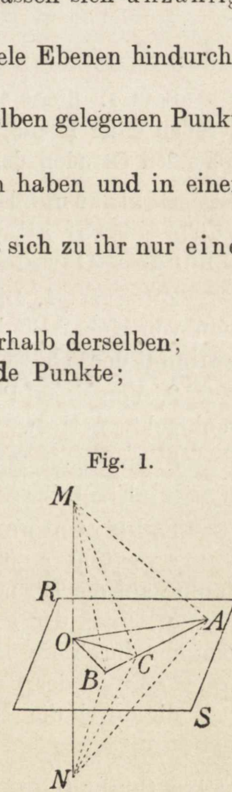
Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden läßt sich zu ihr nur eine parallele Gerade ziehen.

7. Eine Ebene ist bestimmt:

a) durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben;
b) durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte;
c) durch zwei sich schneidende Geraden;
d) durch zwei parallele Geraden.

8. Zwei Ebenen, die keinen Punkt gemeinsam haben, heißen parallele Ebenen.

Fig. 1.



9. Haben zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam, so haben sie alle Punkte einer Geraden gemeinsam; die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

10. In der Ebene RS (Fig. 1) seien OA und OB zwei sich in O schneidende Geraden, auf denen die Gerade MN senkrecht steht. Zieht man in RS durch O eine beliebige Gerade OC, so läßt sich zeigen, daß MN auch auf OC senkrecht steht. Man ziehe zu dem

Zwecke in der Ebene eine beliebige Gerade, die OA, OB, OC in A, B und C schneidet und mache $OM = ON$. Verbindet man M und N mit A, B und C, so sind OA und OB Symmetralen zu MN und daher ist:

$$MA = NA$$
$$MB = NB.$$

Es ist außerdem:

$$AB = AB$$
$$\triangle ABM \cong \triangle ABN$$
$$\sphericalangle MBA = \sphericalangle NBA.$$

Es ist ferner:

$$MB = NB$$
$$BC = BC$$
$$\triangle BCM \cong \triangle BCN$$
$$CM = CN.$$

Es ist aber auch:

$$OC = OC$$
$$OM = ON$$
$$\triangle CMO \cong CON$$
$$\sphericalangle MOC = \sphericalangle NOC = 1\,R,$$

d. h.: $MN \perp OC$.

Satz 1. Steht eine Gerade auf zwei durch ihren Spurpunkt gehenden Geraden einer Ebene senkrecht, so steht sie auf allen durch den Spurpunkt gehenden Geraden der Ebene senkrecht.[1]

Erklärung. Eine Gerade steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene gehenden Geraden der Ebene senkrecht steht.

Zusätze. **1.** Die Senkrechte ist die kürzeste von allen Geraden, die man von einem Punkte außerhalb einer Ebene nach ihr ziehen kann; sie bestimmt den Abstand oder die Entfernung des Punktes von der Ebene.

2. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann man auf sie nur eine Senkrechte fällen.

3. In einem Punkte einer Ebene kann man nur eine Senkrechte auf ihr errichten.

Erklärungen. *a*) Unter der Projektion eines Punktes auf eine Ebene versteht man den Fußpunkt der Senkrechten, die man von dem Punkte auf die Ebene fällen kann.

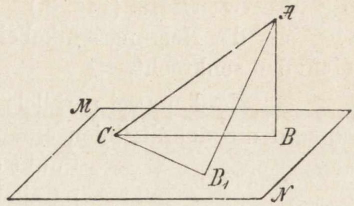
b) Unter der Projektion einer Strecke auf eine Ebene versteht man die durch die Projektion ihrer Endpunkte bestimmte Strecke.

c) Unter der Projektion einer Geraden auf eine Ebene versteht man die durch die Projektionen zweier ihrer Punkte bestimmte Gerade.

---

[1]) Der hier gegebene Beweis des Satzes rührt von dem französischen Mathematiker Cauchy (1789—1857, Paris) her.

Fig. 2.



Erklärung. Unter dem Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene versteht man den spitzen Winkel, den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene bildet.

Es sei (Fig. 2) AC eine die Ebene MN in C schneidende Gerade, BC ihre Projektion auf MN und CB_1 eine beliebige durch C gezogene Gerade der Ebene MN. Macht man $CB = CB_1$ und zieht AB_1, so ist:

$$\begin{array}{ll} AC = AC & \\ BC = B_1C & \\ AB < AB_1 & \text{(Zusatz 1, Satz 1.)} \\ \hline \sphericalangle ACB < \sphericalangle ACB_1. & \end{array}$$

Satz 2. Unter allen Winkeln, die eine Gerade mit den durch ihren Spurpunkt gehenden Geraden einer Ebene bildet, ist ihr Neigungswinkel der kleinste Winkel.

b) Die Lage zweier Ebenen gegeneinander.

1. Zwei Ebenen haben entweder keinen Punkt oder eine Gerade gemeinsam. Im ersteren Falle heißen sie parallel, im anderen Falle schneiden sie sich.

2. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so teilen sie den Raum in vier Teile; jeder dieser Teile heißt ein Flächenwinkel, die beiden Halbebenen, die ihn begrenzen, sind seine Schenkelebenen, ihre Schnittlinie seine Kante.

3. Werden in jeder der Schenkelebenen eines Flächenwinkels auf der Kante in einem beliebigen Punkte Lote errichtet,

Fig. 3.

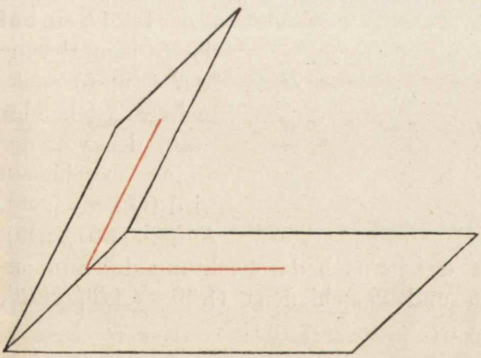
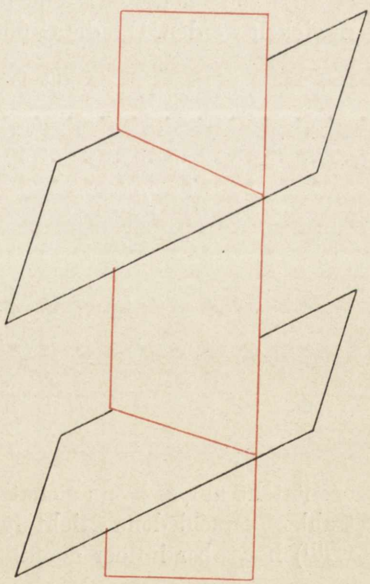


Fig. 4.

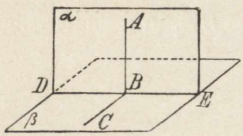


so schließen sie einen ebenen Winkel ein, den Neigungswinkel des Flächenwinkels. (Fig. 3.)

Ist der Neigungswinkel ein Rechter, so stehen die Schenkelebenen aufeinander senkrecht.

4. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Schnittlinien einander parallel (Fig. 4), denn ein gemeinsamer Punkt der Schnittlinien müßte auch ein solcher der parallelen Ebenen sein.

Fig. 5.



5. Eine Ebene steht auf einer andern senkrecht, wenn sie durch eine Gerade geht, die auf der zweiten Ebene senkrecht steht.

Es sei (Fig. 5) AB senkrecht zu β und α gehe durch AB. Errichtet man in B auf DE in β die Senkrechte BC, so ist $\sphericalangle ABC$ der Neigungswinkel von α und β; $\sphericalangle ABC = 1\ R$, daher $\alpha \perp \beta$.

Kapitel II.

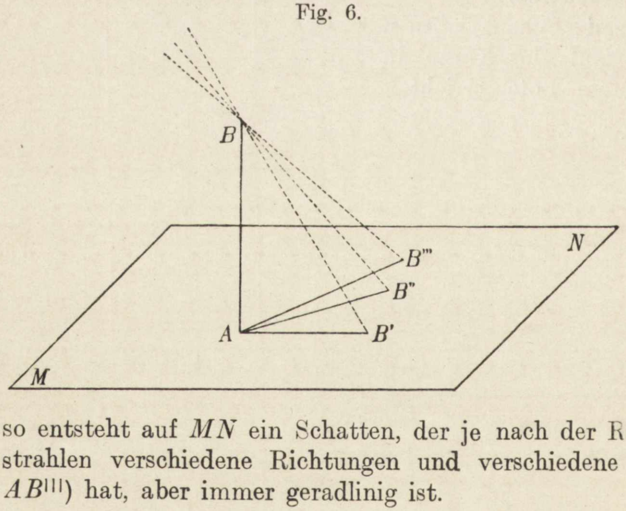
Das Zeichnen räumlicher Gebilde.

a) Anschauliche Herleitung der Eigenschaften der schrägen Parallelprojektionen.

Zur Untersuchung räumlicher Gebilde ist es notwendig sich von denselben Zeichnungen in einer Ebene zu entwerfen; man muß die räumlichen Gebilde in einer Ebene abbilden.

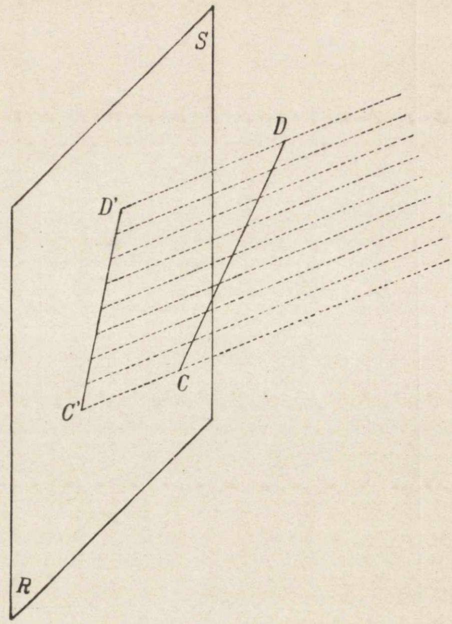
Es soll an dieser Stelle nur eine besondere Methode der Abbildung entwickelt werden. Um die Grundlagen dieser Methode zu gewinnen, knüpfen wir an die Schattenbilder an, welche die Sonne von den von ihr beschienenen Gegenständen entwirft.

Fig. 6.



Ist AB ein auf der Horizontalebene MN (Fig. 6) senkrecht stehender Stab, der von der Sonne beschienen wird (Gnomon, vgl. Aufgabe 2*b* S. 209), so entsteht auf MN ein Schatten, der je nach der Richtung der Sonnenstrahlen verschiedene Richtungen und verschiedene Größe (AB^{I}, AB^{II}, AB^{III}) hat, aber immer geradlinig ist.

Fig. 7.



Ebenso entsteht von einem Stabe CD (Fig. 7), der in den Gang der Sonnenstrahlen gebracht wird, auf einem hinter ihm befindlichen ebenen Schirm RS ein geradliniger Schatten $C'D'$ der nur in einem besonderen Falle punktförmig ist.

Der Schatten $C'D'$ des Stabes CD hat im allgemeinen eine andere Länge als der Stab selbst. Ist der Stab dem Schirme RS parallel, so ist die Schattenlänge gleich der Stablänge.

Nehmen wir zwei parallele Stäbe (oder zwei durch ein Querstück verbundene parallele gradlinige Drähte), so liefern dieselben parallele Schattenbilder.

Hieraus folgt sofort, daß das Schattenbild eines Parallelogrammes wieder ein Parallelogramm ist, was durch einen Versuch mit einem Drahtparallelogramm bestätigt wird.

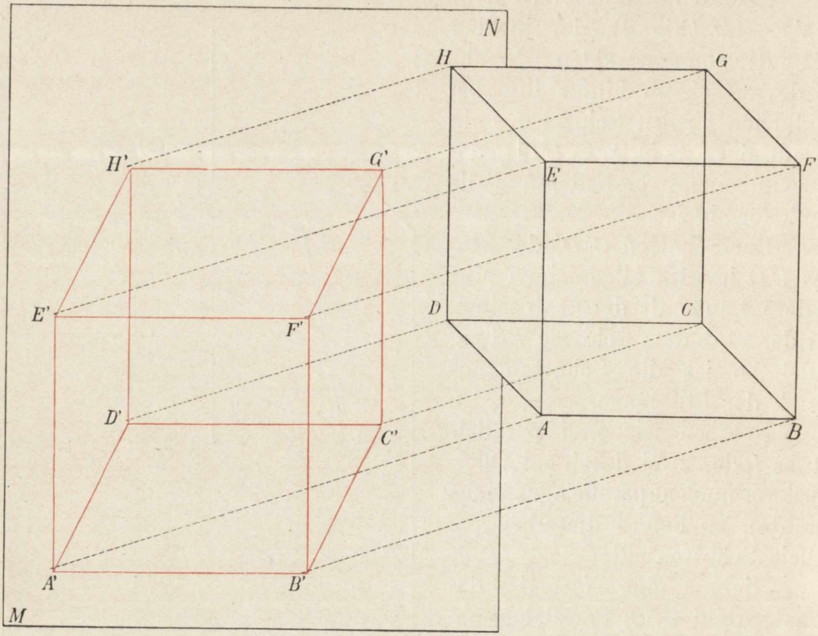
Bringen wir das Drahtmodell eines Würfels (Fig. 8) so in den Gang der Sonnenstrahlen, daß zwei gegenüberliegende Flächen parallel zu einer senkrecht stehenden Ebene sind, so sind die Schattenbilder dieser beiden Flächen wieder Quadrate, die der vier anderen Flächen aber Parallelogramme. Aus der Betrachtung des Schattenbildes des Würfels ergibt sich mithin:

1. Alle zur Vertikalebene MN parallelen Strecken werden durch gleiche und parallele Strecken abgebildet.

2. Die zur Vertikalebene MN senkrechten Strecken werden als parallele Strecken und nach demselben Verhältnis verkürzt oder verlängert abgebildet; der Winkel, den die Bilder dieser Strecken mit einer wagerechten Geraden bilden, sowie das Verkürzungsverhältnis hängt von der Lage der Ebene MN gegen die Sonnenstrahlen ab.

Im Kapitel XIX, I c der Planimetrie haben wir als Projektion einer Strecke auf eine Gerade die Strecke bezeichnet, die man erhält, wenn man von den Endpunkten der Strecke Lote auf die Gerade fällt. Durch Erweiterung dieser Festsetzung ergibt sich, daß man die Projektion eines Punktes, einer Strecke, einer Fläche oder eines Körpers auf eine Ebene erhält, wenn man von den Endpunkten, beziehungsweise Eckpunkten dieser Gebilde Lote auf die Ebene fällt und dieselben in entsprechender Weise miteinander verbindet. Eine solche besondere Art der Projektion bezeichnet man als eine orthogonale (senkrechte) Projektion. Diese Art der Abbildung geometrischer

Fig. 8.



Gebilde auf eine Ebene ist nur ein Sonderfall des folgenden allgemeineren Abbildungs- oder Projektionsverfahrens. Ziehen wir durch die einzelnen Punkte eines geometrischen Gebildes parallele Strahlen und ermitteln deren Schnittpunkte (Spurpunkte) mit einer Ebene, so bezeichnen wir diese Schnittpunkte als die Parallelprojektionen dieser Punkte; ihre Gesamtheit bestimmt die Parallelprojektion des Gebildes.

Da wir nun die Strahlen der Sonne als parallele Strahlen ansehen können, so sind die oben betrachteten Schattenbilder Beispiele für Parallelprojektionen. Da wir die Sonnenstrahlen schräg auf die Wand auffallen ließen, so nennen wir eine solche Projektion eine schräge Parallelprojektion, von der die bei senkrechtem Auffallen der Strahlen entstehende orthogonale Parallelprojektion nur ein Sonderfall ist.

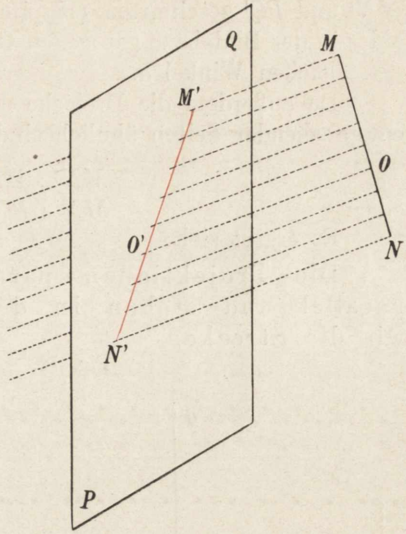
Wir bezeichnen die parallelen Strahlen als Projektionsstrahlen, die Zeichenebene als Projektionsebene und das Bild als eine Projektion des geometrischen Gebildes.

b) Geometrische Herleitung der Eigenschaften der schrägen Parallelprojektionen.

1. Die Projektionsstrahlen nach einer Geraden MN liegen in einer Ebene, der projizierenden Ebene; die Schnittlinie M^1N^1 dieser Ebene mit der Bildebene ist die Projektion der Geraden MN. (Fig. 9.)

2. Es sei MN eine zur Bildebene parallele Strecke (Fig. 10): dann muß die Schnittlinie $M'N'$ der projizierenden Ebene mit der Bildebene zu MN parallel sein, weil sonst MN mit der Bildebene einen Punkt gemeinsam hätte. Da die Projektionsstrahlen MM' und NN' einander ebenfalls parallel sind, so ist das Viereck $MNM'N'$ ein Parallelogramm und $M'N' = MN$, d. h.: das Bild einer zur Projektionsebene parallelen Strecke ist derselben parallel und gleich.

Fig. 9.



3. Aus Fig. 9, bei der die Strecke MN zur Bildebene geneigt ist, und aus Fig. 10, bei der sie der Bildebene parallel ist, ergibt sich:

$$M'O' : O'N' = MO : ON,$$

d. h. in beiden Fällen stehen die Teile der Bilder zueinander in dem gleichen Verhältnis wie die Teile der abgebildeten Strecken.

Es seien MN und PQ zwei parallele Strecken mit den Spurpunkten M und P. (Fig. 11.) Die projizierenden Ebenen beider Strecken müssen einander

Fig. 10.

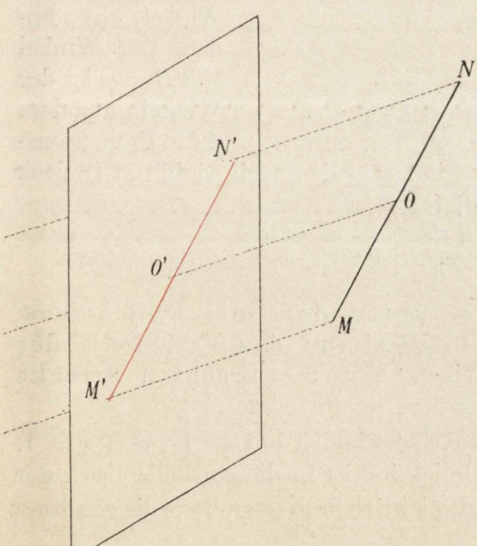
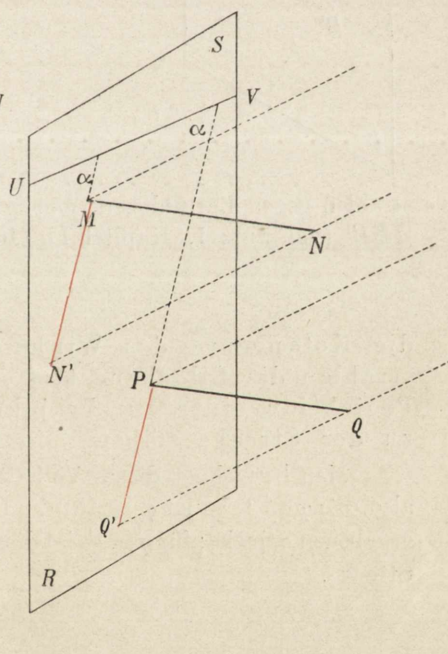


Fig. 11.



parallel sein und werden von der Bildebene RS in den parallelen Strecken $MN^{\prime}$ und $PQ^{\prime}$ geschnitten. (Kapitel I b, 4.) $MN^{\prime}$ und $PQ^{\prime}$ bilden daher mit jeder in der Bildebene gezogenen Geraden (z. B. mit der Horizontalen UV) den gleichen Winkel α.

Da außerdem die Dreiecke $MNN^{\prime}$ und $PQQ^{\prime}$ wegen der Parallelität entsprechender Seiten ähnlich sind, so folgt:

$$MN^{\prime} : MN = PQ^{\prime} : PQ,$$

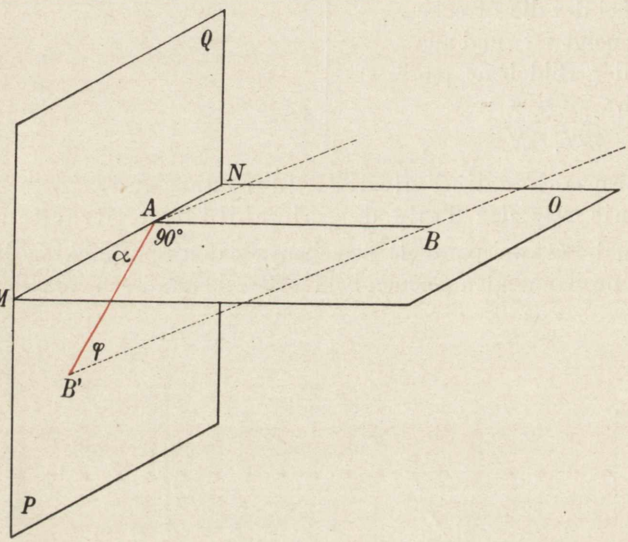
oder:

$$MN^{\prime} : PQ^{\prime} = MN : PQ.$$

Es ergibt sich:

Die Projektionen paralleler Strecken sind einander parallel und stehen in demselben Verhältnis zueinander wie die Strecken.

Fig. 12.



5. Es sei (Fig. 12) PQ die senkrecht stehende Projektionsebene, MO eine Horizontalebene und AB eine in ihr liegende zur Projektionsebene in A senkrecht stehende Gerade, $AB^{\prime}$ ihre Projektion, die mit der Horizontalen MN den Winkel α bildet. Der Winkel $AB^{\prime}B = \varphi$ ist der Winkel, unter dem die Projektionsstrahlen gegen die Bildebene geneigt sind. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $ABB^{\prime}$ (vgl. Satz 1, Kapitel I a, 10) folgt:

$$cotg\, \varphi = \frac{AB^{\prime}}{AB}, \quad \text{d. h.:}$$

die Kotangente des Winkels, unter dem die Projektionsstrahlen die Bildebene treffen, bestimmt das Verhältnis der Projektion einer zur Projektionsebene senkrechten Strecke zu der Strecke selbst.

Man bezeichnet dieses Verhältnis gewöhnlich mit q. Ist z. B. $q = 1$, also $cotg\, \varphi = 1$, so ist $\varphi = 45$; die Projektion ist in diesem Falle gleich der gegebenen Strecke; für $q = \frac{1}{2}$ ist die Projektion halb so groß wie die gegebene Strecke.

Der Winkel a, den die Projektion AB^1 mit der Horizontalen MN bildet, ist für alle zur Projektionsebene senkrechten Strecken der gleiche.

Durch eine gegebene Richtung der Projektionsstrahlen ergeben sich mithin für q und a ganz bestimmte Werte. Mithin ist umgekehrt durch gegebene Werte von q und a die Richtung der Projektionsstrahlen bestimmt. Man kann daher sowohl für q als auch für a beliebige Werte annehmen. Es ist gebräuchlich $q = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$, $a = 30^0, 45^0, 90^0$ zu setzen.

(Ist $q = 1$ und $a = 45^0$, so nennt man die Schrägprojektion auch Kavalierperspektive.)

Zur Ausführung einer Schrägprojektion für gegebene Werte von q und a bildet man zunächst die zur Projektionsebene parallelen und senkrechten Strecken ab und erhält dann die Projektion aller anderen Strecken durch Verbindung der bereits erhaltenen Punkte.

Zusammenfassung.

Für die Anfertigung der Schrägbilder kommen demnach folgende Eigenschaften derselben in Betracht:

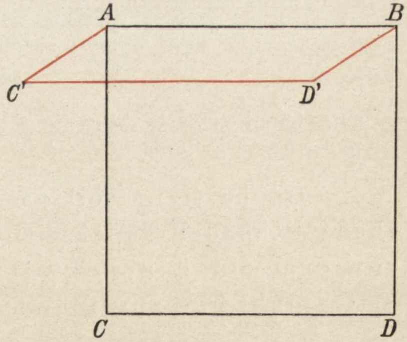
1. Die Projektionen von Strecken, die zur Projektionsebene parallel laufen, sind diesen gleich und zueinander parallel.

2. Strecken, die zur Projektionsebene senkrecht sind, werden durch parallele Strecken abgebildet, die mit der Horizontalrichtung einen bestimmten Winkel bilden und ihrer Länge nach zu den abgebildeten Strecken in einem bestimmten Verhältnis stehen. Der Winkel und das Verhältnis hängen von der Neigung der Projektionsstrahlen zur Projektionsebene ab.

c) Schrägprojektionen ebener Figuren.

Für alle folgenden Zeichnungen soll die Zeichenebene (Projektionsebene) senkrecht stehen. Die hierzu senkrechte und horizontale Ebene nennen wir die Grundebene und ihre Schnittlinie bezeichnen wir als Projektionsachse

Fig. 13.



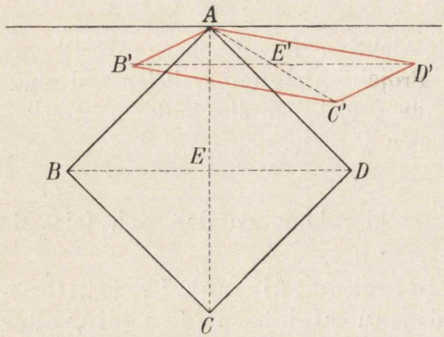
Aufgabe 1. Es soll ein Quadrat, das in der Grundebene so liegt, daß eine seiner Seite in die Projektionsachse fällt, in Schrägprojektion gezeichnet werden. ($q = \frac{1}{3}$, $a = 30^0$.) (L.)

Lösung. (Fig. 13.) Die Seiten AB und CD bilden sich, da sie der Bildebene parallel sind, in ihrer wahren

Größe ab; die zur Bildebene senkrechten Seiten AC und BD werden auf ein Drittel verkürzt; ihre Bilder AC' und BD' schneiden die Achse unter einem Winkel $a = 30^0$. Das Parallelogramm $ABC'D'$ ist das verlangte Schrägbild.

Aufgabe 2. Es soll ein Quadrat, das in der Grundebene so liegt, daß eine seiner Diagonalen zur Projektionsachse senkrecht steht, in Schrägprojektion gezeichnet werden. ($q = \frac{1}{2}$, $a = 150^0$.) (L.)

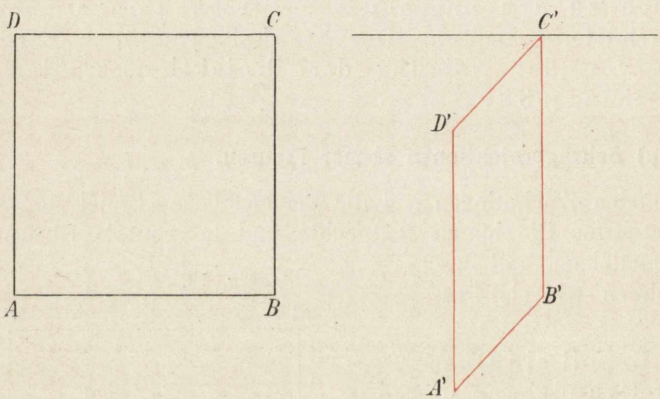
Fig. 14.



Lösung. (Fig. 14.) Die zur Bildebene senkrechte Diagonale AC bildet sich auf die Hälfte verkürzt ab; ihr Bild AC' bildet mit der Projektionsachse einen Winkel von 150^0. Der Mittelpunkt E' von AC' ist das Bild des Schnittpunktes E der Diagonalen. Das Bild $B'D'$ der zur Bildebene parallelen Diagonalen BD ist gleich der wahren Größe und geht durch E'.

Aufgabe 3. Es soll das Schrägbild eines Quadrates gezeichnet werden, das in einer zu der Bild- und Grundebene senkrechten Ebene so liegt, daß eine seiner Seiten in die Grundebene fällt. ($q = \frac{1}{2}$, $a = 45^0$.) (L.)

Fig. 15.

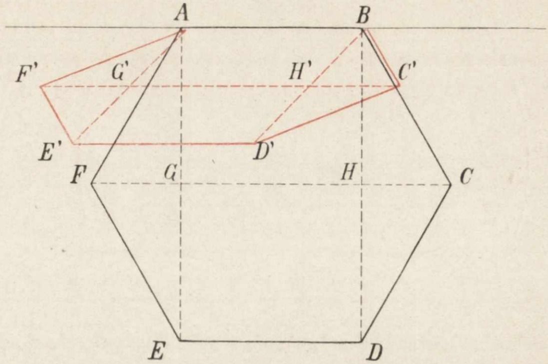


Lösung. (Fig. 15.) Es sei $ABCD$ das gegebene Quadrat, von dem die Seite CD in der Grundebene und C in der Projektionsachse liegt.

Aufgabe 4. Es soll das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden gleichseitigen Dreiecks gezeichnet werden, von dem ein Eckpunkt in der Projektionsachse und eine Seite senkrecht zur Bildebene ist. ($q = \frac{1}{3}$, $a = 30^0$.) (L.)

Aufgabe 5. Es soll ein regelmäßiges Sechseck abgebildet werden, das in der Grundebene so liegt, daß eine Seite auf die Projektionsachse fällt. ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$.) (L.)

Fig. 16.



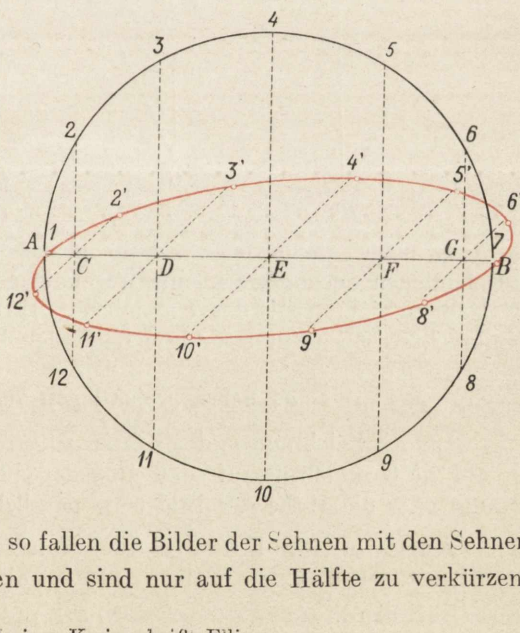
Lösung. (Fig. 16.) Bildet man die zur Bildebene senkrechten Strecken AE und BD mit ihren Mittelpunkten G und H und die zur Bildebene parallele Strecke FC ab, so erhält man die Projektion des gegebenen Sechsecks.

Aufgabe 6. Es soll das Bild eines regelmäßigen Sechsecks gezeichnet werden, das in einer zur Bild- und Grundebene senkrechten Ebene so liegt, daß eine Seite in die Grundebene fällt. ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$.) (L.)

Aufgabe 7. Es soll das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden Kreises gezeichnet werden, dessen Mittelpunkt in der Projektionsachse liegt. ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$.) (L.)

Lösung. (Fig. 17.) Der auf der Projektionsachse liegende Durchmesser AB ist sein eigenes Bild. Man teile den Kreis von A aus in eine Anzahl gleicher Teile (etwa 8 oder 12). Verbinden wir die Teilpunkte 2 und 12, 3 und 11, 4 und 10, 5 und 9, 6 und 8, so stehen die Verbindungslinien senkrecht zu AB. Die Bilder dieser Verbindungssehnen gehen durch die Punkte C, D, E, F, G; sie sind gegen AB unter einem Winkel von 45^0 geneigt und zur Hälfte verkürzt.

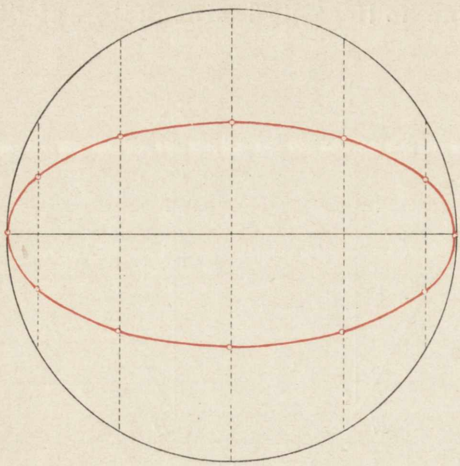
Fig. 17.



Ist $\alpha = 90^0$ und $q = \frac{1}{2}$, so fallen die Bilder der Sehnen mit den Sehnen der Richtung nach zusammen und sind nur auf die Hälfte zu verkürzen. (Vgl. Fig. 18.)

Anmerkung. Das Schrägbild eines Kreises heißt Ellipse.

Fig. 18.

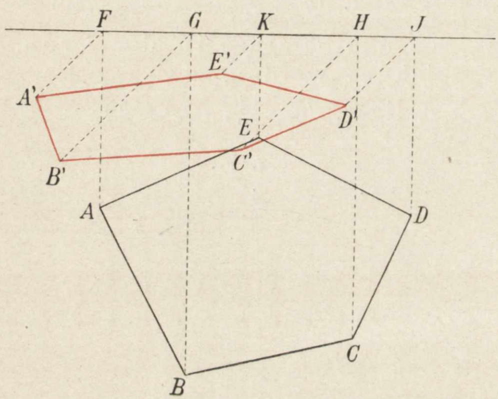


Aufgabe 8. Es soll das Schrägbild eines Kreises gezeichnet werden, der in einer zur Grund- und Bildebene senkrechten Ebene und dessen Mittelpunkt außerdem auf der Projektionsachse liegt, ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$.) (L.)

Anmerkung. Das Schrägbild eines Kreises heißt Ellipse.

Aufgabe 9. Es soll das Schrägbild eines beliebig in der Horizontalebene liegenden Vielecks gezeichnet werden. ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$.) (L.)

Fig. 19.



Lösung. (Fig. 19.) Es sei $ABCDE$ das gegebene Vieleck. Man fälle von seinen Eckpunkten auf die Projektionsachse die Senkrechten und zeichne deren Bilder. Die Bilder der Endpunkte dieser Senkrechten sind die Bilder der Vielecksecken und $A'B'C'D'E'$ ist das gesuchte Schrägbild.

Übungsaufgaben. (L.)

Es sollen die Schrägbilder folgender Figuren gezeichnet werden:

1. eines Quadrats, 2. eines gleichschenkligen Dreiecks, 3. eines regelmäßigen Sechsecks, 4. eines regelmäßigen Zehnecks, 5. eines Kreises, wenn diese Figuren *a*) in der Grundebene, *b*) in einer zur Grund- und Bildebene senkrechten Ebene in beliebiger Lage sich befinden.

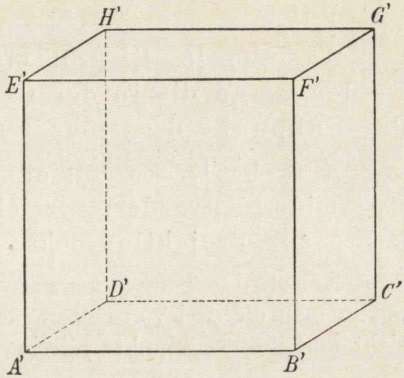
d) Schrägprojektionen von Körpern.

Um die Zeichnungen der Körper zu vereinfachen, stellen wir dieselben so auf die Grundebene auf, daß entweder eine Begrenzungsfläche oder eine Kante oder die Höhe der Bildebene parallel ist.

Aufgabe 10. Es soll das Schrägbild eines Würfels gezeichnet werden, von dem zwei Seitenflächen der Bildebene parallel sind. ($q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30^0$.) (L.)

Lösung. (Fig. 20.) Man zeichne nach Aufgabe 1 das Schrägbild $A^{I}B^{I}C^{I}D^{I}$ der Grundfläche; da die zur Bildebene parallelen Seitenflächen *ABEF* und *CDHG* sich unverkürzt abbilden, so ergibt sich das Bild des ganzen Körpers.

Fig. 20.

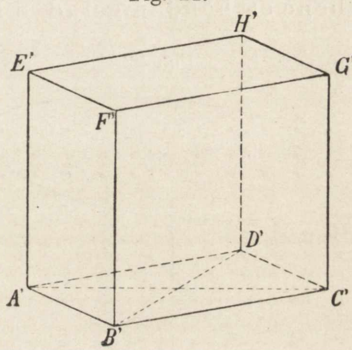


Aufgabe 11. Es soll das Schrägbild eines aufrecht stehenden Würfels, von dem die eine Diagonale der Grundfläche der Projektionsachse parallel ist, abgebildet werden. (Übereckstellung des Würfels). ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^0$.) (L.)

Lösung. (Fig. 21.) Die Zeichnung ergibt sich aus der vorangehenden Aufgabe leicht.

Aufgabe 12. Es soll der Würfel in der Stellung der Aufgabe 10 gezeichnet, die Mittelpunkte der Seitenflächen ermittelt und diese Mittelpunkte durch Geraden miteinander verbunden werden. (L.)

Fig. 21.



Die Lösung ist einfach und liefert eine von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzte quadratische Doppelpyramide, das reguläre Oktaeder. Dieser Körper hat drei zueinander senkrechte gleich lange Diagonalen (reguläres Achsenkeuz), von denen zwei der Bildebene parallel laufen; die dritte steht senkrecht dazu.

Aufgabe 13. Es soll das Oktaeder gezeichnet werden, wenn *a*) die körperliche Diagonale, *b*) die Kante gegeben ist. (L.)

Aufgabe 14. Es soll das Schrägbild des Körpers gezeichnet werden, den man erhält, wenn man in den Mittelpunkten der Würfelflächen Senkrechten gleich der Hälfte der Kantenlänge errichtet und deren Endpunkte mit den Eckpunkten der entsprechenden Würfelfläche verbindet. (L.)

(Man führe die Zeichnung an den Würfelstellungen der beiden vorangehenden Aufgaben aus.)

Anmerkung. Der entstehende von 12 Flächen begrenzte Körper heißt Rhombendodekaeder. (Granatoeder, da der Granat in dieser Form kristallisiert.)

Aufgabe 15. Es soll der Körper gezeichnet werden, der entsteht, wenn man auf das Oktaeder (Aufgabe 13) gerade Pyramiden von gegebener Höhe aufsetzt. (Pyramidenoktaeder.) (L.)

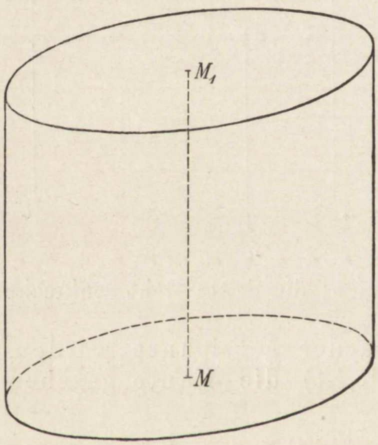
Aufgabe 16. Es soll eine gerade Pyramide gezeichnet werden, wenn die in der Grundebene liegende Grundfläche, der Fußpunkt der Höhe und die Höhe gegeben sind. (L.)

Aufgabe 17. Es soll eine regelmäßige dreiseitige gerade Pyramide (Tetraeder) gezeichnet werden, wenn eine Grundkante zur Projektionsachse senkrecht ist. (L.)

Es soll das Tetraeder auch mittels des Würfels gezeichnet werden, indem man die drei von einer Würfelecke ausgehenden Flächendiagonalen zieht und ihre Endpunkte miteinander verbindet.

Aufgabe 18. Es soll das Schrägbild eines auf der Grundebene stehenden geraden Kreiszylinders gezeichnet werden. (L.)

Fig. 22.



Lösung. (Fig. 22.) Man zeichne nach Aufgabe 7 das Bild der unteren Grundfläche. Das Bild der oberen Grundfläche erhält man in gleicher Weise, indem man den Kreis abbildet, der in einer der Grundebene im Abstande der Zylinderhöhe parallelen Ebene liegt und dessen Mittelpunkt M_1 senkrecht über dem der unteren Grundfläche sich befindet. Zur Vervollständigung des Bildes zieht man die beiden äußeren gemeinschaftlichen Tangenten der Ellipse.

Anmerkungen. 1. Man kann auch in den gezeichneten Punkten der unteren Grundfläche Senkrechten gleich der Zylinderhöhe errichten und ihre Endpunkte verbinden.

2. Die Zeichnung vereinfacht sich, wenn man $\alpha = 90^0$ nimmt.

Aufgabe 19. Es soll das Schrägbild eines auf der Grundebene stehenden geraden Kegels gezeichnet werden. (L.)

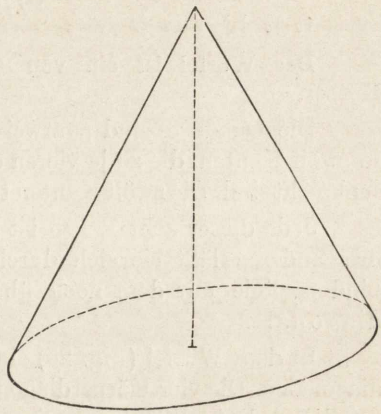
Lösung. (Fig. 23.) Die Zeichnung erledigt sich leicht. Die begrenzenden Mantellinien erhält man, indem man von der Kegelspitze (Endpunkt der Höhe) die Tangenten an das Bild der Grundfläche zieht.

Aufgabe 20. Es soll das Schrägbild einer auf der Grundebene liegenden Kugel gezeichnet werden mit Hilfe von

Kreisschnitten *a*) parallel der Grundebene, *b*) parallel der Bildebene. (L.)

Lösung *a*). (Fig. 24.) Man lege parallel zur Grundebene durch die Kugel eine Anzahl, z. B. fünf Ebenen und bilde die erhaltenen Kreise als Ellipsen ab. Die Ellipse, die die erhaltenen Bilder umhüllt, ist der Umriß des Kugelbildes. (In Fig. 24 ist außerdem der durch den Mittelpunkt gehende zur Bildebene senkrechte Schnitt abgebildet.)

Fig. 23.



Übungsaufgaben. (L.)

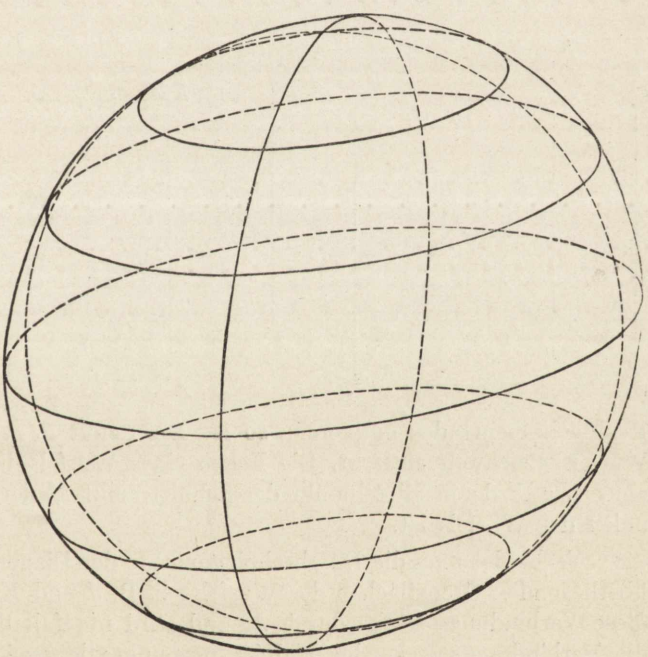
1. Es soll das Schrägbild eines auf der Grundebene stehenden geraden Prismas, dessen Grundfläche ein gegebenes Vieleck ist, gezeichnet werden.

2. Es soll das Schrägbild eines geraden regelmäßig sechsseitigen Prismas gezeichnet werden, dessen Grundfläche in einer zur Grund- und Bildebene senkrechten Ebene liegt.

3. Es soll das Schrägbild eines geraden Kreiszylinders gezeichnet werden, der so auf der Grundebene liegt, daß seine Mantellinien der Bildebene parallel sind.

4. Es soll das Schrägbild eines geraden Kreiskegels gezeichnet werden, dessen Spitze in der Grundebene liegt und dessen Grundfläche der Grundebene parallel ist.

Fig. 24.



Kapitel III.

Der Würfel und der Quader.

α) **Der Würfel.**

1. Erklärung.

Der Würfel ist ein von sechs kongruenten Quadraten begrenzter Körper.

Die Quadrate sind paarweise parallel; sie schneiden sich zu je zweien in zwölf Kanten, die zu je vieren einander parallel und zu zwei Grenzflächen senkrecht sind. Die zwölf Kanten treffen zu je dreien in acht Ecken zusammen.

Jede dieser acht Ecken ist mit dreien durch Kanten verbunden; mit drei anderen läßt sie sich durch Flächendiagonalen verbinden; die Verbindungslinie mit dem noch übrig bleibenden Eckpunkte heißt Körperdiagonale.

In dem Würfel (Fig. 25) sind AG, BH, CE und DF die vier Körperdiagonalen. Die vier Körperdiagonalen sind einander gleich, da die Rechtecke $BCEH$ und $ADFG$, deren Diagonalen sie sind, kongruent sind.

Da AG Diagonale in den Rechtecken $ABHG$, $ACEG$ und $ADFG$ ist, deren andere Diagonalen beziehungsweise BH, CE und DF sind, so schneiden sich die vier Körperdiagonalen in einem Punkte M. Da die Diagonalen eines

Fig. 25.

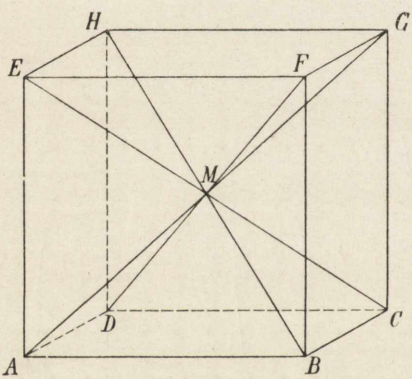
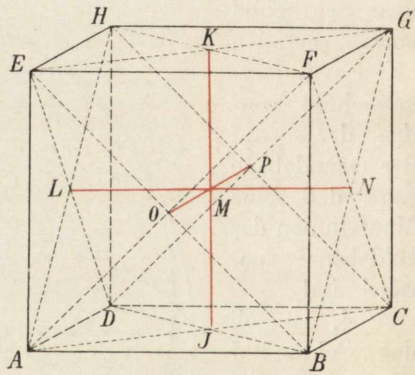


Fig. 26.



Rechteckes einander halbieren, **so ist der Punkt M von den Ecken des Würfels gleichweit entfernt.** Die Ecken eines Würfels liegen demnach auf einer Kugel, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt M der vier Körperdiagonalen des Würfels ist.

Verbindet man die Durchschnittspunkte der Diagonalen zweier gegenüberliegenden Grenzflächen des Würfels, z. B. J und K (Fig. 26), so geht diese Verbindungsstrecke durch M und wird in M halbiert, denn JK ist die Verbindungsstrecke der Halbierungspunkte je zweier der Gegenseiten der beiden Rechtecke $ACEG$ und $BDFH$, und M ist der Schnittpunkt der Diagonalen dieser Rechtecke. Da JK sowohl auf AC und BD als auch auf EG und FH senkrecht steht, so muß JK (Satz 1, Kapitel I) auf den gegenüberliegenden Würfelflächen senkrecht stehen. Ferner ist JK gleich der Würfelkante.

Bezeichnet man die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je zweier gegenüberliegenden Grenzflächen des Würfels als Achsen desselben, so folgt:

Die drei Achsen des Würfels sind gleich den Würfelkanten, halbieren einander im Schnittpunkte der Körperdiagonalen, stehen auf je zwei parallelen Grenzflächen und aufeinander senkrecht.

***M* ist daher auch von den Würfelflächen gleichweit entfernt und mithin der Mittelpunkt einer Kugel, die die Grenzflächen des Würfels berührt.**

2. Bezeichnen wir die Kante des Würfels mit a, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BDH, in dem $DH = a$, $BD = a\sqrt{2}$ ist, für die Körperdiagonale $BH = D$:

$$BH^2 = D^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = a^2 + 2\,a^2 = 3\,a^2$$

$$\boldsymbol{BH = D = a\sqrt{3}}.$$

Die Körperdiagonale ist eine Funktion der Kantenlänge; umgekehrt läßt sich die Kante als Funktion der Körperdiagonale darstellen. Welches sind die Bilder der betreffenden Funktionen?

3. Da der Inhalt eines Quadrats gleich a^2 ist, so erhält man für die Summe der sechs Begrenzungsflächen des Würfels oder seine Oberfläche:

$$\boldsymbol{O = 6\,a^2}.$$

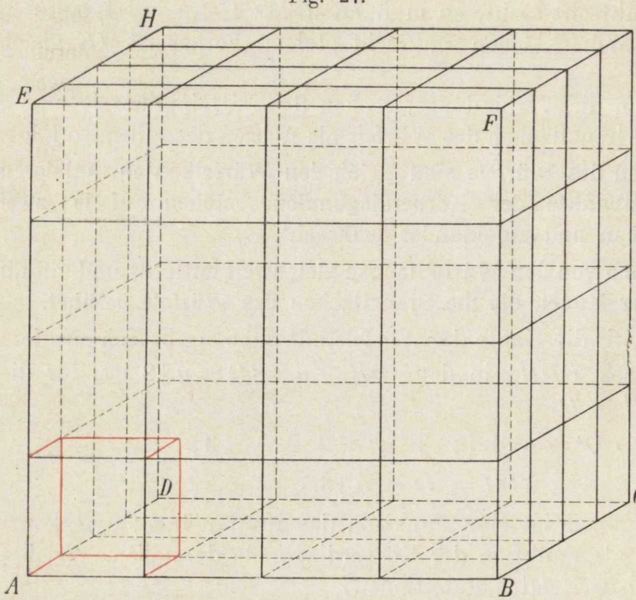
Die Oberfläche ist ebenfalls eine Funktion der Kantenlänge und umgekehrt die Kantenlänge eine Funktion der Oberfläche. (Graphische Darstellung.)

4. Die Maßeinheit für den Rauminhalt von Körpern ist der Inhalt eines Würfels, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist.

Ein Würfel, dessen Kantenlänge gleich einem Meter ist, heißt ein Kubikmeter (1 *cbm*); ein Würfel, dessen Kante gleich einem Dezimeter ist, heißt ein Kubikdezimeter; ein Würfel, dessen Kante gleich einem Zentimeter ist, heißt ein Kubikzentimeter (1 *ccm*) usw.

Es sei (Fig. 27) die Kantenlänge des Würfels gleich a Zentimeter (a eine ganze Zahl); man trage die Längeneinheit (1 *cm*) a-mal auf der Kante AB ab und lege durch die Teilpunkte Ebenen parallel zu der Fläche $ADEH$ durch den Würfel, wodurch er in a Platten zerlegt wird. Teilt man ebenso die Kante AD in a gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte Parallelebenen zu der Fläche $ABEF$, so wird jede der a-Platten in a-Säulen, der ganze Würfel also in $a \,.\, a = a^2$ Säulen zerlegt. Trägt man endlich die Längeneinheit a-mal auf der Kante AE ab und legt Parallelebenen zu der Ebene $ABCD$, so wird jede der a^2 Säulen in a Würfel, der ganze Körper mithin in $a^2 \,.\, a = a^3$ Würfel mit der Kantenlänge 1 *cm* zerlegt. Der Würfel, dessen

Fig. 27.



Kante gleich a Längeneinheiten ($a\,cm$) ist, enthält also a^3 Raumeinheiten ($a^3\,ccm$).

Der Rauminhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz (Kubus) seiner Kante.

Bleibt beim Messen der Kante mit dem Zentimeter als Längeneinheit ein Rest, so gibt man die Länge in Millimeter und den Inhalt in Kubikmillimeter an, die man in Kubikzentimeter verwandeln kann. Bleibt bei dem Messen mit dem Millimeter als Einheit ein Rest, so kann man $\frac{1}{10}\,mm$, $\frac{1}{100}\,mm$, $\frac{1}{1000}\,mm$ als Längeneinheit und den Würfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{10}\,mm$, $\frac{1}{100}\,mm$, $\frac{1}{1000}\,mm$ als Raumeinheit benutzen und den erhaltenen Rauminhalt in höheren Raumeinheiten angeben. Man kann demnach, ebenso wie bei der Bestimmung des Flächeninhaltes ebener Figuren (Planimetrie, Kapitel XX, II) den Rauminhalt eines Würfels mit jeder erreichbaren Genauigkeit bestimmen.

Ist demnach die Kante eines Würfels gleich a Längeneinheiten, so ist sein Rauminhalt V ausgedrückt in Raumeinheiten:

$$V = a^3.$$

Anmerkung. Der Rauminhalt eines Würfels ist eine Funktion seiner Kante. Wie ändert sich der Inhalt, wenn man der Kante nacheinander die Werte $a = 0$, $a = 1$, ... $a = 5$ gibt? Es soll die entsprechende Funktionskurve gezeichnet und aus derselben die Inhalte der Würfel mit den Kanten $a = 1{,}2$ und $a = 2{,}5$ bestimmt werden.

Aufgaben.

1. Es soll die Körperdiagonale, die Oberfläche und der Rauminhalt eines Würfels bestimmt werden, dessen Kante α) $a = 4{,}2\,m$, β) $a = 7{,}5\,cm$, γ) $a = 0{,}124\,m$ ist.

2. Wie groß ist die Kante und der Rauminhalt eines Zimmers von der Form eines Würfels, wenn die Oberfläche desselben $O = 167{,}38\ qm$ ist?

3. Das Gewicht eines gußeisernen Würfels beträgt $P = 5{,}4675\ kg$. Wie groß ist seine Kante, Körperdiagonale und Oberfläche? Das spezifische Gewicht des Gußeisens ist $s = 7{,}5$.

4. Die Körperdiagonale eines Würfels ist $d = 25\ cm$. Wie groß ist seine Oberfläche und sein Inhalt?

5. Der Inhalt des durch zwei Körperdiagonalen eines Würfels gelegten ebenen Schnittes (Diagonalschnitt) beträgt $f = 57{,}927\ qcm$. Wie groß ist der Rauminhalt des Würfels?

6. An einem Würfel mit der Kante a sind sämtliche Ecken so abgestumpft, daß die Abstumpfungsebenen durch die Mitten der Würfelkanten gehen. Es soll der entstehende Körper gezeichnet, die Summe der Inhalte der Abstumpfungsflächen und die Oberfläche des entstandenen Körpers bestimmt werden.

7. Wie groß ist die Kante eines Würfels, der eine doppelt so große Oberfläche hat als ein anderer mit der Kante a?

8. Welches ist die Kante des Würfels, der einen doppelt so großen Rauminhalt hat als ein gegebener Würfel mit der Kante a?

Anmerkung. Die letztere Aufgabe ist bekannt als das sogenannte „Delische Problem"; sie bildet mit den Aufgaben der Dreiteilung eines Winkels und der Kreisausmessung die drei berühmtesten Probleme, mit denen sich die Mathematiker des Altertums beschäftigten.

Die Aufgabe der Würfelverdopplung scheint unmittelbar nach der Mitte des fünften Jahrhunderts v. Chr. in den gelehrten Kreisen Griechenlands aufgetaucht zu sein. Man erzählt, daß die Bewohner der Insel Delos, als sie von einer Pest heimgesucht wurden, beim Orakel des Apollo angefragt hätten, was sie tun sollten, um die Krankheit abzuwenden. Darauf sei ihnen die Antwort zuteil geworden, sie sollten den würfelförmigen Altar des Gottes verdoppeln, so jedoch, daß er seine Würfelform beibehalte.

Die zur Lösung der Aufgabe erforderliche Konstruktion ist mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar. Die griechischen Mathematiker fanden eine Reihe von Näherungskonstruktionen, die auf der Verwendung höherer Kurven beruhen. Die Aufgabe der Würfelverdopplung wurde die Veranlassung, daß ein Schüler Platons, Menächmus (um 350 v. Chr.), die räumliche Darstellung der von planimetrischen Betrachtungen her bereits bekannten Kegelschnitte (Ellipse, Hyperbel und Parabel) auffand und so der eigentliche Entdecker der Kegelschnitte wurde.

b) Der Quader oder das rechtwinklige Parallelepipedon.

1. Erklärung. Der Quader ist ein Körper, der von sechs Rechtecken begrenzt wird.

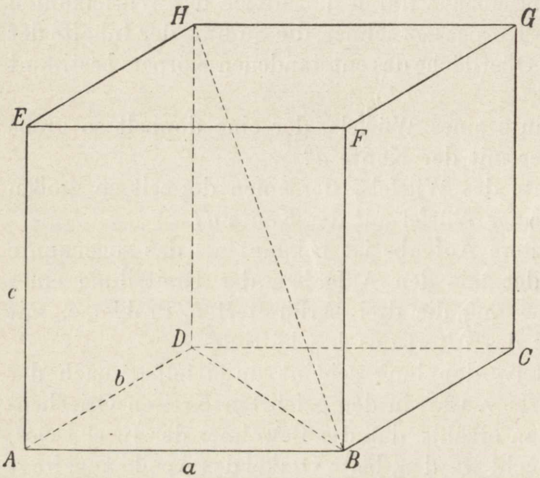
Die Begrenzungsflächen sind zu je zweien parallel, einander kongruent und stehen auf den übrigen vier Flächen senkrecht. Der Körper hat zwölf

Kanten; je vier derselben stehen auf je zwei gegenüberliegenden Grenzflächen senkrecht und sind einander gleich.

Man betrachtet eine der Grenzflächen und die ihr parallele Fläche als **Grundflächen,** die vier übrigen Flächen heißen dann **Seitenflächen;** letztere stehen ebenso wie ihre Schnittlinien, die **Seitenkanten,** auf den Grundflächen senkrecht. Die Seitenflächen schneiden die Grundflächen in den **Grundkanten.** Die Grundkanten heißen auch **Länge** und **Breite,** die Seitenkante **Höhe** des Quaders.

Durch die drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten eines Quaders sind sämtliche Kanten und Grenzflächen des Körpers bekannt. Unter der Körperdiagonale eines Quaders versteht man, wie beim Würfel, die Verbindungslinie zweier gegenüberliegenden Eckpunkte. Die vier Körperdiagonalen sind als Hypotenusen kongruenter rechtwinkliger Dreiecke einander gleich. Auf dieselbe Weise wie beim Würfel läßt sich auch beim Quader zeigen, daß die vier Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden, der von allen Ecken des Körpers gleichweit entfernt ist.

Fig. 28.



2. Sind a, b, c (Fig. 28) die Längen der in einer Ecke des Quaders zusammenstoßenden Kanten, so ist die Oberfläche O desselben:

$$\boldsymbol{O = 2\,(a\,b + b\,c + c\,a).}$$

3. Aus dem rechtwinkligen Dreieck BDH (Fig. 28) ergibt sich für die Körperdiagonale $BH = d$:

$$d^2 = DB^2 + DH^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.}$$

4. Zerschneidet man den Quader in ähnlicher Weise wie den Würfel, so erhält man durch dieselbe Schlußfolgerung für den Rauminhalt V des Quaders:

$$\boldsymbol{V = a\,.\,b\,.\,c.}$$

Für $a = b = c$ geht der Quader in den Würfel über, und man erhält $V = a^3$.

Da die Grundfläche $ABCD$ des Quaders ab Flächeneinheiten, die Höhe c Längeneinheiten hat, so ist der **Rauminhalt eines Quaders gleich**

dem Produkte der Maßzahlen von Grundfläche und Höhe oder kürzer: gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Ist G die Maßzahl der Grundfläche, h die der Höhe, so ist:

$$V = G \,.\, h.$$

Anmerkung. Der Rauminhalt eines Quaders ist bei gegebener Grundfläche eine Funktion der Höhe und bei gegebener Höhe eine Funktion der Grundfläche. Bei gegebenem Rauminhalte eines Quaders ist seine Grundfläche eine Funktion der Höhe und die Höhe eine Funktion der Grundfläche.

5. Aufgaben.

1. Es sollen die Oberfläche und der Rauminhalt eines Quaders berechnet werden, wenn die Kantenlängen folgende Maßzahlen haben:

α) $a = 1{,}2\,m$, $b = 0{,}8\,m$, $c = 2{,}5\,m$;

β) $a = 12\,cm$, $b = 5{,}4\,cm$, $c = 10\,cm$;

γ) $a = b = 0{,}24\,m$, $c = 0{,}834\,m$.

2. Die Länge eines Quaders ist n-mal, die Breite m-mal so groß als seine Höhe. Wie stellt sich die Körperdiagonale, die Oberfläche und sein Inhalt als Funktion der Höhe und umgekehrt die Höhe als Funktion der Körperdiagonale, der Oberfläche und des Inhaltes dar? Graphische Darstellung der Funktionen für $n = 2$, $m = 3$.

3. Der Querschnitt einer $c = 3\,m$ langen Eisenstange ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 2{,}8\,cm$. Welches ist das Gewicht der Stange, wenn das spezifische Gewicht des Eisens $s = 7.5$ ist?

4. Ein Quader aus Eichenholz, dessen Grundkanten $a = 21{,}5\,cm$ und $b = 8{,}4\,cm$ sind und dessen Höhe $c = 25\,cm$ beträgt, wird mit der Grundfläche auf Wasser gestellt und sinkt $h = 20{,}5\,cm$ tief ein. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Eichenholzes?

5. Es soll der Rauminhalt und die Oberfläche eines Quaders berechnet werden, dessen Diagonalebene ein Quadrat von $F = 225\,qcm$ Flächeninhalt ist und dessen Grundkanten sich wie $m : n = 3 : 4$ verhalten.

6. Beim Ausgraben eines Kellers von $a = 20\,m$ Länge und $b = 18{,}5\,m$ Breite mußten $V = 592\,cbm$ Erde ausgehoben werden. Wie tief ist der Keller?

7. Eine Mauer von $a = 18\,m$ Länge, $b = 0{,}5\,m$ Dicke, $c = 2{,}4\,m$ Höhe soll aus Ziegelsteinen hergestellt werden, die $a_1 = 24\,cm$ lang, $b_1 = 12\,cm$ breit und $c_1 = 6\,cm$ dick sind. Wieviel Ziegelsteine sind erforderlich, wenn man auf den Mörtel 20% des Rauminhaltes der Mauer rechnet?

8. Die Körperdiagonale eines Quaders ist $d_1 = 39\,cm$, die Diagonale der Grundfläche $d = 15\,cm$ und die Grundkante $a = 9\,cm$. Wie groß ist der Rauminhalt und die Oberfläche des Quaders?

9. Zur Herstellung eines Wasserbehälters hat man eine Grube von $a = 4\,m$ Länge, $b = 3{,}5\,m$ Breite und $c = 1{,}8\,m$ Tiefe ausgeschachtet und diese mit einem Mauerwerk von $d = 0{,}25\,m$ Dicke ausgekleidet. Wieviel Liter Wasser kann der Behälter fassen?

Kapitel IV.

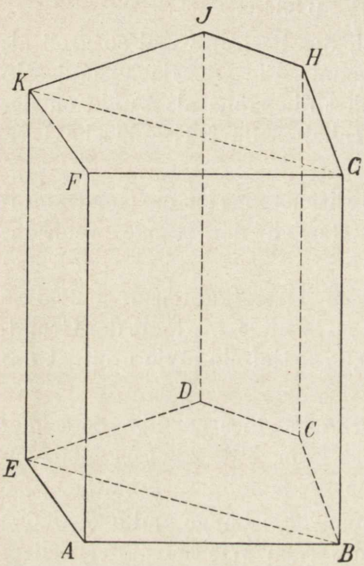
Das Prisma.

1. Erklärungen. Ein Prisma ist ein Körper, der nach den Seiten von drei oder mehr Ebenen, die einander in parallelen Kanten schneiden, und oben und unten von zwei einander parallelen Ebenen begrenzt wird.

Die ersteren Grenzflächen sind die **Seitenflächen,** die letzteren die **Grundflächen** des Prismas. Die Durchschnittslinien der Seitenflächen untereinander heißen **Seitenkanten,** die anderen die **Grundkanten** des Prismas; der Abstand der beiden Grundflächen heißt die **Höhe** des Prismas.

Da die Seitenkanten eines Prismas nach der Erklärung einander parallel und die in derselben Seitenfläche liegenden Grundkanten als Schnittlinien der parallelen Grundflächenebenen mit der Seitenfläche (Kapitel I, *b*, 6) auch einander parallel sind, so sind alle Seitenflächen eines Prismas Parallelogramme. Ferner sind alle Seitenkanten gleich lang und gegen beide Grundflächen gleich geneigt. Die Seitenkanten stehen demnach alle entweder senkrecht oder schief zu den Grundflächen. Man teilt daher die Prismen ein in **gerade** und **schiefe** Prismen.

Fig. 29.



2. Da (Fig. 29) $AB = FG$, $BC = GH$, $HI = CD$, $DE = IK$, $EA = KF$, so stimmen die beiden Grundflächen in allen entsprechenden Seiten überein.

Verbindet man ferner E mit B und K mit G, so ist in den Dreiecken ABE und FGK:

$$AB = FG \quad \text{und} \quad AE = KF.$$

Da ferner BE parallel GK (Kapitel I, *b*, 4), so ist das Viereck $BEGK$ ein Parallelogramm und $BE = GK$; mithin ist:

$$\triangle\, ABE \cong FGK;$$

und

$$\sphericalangle\, EAB = \sphericalangle\, KFG.$$

Auf die gleiche Weise läßt sich die Gleichheit der übrigen entsprechenden Vieleckswinkel beweisen. Die Vielecke stimmen demnach in allen entsprechenden Winkeln und Seiten überein und sind daher kongruent

Die Grundflächen eines Prismas sind kongruente Figuren.

Legt man durch ein Prisma einen ebenen Schnitt parallel zu den Grundflächen, so läßt sich ebenso wie vorher bei den Grundflächen zeigen, daß die Schnittfigur den Grundflächen kongruent ist.

Jeder durch ein Prisma parallel zu den Grundflächen gelegte ebene Schnitt liefert eine den Grundflächen kongruente Schnittfigur.

Folgerung. Winkel im Raume, deren Schenkel parallel und gleichgerichtet sind, sind einander gleich.

Nach der Anzahl der Seiten der Grundflächen teilt man die Prismen in dreiseitige, vierseitige, . . . n-seitige Prismen ein.

Ein gerades Prisma mit regelmäßiger Grundfläche heißt ein regelmäßiges Prisma.

Sind die Grundflächen eines Prismas Parallelogramme, so heißt es ein **Parallelepipedon;** es wird von sechs Parallelogrammen begrenzt.

Der Quader oder das rechtwinklige Parallelepipedon ist demnach ein gerades vierseitiges, der Würfel ein regelmäßig vierseitiges Prisma.

3. Die **Oberfläche** eines Prismas erhält man, wenn man die Inhalte aller Seitenflächen und der beiden Grundflächen addiert. Man bezeichnet die Summe aller Seitenflächen als den **Mantel** des Prismas.

Bezeichnet man bei einem geraden Prisma den Umfang der Grundfläche mit u, die Länge einer Seitenkante, die gleich der Höhe des Prismas ist, mit h, so ist der Mantel des geraden Prismas M:

$$M = u \cdot h$$

4. Der Grundsatz von Cavalieri [1]).

Körper mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind raumgleich, wenn die in gleichen Abständen zu den Grundflächen gelegten Schnitte, inhaltsgleiche Schnittfiguren ergeben.

Erläuterung.

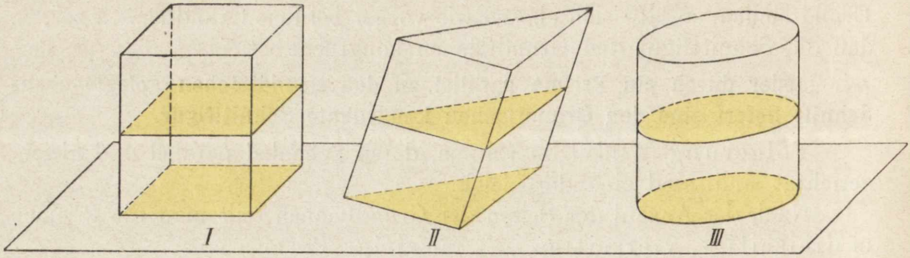
a) Man denke sich aus Papier von gleicher Dicke eine gleiche Anzahl (etwa 100) flächengleicher Vierecke, Dreiecke und Kreise ausgeschnitten. Die verschiedenen Arten der Scheiben denke man sich in dieselbe Ebene gelegt und die untereinander kongruenten Scheiben derselben Art teils zu geraden prismatischen Körpern (I und III), teils zu schiefen Körpern (II; Fig. 30), die treppenartig von einer zur andern Scheibe führen, derart aufeinander geschichtet, daß die entsprechenden Ecken auf parallelen Geraden liegen. Da zum Aufbaue eine gleiche Anzahl von Scheiben benutzt werden soll, so liegen die oberen Grundflächen der Körper in einer zur ersteren Ebene parallelen Ebene.

Die zwischen parallelen Ebenen liegenden Körper (I, II, III) haben, da die Scheiben, aus denen sie aufgebaut sind, raumgleich sind, selbst gleichen Rauminhalt.

---

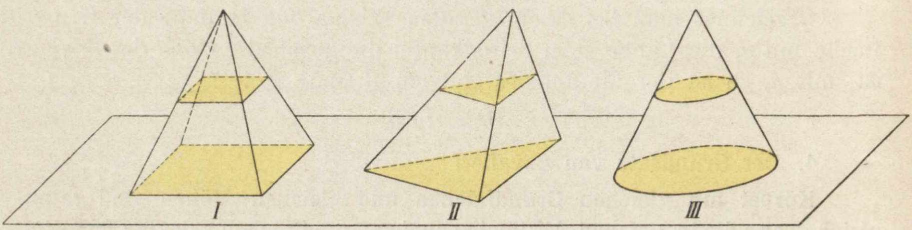
[1]) Bonaventura Cavalieri, italienischer Mathematiker (1591?—1647, Bologna).

Fig. 30.



b) Man denke sich wiederum aus Papier von gleicher Dicke eine Anzahl inhaltsgleicher Figuren (Dreieck, Viereck, Kreis) ausgeschnitten; zu diesen Figuren denke man sich eine gleiche Anzahl (etwa 100) ähnlicher Figuren hergestellt, deren Inhalte bei den verschiedenartigen Figuren in gleichem Verhältnisse abnehmen. Denkt man sich nun die Papierscheiben gleicher Gestalt ihrer abnehmenden Größe entsprechend aufeinander geschichtet, so entstehen nach oben hin abnehmende Körper (Fig. 31), deren

Fig. 31.



Spitzen in einer zur Grundebene parallelen Ebene liegen; da die in gleicher Höhe liegenden Scheiben raumgleich sind, so müssen die Körper selbst gleichen Rauminhalt besitzen.

5. Da man die Grundfläche eines beliebigen Prismas in ein Rechteck verwandeln und über dem Rechteck als Grundfläche einen Quader zeichnen kann, der mit dem Prisma gleiche Höhe hat, so erfüllen beide Körper, da die Durchschnittsfiguren mit jeder den unteren Grundflächen parallelen Ebenen den Grundflächen inhaltsgleiche Schnittfiguren ergeben, die Bedingungen des Cavalierischen Grundsatzes, und sie sind daher raumgleich. Da aber der Inhalt eines Quaders mit der Grundfläche G und der Höhe h gleich $G . h$, so folgt für den Inhalt V sowohl des geraden als des schiefen Prismas mit der Grundfläche G und der Höhe h:

$$V = G . h.$$

Der Rauminhalt eines Prismas ist gleich dem Produkte der Maßzahl seiner Grundfläche und seiner Höhe (oder kürzer: gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und seiner Höhe).

6. Aufgaben.

1. Es soll der Rauminhalt des geraden regelmäßigen Prismas für einen gegebenen Halbmesser des Umkreises seiner Grundfläche und für eine gegebene Höhe als Funktion der Seitenanzahl dargestellt werden. Welchen Verlauf nimmt die Funktionskurve, und welcher Schluß läßt sich aus dem Verlaufe für ein unendlich großes n hieraus ziehen?

2. Es soll der Rauminhalt eines geraden regelmäßig dreiseitigen Prismas mit der Grundkante $a = 25$ *cm* und der Seitenkante $b = 36$ *cm* berechnet werden.

3. Die Oberfläche eines geraden dreiseitigen Prismas ist $O = 924$ *qcm*, die Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten $a = 15$ *cm*, $b = 13$ *cm*, $c = 14$ *cm*. Wie groß ist die Höhe und der Rauminhalt des Körpers?

4. Die Grundfläche eines Prismas ist ein Dreieck, von dem eine Seite $a = 24{,}5$ *cm* und zwei Winkel $\alpha = 45^0\,28'\,12''$ und $\beta = 21^0\,50'\,48''$ gegeben sind; die Höhe des Prismas beträgt $h = 68{,}9$ *cm*. Man berechne den Inhalt des Prismas.

5. Eine Marmorsäule hat die Gestalt eines geraden, regelmäßig sechsseitigen Prismas mit der Grundkante $a = 14{,}5$ *cm* und der Seitenkante $b = 1{,}45$ *m*. Welches ist das Gewicht der Säule, wenn das spezifische Gewicht des Marmors $s = 2{,}8$ ist?

6. Man soll die Oberfläche und den Inhalt eines geraden regelmäßig achtseitigen Prismas mit der Grundkante $a = 24$ *cm* und der Seitenkante $b = 50$ *cm* berechnen.

7. Es soll für ein Aquarium ein Gefäß von der Gestalt eines regelmäßig sechsseitigen Prismas hergestellt werden, das bei einer Höhe $h = 60$ *cm* 150 l Wasser faßt. Wie groß muß die Grundkante des Prismas genommen werden?

Kapitel V.

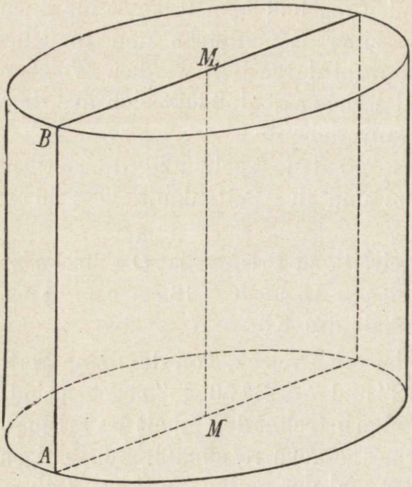
Der Zylinder.

1. Bewegt sich eine gerade Linie längs einer Kreislinie (des Leitkreises) so, daß sie zu ihrer Anfangslage parallel bleibt, so beschreibt sie eine krumme Fläche, die Zylinderfläche genannt wird.

Ein Zylinder ist ein Körper, der von einer Zylinderfläche und zwei einander parallelen Kreisflächen begrenzt wird. (Fig. 32.)

Die Gerade, welche die Zylinderfläche erzeugt, heißt in jeder ihrer Lagen eine **Seitenlinie** des Zylinders. Die Verbindungslinie MM_1 der Mittelpunkte der beiden Kreise ist die **Achse** des Zylinders. Je nach dem die Achse zu den Ebenen der Kreise senkrecht oder schief steht, ist der Zylinder ein **gerader** oder ein **schiefer.** Die beiden Kreisflächen sind die **Grundflächen,** die den Körper begrenzende krumme Fläche ist der **Mantel** des Zylinders. Die **Höhe** des Zylinders ist der Abstand der beiden Grundflächen; sie ist bei dem geraden Zylinder gleich der Achse.

Fig. 32.



Eine durch die Achse gelegte Ebene schneidet einen geraden Zylinder in einem Rechteck, einen schiefen Zylinder in einem Parallelogramm (Achsenschnitt).

Ein gerader Zylinder entsteht daher, wenn man ein Rechteck $ABMM_1$ um eine seiner Seiten als Achse dreht.

Bei der Berechnung des Kreisumfanges (Kapitel XXIV, Planimetrie) haben wir den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich großer Seitenzahl aufgefaßt. Ganz entsprechend kann man **einen Zylinder als ein regelmäßiges Prisma mit unendlich großer Seitenzahl ansehen.** (Vgl. Aufgabe 1, Kapitel IV.)

2. Nach Kapitel III ist der Mantel eines geraden Prismas gleich dem Produkte aus dem Umfange u seiner Grundfläche und seiner Höhe h. Bezeichnet man den **Mantel eines geraden Zylinders** mit M, den Grundflächenhalbmesser des Zylinders mit r und seine Höhe mit h, so erhält man:

$$M = 2\pi r h.$$

Die Mantelfläche eines geraden Zylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Das gleiche Resultat erhält man auch, wenn man den Mantel längs einer Seitenlinie aufschneidet und in eine Ebene abwickelt; es entsteht dann ein Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Umfange des Grundkreises und dessen anstoßende Seite gleich der Höhe des Zylinders ist.

Anmerkung. Der Inhalt des Zylindermantels ist eine Funktion des Halbmessers der Grundfläche und der Höhe. Was ergibt sich bei gleichbleibendem Zylindermantel für den Grundflächenhalbmesser und die Höhe?

Welche Figur ergibt sich, wenn man den Mantel eines schiefen Zylinders in eine Ebene abwickelt?

Die Gesamtoberfläche des Zylinders ist:

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r (r + h).$$

3. Da wir den Zylinder als ein Prisma mit unendlich vielen und unendlich kleinen Seitenflächen ansehen können, so ist sein **Inhalt gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und seiner Höhe.**

Da die Grundfläche gleich πr^2 und seine Höhe h ist, so erhält man für den Rauminhalt V;

$$V = \pi r^2 h.$$

Der Rauminhalt eines jeden Zylinders ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.

Man vergleiche Anmerkung Kapitel III, 4.

4. Aufgaben.

1. Bei einem geraden Zylinder ist die Höhe $h = m\,r$; es soll der Mantel M, die Oberfläche O und der Rauminhalt V als Funktion von r und umgekehrt r als Funktion von M, oder O, oder V dargestellt werden. Graphische Darstellung für $m = 2$, $m = 3$.

2. Von einem geraden Zylinder ist die Diagonale des Achsenschnitts gleich d gegeben. Es soll der Rauminhalt des Zylinders als Funktion seiner Höhe ermittelt und die Funktion graphisch dargestellt werden.

3. Es soll für einen geraden Zylinder mit gegebenem Rauminhalt V die Gesamtoberfläche als Funktion des Grundflächenhalbmessers berechnet und graphisch dargestellt werden.

4. Eine zylindrische Stahlwelle hat eine Länge $l = 2{,}5\,m$ und einen Durchmesser $d = 0{,}60\,cm$. Wie schwer ist dieselbe, wenn das spezifische Gewicht des Stahles $s = 7{,}8$ ist?

5. Ein Brunnen hat einen Durchmesser von $d = 1{,}2\,m$. Wieviel Hektoliter Wasser sind in demselben, wenn das Wasser $h = 2{,}8\,m$ hoch steht?

6. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt eines Zylinders, der einem Würfel mit gegebener Kante *a*) einbeschrieben, *b*) umbeschrieben ist?

7. Ein Rechteck, dessen Diagonale $20\,cm$, dessen kürzere Seite $12\,cm$ beträgt, rotiert um die größere Seite. Man berechne die Oberfläche und den Inhalt des entstehenden Zylinders.

8. Ein Quadrat, von dem der Umfang des einbeschriebenen Kreises $U = 37{,}68\,cm$ ist, rotiert um eine Seite. Man berechne den Inhalt des entstehenden Körpers. ($\pi = 3{,}14$.)

9. Eine Gießkanne soll $12\,l$ fassen und $40\,cm$ hoch werden. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche und wieviel Quadratzentimeter muß das Stück Blech, das den Mantel bilden soll, messen?

10. Ein zylindrisches Litergefäß soll noch einmal so breit als hoch sein. Wie groß ist seine lichte Weite?

11. Aus einem Rechteck mit den Seiten $a\,cm$ und $b\,cm$ wird ein gerader Zylinder von der Höhe $b\,cm$ durch Zusammenkrümmen gebildet. Wieviel Liter faßt der Zylinder?

12. Der Mantel eines geraden Zylinders ist $M = 5882{,}9\,qcm$, der Halbmesser der Grundfläche $r = 23{,}46\,cm$. Wie groß ist die Höhe und der Inhalt des Zylinders?

13. Wie groß ist der Rauminhalt eines geraden Zylinders, dessen Gesamtoberfläche $O = 1056\,qm$ und dessen Durchmesser der Grundfläche $2\,r = 14\;m$ gegeben sind.

14. Der Inhalt eines geraden Zylinders ist $V = 2190\ ccm$, der Halbmesser der Grundfläche ist $n = 3{,}4$ mal so groß als die Höhe. Wie groß ist der Mantel des Zylinders?

15. Der Halbmesser der Grundfläche eines Gasometers ist gleich seiner Höhe. Wie groß ist der Halbmesser, wenn der Gasometer einen Rauminhalt von $V = 24000\ cbm$ haben soll, und wie groß ist die Oberfläche des Gasometers?

16. Ein gerader Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt hat einen Rauminhalt von $V = 450\ ccm$. Wie groß ist sein Halbmesser?

16 *a*. Wie verhält sich in einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt der Mantel zur Grundfläche?

17. Wie tief sinkt ein Messingzylinder in Quecksilber ein, wenn er einen quadratischen Achsenschnitt mit der Seite $a = 12\ cm$ hat und wenn er mit der Grundfläche auf Quecksilber gestellt wird? Das spezifische Gewicht des Messings ist $s = 8{,}5$, das des Quecksilbers $s_1 = 13{,}6$.

18. Es soll mit einer zylindrischen Bleischeibe (spezifisches Gewicht $s = 11{,}35$) von $h = 2\ cm$ Höhe ein Korkzylinder (spezifisches Gewicht $s_1 = 0{,}24$) von gleichem Durchmesser so verbunden werden, daß die ganze Säule in Öl (spezifisches Gewicht $s_2 = 0{,}92$) zur Hälfte einsinkt. Welche Höhe hat der Korkzylinder?

19. Eine zylindrische eiserne Säule hat einen Rauminhalt von $V = 314{,}16\ cbm$ und eine Länge von $h = 4\ m$. Die Säule soll auf galvanischem Wege verzinkt werden; wieviel Mark betragen die Kosten, wenn für das Quadratmeter 2,5 Pfennig berechnet werden?

20. Man berechne den Rauminhalt einer zylindrischen Röhre aus den Halbmessern $R = 24\ cm$, $r = 16\ cm$ und der Länge $l = 1{,}20\ m$.

21. Eine zylindrische Röhre hat einen Rauminhalt $V = 1{,}7593\ cbm$, einen großen Halbmesser $R = 50\ cm$ und eine Länge $l = 3{,}5\ m$. Welches ist die Wandstärke der Röhre?

22. Ein zylindrisches Glasgefäß mit dem äußeren Halbmesser $R = 16\ cm$ der Höhe $h = 20\ cm$ und der Dicke $d = 0{,}2\ cm$ ist zu $\frac{3}{4}$ mit Schwefelsäure gefüllt. Wieviel Kilogramm wiegt das Ganze, wenn das spezifische Gewicht des Glases $s = 2{,}6$ und das der Schwefelsäure $s_1 = 1{,}84$ ist?

23. Ein Brunnenschacht, dessen lichte Weite 1,60 m und dessen Tiefe 12,68 m ist, soll mit einem Mauerwerk, von der Wandstärke 0,3 m, ausgemauert werden. Wieviel Kubikmeter Steine sind hierzu erforderlich?

24. Ein Silberdraht von $a = 1{,}5\ m$ Länge und $p = 7{,}917\ g$ Gewicht soll mit $q = 8{,}1854\ g$ Gold vergoldet werden. Wie dick ist der Silberdraht und wie dick ist die Vergoldung? Das spezifische Gewicht des Silbers ist $s = 10{,}5$, das des Goldes $s_1 = 19{,}3$.

25. Der Mantel eines geraden Zylinders von Halbmesser $r\ cm$ ist viermal so groß als die Grundfläche. Welchen Rauminhalt hat das dem Zylinder einbeschriebene regelmäßige dreiseitige Prisma?

26. Ein dreiseitiges Prisma hat den Rauminhalt $V_1 = 2411{,}44\,ccm$; seine Grundfläche hat die Seiten $a = 44\ cm$, $b = 37\ cm$, $c = 15\ cm$. Wie groß ist der Rauminhalt V des dem Prisma einbeschriebenen Zylinders?

27. Aus einem geraden Zylinder mit dem Halbmesser $r = 0{,}6\ m$ und der Höhe $h = 1{,}75\ m$ ist ein gerades Prisma herausgeschnitten, dessen Grundflächen zwei in die Zylindergrundflächen einbeschriebene regelmäßige Sechsecke sind. Welches ist der Inhalt des Restkörpers?

28. Ein prismatischer Sandsteinblock von der Länge $l = 1{,}2\ m$ hat quadratischen Querschnitt von der Kantenlänge $a = 40\ cm$. Derselbe ist zylindrisch durchbohrt. Wie groß ist der Rauminhalt des dadurch entstehenden Hohlkörpers, wenn die lichte Weite der inneren Höhlung $d = 28\ cm$ ist?

29. Die Achse eines Zylinders ist gegen die Grundfläche desselben unter dem Winkel $\alpha = 65^0\,30'$ geneigt und hat die Länge $a = 25\ cm$. Der Grundflächenhalbmesser ist $r = 6\ cm$. Wie groß ist der Rauminhalt des Zylinders?

30. Es soll der Rauminhalt eines Zylinders berechnet werden, dessen Achse von der Länge $a\ cm$ mit der Grundfläche den Winkel α bildet, wenn der Flächeninhalt des zur Grundfläche senkrechten Achsenschnittes gleich $f\ qcm$ gegeben ist.

Kapitel VI.

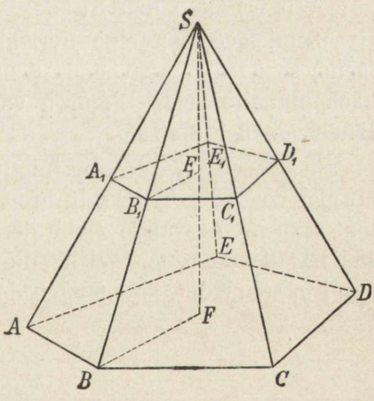
Die Pyramide.

1. Verbindet man die Eckpunkte eines Vieleckes $ABCDE$ (Fig. 33) mit einem außerhalb der Ebene des Vielecks liegenden Punkte S und legt durch je zwei benachbarte Verbindungsgeraden die Ebene, so heißt der entstandene Körper eine **Pyramide.**

Eine Pyramide ist ein Körper, der begrenzt wird von einem Vieleck und so vielen in einem Punkte zusammenstoßenden Dreiecken als das Vieleck Seiten hat.

Das Vieleck heißt die **Grundfläche,** seine Seiten die **Grundkanten,** die übrigen Begrenzungsflächen heißen **Seitenflächen,** ihre Schnittlinien die **Seitenkanten,** der Punkt S heißt die **Spitze,** ein von der Spitze auf die Grundfläche gefälltes Lot die **Höhe** der Pyramide.

Fig. 33.



Nach der Anzahl der Seitenflächen (oder der Grundkanten) teilt man die Pyramiden ein in **drei-, vier- . . .** n**-seitige** Pyramiden.

Sind die Seitenflächen einer Pyramide gleichschenklige Dreiecke, also die Seitenkanten einander gleich, so heißt die Pyramide eine **gerade.**

Verbindet man bei letzterer Pyramide den Fußpunkt der Höhe mit allen Eckpunkten der Grundfläche, so sind alle Verbindungsstrecken einander gleich, d. h. es läßt sich um die Grundfläche ein Kreis zeichnen, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt der Höhe ist.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck, so heißt die Pyramide **regelmäßig.**

2. Schneidet man eine Pyramide (Fig. 33) durch eine der Grundflächenebene parallele Ebene, so folgt (Kapitel I, *b*, 4):

$$A_1B_1 \parallel AB; \quad BC \parallel B_1C_1 \quad \text{usf.}$$

und

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SB}{S_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \quad \text{usf.}$$

Nach Kapitel IV, 2, Folgerung, ist außerdem:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1; \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_1 \quad \text{usf.}$$

Die Vielecke $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ stimmen mithin in den Verhältnissen entsprechender Seiten und in den Winkeln überein, und sie sind daher einander ähnlich.

Ist ferner F_1 der Schnittpunkt der Höhe mit der Ebene $A_1B_1C_1D_1E_1$ und verbindet man B und B_1 mit F und F_1, so sind die Geraden BF und B_1F_1 als Schnittlinien paralleler Ebenen mit der Ebene SBF einander parallel, und es ist:

$$\frac{SF}{SF_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Nach Lehrsatz 91, Planimetrie, folgt:

$$\frac{ABCDE}{A_1B_1C_1D_1E_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{SF^2}{SF_1^2}.$$

Wir erhalten den Satz:

Schneidet man eine Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene, so ist die entstehende Schnittfigur der Grundfläche ähnlich, und die Flächeninhalte beider Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

3. Es seien $G = G_1$ die inhaltsgleichen Grundflächen zweier Pyramiden mit gleicher Höhe h, die mit ihren Grundflächen auf derselben Ebene stehen. Legt man im Abstande d von der Ebene der Grundflächen zu dieser Ebene eine parallele Ebene, welche die Pyramiden in den Durchschnittsfiguren g und g_1 schneidet, so ist nach dem vorangehenden Lehrsatz:

$$\frac{g}{G} = \frac{(h-d)^2}{h^2}$$

$$\frac{g_1}{G_1} = \frac{(h-d)^2}{h^2},$$

folglich:

$$\frac{g}{G} = \frac{g_1}{G_1}$$

und

$$g = g_1.$$

Beide Körper erfüllen demnach die Bedingungen des Cavalierischen Grundsatzes, und sie sind daher einander raumgleich.

Satz. Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind inhaltsgleich.

In dem dreiseitigen Prisma $ABCDEF$ (Fig. 34 a) ziehe man die Diagonalen DB und BF der Seitenflächen $ABED$ und $BCEF$. Legt man durch BD und BF eine Ebene, so wird das Prisma in die dreiseitige Pyramide B, DEF und in die vierseitige Pyramide $B, ACFD$ zerlegt. (Fig. 34 b.) Zieht

Fig. 34 a.

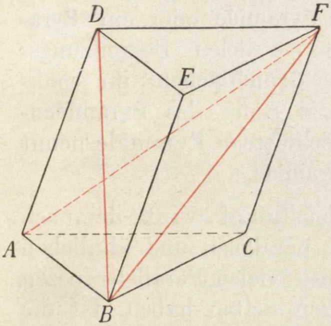
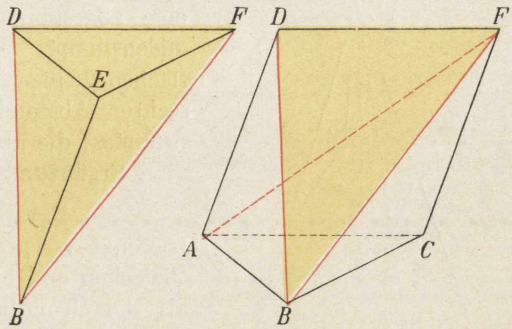


Fig. 34 b.



man in der dritten Seitenfläche des Prismas die Diagonale AF und legt durch AF und BF die Ebene, so wird die vierseitige Pyramide $B, ACFD$ in zwei dreiseitige Pyramiden B, ADF und B, ACF zerlegt, die nach dem vorangehenden Satze inhaltsgleich sind. Nach demselben Satze ist auch die Pyramide B, ACF oder F, ABC inhaltsgleich der Pyramide B, DEF. Folglich sind die drei Pyramiden B, DEF, B, ADF und B, ACF einander inhaltsgleich. Jede der drei Pyramiden ist gleich einem Drittel des dreiseitigen Prismas. Ist G die Grundfläche des Prismas und h seine Höhe, so ist der Inhalt V jeder dreiseitigen Pyramide:

$$V = \frac{Gh}{3}.$$

Satz 1. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich durch zwei ebene Schnitte in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen.

2. Der Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

Verwandelt man die Grundfläche einer beliebigen n-seitigen Pyramide in ein Dreieck und errichtet über dem Dreieck eine Pyramide, die mit der n-seitigen gleiche Höhe hat, so sind die beiden Pyramiden nach dem Cavalierischen Grundsatze inhaltsgleich. Ist G die Grundfläche und h die Höhe der n-seitigen Pyramide, so ist ihr Inhalt V:

$$V = \frac{Gh}{3}.$$

Man vergleiche Anmerkung Kapitel III, 4.

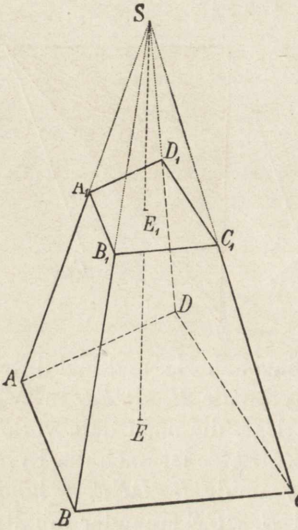
4. Die **Oberfläche** einer Pyramide ist gleich der Summe der Inhalte der Grundfläche und der Seitendreiecke.

Ist u der Umfang der Grundfläche einer geraden regelmäßigen Pyramide und h_1 die Höhe eines Seitendreiecks, so ist der **Mantel** $\boldsymbol{M}$ derselben:

$$M = \frac{uh_1}{2}.$$

5. Schneidet man eine Pyramide durch eine zur Grundflächenebene parallele Ebene (Fig. 35), so heißt der zwischen den parallelen Ebenen gelegene Teil eine **abgestumpfte Pyramide** oder ein **Pyramidenstumpf.** Die parallelen Begrenzungsflächen heißen die **Grundflächen,** ihr senkrechter Abstand die **Höhe** des **Pyramidenstumpfes;** die abgeschnittene Pyramide nennt man **Ergänzungspyramide.**

Fig. 35.



Ein Pyramidenstumpf wird demnach begrenzt von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken und ebenso vielen Paralleltrapezen, als die Grundflächen Seiten haben. Ist die ganze Pyramide eine gerade regelmäßige, so sind die Seitenflächen des Pyramidenstumpfes inhaltsgleiche gleichschenklige Paralleltrapeze.

Sind a und a_1 die parallelen Gegenseiten (Grundkanten) der Trapeze und h_1 ihre Höhe, so ist der Inhalt F eines solchen Trapezes

$$F = \frac{a + a_1}{2} h_1.$$

Ist der Pyramidenstumpf ein regelmäßiger, n-seitiger, so ist sein Mantel

$$M = n\frac{a + a_1}{2} h_1 = \frac{u + u_1}{2} h_1,$$

wenn u und u_1 die Umfänge der Grundflächen sind.

Es seien G und G_1 die Grundflächen und h die Höhe des Pyramidenstumpfes, x die Höhe der ganzen Pyramide und y die der Ergänzungspyramide, V der Rauminhalt des Pyramidenstumpfes, so ist:

1. $$V = \frac{G}{3} x - \frac{G_1}{3} y.$$

Es ist ferner:

2. $$x - y = h.$$

3. $$\frac{x^2}{y^2} = \frac{G}{G_1}.$$

Aus 3. folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_1}}.$$

Mithin ist:

$$\frac{x}{x-y} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}}; \quad x = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}} \cdot h$$

$$\frac{y}{x-y} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}}; \quad y = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}} \cdot h$$

Aus 1. erhält man:

$$V = \frac{1}{3} \frac{G\sqrt{G} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}} \cdot h.$$

Setzt man $\sqrt{G} = a$; $G = a^2$ und $\sqrt{G_1} = b$, $G_1 = b^2$, so ist:

$$\frac{G\sqrt{G} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}} = \frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2 = G + \sqrt{G G_1} + G_1,$$

daher:

$$\boldsymbol{V = \frac{G + \sqrt{G G_1} + G_1}{3} h.}$$

Satz. Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist gleich der Summe der Inhalte dreier gleich hoher Pyramiden, von denen zwei die Grundflächen des Stumpfes, die dritte das geometrische Mittel derselben zu Grundflächen haben.

Anmerkung. Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist eine Funktion der Grundflächen und der Höhe.

Was ergibt sich aus der Formel für den Rauminhalt des Pyramidenstumpfes 1) für $G_1 = G$; 2) für $G_1 = 0$?

6. Aufgaben.

1. Es soll der Rauminhalt der geraden regelmäßigen Pyramide für einen gegebenen Halbmesser des Umkreises ihrer Grundfläche und für eine gegebene Höhe als Funktion der Seitenanzahl dargestellt werden. Welchen Verlauf hat die Funktionskurve, und welcher Schluß läßt sich aus dem Verlaufe für $n = \infty$ hieraus ziehen?

2. Man soll die Oberfläche und den Inhalt einer geraden regelmäßigen sechsseitigen Pyramide aus der Grundkante $a = 25\ cm$ und der Höhe $h = 72\ cm$ berechnen.

3. Man soll die Oberfläche und den Inhalt einer geraden Pyramide berechnen, deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a = 1{,}2\ m$, $b = 0{,}8\ m$, und deren Höhe $h = 1{,}8\ m$ ist.

4. Man soll die Oberfläche und den Inhalt einer geraden regelmäßigen vierseitigen Pyramide berechnen: α) aus der Grundkante $a = 12$ *cm* und der Höhe einer Seitenfläche $h_1 = 15{,}4$ *cm*; β) aus der Grundkante $a = 1{,}2$ *m* und der Seitenkante $b = 1{,}4$ *m*.

5. Man soll die Grundkante einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide berechnen, wenn der Rauminhalt $V = 52{,}26$ *ccm* beträgt und ihre Höhe h 4 mal so groß ist wie die Grundkante.

Anmerkung. Eine dreiseitige Pyramide heißt auch **Tetraeder;** sind die Kanten eines Tetraeders alle einander gleich, so heißt dasselbe ein **regelmäßiges.**

6. Man soll die Oberfläche und den Inhalt eines regelmäßigen Tetraeders α) aus der Kante $a = 12$ *cm*, β) aus der Höhe $h = 15$ *cm* einer Begrenzungsfläche berechnen.

7. Man berechne den Neigungswinkel der Kanten eines regelmäßigen Tetraeders gegen die Grundfläche sowie den Winkel zweier Tetraederflächen.

8. Wie groß ist die Oberfläche, der Inhalt und der Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche bei einer geraden quadratischen Pyramide, wenn die Grundkante $a = 15$ *cm* und der Inhalt eines durch die Spitze und die Diagonale der Grundfläche gelegten Schnittes $f = 195{,}16$ *qcm* gegeben sind?

9. Es soll der Rauminhalt einer geraden quadratischen Pyramide aus der Grundkante $a = 1{,}5$ *m* und dem Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundfläche $\alpha = 65^0\,8'\,40''$ berechnet werden.

10. Wie groß ist der Rauminhalt einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe $h = 42$ *cm* und der Oberfläche $O = 2674{,}9$ *qcm*?

11. Es soll die Oberfläche und der Inhalt eines regelmäßigen Oktaeders, dessen Kante $a = 20$ *cm* lang ist, berechnet werden.

12. Wie groß ist der Neigungswinkel des Flächenwinkels zweier Grenzflächen des regelmäßigen Oktaeders?

13. Ein regelmäßiges Oktaeder hat mit einem Würfel gleiche Oberfläche. Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper zueinander?

14. Die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders werden an den Ecken um $\frac{1}{4}$ ihrer Länge abgestumpft. Es soll der Inhalt und die Oberfläche des entstehenden Körpers aus der Oktaederkante a berechnet werden. (Zeichnung des Körpers.)

15. Die Summe der Seitenkanten einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide verhält sich zur Summe der Grundkanten wie 4 : 3; die Gesamtlänge aller Kanten ist $s = 2{,}112$ *m*. Es soll die Oberfläche, der Rauminhalt und der Neigungswinkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche berechnet werden.

16. Es soll der Rauminhalt einer geraden regelmäßigen zehnseitigen Pyramide von der Höhe $h = 1{,}56\ m$ berechnet werden, wenn der Halbmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises $r = 2{,}33\ m$ ist.

17. Ein Zelt hat die Gestalt einer geraden abgestumpften Pyramide mit regelmäßigen Sechsecken als Grundflächen, von denen die eine $a = 4\ m$, die andere $a_1 = 3\ m$ Seitenlänge hat, während die Seitenkante die Länge $s = 2\ m$ besitzt. Welchen Rauminhalt hat das Zelt, wieviel Quadratmeter Zeltstoff waren zum Aufbau nötig, und welche Neigung haben Seitenflächen und Seitenkanten zur Grundfläche?

18. Eine abgestumpfte gerade quadratische Pyramide aus Granit wiegt $P = 34{,}821\ kg$; der Umfang der unteren Grundfläche ist $U = 4\ m$, der Umfang der oberen Grundfläche $U_1 = 2{,}8\ m$. Wie groß ist die Höhe des Pyramidenstumpfes, wenn das spezifische Gewicht des Granites $s = 2{,}65$ ist?

19. Ein Pyramidenstumpf von der Höhe $h = 2\ m$ hat als Grundflächen gleichschenklige Dreiecke mit dem Winkel an der Grundlinie $\beta = 21^0\, 6'\, 45''$. Von der einen Grundfläche ist die Grundlinie $a = 1{,}2\ m$, von der andern der Schenkel $b = 0{,}8\ m$ gegeben. Wie groß ist der Rauminhalt des Stumpfes, und wie groß ist die Höhe der Ergänzungspyramide?

20. Es soll aus dem Rauminhalte $V = 238\ ccm$ eines Pyramidenstumpfes und aus den Flächeninhalten $G = 24\ qcm$, $G_1 = 6\ qcm$ ihrer Grundflächen der Rauminhalt der Ergänzungspyramide berechnet werden.

21. Es soll der Rauminhalt eines geraden regelmäßigen fünfseitigen Pyramidenstumpfes von der Höhe $h = 80\ cm$ aus dem Halbmesser des Umkreises $r = 18\ cm$ der unteren und dem Halbmesser des Inkreises $\varrho = 6\ cm$ der oberen Grundfläche berechnet werden.

22. Ein quadratischer Pyramidenstumpf, dessen Grundflächen die Seiten $a = 10\ cm$ und $b = 6\ cm$ haben, soll durch einen zu der Grundfläche parallelen Schnitt halbiert werden. In welcher Entfernung zu der unteren Grundfläche muß der Schnitt gelegt werden, wenn die Höhe des Stumpfes $h = 16\ cm$ ist?

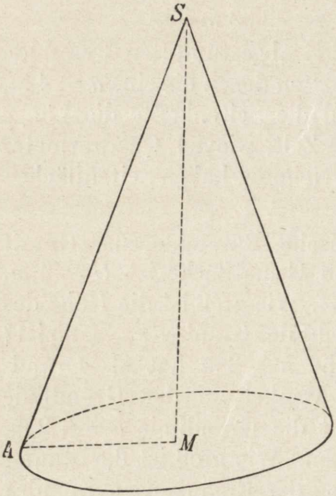
Kapitel VII.

Der Kegel.

1. Bewegt sich eine gerade Linie so, daß sie fortgesetzt durch einen festen Punkt hindurchgeht und längs einer Kreislinie des Leitkreises, hingleitet, so beschreibt sie eine krumme Fläche, die **Kegelfläche** genannt wird; der von der Kegelfläche und der Kreisfläche begrenzte Körper heißt ein **Kegel.**

Die Kreisfläche heißt die **Grundfläche,** der feste Punkt die **Spitze,** die krumme Begrenzungsfläche der **Mantel,** die zwischen der Kreislinie und der Spitze gelegene Strecke der Geraden in jeder ihrer Lagen **Seitenlinie,** die Verbindungsstrecke der Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche die **Achse,** der Abstand der Spitze von der Grundflächenebene die **Höhe** des Kegels.

Fig. 36.



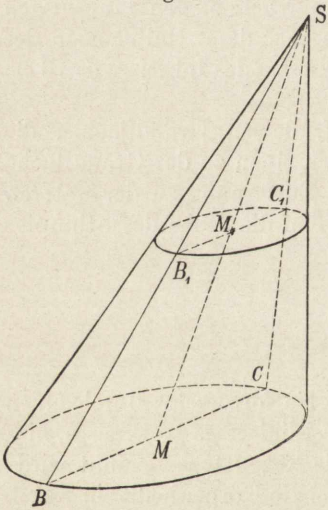
Je nachdem die Achse senkrecht oder schief zur Grundfläche steht, heißt der Kegel ein **gerader** oder ein **schiefer.**

Bei dem geraden Kegel sind alle Seitenlinien gleich lang; alle durch die Achse gelegten Schnitte (Achsenschnitte) schneiden den Kegel in kongruenten, gleichschenkligen Dreiecken. Ein gerader Kegel entsteht daher auch, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck MAS (Fig. 36) um eine seiner Katheten, etwa MS, als Achse dreht.

Die Achsenschnitte eines schiefen Kegels sind bis auf *einen* ungleichseitige Dreiecke. (Beweis!)

Schneidet man einen Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, welche die Achse (Fig. 37) in M_1 schneidet und legt einen Achsenschnitt SBC, welcher die Schnittlinie in B_1 und C_1 schneidet, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SBM und SB_1M_1 und ebenso der Dreiecke SCM und SC_1M_1:

Fig. 37.



$$\begin{aligned} MB : M_1B_1 &= SM : SM_1 \\ MC : M_1C_1 &= SM : SM_1 \\ \hline MB : M_1B_1 &= MC : M_1C_1 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} MB : MC &= M_1B_1 : M_1C_1 \\ 1 : 1 &= M_1B_1 : M_1C_1, \text{ d. h.:} \\ M_1B_1 &= M_1C_1. \end{aligned}$$

Die Schnittfläche ist daher eine Kreisfläche. Der entstandene untere Körper heißt ein **Kegelstumpf,** die parallelen Grenzflächen sind seine **Grundflächen,** ihr Abstand ist die **Höhe** des Kegelstumpfes. Der abgeschnittene Kegel heißt **Ergänzungskegel.**

Da wir den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten auffassen können, so läßt sich der Kegel als eine regelmäßige Pyramide mit unendlich vielen und unendlich kleinen Seitenflächen ansehen. (Vgl. Kapitel VI, Aufgabe 1.)

2. Da der Mantel einer **geraden** regelmäßigen Pyramide, deren Seitenflächen die Höhe h_1 haben nach Kapitel VI, 4 gleich dem Produkte aus den halben Umfange der Grundfläche und der Höhe h_1 ist, so ergibt sich für dem

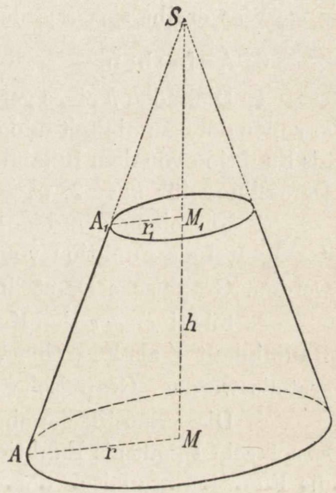
Mantel eines geraden Kegels mit der Seitenlinie s und dem Grundflächenhalbmesser r:

$$M = \frac{2\pi r}{2} \cdot s = \pi r s.$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir uns den Kegelmantel längs einer Seitenlinie aufgeschnitten und in eine Ebene aufgerollt denken. Es entsteht dann ein Kreisausschnitt mit dem Halbmesser gleich der Seitenlinie und einem Bogen gleich dem Umfange der Grundfläche. Nach Kapitel XXIV *b*, Aufgabe 4 (Planimetrie), ist der Inhalt dieses Kreisausschnittes wie oben $\pi r s$. Die Mantelfläche des geraden Kegels ist demnach eine Funktion des Grundflächenhalbmessers und der Seitenlinie.

Welche Figur erhält man, wenn man den Mantel eines schiefen Kegels in eine Ebene abwickelt?

Fig. 38.



Satz. Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist gleich dem Produkte aus dem halben Umfange der Grundfläche und der Seitenlinie.

3. Aus der Inhaltsformel für die Pyramide folgt nach obiger Auffassung für den Inhalt V des Kegels mit dem Grundflächenhalbmesser r und der Höhe h:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Satz. Der Rauminhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus seiner Grundfläche und seiner Höhe.

4. Sind (Fig. 38) r und r_1 die Grundflächenhalbmesser, s die Seitenlinie eines geraden Kegelstumpfes, x die Seitenlinie des ganzen Kegels, y die des Ergänzungskegels, so ist der Mantel M des geraden Kegelstumpfes:

1. $$M = \pi r x - \pi r_1 y.$$

Es ist außerdem:

2. $$x - y = s$$

3. $$\frac{x}{y} = \frac{r}{r_1}.$$

Hieraus folgt: $x = \frac{r}{r - r_1} s$ und $y = \frac{r_1}{r - r_1} s$

$$M = \pi s \frac{r^2}{r - r_1} - \pi s \frac{r_1^2}{r - r_1} = \pi s \frac{r^2 - r_1^2}{r - r_1}.$$

$$M = \pi s (r + r_1).$$

Satz. Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus seiner Seite und der halben Summe der Umfänge seiner Grundflächen.

Wie ergibt sich der Mantel eines geraden Kegelstumpfes aus dem Mantel einer abgestumpften geraden Pyramide?

Was wird aus M 1) für $r_1 = 0$; 2) für $r = r_1$?

5. Aus der Formel für den Rauminhalt des Pyramidenstumpfes ergibt sich für den Rauminhalt des Kegelstumpfes mit der Höhe h und den Grundflächenhalbmessern r und r_1:

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r r_1 + r_1^2).$$

Satz. Der Rauminhalt eines Kegelstumpfes ist gleich der Summe dreier gleichhoher Kegel, deren Grundflächen die Grundflächen des Stumpfes und ihr geometrisches Mittel sind.

Was ergibt sich aus dem Werte von V 1) für $r_1 = 0$; 2) für $r = r_1$?

6. Aufgaben.

1. Die Höhe h eines geraden Kegels sei gleich $m\,r$ (m eine ganze Zahl); es sollen der Rauminhalt und der Mantel als Funktionen von r und umgekehrt r als Funktion von dem Inhalt oder dem Mantel dargestellt werden. Graphische Darstellung für $m = 2$, $m = 3$.

2. Für einen geraden Kegelstumpf ist $r_1 = n\,r$ und $s = m\,r$; es soll der Mantel als Funktion von r und r als Funktion des Mantels dargestellt werden. Graphische Darstellung für $n = \frac{1}{2}$, $m = 2$; $n = \frac{1}{3}$; $m = 4$.

3. Für einen geraden Kegelstumpf ist $r_1 = n\,r$ und $h = m\,r$; es soll der Rauminhalt V als Funktion von r und umgekehrt r als Funktion von V dargestellt werden. Graphische Darstellung für $n = \frac{1}{2}$, $m = 3$.

4. Die Mantelfläche eines geraden Kegels hat die gegebene Größe M; es soll sein Inhalt als Funktion des Grundflächenhalbmessers berechnet und die Funktion graphisch dargestellt werden. Zahlenbeispiel: $M = \pi$.

5. Von einem Kegelstumpf ist die Höhe $h = 3$ und der eine Grundflächenhalbmesser $r = 2$ gegeben. Es soll sein Rauminhalt als Funktion des anderen Grundflächenhalbmessers dargestellt werden? Wie groß ist der Grundflächenhalbmesser für den Rauminhalt gleich 8π? (Graphisch zu ermitteln!)

6. Man soll die Oberfläche O und den Rauminhalt V eines Kegels berechnen, von dem der Grundflächenhalbmesser $r = 3{,}04\,m$ und die Seitenlinie $s = 4{,}25\,m$ gegeben sind.

7. Man berechne für einen Kegel O und V aus $h = 24\,cm$, $s = 26\,cm$.

8. Man berechne ebenso V aus dem Mantel $M = 160{,}404\,qm$, $h = 1{,}76\,m$.

9. Man berechne V aus $O = 2099{,}43\,qcm$ und $h = 16{,}52\,cm$.

10. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 20\,cm$. Wie groß ist die Oberfläche und der Rauminhalt dieses Kegels?

11. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 60$ *cm* und $b = 80$ *cm* wird um die größere Kathete als Achse gedreht. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des entstehenden Kegels?

12. Es soll ein kegelförmiges Zelt hergestellt werden, das bei einem Grundflächenhalbmesser $r = 3$ *m* einen Rauminhalt $V = 36$ *cbm* hat. Wie hoch muß dasselbe werden, und wieviel Quadratmeter Zeltstoff sind dazu erforderlich?

13. Ein trichterförmiges Gefäß, dessen Seitenlinie $s = 25$ *cm* lang und dessen Grundflächendurchmesser der Seitenlinie gleich ist, sei mit Wasser gefüllt. Wie groß ist das Gewicht des Wassers?

14. Wie hoch muß man in ein kegelförmiges Champagnerglas von der Höhe h *cm* eingießen, damit es zu drei Viertel gefüllt ist?

15. Ein Messingwürfel mit der Kante $a = 12$ *cm* soll trichterartig so ausgebohrt werden, daß der Rand des Trichters ein einer Würfelfläche einbeschriebener Kreis ist und die Spitze des Trichters in der Mitte der gegenüberliegenden Würfelfläche liegt. Welches ist das Gewicht der ausgebohrten Masse und des Restkörpers (spezifisches Gewicht des Messings $s = 8{,}4$) sowie die Oberfläche des letzteren?

16. Es soll der Rauminhalt der Kegel bestimmt werden, dessen Mäntel in eine Ebene aufgerollt

a) einen Halbkreis vom Halbmesser $\varrho = 5$ *cm*,

b) einen Quadranten vom Halbmesser $\varrho = 12$ *cm*,

c) einen Kreisauschnitt vom Halbmesser $\varrho = 20$ *cm* und dem Zentriwinkel $\alpha = 120^0$ bilden.

17. Es soll in einen geraden Kegel, dessen Halbmesser $r = 20$ *cm* und dessen Höhe $h = 36$ *cm* ist, eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche einbeschrieben werden. *a*) Wie groß ist jede Seitenfläche? *b*) Wie groß ist der Rauminhalt der Pyramide?

18. Es soll die Gesamtoberfläche eines Kegels berechnet werden, der einer regelmäßigen achtseitigen geraden Pyramide mit der Grundkante $a = 4{,}5$ *cm* und der Höhe $h = 16{,}8$ *cm* umbeschrieben ist.

19. Eine zylindrische Eisenstange von $u = 22$ *cm* Umfang hat an dem einen Ende eine kegelförmige Spitze. Die Länge des zylindrischen Teiles beträgt $l = 80$ *cm*, die Seitenlinie des Kegels $s = 10$ *cm*. Man berechne das Gewicht der Stange, wenn das spezifische Gewicht des Eisens $s_1 = 7{,}5$ beträgt. ($\pi = \frac{22}{7}$.)

20. Ein Nicholsonsches Aräometer besteht aus einem geraden Zylinder mit dem Halbmesser $r = 4{,}5$ *cm* und der Höhe $h = 16$ *cm* und zwei auf diesem stehenden geraden Kegeln, deren Höhen den Halbmessern gleich sind. Wie groß ist die Oberfläche des ganzen Körpers?

21. Ein gerader Zylinder ist von der einen Grundfläche aus kegelförmig so ausgehöhlt, daß die Achsen beider Körper zusammenfallen; der Grundflächenhalbmesser des Zylinders ist $r = 16$ *cm*, seine Höhe $h = 24$ *cm*;

bei dem Kegel sind die entsprechenden Stücke halb so groß. Wie groß ist der Inhalt des übrig gebliebenen Körpers?

22. Ein regelmäßiges Sechseck von der Seite $a = 12\ cm$ dreht sich um einen großen Durchmesser und beschreibt einen Umdrehungskörper, der aus zwei Kegeln und einem Zylinder besteht. Man bestimme die Oberfläche und den Inhalt des entstehenden Körpers?

23. Man berechne den Rauminhalt eines geraden Kegels aus dem Halbmesser $r = 6\ cm$ der Grundfläche und dem Winkel $\alpha = 112^0\ 10'\ 24''$ an der Spitze eines Achsenschnitts.

24. Man berechne den Rauminhalt eines geraden Kegels aus der Seitenlinie $s = 25\ cm$ und dem Neigungswinkel $\beta = 36^0\ 42'$ derselben gegen die Grundfläche.

25. Wie groß ist der Mantel eines geraden Kegels, dessen Seitenlinien gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha = 67^0\ 22'\ 48''$ geneigt sind, wenn der Inhalt des Kegels $V = 314{,}16\ ccm$ ist?

26. Wie verhält sich der Rauminhalt eines gleichseitigen Kegels zu dem eines gleichseitigen Zylinders, wenn beide Körper gleiche Mäntel oder gleiche Oberflächen haben?

27. Wie verhalten sich die Rauminhalte der einem regelmäßigen Tetraeder mit der Kante a ein- und umbeschriebenen Kegel zueinander?

28. Es soll der Rauminhalt und die Oberfläche eines geraden abgestumpften Kegels aus den Grundflächenhalbmessern $r = 80\ cm$, $r_1 = 40\ cm$ und der Höhe $h = 30\ cm$ berechnet werden.

29. Es sind von einem geraden Kegelstumpf die Grundflächenhalbmesser $r = 18\ cm$ und $r_1 = 6\ cm$ und der Rauminhalt $V = 2450{,}5\ ccm$ gegeben. Wie groß sind seine Höhe, Seitenlinie und Gesamtoberfläche?

30. Ein Baumstamm hat die Gestalt eines Kegelstumpfes. Die Umfänge seiner Grundflächen sind $U = 3{,}14\ m$ und $U_1 = 2{,}512\ m$, seine Länge $l = 9\ m$. Wieviel Kubikmeter Holz enthält er? Wie ist das Ergebnis, wenn man den Baumstamm als zylindrisch ansieht und den mittleren Umfang zugrunde legt?

31. Es soll der Mantel, die Oberfläche und der Rauminhalt eines geraden Kegelstumpfes aus den Halbmessern der beiden Grundflächen $r = 5\ m$, $r_1 = 3\ m$ und der Höhe des Ergänzungskegels $h_1 = 9\ m$ berechnet werden.

32. Ein quaderförmiges Kupferstück (spezifisches Gewicht $s = 8{,}9$) erhält eine kegelförmige Bohrung, die auf der einen Seite $d = 11{,}2\ cm$, auf der andern $d_1 = 8{,}4\ cm$ weit ist, während die innere Wandung $d_2 = 6{,}5\ cm$ mißt. Wieviel Kubikzentimeter Kupfer hat das Stück verloren, und um wieviel ist es leichter geworden?

33. Ein eiserner Kegelstumpf mit den Grundflächenhalbmessern $r = 22\ cm$, $r_1 = 15\ cm$ und der Seitenlinie $s = 26{,}3\ cm$ soll in einen Zylinder von ein Drittel der Höhe des Stumpfes umgegossen werden. Wie groß wird sein Halbmesser, und wie groß sind die Oberflächen der beiden Körper?

34. Ein Schornstein von der Gestalt eines abgestumpften Kegels ist $h = 25\ m$ hoch, seine obere Öffnung beträgt $d = 0{,}5\ m$, seine untere

$d_1 = 0,75\ m$ im Durchmesser. Das Mauerwerk ist überall $d_2 = 0,2\ m$ dick. Wieviel Kubikmeter Steine sind zu dem Schornsteine verwendet worden?

35. Aus einem Kegelstumpf mit der Höhe $h = 50\ cm$ und den Grundflächenhalbmessern $r = 40\ cm$ und $r_1 = 24\ cm$ ist ein auf dem kleineren Grundkreis stehender Kegel herausgebohrt worden. Wie groß ist der Rauminhalt und die Oberfläche des Restkörpers?

36. Welches ist der kleinere Halbmesser und der Zentriwinkel des Ringausschnitts, der zu einem Lampenschirm von der Gestalt eines Kegelstumpfes zusammenzurollen ist, wenn der Schirm oben $2\,r_1 = 12\ cm$, unten $2\,r = 32\ cm$ weit und die Seitenlinie $s = 24\ cm$ lang sein soll?

37. Ein gerader Kegelstumpf hat die Seitenlinie $s = 19,4\ cm$ und den Inhalt $V = 3825,73\ ccm$. Die Seitenlinien sind unter $\beta = 60^0$ gegen die Grundflächen geneigt. Wie groß sind die Grundflächenhalbmesser?

38. Es soll einem regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpf, dessen Seitenlinie $s = 10,5\ cm$ ist und dessen Grundflächen die Seiten $a = 12$ und $a_1 = 8,4\ cm$ haben, Kegelstumpfe ein- und umbeschrieben werden. Wie groß sind die Rauminhalte und Mäntel der drei Körper?

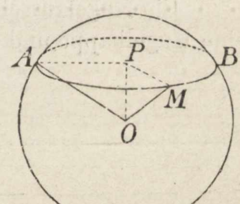
Kapitel VIII.

Die Kugel.

1. Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser als Achse, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt der Bogen eine Fläche, deren sämtliche Punkte von dem Kreismittelpunkt gleiche Entfernung haben; die entstandene Fläche begrenzt vollständig den gleichzeitig von der Halbkreisfläche erzeugten Körper.

Die Fläche heißt eine **Kugelfläche,** der von ihr begrenzte Körper heißt eine **Kugel,** der von allen Punkten der Kugelfläche gleichweit entfernte Punkt der **Mittelpunkt**, die gleiche Entfernung heißt der **Halbmesser** (Radius) der Kugel.

Fig. 39.



Jede **durch den Mittelpunkt** der Kugelfläche gelegte Ebene schneidet dieselbe nach erzeugenden **oder größten Kreisen.**

Fällt man vom Kugelmittelpunkt O (Fig. 39) die Senkrechte OP auf eine beliebige die Kugelfläche schneidende Ebene und verbindet zwei beliebige Punkte A und M der Schnittlinie der Ebene mit der Kugelfläche mit O und P, so folgt aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke APO und MPO:

$$AP = MP.$$

Diese Beziehung gilt für alle Punkte der Schnittlinie, mithin folgt:

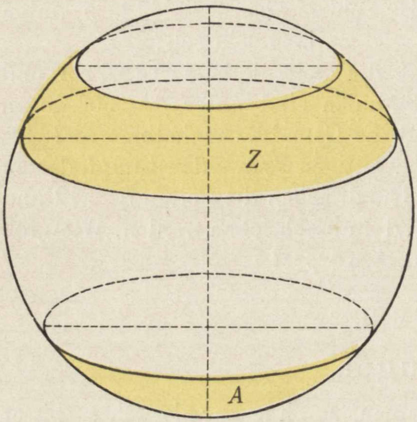
Jeder ebene Schnitt einer Kugelfläche ist eine Kreislinie, deren Mittelpunkt der Fußpunkt des vom Kugelmittelpunkt auf die Schnittebene gefällten Lotes ist.

Ist r der Kugelhalbmesser, d der Abstand der Schnittebene vom Kugelmittelpunkt, ϱ der Halbmesser des Schnittkreises, so ist:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - d^2},$$

d. h. bei gegebenem Kugelhalbmesser ist ϱ eine Funktion von d. Welche Folgerungen ergeben sich aus der vorstehenden Beziehung?

Fig. 40.



Der Teil einer Kugel, der durch eine Ebene abgeschnitten wird, heißt ein **Kugelabschnitt** oder **Kugelsegment,** seine krumme Oberfläche heißt **Kugelkappe oder Kalotte** (Fig. 40 A). Geht die Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt, so heißen die beiden gleichen Kugelabschnitte **Halbkugeln;** zu jeder nicht durch den Kugelmittelpunkt gehenden Schnittebene gehören zwei Kugelabschnitte und zwei Kugelkappen von verschiedener Größe.

Fällt man vom Kugelmittelpunkt das Lot auf die Schnittebene, so heißt der Abschnitt desselben zwischen der Schnittebene und der Kugelfläche die **Höhe des Kugelabschnitts** und der **Kugelkappe.**

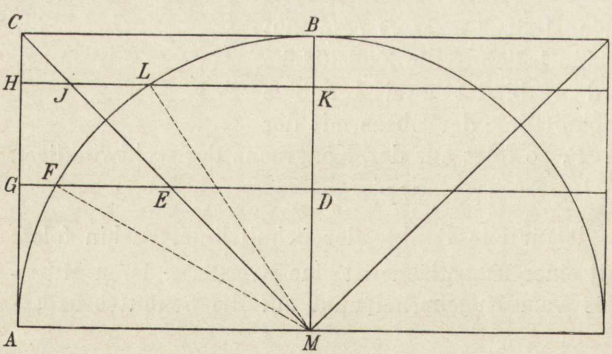
Eine **Kugelschicht (körperliche Zone)** ist der von zwei parallelen Schnittebenen begrenzte Teil einer Kugel.

Eine **Zone** ist der Teil einer Kugeloberfläche, der durch zwei parallele Ebenen ausgeschnitten wird (Fig. 40, Z).

Die **Höhe** der Zone ist der Abstand der beiden Schnittebenen.

Ein **Kugelausschnitt** oder **Kugelsektor** ist der Teil einer Kugel, der durch eine Kugelkappe und den durch ihren Kugelkreis und den Kugelmittelpunkt bestimmten Kegelmantel begrenzt wird. Ein Kugelausschnitt kann durch Drehung eines Kreisausschnittes um die den Zentriwinkel halbierende Gerade entstanden gedacht werden.

Fig. 41.



2. Einem Viertelkreise AFB (Figur 41) sei ein Quadrat $AMBC$ umbeschrieben und in letzterem die Diagonale MC gezogen. Dreht man diese Figur um MB als Achse, so beschreibt das Quadrat $AMBC$ einen Zylinder, der Viertelkreis AFB eine Halbkugel, das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck MBC einen geraden Kegel und das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck AMC einen Körper, der gleich dem Unterschied von dem Zylinder und dem Kegel ist, und den wir Restkörper nennen.

Der Restkörper und die Halbkugel stehen zwischen parallelen Ebenen, die Körper erfüllen demnach eine Bedingung des Cavalierischen Grundsatzes.

Schneiden wir beide Körper durch eine den ersteren Ebenen parallele Ebene, so wird die Halbkugel in einem Kreis mit dem Halbmesser DF, der Restkörper in einem Kreisring mit den Halbmessern DG und DE geschnitten. Bezeichnen wir AM mit r, DM mit x, so ist:

$$FD^2 = r^2 - x^2$$

and der Inhalt des Schnittkreises mit der Halbkugel

$$\pi\, FD^2 = \pi\,(r^2 - x^2).$$

Da in dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke MDE die Strecken DM und ED gleich x sind, so folgt für den Querschnitt des Restkörpers:

$$\pi\,(GD^2 - DE^2) = \pi\,(r^2 - x^2).$$

Da die Querschnitte der Halbkugel und des Restkörpers flächengleich sind, so haben nach dem Cavalierischen Grundsatz die Halbkugel und der Restkörper gleichen Rauminhalt.

Satz. Der Rauminhalt einer Halbkugel ist gleich dem Unterschied der Inhalte des Zylinders und des Kegels, die mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Ist r der Kugelhalbmesser, so ist der Inhalt des Zylinders $\pi\, r^2 \,.\, r = \pi\, r^3$, der Inhalt des Kegels $\frac{1}{3}\pi\, r^2 \,.\, r = \frac{\pi\, r^3}{3}$. Mithin ist der Inhalt der Halbkugel $\pi\, r^3 - \frac{\pi\, r^3}{3} = \frac{2\,\pi\, r^3}{3}$.

Der Inhalt der Kugel vom Halbmesser r ist somit:

$$\boldsymbol{V = \tfrac{4}{3}\,\pi\, r^3.}$$

Der Rauminhalt einer Kugel ist eine Funktion des Halbmessers.

3. Eine Kugel läßt sich zusammengesetzt denken aus unendlich vielen und daher unendlich kleinen Pyramiden, deren gemeinsame Spitze der Kugelmittelpunkt und deren gemeinsame Höhe der Kugelhalbmesser r ist. Die Summe aller Pyramideninhalte ist demnach gleich $\frac{r}{3}$, multipliziert mit der Summe aller Grundflächen. Die letztere Summe ist gleich der Kugeloberfläche O. Mithin ergibt sich:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{r}{3}\,.\,O,$$

woraus folgt:

$$\boldsymbol{O = 4\,\pi\, r^2,} \quad \text{d. h.}$$

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Inhalt eines größten Kugelkreises.

Die Kugeloberfläche ist eine Funktion des Kugelhalbmessers.

4. Im Anschlusse an die Herleitung unter 2 folgt aus Fig. 41, daß nach dem Cavalierischen Grundsatze der Inhalt des Kugelabschnitts mit der Höhe $BD = h$ gleich dem Inhalte des Restkörpers oberhalb der Schnittebene, also gleich dem Unterschiede des Zylinders mit der Höhe $BD = h$, dem Grundflächenhalbmesser $GD = r$ und des Kegelstumpfes mit der Höhe $BD = h$ den Grundflächenhalbmessern $BC = r$ und $DE = DM = r - h$ ist.

Mithin ist der Rauminhalt V des Kugelabschnitts mit der Höhe h:

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2\right] = \frac{\pi h^2}{3}\,\mathbf{(3\,r - h)}.$$

Was ergibt sich für V, wenn $h = 2r$ wird?

Der Rauminhalt eines Kugelabschnitts ist eine Funktion des Kugelhalbmessers und der Höhe des Abschnittes. Was ergibt sich für $h = r$?

5. Durch die gleiche Betrachtung wie unter 2) und 4) (Fig. 41) ergibt sich, daß der **Rauminhalt der Kugelzone** mit der Höhe $KD = h$ gleich dem Unterschiede der Inhalte des gleich hohen Zylinders mit dem Halbmesser $GD = r$ und des Kegelstumpfes mit den Halbmessern KI und DE ist. Bezeichnet man die Abstände MK und MD der Schnittebenen vom Kugelmittelpunkt, die zugleich die Halbmesser der Grundkreise des Kegelstumpfes sind, mit x und y, so folgt für den Inhalt V der Kugelzone:

1. $$V = \pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(x^2 + xy + y^2)\,h.$$

Es ist:

2. $$h = x - y.$$

Bezeichnet man die Halbmesser KL und FD der Grenzflächen der Zone mit r_1 und r_2, so ist:

3. $$r^2 = r_1^2 + x^2 \text{ und } r^2 = r_2^2 + y^2.$$

Aus 3. folgt durch Addition:

4. $$r^2 = \frac{x^2 + y^2 + r_1^2 + r_2^2}{2}$$

und aus 1) erhält man:

$$V = \frac{\pi}{3}\left[\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + r_1^2 + r_2^2) - (x^2 + xy + y^2)\right] h.$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[3\,r_1^2 + 3\,r_2^2 + (x^2 - 2\,xy + y^2)\right] h$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\mathbf{3\,r_1^2 + 3\,r_2^2 + h^2}\right) \mathbf{h}.$$

Wie groß werden r_1, r_2 und V $a)$ für $h = r$; $b)$ für $h = 2r$?

6. Wir berechnen den **Inhalt** V **des Kugelausschnitts**, der durch Drehung des Kreisausschnitts MBF um MB als Achse entsteht. Dieser Inhalt ist gleich der Summe der Inhalte des Kugelabschnitts mit der Höhe $BD = h$ (vgl. 4) und des Kegels, der $MD = r - h$ als Höhe und $FD = \sqrt{MF^2 - MD^2} = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2\,r\,h - h^2}$ als Halbmesser des Grundkreises hat, also:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3\,r - h) + \frac{\pi}{3}(2\,r\,h - h^2)(r - h)$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left[3\,r\,h - h^2 + 2\,r^2 - r\,h - 2\,r\,h + h^2\right].$$

$$\boldsymbol{V = \frac{2\,\pi\,r^2\,h}{3}}.$$

Wie groß wird V für $h = 2\,r$?

7. Um den **Flächeninhalt** K **der Kugelkappe** (Kalotte) von der Höhe h zu berechnen, denke man sich den zur Kugelkappegehörigen Kugelausschnitt in unendlich viele, unendlich kleine Pyramiden zerlegt, die ihre Spitzen im Kugelmittelpunkt, also Höhen gleich dem Kugelhalbmesser r haben. Die Summe ihrer Grundflächen ist gleich K, also ihr Inhalt $\frac{K}{3}\,r$; nach 6. ist der Inhalt auch gleich $\frac{2\,\pi\,r^2\,h}{3}$. Mithin folgt:

$$\frac{2\,\pi\,r^2\,h}{3} = \frac{K}{3}\,.\,r.$$

$$\boldsymbol{K = 2\,\pi\,r\,h}.$$

8. Um den **Flächeninhalt** Z **einer Kugelzone** von der Höhe h zu bestimmen, bezeichne man den Abstand der dem Kugelmittelpunkt am nächsten liegenden Begrenzungsebene vom Kugelmittelpunkt mit x. Dann ist der Inhalt der Zone gleich dem Unterschied der Inhalte zweier Kugelkappen mit den Höhen $r - x$ und $r - (h + x)$; mithin ist:

$$Z = 2\,\pi\,r\,(r - x) - 2\,\pi\,r\,(r - (h + x))$$

$$= \boldsymbol{2\,\pi\,r\,h}.$$

Anmerkung. Wird die eine der beiden Grundkreisebenen der Zone zur Berührungsebene an die Kugel, so wird die Zone zur Kugelkappe.

Wird auch die andere Grundebene durch Parallelverschiebung zur Berührungsebene, so wird die Zone, beziehungsweise auch die Kugelkappe zur Kugeloberfläche O, daher:

$$O = 2\,\pi\,r\,.\,2\,r = 4\,\pi\,r^2.$$

9. Aufgaben.

1. Man soll auf graphischem Weg den Halbmesser der Kugeln ermitteln, von denen a) der Inhalt $V = 8\,\pi$, b) die Oberfläche $O = 5\,\pi$ gegeben sind?

2. Wie ändert sich in einer Kugel mit gegebenem Halbmesser r der Inhalt eines Segments, wenn man die Höhe verändert? (Graphische Darstellung für $r = 2$ *cm.*)

3. Wie ändert sich die Oberfläche eines Kugelsektors, wenn man seine Höhe von 0 bis $2r$ verändert? (Graphische Darstellung für $r = 5$ *cm.*)

4. In eine Kugel mit dem Halbmesser r ist ein gerader Zylinder gestellt. Es soll *a*) sein Rauminhalt, *b*) sein Mantel, *c*) seine Oberfläche als Funktion seines Grundflächenhalbmessers dargestellt und graphisch veranschaulicht werden. Für welche Werte des Grundflächenhalbmessers erreicht *a*) der Inhalt, *b*) der Mantel, *c*) die Oberfläche einen größten Wert? (Graphisch.)

5. Es ist dieselbe Aufgabe für den geraden Kegel zu lösen.

6. Es soll in eine Halbkugel (Halbmesser r) ein Kegel gestellt werden, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt. Wie ändert sich sein Rauminhalt bei veränderlicher Höhe? Für welchen Wert der Höhe wird der Rauminhalt am größten?

7. Es soll einer Kugel vom Halbmesser r ein Kegel umbeschrieben werden. Man bestimme auf graphischem Weg die Werte der Höhe des Kegels, für die *a*) sein Rauminhalt, *b*) sein Mantel, *c*) seine Oberfläche am kleinsten wird?

8. Man berechne die Oberfläche und den Rauminhalt der Erde, wenn diese als vollkommene Kugel mit dem Halbmesser $r = 6370$ *km* angesehen wird.

9. Der Halbmesser des Jupiter beträgt das $n = 11{,}1$fache, der des Erdmondes dagegen nur den $n_1 = 3\frac{2}{3}$ Teil vom Erdhalbmesser. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen und Rauminhalte beider Himmelskörper zur Oberfläche und zum Inhalte der Erde?

10. Der Inhalt eines größten Kugelkreises ist $f = 19{,}635$ *qcm.* Wie groß ist die Oberfläche O und der Rauminhalt V der Kugel?

11. Wie groß ist der Rauminhalt V der Kugel, deren Oberfläche $O = 314$ *qm* ist?

12. Wie groß ist die Oberfläche O einer Kugel, deren Rauminhalt $V = 0{,}2681$ *cbm* ist?

13. Zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Luft hat man eine Hohlkugel mit dem inneren Durchmesser $2r = 45{,}71$ *cm*, mit Luft gefüllt, gewogen und das Gewicht $p_1 = 217{,}44$ *g* gefunden; möglichst luftleer gemacht, wog die Kugel nur $p_2 = 152{,}79$ *g*. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Luft?

14. Eine hohle, eiserne, luftleere Kugel mit dem äußeren Durchmesser $2r = 20$ *cm* sinkt gerade bis zur Hälfte im Wasser ein. Wie groß ist die Wandstärke der Kugel, wenn das spezifische Gewicht des Eisens $s = 7{,}5$ ist?

15. Ein Luftballon hat $a = 14$ *m* Durchmesser. Ein Quadratmeter der Hülle wiegt $p = 0{,}3$ *kg*. Wie groß ist sein Auftrieb, wenn er *a*) mit Wasserstoff (spezifisches Gewicht $s_1 = 0{,}00009$), *b*) mit Leuchtgas (spezifisches Gewicht $s_2 = 0{,}0005$) gefüllt ist? Das spezifische Gewicht der Luft ist $s_3 = 0{,}0013$.

16. In einem würfelförmigen Kasten liegt eine Kugel, die sämtliche Flächen desselben berührt. Wieviel beträgt der nicht ausgefüllte Raum des Kastens, wenn der Durchmesser der Kugel $2r = 30\ cm$ ist? Wie groß ist der Restraum, wenn der Würfel mit 8, 27..... Kugeln angefüllt ist?

17. Um einen Würfel von der Kantenlänge $a = 50\ cm$ ist eine Kugel beschrieben. Es soll der Rauminhalt und die Oberfläche der Kugel berechnet werden.

18. Wie verhalten sich die Rauminhalte eines Kegels, einer Kugel und eines Zylinders zueinander, wenn die Durchmesser der Grundflächen und die Höhe des Kegels und des Zylinders dem Durchmesser der Kugel gleich sind? (Satz des Archimedes [1])

19. Drei Bleiwürfel mit den Kanten $a_1 = 6\ cm$, $a_2 = 9\ cm$, $a_3 = 12\ cm$ sollen zu einer Kugel zusammengegossen werden. Wie groß wird der Durchmesser der Kugel sein?

20. Die Höhe eines regelmäßigen Tetraeders ist $h = 48{,}99\ cm$; es sollen die Rauminhalte und Oberflächen der dem Tetraeder ein- und umbeschriebenen Kugeln bestimmt werden.

21. Es sollen die Oberflächen und die Inhalte der einem regelmäßigen Oktaeder mit der Kantenlänge $a = 12\ cm$ ein- und umbeschriebenen Kugel bestimmt werden.

22. Wieviel $2\ mm$ dicke Schrotkugeln lassen sich aus einem Bleizylinder gießen, der $12\ cm$ dick und $16\ cm$ hoch ist?

23. Welchen Rauminhalt hat eine Kugel, die in einen Trichter mit dem Grundkreishalbmesser $r = 5\ cm$ und der Seitenlinie $s = 13\ cm$ so hineinpaßt, daß ihr oberster Punkt gerade in der Höhe des Randes liegt?

24. Eine Metallkugel mit der Oberfläche $O = 27\ qcm$ soll in einem Kegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, umgegossen werden. Wie groß ist der Halbmesser des Grundkreises und die Höhe des Kegels?

25. Ein gerader Kegel hat die Höhe $h = 29{,}356\ cm$ und den Rauminhalt $V = 305{,}72\ cm$. Sein Mantel ist gleich der Oberfläche einer Kugel. Wie groß ist der Halbmesser und der Inhalt dieser Kugel?

26. Um einen Kreis mit dem Halbmesser r sei ein gleichseitiges Dreieck beschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der Körper, die durch Umdrehung der Figur um eine Höhe des Dreiecks entstehen?

27. Den wievielten Teil der Kugeloberfläche beträgt der Inhalt einer Kalotte, deren Höhe gleich dem vierten Teile des Kugeldurchmessers ist? Den wievielten Teil des Kugelinhalts beträgt der Inhalt des zugehörigen Kugelabschnitts?

28. *a*) Man berechne den Teil der Erdoberfläche, der auf dem Montblanc, dessen Höhe $h = 4775\ m$ beträgt, sichtbar ist, wenn der Erdhalbmesser zu $r = 6370\ km$ gerechnet wird?

---

[1]) Archimedes, vgl. Planimetrie, Seite 65, 164. Die Hauptfigur des archimedischen Beweises, eine Kugel mit dem umbeschriebenen Zylinder, war auf dem Grabdenkmal des Archimedes eingemeißelt.

b) Wieviel von der Erdoberfläche hätten die Forscher Berson und Süring, die am 31. Juli 1901 eine Höhe $h = 10500\ m$ im Ballon „Preußen“ erreichten, bei klarer Atmosphäre überblicken können?

29. *a*) Auf einer wagerechten Ebene ruht eine Kugel mit dem Halbmesser r und über dieser, in der Verlängerung des Berührungshalbmessers, befindet sich eine punktförmige Lichtquelle in der Entfernung r von der Kugeloberfläche. Wie groß ist der beleuchtete Teil der Kugeloberfläche, und wie groß ist der zugehörige Kugelabschnitt? Wie groß ist der Schlagschatten auf der Ebene und der Schattenraum zwischen dieser und der Kugel?

b) Wie ändern sich die Ergebnisse unter *a*), wenn die Kugel sich im Abstand r von der Ebene und die Lichtquelle im Abstande $3\,r$ von der Kugelfläche befindet?

30. In welchem Verhältnis wird der Rauminhalt einer Kugel durch eine erweiterte Grenzfläche *a*) eines ihr einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeders, *b*) eines einbeschriebenen Würfels, *c*) eines einbeschriebenen regelmäßigen Oktaeders geteilt?

31. In eine Kugel mit dem Halbmesser r sei ein Zylinder beschrieben, dessen Achsenschnitt ein Quadrat ist. Wie groß sind die über seinen Grundflächen liegenden Kugelkappen und Kugelabschnitte, die seinen Mantel umgebende Zone und der entsprechende Ringkörper?

32. Es soll durch eine Halbkugel ein der ebenen Begrenzungsfläche paralleler Schnitt so gelegt werden, daß *a*) durch denselben die krumme Oberfläche der Halbkugel halbiert werde, *b*) die beiden Teile gleiche Gesamtoberflächen haben?

33. Wieviel Quadratkilometer betragen die Flächeninhalte der Zonen der Erde, wenn man die Erde als vollkommene Kugel mit dem Halbmesser $r = 6370\ km$ betrachtet und die Schiefe der Ekliptik zu $\varepsilon = 23^0\,30'$ annimmt?

34. Über einem größten Kreise der Kugel vom Halbmesser r steht eine körperliche Zone, deren krumme Oberfläche gleich der Fläche des größten Kreises ist. Wie groß ist der Rauminhalt der Zone?

35. Eine hölzerne Kugel mit dem Durchmesser $2\,r = 20\ cm$ sinkt in Wasser von 4^0 C so weit ein, daß der hervorragende Teil die Höhe $h = 2\ cm$ hat. Wie groß ist das spezifische Gewicht der betreffenden Holzart?

36. Aus einer Kugel vom Halbmesser r soll ein solcher Ausschnitt herausgebohrt werden, daß dessen Abschnitt gleich ist dem dazu gehörigen Kegel. Welches ist die Höhe des Abschnitts? Wie verhält sich der Rauminhalt des Ausschnitts zu dem der Kugel?

37. Welches ist die Höhe des Abschnitts bei dem Ausschnitte der Kugel vom Halbmesser r, dessen Kegelmantel gleich der Kugelkappe ist?

Sach- und Namenverzeichnis.

(f. bedeutet Fußnote.)

Band II: Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Von *Prof. Karl Schwab.*

III. Teil: Für die oberen Klassen der Realanstalten, enthaltend die ebene und sphärische Trigonometrie. Preis gebd. ℳ 2.—

D e r H a u p t w e r t d e s B u c h e s a b e r b e s t e h t d a r i n, d a ß e s n i c h t w i e s o v i e l e i n d e r l e t z t e n Z e i t h e r a u s g e k o m m e n e m a t h e m a t i s c h e L e h r b ü c h e r d u r c h m e h r o d e r w e n i g e r g e s c h i c k t e Ü b e r a r b e i t u n g e i n e s ä l t e r e n W e r k e s e n t s t a n d e n, s o n d e r n g a n z n e u a u s e i n e m G u ß, n a c h e i n h e i t l i c h e n G r u n d s ä t z e n a u f- u n d a u s g e b a u t i s t.

A u c h d e r F o r d e r u n g i s t R e c h n u n g g e t r a g e n, d a ß d i e S c h ü l e r, m e h r a l s e s f r ü h e r g e s c h a h, ü b e r d i e p r a k t i s c h e V e r w e n d b a r k e i t d e r M a t h e m a t i k a u f g e k l ä r t w e r d e n . . . Der Abschnitt über das Zeichnen räumlicher Gebilde ist mustergültig.

Direktor Quossek-Crefeld, in der „Zeitschrift für lateinloses höheres Schulwesen“.

Band III: Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte und der analytischen Geometrie. Für Realanstalten bearbeitet von *Prof. Oskar Lesser.* 1910. Preis gebd. ℳ 3.—

Die Verfasser des Schwab-Lesserschen Unterrichtswerkes sind zu dem Mut zu beglückwünschen, mit dem sie bei aller Achtung vor dem Alten für die moderne Ausgestaltung des mathematischen Unterrichtes eintreten. Ihre verdienstvolle Arbeit, deren Erfolg meines Erachtens nicht ausbleiben kann, wird das Studium der Mathematik an den höheren Schulen günstig beeinflussen.

Suppantschitsch (Wien).

Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht der Höheren Schulen. Eine Sammlung von Materialien für die Hand des Lehrers zusammengestellt von *Prof. Oskar Lesser*, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Preis geh. ℳ 5.—

Von den in den vorliegenden Graphischen Darstellungen enthaltenen Aufgaben entstammen die meisten dem Unterricht selbst. Die Sammlung ist zwar zum Gebrauch im Unterricht bestimmt, aber zunächst nur für die Hand des Lehrers berechnet, der sich daraus, ohne an einen bestimmten Gang gebunden zu sein, ganz nach Belieben und Geschmack seine Beispiele auswählen darf.

Vierstellige Logarithmen-Tafeln zum Schulgebrauche von *Prof. Joh. Arbes.* Preis steif brosch. 70 ₰.

Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln nebst einigen Hilfstafeln. Von *Joh. Morawetz.* Preis gebd. 80 ₰.

Fünfstellige Logarithmen-Tafeln. Zum Schulgebrauche von *Dr. Fr. von Močnik.* Zweite Auflage von *Prof. Joh. Reidinger.* Preis gebd. ℳ 1,50.

Močniks Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Sechste Auflage von *Prof. Joh. Reidinger.* Preis gebd. ℳ 2.—

Mathematische Aufgaben für die höheren Lehranstalten unter möglichster Berücksichtigung der Anwendungen, wie überhaupt der Verknüpfung der Mathematik mit anderen Gebieten, zusammengestellt von *Prof. Dr. B. Biel*, Oberlehrer am Gymnasium zu Bensheim.

Ausgabe für Realschulen. I. Teil: Die Unterstufe. Preis gebd. ℳ 2,50.
II. Teil: Die Oberstufe. Preis gebd. ℳ 3,50.

Ausgabe für Gymnasien. I. Teil: Die Unterstufe. Preis gebd. ℳ 2,50.
II. Teil: Die Oberstufe. Preis gebd. ℳ 3,50.

Die Sammlung steht nach Art und Anordnung des Lehrstoffes im Einklang mit den preußischen Lehrplänen von 1901. Sie ist als Ergänzung zu dem „Leitfaden der Mathematik“ von H. T h i e m e gedacht; jedoch kann sie gerade so gut neben jedem anderen Lehrbuche benutzt werden. Der arithmetische und trigonometrische Teil macht ein Lehrbuch auch ganz entbehrlich. Das Bestreben des Verfassers ging dahin, den Aufgaben in weitestem Umfange einen s a c h l i c h e n Inhalt zu geben, der nicht nur als Grundlage für eine mathematische Operation dienen soll, sondern auch einen Wert an sich besitzt.

Leitfaden der Mathematik, von *Prof. Dr. Herm. Thieme*, Oberlehrer an der Berger Oberrealschule in Posen.

Für Realanstalten. I. Teil: Die Unterstufe mit 127 Figuren. Vierte Auflage. Preis gebd. ℳ 1,80.

II. Teil: Die Oberstufe. Mit 166 Figuren. Zweite Auflage. Preis gebd. ℳ 2,50.

Für Gymnasien. I. Teil: Die Unterstufe. Mit 118 Figuren. Dritte Auflage. Preis gebd. ℳ 1,60.

II. Teil: Die Oberstufe. Mit 64 Figuren. Zweite Auflage. Preis gebd. ℳ 1,60.

Die durchwegs anerkennenden Besprechungen heben namentlich die kurze und klare Stoffgebung, die verständige Beschränkung, den dem jedesmaligen Schülerstandpunkt entsprechenden systematischen Aufbau hervor. In den Jahresberichten für das höhere Schulwesen XVI beginnt der Berichterstatter A. Thaer seine längere Besprechung: „Thiemes Leitfaden .... vereinigt in sich eine so große Fülle von Vorzügen, daß er rückhaltlos empfohlen werden kann.“

Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für Knabenmittelschulen von *G. Gothe*, Mittelschullehrer in Göttingen.

I. Teil: Raumlehre. Mit 319 zum Teil farbigen Abbildungen. Preis gebd. ℳ 2,50.

II. Teil: Arithmetik und Algebra. Preis gebd. ℳ 1,40.

Lehrbuch der Chemie nebst den Elementen der Krystallographie und Geologie. Für den Unterricht in den Oberklassen der realen höheren Lehranstalten. Bearbeitet von *Dr. K. Herz.* Mit 89 Abbildungen. Preis gebd. ℳ 3.—

Machs Grundriß der Physik für die höheren Schulen des Deutschen Reiches, bearbeitet von *Dr. Ferd. Harbordt* und *Max Fischer.* **I. Teil:** Vorbereitender Lehrgang. Mit 430 Abbildungen. 4. verbesserte Auflage. Preis gebd. ℳ 2.— **II. Teil:** Ausführlicher Lehrgang. Mit 537 Abbildungen. 2. verbesserte und durch Übungsaufgaben erweiterte Auflage. Preis gebd. ℳ 4.—

Das für höhere Schulen bestimmte Buch des rühmlichst bekannten Verfassers ist im Anschlusse an die Lehrpläne des Deutschen Reiches und unter besonderer Berücksichtigung der neuesten preußischen Bestimmungen von zwei Schulmännern umgearbeitet worden. Eine Bereicherung hat das Buch in seiner neuesten Bearbeitung dadurch erfahren, daß bei allen sich bietenden Gelegenheiten mehr als bisher der Anwendung fürs praktische Leben, besonders auch für die Technik gedacht und die neuesten Entdeckungen berücksichtigt wurden.

Mineralogie und Geologie für höhere Schulen von *Dr. R. Reinisch.* Mit 211 Textfiguren, 2 Farbentafeln und 1 geologischen Übersichtskarte von Mitteleuropa. Dritte verbesserte Auflage. Preis gebd. ℳ 2,65.

Dieses neue Lehrmittel, dessen erste Auflage in zwei Jahren vergriffen war, will die sicheren Tatsachen wissenschaftlicher Forschung (der Verfasser ist Privatdozent der Mineralogie an der Universität Leipzig) in knapper Form und schulmäßiger Auswahl zusammenstellen. Der Erfolg zeigt, daß den Bedürfnissen der Schule durchaus Rechnung getragen ist. Die neue Auflage bringt unter anderen einen Zusatz über den geologischen Bau Deutschlands.

Praktische Übungen in der Ausführung physikalischer Schulversuche. Ein Leitfaden für Studierende von *Dr. Egon R. von Schweidler*, o. ö. Professor an der Universität in Wien. Mit 120 Figuren. Preis gebd. ℳ 3.—

Das Buch bezweckt, für eine Reihe von Demonstrationsexperimenten die theoretischen Grundlagen der Versuche, die Beschreibung der Apparate und die Methoden der Ausführung in möglichst knapper Form darzustellen und so dem Studierenden bei seinen Übungen als Leitfaden zu dienen, der speziell dem Lehramtskandidaten die Möglichkeit bieten soll, sich einige Übung in der Ausführung von Schulversuchen anzueignen.