

VOGLER
ANLEITUNG
ZUM
ENTWERFEN
GRAPHISCHER
TAFELN

ANLEITUNG ZUM ENTWERFEN
GRAPHISCHER TAFELN

UND ZU DEREN GEBRAUCH

BEIM

SCHNELLRECHNEN

SOWIE BEIM

SCHNELLQUOTIREN

MIT

ANEROID UND TACHYMETER

FÜR

INGENIEURE, TOPOGRAPHEN UND ALPENFREUNDE

VON

DR. CH. AUGUST VOGLER.

MIT SECHS LICHTDRUCKTAFELN

UND VIELEN IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BERLIN.

VERLAG VON ERNST & KORN

(GROPIUS'SCHE BUCH- UND KUNSTHANDLUNG)

90 WILHELMSTRASSE.

(NÄCHST DEM ARCHITEKTENHAUSE.)

1877.

N 55.

Dziat: X2.

S. Dickstein



7194

Vorrede.

Als mir vor etwa sieben Jahren bei meinen Arbeiten die Nothwendigkeit entgegentrat, mehrere Tausend Correctionsglieder aus zwei Argumenten zu berechnen, führte mich der Wunsch nach Zeitgewinn und möglichster Sicherheit vor Rechenfehlern auf den Gedanken, Formeln durch graphische Tafeln mit zwei Eingängen darzustellen, sodann darauf, die Curven solcher Tafeln in Gerade zu verwandeln. Obwohl überzeugt, dass ich unmöglich der Erste sein könnte, der diesen Gedanken gefasst hatte, suchte ich damals doch vergebens in der technischen Literatur nach Beispielen seiner Verwerthung. Sonach gedachte ich selbst Regeln und Beispiele dafür zu geben, zunächst in Hinsicht auf die Tachymetrie, und zwar in einer technischen Zeitschrift.

Erst im Herbst 1874 fand ich dazu in London die Musse, sah aber bald darauf, nach meiner Habilitation in Aachen, die Nothwendigkeit ein, meine Abhandlung zu erweitern, nachdem mich Herr Professor G. Herrmann hierselbst auf Lalanne's logarithmisches Coordinatennetz aufmerksam gemacht hatte. Nun fügte ich zu dem ohnehin vermehrten Stoffe auch noch die Messungen mit Aneroiden, und arbeitete im Spätjahr 1875 die vorliegende Schrift aus. Die Herstellung ihres graphischen Theiles verlangte freilich längere Zeit, dafür wurde mir aber Gelegenheit, noch vor Beginn des Druckes, ausser der mittlerweile erschienenen Literatur über den behandelten Stoff, auch einiger Erfahrungen Erwähnung zu thun, die ich auf der Londoner Ausstellung wissenschaftlicher Instrumente 1876 hatte sammeln können.

Während des Druckes meiner Schrift hat sich die einschlagende Literatur abermals beträchtlich vermehrt, zum Beweise für die wachsende Aufmerksamkeit auf den Gegenstand. Interessant war mir in dieser Hinsicht namentlich ein Aufsatz von Kapteyn*), dessen Verfasser, ebenfalls ohne Kenntniss der Vorarbeiten Anderer, auf demselben Wege wie

*) A. Kapteyn, note sur une méthode de graduation, représentant de courbes par des lignes droites. Revue Universelle des Mines, 1876, XI, 136.

ich zu Regeln gekommen ist, wonach Tafelcurven sich durch Gerade ersetzen lassen.

Der Hinweis auf die Wichtigkeit graphischer Tafeln, der nun von so manchen Seiten ergangen ist, mag der Aufnahme meines Buches zu Gute kommen, wenn er demselben auch dasjenige Interesse schmälert, das man dem Neuen entgegenbringt. Immerhin blieb von Andern noch Einiges unberührt, was mich beinahe zuerst beschäftigt hatte, so die Genauigkeitsbetrachtungen des IV. Capitels*). Aber sie gehören nicht zu dem, was den Leser zunächst fesseln wird, und ich führe ihn selbst durch Anmerkungen oder durch Verwendung kleinerer Lettern an dieser und anderen Stellen des Buches vorläufig vorüber, um ihm sobald als möglich die Anwendung der Tafeln zu zeigen. Den Rückweg zu dem Ueberschlagenen wird der Leser auch ohne Führung aufsuchen, sobald er mit dem practischen Gebrauch meiner Tafeln beginnt oder für andere Zwecke neue zu entwerfen unternimmt.

Ganz wesentlich unterstützt hat mich bei meiner Arbeit Herr Prof. Helmert, nicht nur dadurch, dass er einige meiner Tafeln für seine geodätische Sammlung ausführen liess und mir sodann die photographische Vervielfältigung freistellte, sondern auch durch manchen guten Rath und die Freundlichkeit, mit der er eine Druckbogenrevision übernahm. Ich sage ihm dafür meinen besten Dank.

Dem Verleger habe ich für die Ausstattung zu danken, die er meinem Buche gegeben hat. Auf meinen Wunsch ist von ihm die Einrichtung getroffen worden, dass die Lichtdrucktafeln nebst Gebrauchsanweisung, zu je 6 in einem Umschlag, auch abgesondert bezogen werden können. Einzelne Tafeln ist die Verlagshandlung ebenfalls abzugeben bereit, wenn von jedem gewünschten Blatt mindestens 12 Stück auf einmal bestellt werden.

Aachen, im Juni 1877.

Ch. A. Vogler.

*) Genauigkeitsbetrachtungen über den Rechenchieber finden sich schon in einer mir neuerdings zugekommenen Schrift des berühmten Mathematikers J. H. Lambert: Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe, Augsburg 1772.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
Erster Abschnitt.	
Vom Entwerfen graphischer Rechentafeln und deren Leistung gegenüber den Rechenmaschinen	3
Cap. I. Graphische Tafeln mit gleichmässig getheilten Coordinatenscalen.	
§ 1. Tafeln für ein Argument	3
Fig. 1. <i>Abnahme der Temperatur mit der Höhe.</i> Fig. 2. <i>Maximalspannungen des Wasserdampfes.</i>	
§ 2. Tafeln für zwei Argumente	5
Fig. 3. <i>Abhängigkeit der Lufttemperatur von den Tages- und Jahreszeiten.</i>	
§ 3. Schichtentafeln für Functionen deren Gleichung gegeben	8
Fig. 4. <i>Reductionstafel für Naudet's Aneroid.</i>	
§ 4. Producten- und Quotiententafel	10
Fig. 5 und 6. <i>Hyperbolische Productentafeln.</i>	
§ 5. Trigonometrische Schichtentafeln. Gleichmässige Verzerrung des Coordinatennetzes	13
Fig. 7. <i>Tangententafel.</i> Fig. 8. <i>Darstellung einer Schaar von Ellipsen als Kreise.</i>	
§ 6. Vertauschen der Argumente	14
§ 7. Schichtentafeln zum Abgreifen und Auftragen	16
Fig. 9. <i>Strahlennetz zum Abgreifen und Auftragen von Producten.</i>	
Cap. II. Graphische Tafeln mit ungleichmässig getheilten Coordinatenscalen.	
§ 8. Ausstrecken krummer Isoplethen durch einseitige ungleichmässige Verzerrung des Schichtennetzes. Fig. 10	18
§ 9. Polygonale Isoplethen	20
Fig. 11. <i>Ausgestreckte Hyperbelschaar.</i> Fig. 12.	
§ 10. Probe für die Möglichkeit, krumme Isoplethen einseitig auszustrecken	24
§ 11. Zwiefache Coordinatenverzerrung. Functionen der Argumente als neue Variable	26
Fig. 13. <i>Fehler der Fernrohrvisur.</i> Fig. 14. <i>Fehler der Distanzmessung.</i>	

	Seite
§ 12. Functionen von Functionen der Argumente als neue Variable	32
Fig. 15. <i>Einfluss eines mittleren Ablesungsfehlers am Barometer.</i> Fig. 16. <i>Excentrische Kreisisoplethen.</i>	
§ 13. Aufsuchen der Isoplethengleichung bei vorgeschriebener Form des Coordinatennetzes	35
§ 14. Anwendung logarithmischer Coordinatentheilung. Logarithmische Producten- und Quotiententafel	37
Hierzu Lichtdrucktafel Blatt I.	
§ 15. Zweite Form einer logarithmischen Quotienten- und Productentafel	40
Fig. 17. <i>Logarithmische Quotiententafel.</i>	
§ 16. Darstellung allgemeiner logarithmischer Formeln	43
Fig. 18. <i>Exponententafel.</i>	
Cap. III. Werkzeuge der mechanischen Rechnung.	
§ 17. Der logarithmische Rechenschieber	45
Fig. 19. Fig. 20. <i>Rechenschieber für Tachymeteraufnahmen.</i>	
§ 18. Grundzüge der Rechenmaschine oder des Arithmometers	51
Fig. 21. <i>Haupttheile der Rechenmaschine von Thomas.</i>	
§ 19. Historisches	55
Cap. IV. Genauigkeit der Schichtentafeln.	
§ 20. Interpolation	63
§ 21. Einfluss der Schätzungsfehler. Fig. 22	66
§ 22. Andere Darstellung der Tafelfehler	70
Fig. 23. <i>Vergleich zwischen den Fehlern des Rechenschiebers und der Hyperbeltafel.</i>	
§ 23. Vergleich mit den Schätzungsfehlern am Rechenschieber	71
§ 24. Graphische Darstellung der Schätzungsfehler am Rechenschieber	73
§ 25. Schätzungsfehler beim Gebrauche logarithmischer Rechentafeln	74
§ 26. Genauigkeit der Quotiententafeln. Fig. 24	76
§ 27. Genauigkeit der Productentafel zum Abgreifen und Auftragen	78
Fig. 25. <i>Fehler der Multiplicationstafel zum Abgreifen.</i>	
§ 28. Schätzungsfehler an Schichtentafeln mit gestreckten Isoplethen	80

Zweiter Abschnitt.

Verwendung von Schichtentafeln bei Aneroidmessungen . 84

Cap. V. Die Barometerformel.

§ 29. Die Barometerformel für constante Temperatur und ihre Abbildung	85
Fig. 26. Fig. 27. <i>Barometerformel für trockne Luft von 0° C.</i>	
§ 30. Lufttemperatur	88
Fig. 28. <i>Thermometerangaben, den wahren Lufttemperaturen (Fig. 3) gegenübergestellt.</i> Fig. 29. <i>Einfluss der Differenz der beiden vorigen Tafeln auf barometrische Höhenmessung.</i>	

§ 31.	Luftfeuchtigkeit	92
	Fig. 30. <i>Der Dunstdruck als Function der Lufttemperatur.</i>	
§ 32.	Veränderlichkeit der Schwere	96
	Fig. 31a. und b. <i>Wachsthum der Barometerconstanten mit der Höhe und geographischen Breite.</i>	

Cap. VI. Graphische Darstellung der Barometerformel.

§ 33.	Barometrische Schichtentafel mit Logarithmenscala	99
	Fig. 32. <i>Barometertafel zur Vermeidung jeder Zwischenrechnung.</i>	
§ 34.	Tafel der Seehöhen	101
	Hierzu Lichtdrucktafeln Blatt II und III. Fig. 33. <i>Barometertafel nach Franz Rath.</i>	
§ 35.	Die Babinet'sche Formel und ihre Abbildung	105
	Hierzu Lichtdrucktafel Blatt IV. Fig. 34. <i>Abweichung der Formel von der strengen.</i> Fig. 35. <i>Darstellung der vollständigen Barometerformel Babinet's.</i>	
§ 36.	Die Barometerformeln und der Rechenschieber. Fig. 19	108

Cap. VII. Die Barometercorrectionen und ihre Abbildung.

§ 37.	Reduction der Quecksilbersäule	111
	Fig. 36. <i>Temperaturcorrection.</i> Fig. 37. <i>Capillardepression.</i> Fig. 38. <i>Einfluss eines constanten Ablesungsfehlers.</i>	
§ 38.	Die Aneroide von Naudet und Goldschmid	115
	Fig. 39 und 40. <i>Skizzen dieser Aneroide.</i>	
§ 39.	Reduction der Aneroidangabe auf Quecksilbersäulen. Schichtentafel für Naudet's Aneroid	118
	Fig. 4. <i>Reductionstafel.</i> Fig. 41. <i>Graphische Bestimmung des Temperaturcoefficienten.</i>	
§ 40.	Schichtentafel zur Reduction von Goldschmid's Aneroid auf das Quecksilberbarometer	123
	Fig. 42. <i>Reduction der Ablesung an Goldschmid's Aneroid.</i>	

Cap. VIII. Aneroidmessungen und deren Genauigkeit.

§ 41.	Ungleichheit des Luftdruckes in Meereshöhe nach Ort und Zeit. Reduction auf gleiche Orte	127
§ 42.	Reduction der Aneroidablesungen auf gleiche Zeiten	128
§ 43.	Bestimmung der Lufttemperatur	132
	Fig. 43 und 44. <i>Darstellung der Lufttemperaturen für einen Tag.</i>	
§ 44.	Anordnung der barometrischen Aufnahme grösserer Bezirke	136
§ 45.	Entwerfen der Horizontalcurven	140
	Fig. 9. <i>Strahlennetz zum Abgreifen und Auftragen von Producten.</i>	
§ 46.	Genauigkeit der Aneroidmessungen	142
	Fig. 15. <i>Einfluss eines mittleren Ablesungsfehlers am Barometer.</i>	
§ 47.	Schlussregeln	146

Dritter Abschnitt.

	Schichtentafeln zur Anwendung in der Tachymetrie	148
	Cap. IX. Die tachymetrischen Formeln und ihre graphische Darstellung.	
§ 48.	Die dioptrischen Distanzmesser Fig. 45 bis 48. <i>Reichenbach's, Porro's und Ertel's Distanzmesser.</i>	150
§ 49.	Reduction schief gemessener Distanzen auf den Horizont Fig. 49. Fig. 50. <i>Fehler beim Gebrauche des halben Fadenabstandes statt des ganzen.</i>	154
§ 50.	Schichtentafel zur Reduction der Distanzen Hierzu Lichtdrucktafel Blatt V.	156
§ 51.	Formel für die Höhenmessung und Schichtentafel dazu Hierzu Lichtdrucktafel Blatt VI.	158
§ 52.	Rechenschieber für Tachymeteraufnahmen. Fig. 20	160
§ 53.	Graphische Hilfsmittel zum Auftragen der tachymetrischen Ergebnisse Fig. 51. <i>Distanzenzirkel.</i>	163
	Cap. X. Die Tachymeteraufnahme und deren Genauigkeit.	
§ 54.	Prüfung und Berichtigung der Distanzmesser nebst Latten Fig. 47 und 48. <i>Porro's und Ertel's Distanzmesser.</i>	167
§ 55.	Prüfung und Berichtigung des Theodolithen als Tachymeter Fig. 52 bis 55. <i>Einfluss einer Neigung der Fernrohrdrehachse und des Collimationsfehlers auf das Azimuth.</i>	170
§ 56.	Erfordernisse, Prüfung und Berichtigung eines Messtischapparates für tachy- metrische Aufnahmen Fig. 56. <i>Tachymeterkipregel.</i>	176
§ 57.	Bestimmung der Standpunkte des Tachymeters	179
§ 58.	Aufnahme der Detailpunkte des Terrains	182
§ 59.	Berechnung und Auftrag der Aufnahme	184
§ 60.	Genauigkeit der Tachymeteraufnahme Fig. 13. <i>Visurfelder in Secunden.</i> Fig. 57 und 58. <i>Ablesungsfehler wegen Lattenschiefe, in Millimetern.</i> Fig. 14. <i>Mittlerer Fehler der Distanzmessung in $\frac{1}{100}$ der Distanz.</i> Fig. 59. <i>Der Distanzfehler in Metern.</i> Fig. 60. <i>Mittlerer Fehler der Höhenmessung in $\frac{1}{100}$ der Hohe.</i> Fig. 61. <i>Maxima und Minima der mittleren Höhenfehler.</i>	185

Einleitung.

In allen den Fällen, wo es sich um eine grosse Menge von Zahlenrechnungen einer und derselben Art handelt, hat man diese Arbeit von jeher zu erleichtern und zu beschleunigen gesucht durch den Gebrauch numerischer Hülftafeln, oder graphischer Constructionen, oder endlich mechanischer Rechenhilfen. Die ausserordentliche Verbreitung, welche seit Erfindung des Buchdruckes die numerischen Tafelwerke, namentlich die logarithmischen, erfahren haben, wurde von den Rechenmaschinen und graphischen Tafeln bisher nicht erreicht. Erst in neuerer Zeit gewinnt der auf dem Continent zeitweise fast vergessene Gunter'sche Rechenschieber weitere Verbreitung; durch unsere technischen Hochschulen wird zugleich die Thomas'sche Rechenmaschine allmählich bekannter und von hier aus wirbt sich die graphische Berechnungsmethode von Bauconstructionen, die graphische Ausgleichung von Beobachtungsgrössen etc. alljährlich neue Anhänger. Graphische Rechentafeln aber sind weit seltener und weniger bekannt, als die Einfachheit ihres Grundgedankens und ihre bequeme Verwendbarkeit erwarten lassen sollte. Das erklärt sich jedoch aus der Schwierigkeit ihrer hinreichend genauen Herstellung und Vervielfältigung, wodurch bisher die Verbreitung brauchbarer graphischer Tafeln eigentlich nur solchen Technikern möglich war, die mit ihrer mathematischen Bildung die Kunst des Kupferstechers oder Lithographen verbanden. Seitdem aber der Lichtdruck so erfreuliche Fortschritte gemacht hat, sowohl in Hinsicht der Vollkommenheit als der Wohlfeilheit seiner Bilder, steht der allgemeineren Aufnahme graphischer Rechentafeln nichts mehr im Wege, als vielleicht der Umstand, dass nur Wenigen die Art sie zu entwerfen geläufig und die Genauigkeit, welche sie gewähren, bekannt sein dürfte. Die vorliegende Schrift handelt demnach, ihrem Titel entsprechend, im ersten Abschnitt vom Entwerfen graphischer Tafeln und ihrer Genauigkeit, im zweiten und dritten Abschnitte aber gibt sie Beispiele für die Verwendbarkeit graphischer Tafeln, wozu sich die gewählten Stoffe, ihrer gegenwärtigen Wichtigkeit wegen, besonders zu eignen scheinen. Statt aber nur eine kurze Gebrauchsanweisung der Tafeln zu liefern, geben beide Abschnitte auch eine

gedrängte Darstellung der Messmethoden selber, deren rechnerischer Theil durch die Diagramme gefördert werden soll, weil sich so am besten zeigt, dass letztere ihrer Bestimmung völlig genügen können. Somit behandelt der zweite Abschnitt die Aufnahme von Höhen mit dem Aneroid, der dritte die Tachymeteraufnahmen. Da bei jeder dieser Nivellirmethoden ebenso der Gunter'sche Rechenschieber Verwendung finden kann, so soll auch dieser neben den graphischen Tafeln berücksichtigt und schon im ersten Abschnitte in Hinsicht seiner Wirksamkeit mit den Tafelbildern verglichen werden. Zeigt sich in einzelnen Fällen der Rechenschieber überlegen, so tritt dadurch um so schärfer das Gebiet hervor, auf welchem sich die graphischen Tafeln künftig den Vorzug erringen werden. Es ist die Darstellung kleiner Correctionsglieder, welche von zwei Beobachtungsgrößen abhängig sind. Eine ganze Reihe numerischer Tafeln mit doppeltem Eingange in geodätischen, astronomischen und physikalischen Tafelwerken liesse sich mit Vortheil durch Liniennetze ersetzen, welche im Grossen sehr genau entworfen und durch Photographie und Lichtdruck verkleinert und vervielfältigt werden können. Der Stoff des 2. und 3. Abschnittes gibt Gelegenheit genug, Beispiele von dieser Art vorzuführen.

Erster Abschnitt.

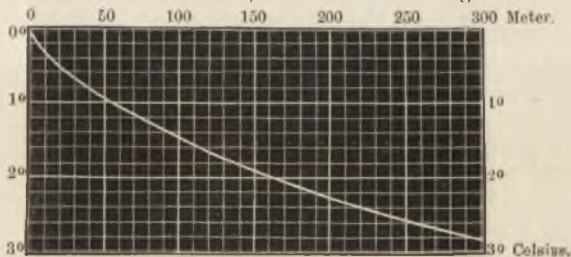
Vom Entwerfen graphischer Rechentafeln und deren Leistung gegenüber den Rechenmaschinen.

Cap. I. Graphische Tafeln mit gleichmässig getheiltem Coordinatennetz.

§ 1. Tafeln für ein Argument.

Die Art, wie man die Abhängigkeit einer Grösse, der Function, von einer anderen gegebenen Grösse, dem Argument, z. B. die Abnahme der Temperatur mit der Höhe, graphisch darstellt, ist bekannt genug. Nachdem man beliebige Maasse für die Einheit jeder von beiden Grössen festgestellt hat, z. B. 10 mm. für je 50 m. Höhe und jeden Centigrad der Temperatur, Fig. 1, trägt man die Maasse der Zahlen einer der Grössen, etwa der Höhen, als Abscissen auf einer Geraden von gemeinsamem Anfangspunkte aus auf, die zugehörigen Maasse der abhängigen

Fig. 1. Ungefähre Abnahme der Temperatur mit der Höhe zur Mittagszeit bei klarem Himmel, nach Glaisher's Angabe.



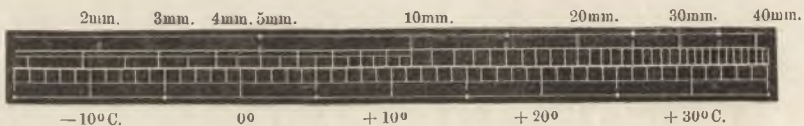
Grösse, hier also der Temperatur, senkrecht dazu als Ordinaten über den Endpunkten der Abscissen. Die Verbindungslinie der Ordinatenendpunkte lässt im Zusammenhang die ganze Beziehung erkennen, welche zwischen beiden Grössen besteht, und gewährt ein Mittel, aus jedem beliebigen Argument sofort den zugehörigen Functionswerth zu finden, d. h. zur gegebenen Abscisse die zugehörige Ordinate, zur gegebenen Ordinate die entsprechende Abscisse; oder in unserem Beispiele aus der Höhe die Temperaturabnahme und umgekehrt zu bestimmen. Die

Curve, welche die Ordinatenendpunkte verbindet, ändert nur ihre Lage, nicht ihre Gestalt, wenn Abscissen und Ordinaten vertauscht, also z. B. die Temperaturen als Abscissen, die Höhen als Ordinaten aufgetragen werden, sobald nur die gewählten Maasseinheiten dieselben bleiben. Gestalt und Lage der Curve verändern sich aber im Allgemeinen, wenn das Verhältniss der beiden Einheiten neu festgesetzt wird. Dadurch wird Gelegenheit geboten, zu steile Curven flacher, zu flache steiler zu machen, Umstände, von denen Bequemlichkeit und Genauigkeit der Ablesung gesuchter Werthe wesentlich abhängen.

Das Beispiel in Fig. 1 zeigt die raschere Abnahme der Temperatur zunächst dem Boden, die schwächere und stetigere in der Höhe, nach Glaisher's Beobachtungen im festen Ballon über London.

Es ist noch eine zweite Art im Gebrauch, solche Functionswerte einer Variablen graphisch darzustellen. Man lässt die beiden Scalen der unabhängig und der abhängig Variablen neben einander herlaufen, wie in Fig. 2 die Scala der Maximalspannungen des Wasserdampfes neben derjenigen der Temperatur. Die Scala der letzteren, als der unabhängig Variablen, ist gleichmässig getheilt, so dass zwei Millimeter auf den Grad kommen. Indem nun jedem Argumente der entsprechende Functionswerth, die Dampfspannung, gegenüber stehen muss, ist für die

Fig. 2. Dampfspannung in Millimetern.



zweite Scala nur dann eine gleichmässige Eintheilung möglich, wenn die darzustellende Function linear, oder der Zuwachs der abhängigen Variablen dem der unabhängigen proportional ist, was hier nicht der Fall. Nebeneinander stehende Einheiten beider Scalen verhalten sich umgekehrt wie der Zuwachs der Function zu dem Zuwachs des Arguments an der betreffenden Stelle der Scala, verschwindend kleine Theile beider Scalen umgekehrt wie der Differentialquotient der Function zur Einheit. Ein für die Ablesung günstiges Grössenverhältniss lässt sich durch Aenderung der Scaleneinheit für die unabhängig Variable leicht gewinnen und es steht uns sogar völlig frei, auch diese Einheiten ungleich gross zu machen, d. h. nach irgend einem passend gewählten Gesetze zu- oder abnehmen zu lassen. Denn es handelt sich hier wie im vorigen Falle nur um zweckentsprechende Darstellung, nicht um mathematische Untersuchung von Functionen. Ein zweites hierher gehöriges Beispiel liefert Blatt II. der Lichtdrucktafeln, entworfen zur Ablesung der Seehöhe für einen gegebenen Barometerstand als Argument. Vergl. § 34.

§ 2. Tafeln für zwei Argumente.

Bisher hatten wir die gegenseitige Abhängigkeit nur zweier Grössen, oder algebraische Ausdrücke von der Form

$$y = f(x)$$

graphisch darzustellen. Bei der Abbildung durch Abscissen und Ordinaten entstand hieraus eine Curve, und zwar nur eine. Sehr häufig müssen aber auch Grössen aus zwei Argumenten bestimmt werden, von denen sie in irgend einer Weise abhängig sind, wie z. B. die mittlere Lufttemperatur eines Ortes von der Jahres- und Tageszeit. Werden solche Functionen zweier Variablen, deren algebraischer Ausdruck

$$z = f(x, y)$$

sei, in numerische Tafeln gebracht, so müssen diese zwei Eingänge oder Köpfe haben, je einen für das Argument x und das Argument y , den ersten in horizontaler Zeile, den anderen in verticaler Spalte. Sucht man darin zwei gegebene Argumente x und y auf und verfolgt die Zeile und Spalte, deren Anfänge mit x und y bezeichnet sind, bis dahin, wo sie sich kreuzen, so findet sich am Kreuzpunkte der zugehörige Functionswert z .

Folgende numerische Tafel mit doppeltem Eingange stellt als Beispiel die wahre mittlere Temperatur z der Luftsäule zwischen Genf und dem St. Bernhard, nach dem Verfahren von Plantamour berechnet aus 6jährigen Monatsmitteln der Barometerstände an beiden Orten*), dar in ihrer Abhängigkeit von den Jahres- und Tageszeiten x und y .

Schwankungen der Lufttemperatur in Celsiusgraden nach Tages- und Jahreszeiten.

	Jan.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.		
Mittag	0h.	-2,1	-3,1	-1,6	+3,5	+8,0	+ 9,1	+11,4	+11,6	+ 9,4	+6,9	+1,5	-2,0	0h.
	2h.	-1,9	-2,6	-1,1	-4,3	+8,6	+ 9,6	+12,0	+12,3	+10,0	+7,2	+1,8	-1,7	
	4h.	-1,5	-2,4	-0,8	-4,7	+9,1	+10,1	+12,4	+12,7	+10,4	+7,5	+1,9	-1,7	4h.
	6h.	-1,6	-2,4	-0,8	-4,7	+9,0	+10,1	+12,6	+12,9	+10,4	+7,3	+1,9	-1,9	
Mittern.	8h.	-1,7	-2,5	-1,0	-4,4	+8,5	+ 9,8	+12,3	+12,5	+10,0	+7,0	+1,8	-1,9	8h.
	10h.	-1,7	-2,6	-1,1	-4,1	+8,0	+ 9,4	+11,9	+12,0	+ 9,8	+6,9	+1,8	-2,0	
	12h.	-1,7	-2,9	-1,2	-3,6	+7,7	+ 9,0	+11,4	+11,6	+ 9,5	+6,8	+1,6	-2,0	12h.
	2h.	-2,0	-3,1	-1,6	-3,0	+7,3	+ 8,6	+10,9	+11,1	+ 9,2	+6,6	+1,4	-2,1	
	4h.	-2,2	-3,4	-2,0	+2,5	+6,7	+ 8,2	+10,3	+10,9	+ 8,8	+6,3	+1,3	-2,3	4h.
	6h.	-2,2	-3,5	-2,1	+2,2	+6,4	+ 8,1	+10,1	+10,6	+ 8,4	+6,0	+1,2	-2,4	
	8h.	-2,1	-3,5	-2,2	+2,4	+6,6	+ 8,1	+10,3	+10,7	+ 8,6	+6,1	+1,1	-2,2	8h.
	10h.	-2,0	-3,4	-2,0	+2,8	+7,1	+ 8,5	+10,8	+11,0	+ 9,0	+6,4	+1,2	-2,1	

*) Vergl. E. Plantamour, Resumé des observations thermométriques et barométriques, faites à l'observatoire de Genève et au Grand St. Bernhard pendant les dix années 1841 à 1850 suivi etc. Genève, 1851, pag. 56—62 (Abdruck aus dem XIII. Bd. Annalen der Société de Physique et d'histoire naturelle de Genève). Ferner: R. Rühlmann, die barom. Höhenmessungen, Leipzig, 1870, S. 74 und 75, welchem letzteren Werke die Zahlen der Tabelle entnommen sind. Siehe § 30.

Wollten wir die vorstehende Tabelle graphisch darstellen, so könnten wir zunächst nach § 1. verfahren und eine Curve über rechtwinkligen Coordinaten construiren, welche etwa die mittleren Mitternachtstemperaturen durch alle Monate des Jahres versinnlichte, wie die punktirte Curve

Wahre Lufttemperatur in mittlerer Höhe (1442 m.)

Fig. 3 A. Thermo-Isoplethen (Isothermen).

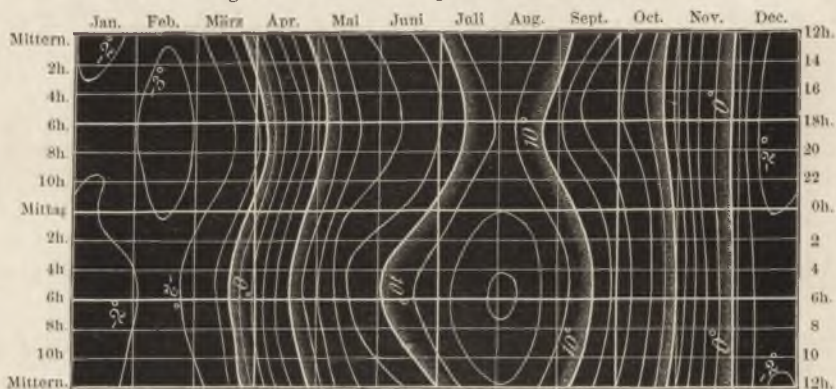
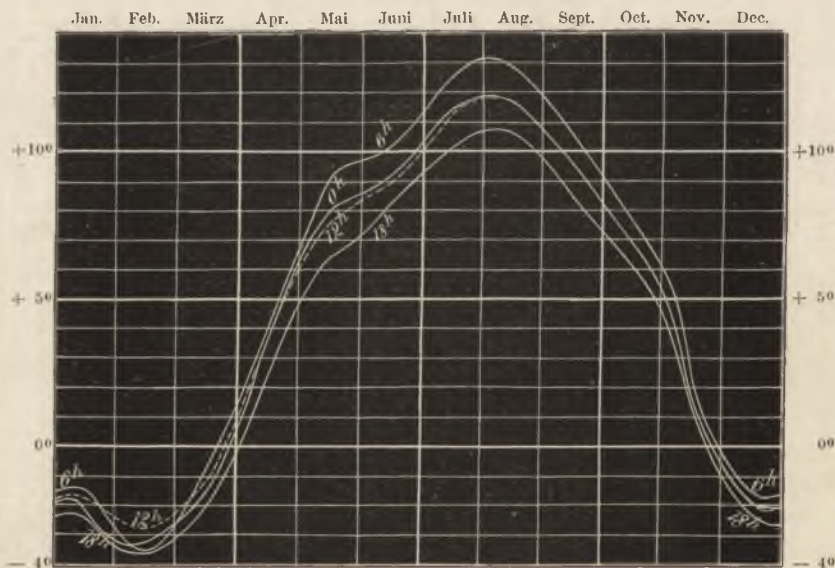


Fig. 3 B. Isoplethe Tageszeiten.

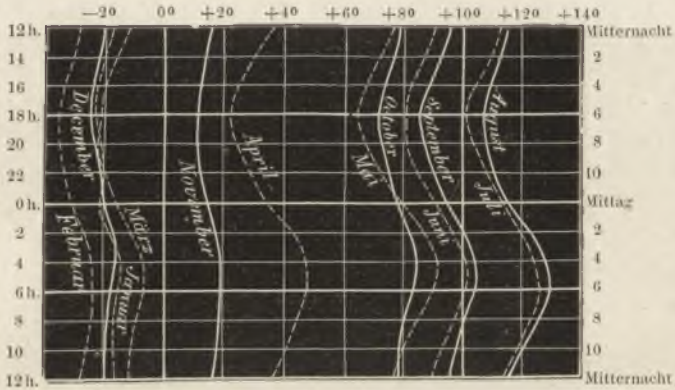


in Fig. 3 B. es thut. Eine zweite Curve würde die Temperaturen, welche Morgens 4h. stattfinden, eine dritte, die um 8h. veranschaulichen und so fort. Ebenso könnten sämtliche Tagestemperaturen im Januar als Ordinaten über den Tagesstunden als Abscissen aufgetragen und durch

eine Curve, wie in Fig. 3 C., verbunden werden, und so für jeden einzelnen Monat besonders. Da sich aber die Curven mehrfach schneiden, so ist keines dieser Bilder recht übersichtlich. Beachten wir jedoch, dass viele Ordinaten nicht nur in ein und derselben Curve sich wiederholen, sondern

zwischen Genf und dem St. Bernhard.

Fig. 3 C. Isoplethe Jahreszeiten.



selbst in mehreren Curven wiederkehren, so können wir uns die Aufgabe stellen, alle diejenigen Tagesstunden in den verschiedenen Monaten aufzusuchen, zu welchen eine und dieselbe bestimmte Temperatur herrscht. Es geschieht dies z. B. für die Temperatur -2° , indem man in der Entfernung, welche dieser Ordinate entspricht, eine Parallele mit der Abscissenachse (Achse der Tagesstunden, Fig. 3 C.) zieht. Die Abscissen, welche zu den Durchschnittspunkten der Parallelen mit der Curve gehören, geben die Jahreszeiten und die Tagesstunden an, für welche in der mittleren Höhe von Genf und St. Bernhard -2° als Lufttemperatur zu erwarten ist.

Es liegt nun nahe, alle so gefundenen Zeitpunkte in ein neues rechtwinkeliges Liniensystem einzutragen, in welchem die Jahres- und Tageszeiten Coordinaten sind, wie in Fig. 3 A. geschehen. Verbindet man diese Punkte durch einen gemeinsamen Linienzug, so entsteht eine Curve gleicher Temperaturen, eine Isotherme, die sich jedoch zum Unterschied von den in der physikalischen Geographie so genannten Linien auf einen und denselben Ort, aber verschiedene Zeiten bezieht. Allgemeiner aufgefasst ist es eine Curve, welche gleichen Functionswerthen entspricht, und wir wollen alle Curven, deren Coordinaten die Argumente gleicher Functionswerthe sind, als Isoplethen, d. h. Curven von gleichem Zahlenwerthe [von ισοπληθής , an Zahl gleich, gleichwerthig] bezeichnen. Neben die Isoplethe für -2° lässt sich nun in dasselbe Liniennetz

jede beliebige andere eintragen, z. B. alle vorkommenden in Abständen von Grad zu Grad. Jedem, welchem der Anblick von Landkarten mit Horizontalcurven geläufig ist, wird aus dem entstehenden Bilde die Vertheilung der Luftwärme nach Jahres- und Tageszeiten klar hervortreten und die Aehnlichkeit nicht entgehen, welche zwischen der Construction unserer Isoplethentafel aus einzelnen Curven, wie die in Fig. 3 B. und C., und der eines Höhenschichtenplanes aus Querprofilen besteht. Auch sind Horizontalcurven nichts als Curven von gleichem Niveau, also Isoplethen, aber solche, welche im Verein mit den Ebenen-coordinaten der Fläche, auf welcher sie entworfen sind, zur Darstellung räumlicher Gebilde dienen sollen. Es steht uns umgekehrt frei, jede Isoplethentafel als Höhenschichtenplan anzusehen, wodurch zuweilen unsere Anschauungsweise gefördert und die Ausdrucksweise vereinfacht werden kann.

Wichtiger als die räumliche Auffassung der Isoplethentafeln ist für uns die Möglichkeit, die sie gewähren, für gegebene Argumente, z. B. Jahreszeit und Tagesstunde, den entsprechenden Functionswerth sogleich anzugeben. In dem Coordinatenschnittpunkt, welcher jenen Argumenten angehört, liest man zu diesem Zwecke die Zahl der Isoplethen ab, die durch ihn hindurchgeht.

Wie wir von Höhenschichtenplänen sprechen, so dürfen wir statt Isoplethentafel auch Schichtentafel und Schichtennetz sagen; die allgemeineren Worte Curventafel und Diagramm bezeichnen auch Darstellungen von Functionen einer Variablen.

§ 3. Schichtentafeln für Functionen, deren Gleichung gegeben.

Die mathematische Form der Function, für welche im vorigen Paragraphen ein Schichtennetz entworfen wurde, war nicht bekannt, sondern ihre Gesetzmässigkeit nur aus einzelnen Functionswerthen erkennbar. Somit war auch für die Isoplethen kein algebraischer Ausdruck aufzustellen. Ist dagegen die Natur der Function

$$z = f(x, y)$$

algebraisch darstellbar, wie in dem folgenden einfachen Beispiele, so ergibt sich die allgemeine Gleichung der z -Isoplethen sofort, wenn man nach x oder y auflöst, also etwa

$$y = \varphi(x, z)$$

bildet und dabei z als Constante ansieht. Aus der allgemeinen Gleichung werden die besonderen erhalten durch Einsetzen bestimmter Zahlenwerthe für z . Es sei die Function gegeben und in eine Schichtentafel zu bringen:

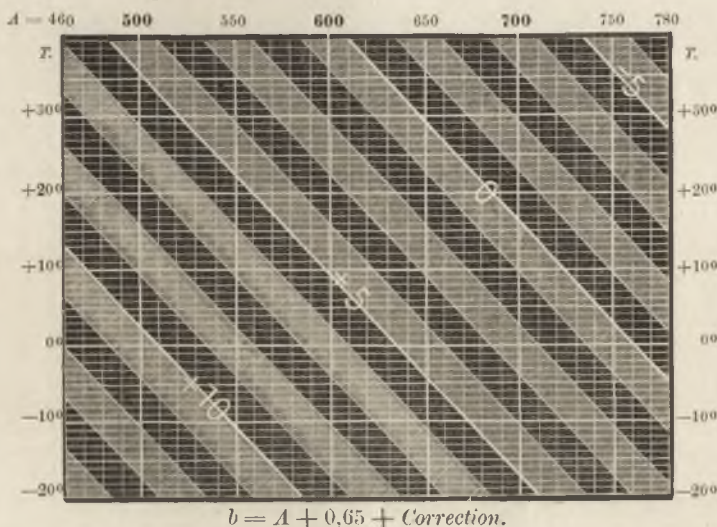
$$z = ay + bx + c.$$

Die Auflösung nach y ergibt die Gleichung

$$y = -\beta x + \zeta,$$

worin $\beta = \frac{b}{a}$ und $\zeta = \frac{z-c}{a}$. Daraus gehen, wenn z bestimmte Zahlenwerthe annimmt, besondere Gleichungen hervor, welche sich nur durch ihre Constante ζ unterscheiden. Lassen wir z in gleichen Intervallen wachsen, so sind die Isoplethen parallele Gerade von gleichem Abstände. Als Raumbilder betrachtet würden sie eine Ebene darstellen.

Fig. 4. Reductionstafel für Naudet's Aneroid.



Beim Aufsuchen von Functionswerten in der Tafel ist es vorthailhaft, wenn die geradlinigen Isoplethen die Coordinatenachsen nahezu unter 45° schneiden. Ist also die Bedingung $\beta = 1$ nicht schon nahe erfüllt, so kann durch passende Wahl der Einheiten auf der Abscissen- und Ordinatennachse nachgeholfen werden. Ein Beispiel dieser Art liefert die Reductionstafel der Aneroidablesungen auf Quecksilbersäulen, Fig. 4. Siehe auch § 39.

Die dort gegebene Gleichung für die Correction lautet:

$$z = \text{corr.} = -0,150 T + 0,04 (760 - A),$$

oder nach $T = y$ aufgelöst, während $A = x$ als Abscisse gedacht wird:

$$T = -\frac{4}{15} A + (202\frac{2}{3} - 6\frac{2}{3} \text{ corr.}).$$

Da nach der Bezeichnung des gegenwärtigen Paragraphen zu setzen ist $\beta = \frac{4}{15}$, so erreicht man eine günstige Lage der Isoplethen, wenn man die Einheiten der Ordinatennachse viermal so gross wählt, als jene der Abscissennachse, denn 4β wird nahezu der Einheit gleich. In Fig. 4 ist dies geschehen und die Isoplethen der Correction für jedes ganze Millimeter der letzteren entworfen.

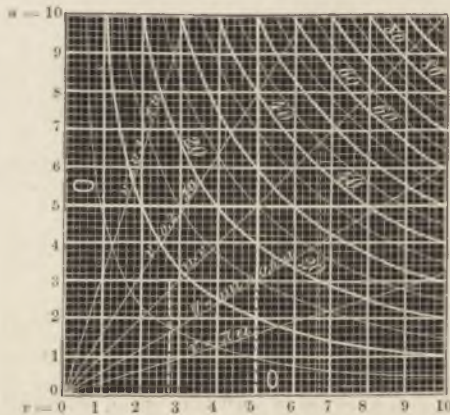
§ 4. Producten- und Quotiententafel.

Die Isoplethen in der Schichtentafel des vorigen Paragraphen, welche eine Gleichung vom ersten Grade darstellten, wurden gerade Linien; Isoplethen zur Darstellung von Gleichungen des zweiten Grades werden im Allgemeinen Kegelschnitte. So liefert die Gleichung

$$w = uv,$$

wenn w der Reihe nach die Werthe $0, a, 2a, 3a \dots$ annimmt, eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln, welche auf ihre Asymptoten bezogen und deren Abstände, auf irgend einer Abscisse oder Ordinate gemessen, von gleicher Grösse sind. Denn aus $w = uv$ folgt für constante v , dass u für alle Hyperbeln dem Werthe von $w = 0, a, 2a \dots$ einfach proportional ist; ebenso v für constante u . Macht man die Maschenseiten eines rechtwinkligen Coordinatennetzes der Einheit gleich, setzt ferner $a = 1$ und entwirft die Hyperbeln, indem man zugleich ihre Zeiger $0, 1, 2 \dots$ deutlich beischreibt oder sonst kenntlich macht (Fig. 5 und 6), so besitzt man eine Multiplicationstafel, in welcher man nur die

Fig. 5. Hyperbolische Productentafel.



Coordinatenschnitte $(u; v), (u'; v') \dots$ aufzusuchen braucht, um so gleich an der Curve, auf welche sie treffen, die Producte $w = uv, w' = u'v' \dots$ abzulesen. Durch Interpolation nach dem Augenmaasse lassen sich auch die Producte von ächt und unächt gebrochenen Zahlen finden; so trifft der Schnitt der Coordinaten $(4,35; 5,75)$ auf die Curve, deren Zeiger 25 ist, weil $4,35 \times 5,75 = 25,0$. Für den Coordinatenschnitt $(7,93; 8,66)$, welcher zwischen die Hyperbeln 68,0 und 69,0 fällt, schalten wir durch Schätzung eine Hyperbel ein, der wir den Zeiger 68,7 geben. Wirklich ist das dreistellige Product von $7,93 \times 8,66 = 68,7$.

(Wie bei numerischen Tafeln, so sehen wir auch bei den graphischen

die Stellenzahl der Argumente sowohl als der gesuchten Werthe von dem Tafelumfang abhängig.)

Suchen wir in Fig. 5 die Hyperbel auf, deren Zeiger (z. B. 25,0) einem gegebenen Dividenden entspricht, und lesen den Divisor (z. B. 4,35) an der Abscissenachse ab, so wird der Quotient (5,75) durch die zugehörige Hyperbelordinate dargestellt, und umgekehrt durch die Abscisse beim Ablesen des Divisors auf der Ordinatenachse. Wir besitzen also auch eine Divisionstafel.

Haben wir eine Anzahl von Producten zu bilden, deren Factoren u und v sich wie $1 : m$ verhalten, so liegen alle Coordinatenschnitte auf einer Geraden, welche durch den Nullpunkt geht. Ist $m = 1$ oder $u = v$ und demnach

$$w = u^2 = v^2,$$

so bildet die Gerade mit beiden Coordinatenachsen einen Winkel von 45° . Sie ist zugleich der geometrische Ort für die Radicanden der Quadratwurzel; die Wurzel selbst wird nach Belieben an der Abscissen- oder Ordinatenachse abgelesen. $\sqrt{45,0}$ findet sich, wenn man den Schnitt der Diagonale mit der Hyperbel 45 aufsucht und die zugehörige Abscisse oder Ordinate 6,71 abliest. Ist in einem anderen Falle $m = \pi$, also

$$w = \pi u^2,$$

so liest man, wenn u gegeben, w als Hyperbelzeiger an einer Geraden ab, deren Projectionen auf Abscissen- und Ordinatenachse sich verhalten wie $1 : \pi$ oder wie $113 : 355$. Umgekehrt, wenn w gegeben und der Schnitt der betreffenden Hyperbel mit der Geraden aufgesucht worden, findet sich u als Projection des Schnittpunktes auf der Abscissenachse. Fig. 5.

Sind Producte von der Form

$$w = nuv$$

zu bilden, wobei n eine constante Zahl, so ziehe man eine Gerade durch den Anfangspunkt, deren Gleichung $y = nu$ wird. Man liest nun auf der Abscissenachse u , sodann an der Geraden sogleich die Ordinate nu ab, welche Grösse soweit seitwärts übertragen wird, bis man den Coordinatenschnitt ($y; v$) und die zugehörige Hyperbelablesung w erhält. Sei $n = 0,6$; $u = 5,00$; $v = 2,73$; so trifft man auf der Linie $y = 0,6u$ mit dem Argumente 5,00 auf die Ordinate 3,00, welche man sich nach links verschoben denkt bis zur Abscisse 2,73. Im Coordinatenschnitt yv findet sich $w = 8,19$.

Die Gleichung $pv = u^2$ gehört einer Parabel an, deren Scheitel im Coordinatenanfangspunkte liegt und für welche die Abscissenachse Scheiteltangente ist. Wenn $p = 1$, wird die Parabel der geometrische Ort für jene Hyperbelpunkte, deren Zeiger den Cubikzahlen

$$w = uv = u^3$$

ihrer Abscissen und der $\frac{3}{2}$ ten Potenz ihrer Ordinaten entsprechen. Umgekehrt können die Schnittpunkte der Parabel mit den Tafelhyperbeln

Radicanden vertreten, deren $\frac{2}{3}$ te Potenz an ihrer Projection auf der Ordinatenachse und deren dritte Wurzel auf der Abscissenachse abgelesen wird.

In Fig. 6 ist ausser der Parabel ($v = u^2$) noch eine andere eingetragen, deren Parameter $p = 10$, für die also $u = 0,1 v^2$ wird. An ihren Schnitten mit den Hyperbeln werden demnach die Producte $w = 0,1 v^3$ oder der zehnte Theil der Cubikzahlen der Ordinaten abgelesen. Ebenso muss ein Radicand erst durch 10 dividirt und der Schnittpunkt der entsprechenden Hyperbel mit der Parabel aufgesucht werden, wenn die zugehörige Ordinate gleich der dritten Wurzel des Radicanden werden soll. In ganz ähnlicher Weise lässt sich eine Parabel nach der Gleichung

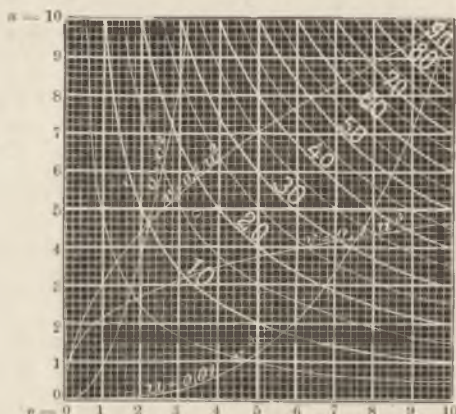
$$v = \frac{4}{3} u^2 \pi$$

construiren, an welcher für gegebene u die Hyperbelwerthe

$$w = \frac{4}{3} \pi u^3$$

abgelesen werden können, und umgekehrt die Radici u für gegebene Kugelinhalte w .

Fig. 6. Hyperbolische Productentafel.



Will man dem Schichtenetz endlich Biquadrate und vierte Wurzeln entnehmen, so hat man längs einer cubischen Parabel abzulesen, deren Gleichung $u = 0,1 v^3$, so dass man die durch 10 dividirten Biquadrate

$$w = uv = 0,1 v^4$$

der Ordinaten erhält. In gleicher Weise zeigt Fig. 6 eine zweite cubische Parabel von der Form $v = 0,01 u^3$, so dass die Zeiger w der von ihr durchschnittenen Hyperbeln den durch 100 getheilten vierten Potenzen der Abscissen entsprechen. Darauf ist beim Ausziehen der vierten und der $\frac{4}{3}$ ten Wurzel Rücksicht zu nehmen.

Nichts hindert uns, Curven zum Ablesen der 5ten und höheren Potenzen und Ausziehen der 5ten und $\frac{5}{4}$ ten Wurzeln in das Schichtenetz einzutragen. Auch Leitcurven zum Berechnen anders geformter Producte, wie z. B. $w = \frac{1}{2} (u + 1) u$ könnten unter Umständen vorthellhaft, und leicht eingezeichnet werden.

§ 5. Trigonometrische Schichtentafeln. Gleichmässige Verzerrung des Coordinatennetzes.

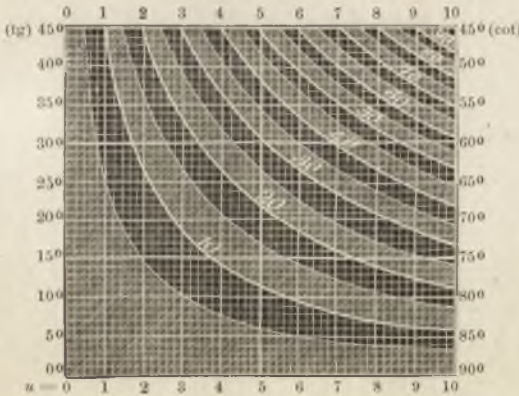
Ersetzt man auf der Ordinatenachse der Fig. 6 die Maasse der natürlichen Zahlen durch die Maasse irgend einer trigonometrischen Function, z. B. der zehnfachen Tangenten von 0° bis 45° in Intervallen von etwa 20', beschreibt die Endpunkte jedesmal mit dem zugehörigen Winkel und legt Parallele zur Abscissenachse hindurch, so fallen die Schnittpunkte der Coordinaten auf Hyperbeln, deren Zeiger $w = 10 u \operatorname{tg} \alpha$, also dem Product der Abscisse mit der zehnfachen Tangente desjenigen Winkels α entsprechen, welcher der Ordinate beigeschrieben ist. Sollen aber gleichwerthlige Winkelintervalle auf der Ordinatenachse von gleicher Grösse sein, so verwandeln sich die Hyperbeln der Tafel in transcendenten Curven, deren Form (Fig. 7) aus

$$u = 0,1 w \cot \alpha$$

zu entnehmen, wenn für w die Reihe der natürlichen Zahlen gesetzt wird. In der Richtung der Abscissenachse haben auch diese Curven

Fig. 7. Tangententafel.

$$w = 10 u \operatorname{tang} \alpha.$$



noch gleiche Abstände unter sich. Ein anderes Beispiel für die Darstellung einer trigonometrischen Function durch ein Schichtennetz bietet Tafel VI, welcher die Gleichung (s. § 51)

$$h = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha$$

zu Grunde liegt und in der die Längen a und die Winkel α Argumente sind.

Da Winkelgrade und natürliche Zahlen oder Winkelgrade und Längen keine direct vergleichbaren Grössen sind, so ist man zu einer willkürlichen Annahme des Maasses für die Gradeinheit genöthigt. Auch

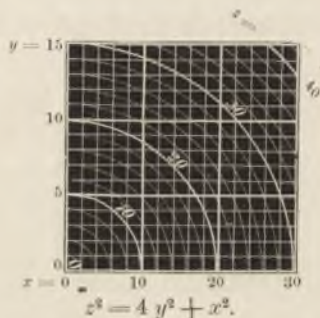
ohne solche Nöthigung stände sie in unserem Belieben, wenn die dadurch bewirkte gleichmässige Verzerrung des Coordinatennetzes nach einer Seite hin die Gestalt der Isoplethen in einer Weise verzöge, welche der Genauigkeit der Construction oder der Ablesung Vortheil brächte. Wir machten davon im § 3 schon einmal Gebrauch, um die Lage geradliniger Isoplethen, durch welche eine Gleichung vom ersten Grade dargestellt ward, günstig zu verändern. Ein anderer Fall, in welchem gleichmässige, einseitige Verzerrung des Coordinatennetzes nützlich wird, ist folgender.

Gesetzt man wollte eine Hülftafel construiren, um Ausdrücke von der Form

$$z^2 = my^2 + nx^2$$

zu berechnen, so führt die Construction auf eine Schaar concentrischer Ellipsen von den Halbachsen $z : \sqrt{n}$ und $z : \sqrt{m}$, also dem constanten Achsenverhältniss $\sqrt{m} : \sqrt{n}$, wobei dem Zeiger z die Reihe der natür-

Fig. 8.



lichen Zahlen, und den Halbachsen proportional wachsende Grössen beizulegen sind. Gibt man aber den Einheiten der Coordinatenachsen das constante Maassverhältniss $\sqrt{n} : m$, so verwandeln sich die Ellipsen in concentrische Kreise, welche schneller und sicherer zu construiren sind. Eine nach Fig. 8 entworfene Tafel würde Ausdrücke von der Form

$$z^2 = 4y^2 + x^2$$

darstellen, da die Einheiten der Ordinatenachse das Doppelte von jenen der Abscissenachse betragen.

§ 6. Vertauschen der Argumente.

Schon als wir aus der Productentafel des § 4 eine Quotiententafel machten, vertauschten wir die Argumente, ohne jedoch die Gestalt des Schichtennetzes zu ändern. Verlangt man dagegen, dass die Argumente jedesmal auf den Coordinatenachsen, die Functionswertthe aber an den Isoplethen abgelesen werden, so gehen aus Functionen von der Form

$$z = f(x, y)$$

allgemein drei verschiedene Schichtentafeln hervor, je nachdem man x und y als Argumente betrachtet, wie es in vorstehendem Ausdruck geschieht; oder die Functionen

$$x = \varphi(y, z) \quad \text{und} \quad y = \psi(x, z)$$

in Tafeln bringt, worin nunmehr y und z bzw. x und z Argumente sind. Gesetzt wir hätten die erste dieser drei Tafeln schon entworfen, so sind daraus die beiden anderen mit geringer Mühe graphisch herzuleiten. Als Beispiel mag uns wieder die Schichtentafel des § 2, Fig. 3 A., dienen, welche die wahren mittleren Lufttemperaturen nach Jahres- und Tageszeiten darstellt. Betrachten wir umgekehrt die Tageszeiten als Functionen der Lufttemperatur und der Jahreszeiten, so brauchen wir nur, wie in Fig. 3 B., für die Isoplethen der Tageszeiten ein neues Coordinatennetz zu entwerfen, in welchem die Abscissenheilung nach Jahreszeiten dem ersten (A) völlig gleich, die Theilung der Ordinaten jedoch nach Graden der Lufttemperatur erfolgt. Haben beide Netze die in der Figur eingehaltene Stellung, so finden sich die neuen Isoplethen, z. B. die für 18h. Morgens, leicht, wenn man im Netze A längs einer Parallelen mit der Abscissenachse, für welche die Ordinate 18h. gilt, die Abscissen der Durchschnittspunkte mit den Isothermen aufsucht, in das Netz B herabträgt und daselbst den zugehörigen Ordinaten den Werth der durchschnittenen Temperaturisoplethe gibt. Aus der Verbindung der Endpunkte dieser Ordinaten entsteht die neue Isoplethe der Tageszeit und durch ein ganz ähnliches Verfahren auch alle übrigen.

Auf analoge Weise ist Tafel C. für isoplethe Jahreszeiten aus A entstanden und z. B. die Isoplethe des 15. Februar dadurch gefunden worden, dass man in A durch den betreffenden Abscissenpunkt eine Parallele mit der Ordinatenachse zog, die Ordinaten der Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit den Isoplethen nach C übertrug und die Länge der zugehörigen Abscissen (in Celsiusgraden) jedesmal aus dem Werth der geschnittenen Isotherme bestimmte, endlich die so festgelegten Punkte durch einen gemeinsamen Zug verband. Im Grunde schlugen wir hier zur Construction der Tafeln B und C aus A ganz dasselbe Verfahren ein, das uns früher zum Entwerfen von A aus den Temperaturcurven der Tages- oder der Jahreszeiten gedient hatte.

Die Möglichkeit, aus jeder der drei zulässigen Schichtentafeln einer Function von drei Variabeln jede der beiden anderen herzustellen, gestattet uns, diejenige zuerst zu entwerfen, welche sich am bequemsten anfertigen lässt, und darnach zu derjenigen überzugehen, welche für den Gebrauch der Rechnung die bequemste ist, oder der Anschauung am meisten zu Hülfe kommt. Dazu wird man nur ungern Schichtennetze wählen, in welchen sich die Isoplethen überschneiden, wie denn auch zur Terraindarstellung die Horizontalcurven nur untergeordnete Dienste leisten

könnten, wenn überhängende Berggipfel auf der Erdoberfläche häufig vorkämen. Abgesehen von Füllen, wo Form und Lage der Isoplethen ungünstig wird, bleibt es stets am bequemsten, die Argumente an den Coordinatenachsen, den gesuchten Functionswerth aber an den Isoplethen abzulesen. Wenn jedoch nicht Ablesen, sondern der Auftrag der Functionswerthe in bestimmtem Maasse beabsichtigt wird, so muss die Function selbst auf den Abscissen oder Ordinaten abgegriffen, eines der Argumente aber durch Isoplethen dargestellt werden.

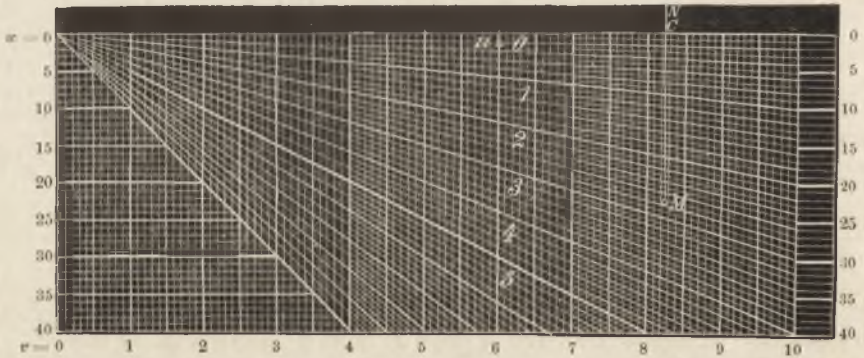
§ 7. Schichtentafeln zum Abgreifen und Auftragen.

Wollten wir etwa eine Tafel zum Abgreifen und Auftragen von Producten in einem bestimmten Maassstabe construiren, so müsste dieselbe eine wesentlich andere Gestalt als die in § 4 beschriebene Hyperbel-tafel annehmen. Soll in Fig. 9 die Gleichung

$$w = uv$$

so dargestellt werden, dass die Isoplethen nicht für constante Producte w , sondern für constante Factoren u oder v entworfen würden, so vertritt die Gleichung, wenn u die Werthe der natürlichen Zahlenreihe annimmt, eine Schaar von Geraden, welche sich im Coordinatenanfang

Fig. 9. Strahlennetz zum Abgreifen und Auftragen von Producten.



treffen und für welche v die Abscissen, w die Ordinaten sein mögen. Für die constante Abscisse v_0 wächst die Ordinate w_0 proportional dem Werthe von u , woraus folgt, dass das Strahlenbündel der Isoplethen alle Ordinaten in gleichen Abständen überschneidet. Das Argument v ist also an den Abscissen, das Argument u an den Isoplethen abzulesen, das Product w endlich an den Ordinaten abzugreifen.

Statt den Zirkel zu Hülfe zu nehmen, kann man ein solches Schichtenetz unmittelbar auf die Zeichnung auflegen und seine Maasse dahin übertragen, wenn es nicht auf undurchsichtigem Papier entworfen, sondern

auf der Unterfläche einer durchsichtigen Platte eingeritzt worden ist. Das Stück eines Schichtennetzes, welches die Fig. 9 gibt, mag man sich auf einer solchen Platte so angebracht denken, dass die Abscissenachse $0-C-0$ mit einer ihrer Kanten zusammenfällt. Die Bezifferung der Abscissen kann darum an dieser Kante nicht wohl angebracht werden. Jede Ordinateneinheit von 1mm. bedeutet eine Einheit des Products und entspricht für $v=1$ einer Einheit von u , während das Maass dieser Einheit proportional der Abscisse wächst. Die engere Eintheilung der u hat durch convergente isoplethe Strahlen zu erfolgen, welche jedoch nicht alle den gemeinsamen Schnittpunkt treffen, sondern sich einander nur so weit nähern dürfen, als sie dem Auge die Einschaltung von Zwischenpunkten erleichtern. Das wird erreicht, wenn sie nicht viel enger als 1mm. und nicht viel weiter als 2mm. gezogen werden. Die Parallelen zur Abscissenachse sind in der Figur nur angedeutet und bleiben besser ganz weg, wenn die Tafel nicht zum Auftragen und Ablesen zugleich dienen soll. Zieht man die Linien in zweierlei Farben aus, so wird die Uebersicht befördert. Als Material für solche durchsichtige Schichtentafeln empfehlen sich Horn- und Gelatineplatten, vor allem aber Spiegelglasplatten mit einseitigem Gelatineüberzug, den jeder Photograph anzufertigen versteht.

Wie eine solche durchsichtige Schichtentafel zu brauchen, ist leicht einzusehen. Sei die Bleistiftlinie MN schon gezogen, auf der ein Maass $MC = uv$ von M aus abzutragen wäre, so lege man, wie in der Figur angedeutet, die Ordinaten des Netzes parallel MN , sodass diese Linie von der Abscissenachse das Stück v abschneidet, und M die Isoplethe u trifft (hier 8,24 und 2,76). Eine kleine Marke mit geschärftem (nicht gespitztem) Bleistift längs der Abscissenachse gezogen, schneidet das Stück $MC = v = 22,7$ im Maassstabe des Netzes ab, der natürlich dem der Zeichnung gleich sein muss. Es hängt demnach die Genauigkeit des Auftrags wesentlich vom Maassstab der letzteren ab (wonach sich der der u richtet), und nur in untergeordneter Weise von der Wahl der Abscisseneinheit.

Das vorbeschriebene Schichtennetz geht in ähnlicher Weise aus dem des § 4 hervor, wie die drei Schichtennetze des vorigen Paragraphen einander entspringen. Die symmetrische Gestalt der Gleichung

$$w = uv$$

in Bezug auf die beiden Argumente u und v lässt nur zwei Formen der Productentafel zu. Zum Abgreifen von Quotienten könnte die Tafel des § 4 unmittelbar dienen, während die soeben entworfene Tafel zum Ablesen von Quotienten u deshalb bequem ist, weil die Argumente w und v der Gleichung:

$$u = \frac{w}{v}$$

auf der Abscissen- und Ordinatenachse gesucht werden.

Als Beispiel einer trigonometrischen Schichtentafel wurde in § 5 eine solche erwähnt, welche mit gleichmässigen Winkelintervallen nach der Gleichung

$$w = 10 u \operatorname{tg} \alpha$$

entworfen ist, sodass die Argumente u und α an den Coordinaten, w aber an den Zeigern der Isoplethen abgelesen würden. Je nachdem man nun u oder α durch Isoplethen darstellt, sind zwei neue Abbildungen dieser Gleichung durch Schichtenetze möglich, von denen jede erlaubt, w an einer der Coordinatenachsen in festgesetztem Maasse abzugreifen. Aber beide Varianten sind unter sich wesentlich verschieden. Betrachten wir w als Ordinate, α als Abscisse, und geben u die Werthe der natürlichen Zahlenreihe, so entsteht eine Schaar transcscendenter Curven, welche alle im Coordinatenanfang zusammenreffen und sich der Ordinate für $\alpha = 90$ asymptotisch nähern. Ist dagegen w die Ordinate, u die Abscisse, und erhält α Werthe, welche in gleichmässigen Intervallen anwachsen, so wird die Gleichung jeder Isoplethe linear, nämlich von der Form

$$w = k u.$$

Die Isoplethen schneiden sich wiederum im Coordinatenanfang, sind aber diesmal gerade Linien von gleichen Winkelabständen, also bei weitem leichter zu entwerfen, als die eben erwähnten transcscendenten Curven. Wenn es also gilt, eine Tangententafel zum Abgreifen oder zum unmittelbaren Auftragen durch Anlegen zu construiren, so wird man über die Wahl ihrer Gestalt, obwohl deren zwei zulässig, nicht lange zweifelhaft sein.

Cap. II. Graphische Tafeln mit ungleichmässig getheilten Coordinatenscalen.

§ 8. Ausstrecken krummer Isoplethen durch einseitige ungleichmässige Verzerrung des Schichtenetzes.

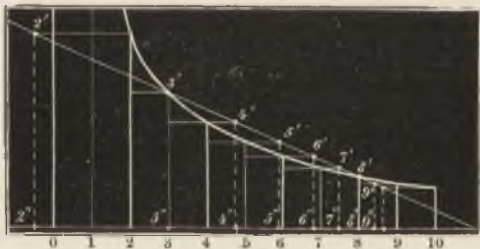
Es ist immer erwünscht und häufig ausführbar, den Vortheil leichter und genauer Construction, den geradlinige Isoplethen gewähren, auch auf solche Schichtentafeln auszudehnen, deren Isoplethen nach dem bisherigen krumme Linien würden. Greifen wir als Beispiel wieder die Hyperbelschaar heraus, welche die Isoplethen auf der Productentafel des § 4 bildet, und denken uns den Stoff, auf dem das Liniennetz entworfen ist, in der Richtung der Abscissenachse so verzogen, dass die erste der Hyperbeln als Gerade erscheint, so sind auch alle übrigen Hyperbeln gerade gestreckt worden. Denn, wie schon oben erwähnt, sind die Ordinaten einer beliebigen Hyperbel Vielfache der entsprechenden Ordinaten

der ersten Hyperbel, und dies Verhältniss wird durch die Verzerrung, bei welcher die Ordinaten einander parallel bleiben, nicht verändert. Daraus folgt ferner, dass jede Hyperbel zu einer gegen die Abscissenachse geneigten Geraden ausgestreckt wird, und dass sich alle diese convergenten Strahlen in Einem Punkte von der gemeinsamen Ordinate Null, also in der Abscissenachse schneiden.

Um zu erkennen, wie sich die verzerrten Abscissenintervalle der gestreckten Isoplethen zu einander verhalten, ziehen wir an der Hyperbel der Fig. 10 eine beliebige Secante, und von den Endpunkten der Hyperbelordinaten, die in gleichen Intervallen construirt sein mögen, Parallele zur Abscissenachse bis zur Secante. Sämmtliche Ordinatenendpunkte der Hyperbel können wir uns in dieser Weise auf die Secante projectirt denken, und aus der Figur folgt unmittelbar, dass sich die Zwischenräume der Projectionenpunkte verhalten wie die Ordinatenunterschiede der projectirten Hyperbelpunkte. Ganz ebenso verhalten sich die Projectionen jener Zwischenräume auf die Abscissenachse; wenn also u die Ordinaten, v die Abscissen der Hyperbel, x die Abscissen der zu (u, v) gehörigen Projectionenpunkte auf der Secante bedeuten, so gilt die Proportion

$$(x^I - x^{II}) : (x^{III} - x^{IV}) = (u^I - u^{II}) : (u^{III} - u^{IV}).$$

Fig. 10. Ausstrecken einer Hyperbel.



Diese Proportion besteht unabhängig von einer etwa erfolgenden beliebigen Verzerrung der Abscissenachse, gilt also auch für eine Secante, welche wir schliesslich an die bereits gerade gestreckte Hyperbel ziehen, d. h. für die ausgestreckte Hyperbel selbst. In unserer Schichtentafel aber gilt sie für die ganze Schaar, weil Punkte von gemeinsamer Abscisse auch nach der Parallelverschiebung der sie verbindenden Ordinate eine gemeinsame Abscisse behalten. Auch ist leicht einzusehen, dass dieselbe Proportion in allen anderen Fällen besteht, wo Isoplethen durch einseitige Verzerrung des Coordinatennetzes gestreckt werden können. Gleichwerthige Abscissenintervalle des verzerrten Schichtennetzes verhalten sich dann wie die zugehörigen Ordinatenunterschiede der unverzerrten Isoplethen.

In unserem Beispiele, wo $u = \frac{10}{v}$, wollen wir gleiche Abscissenintervalle annehmen, nämlich $v^{\text{II}} - v^{\text{I}} = v^{\text{IV}} - v^{\text{III}} = \text{etc.}$, sodass wir erhalten:

$$(x^{\text{I}} - x^{\text{II}}) : (x^{\text{III}} - x^{\text{IV}}) = \frac{v^{\text{II}} - v^{\text{I}}}{v^{\text{II}} v^{\text{I}}} : \frac{v^{\text{IV}} - v^{\text{III}}}{v^{\text{IV}} v^{\text{III}}} = v^{\text{III}} v^{\text{IV}} : v^{\text{II}} v^{\text{I}}.$$

Gleichwerthige aber verzerrte Abscissenintervalle verhalten sich daher umgekehrt wie die Producte aus den Zeigern, die ihrem Anfangs- und Endpunkte zukommen. Ist irgend ein Intervall $x^{\text{I}} - x^{\text{II}}$ seinem Maasse nach bekannt oder vorgeschrieben, und es soll der Abstand x_0^{II} des gemeinsamen Schnittpunktes der gestreckten Hyperbeln von dem Punkte (x^{II}) berechnet werden, so dient dazu die Proportion:

$$x_0^{\text{II}} : (x^{\text{I}} - x^{\text{II}}) = u^{\text{II}} : (u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) = v^{\text{I}} : (v^{\text{II}} - v^{\text{I}}),$$

oder für den entsprechenden Abstand x^{I} des Punktes (x^{I}) die Proportion:

$$x_0^{\text{I}} : (x^{\text{I}} - x^{\text{II}}) = u^{\text{I}} : (u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) = v^{\text{II}} : (v^{\text{II}} - v^{\text{I}}),$$

woraus:

$$x_0^{\text{I}} : x_0^{\text{II}} = v^{\text{II}} : v^{\text{I}}.$$

Sind v^{II} und v^{I} nur um eine Einheit verschieden, und ist $x^{\text{I}} - x^{\text{II}}$ der Maasseinheit gleich, so wird $x^{\text{I}} = v^{\text{II}}$ und $x_0^{\text{II}} = v^{\text{I}}$.

§ 9. Polygonale Isoplethen.

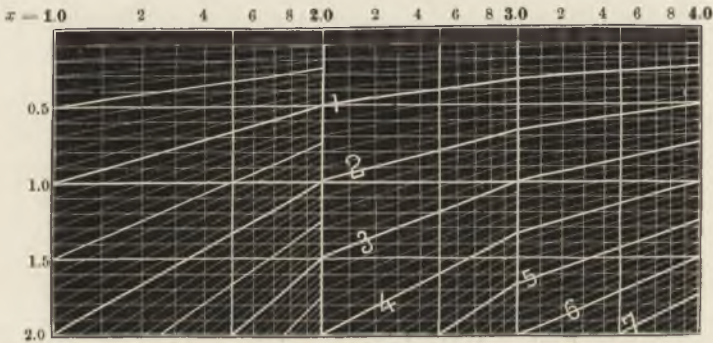
Die rasche Zunahme gleichwerthiger Abscissenintervalle (Fig. 10) mit ihrer Entfernung vom Schnittpunkte der convergenten Strahlen auf der Abscissenachse macht es häufig rathsam, beim Entwerfen eines einseitig verzerrten Schichtenetzes den Maassstab der Abscissen für verschiedene Tafeltheile verschieden zu wählen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, mehrere solcher Schnittpunkte festzusetzen, sodass die Isoplethen nicht mehr Gerade, sondern Polygone werden.

1) In Fig. 11 ist ein Theil der hyperbolischen Productentafel in der Weise gestreckt, dass auf je 10 Einheiten der Abscissenachse ein neuer Vereinigungspunkt der Strahlen trifft, und dass jedes zehnte Intervall einer Abscisseneinheit die gleiche Länge erhält. Alle übrigen Abscissenintervalle werden ungleich und grösser. Für die Construction von Fig. 11 bietet Fig. 10 den Schlüssel, wenn wir uns darin die Hyperbel in Stücke zerlegt denken, welche von den Ordinaten begrenzt werden, die wir in den Hauptpunkten der Abscissenscala errichten. Je zwei Endpunkte solcher Hyperbelstücke verbinden wir durch eine Secante, von denen jede wieder nach Fig. 10 benützt wird, um das Verhältniss der verzerrten Abscissenintervalle festzustellen.

Wollen wir auf den Abscissen und Ordinaten nicht bloß Zehntel, sondern noch Hundertel ablesen, so müssen das kleinste Abscissenintervall ebenso wie die Intervalle der Ordinaten eine Länge erhalten, welche dem freien gesunden Auge durch Schätzung gerade noch Zehntel mit Sicherheit einzuschalten erlaubt. Erfahrungsgemäss ist dies bei dem Millimeter noch möglich, sodass also, wenigstens nach einiger Uebung, die Unsicherheit der Factorenablesung innerhalb $\frac{1}{2}$ dmm. bleibt, wenn die

quadratischen Maschen des Coordinatennetzes 1mm. Seite haben. Die obenerwähnte gleiche Länge eines jeden zehnten Intervalles müsste also auch diesen Minimalbetrag von 1mm. erhalten. Damit eine solche Tafel die Argumente dreistellig abzulesen erlaubt, muss sie in der Richtung der Ordinaten eine Ausdehnung von 100mm., und auf der Abscisse zwischen den Zeigern 1 und 10 eine Länge von 115,47mm. erhalten (das Abscissenintervall 0 bis 1 wird unendlich gross). Ob diese Dimensionen der Tafel genügen, um das Product so sicher zu liefern, als es die Berechnung mittelst dreistelliger Zahlen vermöchte, wird sich später zeigen; hier sei nur erwähnt, dass nachfolgende Zahlentabelle auf die erwähnten Maassverhältnisse gegründet, die Probe eines polygonalen Schichtennetzes aber, welche Fig. 11 darstellt, im doppelten Maassstabe

Fig. 11. Ausgestreckte Hyperbelschaar.



entworfen ist. Es sind den einzelnen Spalten die zugehörigen Einer überschrieben, die Zehntel aber jeder Zeile vorgesetzt. Die Länge einer ganzen Einheit der verzerrten Scala zu finden, muss den Summen der Tabelle noch je eine Maasseinheit zugelegt werden.

Grössenverhältniss der Abscissentheile einer polygonalen Schichtentafel zum Multipliciren dreistelliger Zahlen, wenn jedes zehnte Intervall der Maasseinheit gleichgesetzt wird.

	9,0	8,0	7,0	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0
,9	1,021	1,023	1,026	1,029	1,035	1,042	1,053	1,071	1,111	1,250
,8	1,041	1,046	1,052	1,060	1,071	1,086	1,109	1,151	1,242	1,607
,7	1,063	1,070	1,080	1,092	1,109	1,133	1,171	1,239	1,397	2,143
,6	1,085	1,096	1,109	1,126	1,149	1,183	1,238	1,338	1,583	3,000
,5	1,109	1,122	1,139	1,161	1,192	1,237	1,311	1,450	1,810	4,500
,4	1,132	1,149	1,170	1,198	1,237	1,295	1,390	1,576	2,088	7,500
,3	1,157	1,177	1,203	1,237	1,284	1,357	1,478	1,720	2,436	15,000
,2	1,183	1,206	1,236	1,277	1,335	1,423	1,573	1,883	2,879	45,000
,1	1,209	1,236	1,271	1,320	1,388	1,494	1,677	2,072	3,454	∞
Summa	10,000	10,125	10,286	10,500	10,800	11,250	12,000	13,500	18,000	80,000 + ∞

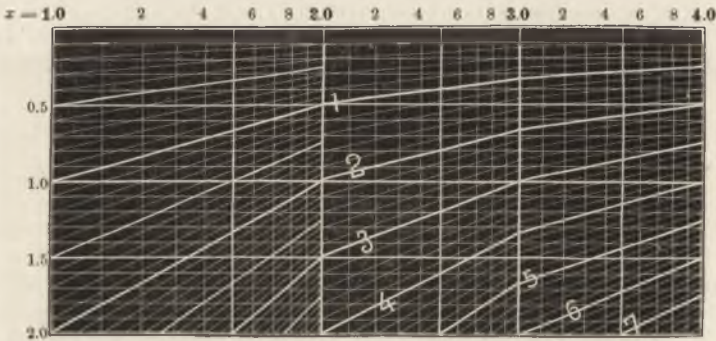
Die Annahme, dass Bruchtheile der Argumente auch auf der verzerrten Abscissenachse durch proportionale Abschätzung eingeschaltet werden dürfen, verlangt für jede einzelne Tafel eine Prüfung, welche leicht zu führen ist. Soll in das Abscissenstück $x^I - x^{II} = p$ ein Punkt (x^{II}) eingeschaltet werden, dessen Zeiger v^{II} gegeben, während zu x^I und x^{III} die Zeiger v^I und v^{III} gehören, so wird der Bruchtheil von p , welcher der Differenz $v^{II} - v^I$ entspricht, nach § 8 berechnet aus:

$$x^I - x^{II} = \frac{v^{II} - v^I}{v^{III} - v^I} \cdot \frac{v^{III}}{v^{II}} \cdot p.$$

Die proportionale Untertheilung ersetzt dieses Stück durch $(v^{II} - v^I) p : (v^{III} - v^I)$, und begeht somit den Fehler \mathcal{A} , welcher, wenn der kleinste Scalentheil $v^{III} - v^I$ als Zahleneinheit genommen und der Bruchtheil $v^{II} - v^I = \delta$ gesetzt wird, die Form annimmt:

$$\mathcal{A} = \delta (1 - \delta) p : v^{II}.$$

Fig. 11. Ausgestreckte Hyperbelschaar.



Für $\delta = 1/2$ erhält \mathcal{A} seinen Maximalwerth, nämlich $\mathcal{A} = p : 4 v^{II}$; solange demnach v^{II} wenigstens 5 kleinste Scalentheile ($v^{III} - v^I$) beträgt, wird \mathcal{A} den Betrag von $p : 20$ nicht überschreiten, welchen wir vorhin als die mögliche Unsicherheit der Schätzung überhaupt kennen lernten. Wir werden aber den Interpolationsfehler unter dieses Maass zu bringen suchen und darum entweder die Maasse der ersten 10 Scalentheile auf der Abscisse nochmals theilen, oder auch unter sich gleich machen, und damit für dieses Feld der Schichtentafel zur hyperbolischen Form der Isoplethen zurückkehren. Sie war ja nur der genaueren Construction wegen verlassen worden; in dem fraglichen Netztheil sind aber auch weniger streng entworfene Linien ausreichend, um so mehr, als er durch das übrige Netz, zwischen den Zeigern 1 und 10 der Abscissenachse, vollständig ersetzt werden kann. Vorausgesetzt dass die Reihenfolge der Factoren, also auch ihre Benennung mit u und v gleichgültig ist, kann sogar die polygonale Schichtentafel ebenso wie die hyperbolische auf die Hälfte ihrer Fläche beschränkt werden. Denn die gemeinsame Achse der Hyperbeln theilt sie alle symmetrisch, indem sie die Achsen der u und v im Nullpunkte unter 45° schneidet. In jeder von beiden Hälften sind aber alle Combinationen je zweier Factoren vertreten, man bedarf darum nur eine Hälfte und auch dann nur eine, wenn die Isoplethen derselben zu Polygonen ausgestreckt worden sind.

2) Ein zweites Beispiel der Verwandlung gekrümmter Isoplethen in Polygone bietet die Lichtdrucktafel V., welche zur Berechnung von Grössen D_0 nach der Formel:

$$D_0 = ak \cos^2 \alpha,$$

worin k eine Constante, dienen soll. Wie die Polygone entstanden, geht am besten aus Fig. 12 hervor. Die Tafel ist so entworfen, dass sie sowohl zum bloßen Ablesen als auch zum Abgreifen und Auftragen von D_0 dienen könnte; man liest nämlich α an den Abscissen, a an den Isoplethen und D_0 an den Ordinaten ab. Solange die Abscissenachse gleich getheilt ist, entsprechen der Gleichung $D_0 = ak \cos^2 \alpha$ Curven, welche um so steiler werden, je weiter sich α von Null entfernt. Um sie in Polygone überzuführen, wurden die Intervalle für je 10° beibehalten, wodurch die Curve in mehrere Bogen zerfällt, durch deren Endpunkte Secanten gelegt werden. Projectionsstrahlen parallel zur Abscissenachse verlegen nun die zu gleichen Abscissenintervallen gehörigen Curvenpunkte eines Bogens auf seine Secante, wodurch die Abstände der punktirten Ordinaten bestimmt werden, welche der polygonal gestreckten Isoplethe angehören. Zur wirklichen Construction der verzerrten Abscissenscala wird man selbstverständlich die Rechnung anwenden.

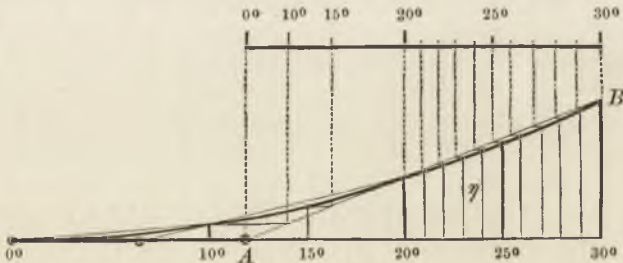
Die Tafel reicht von 0° bis 30° und ist in drei gleich breite Felder zu je 10° geschieden. Um die Abscissenintervalle von Grad zu Grad für das dritte Feld zu berechnen, verlegen wir am bequemsten die Abscissenachse bis zum Schnittpunkt der Curve

$$D_0 = ak \cos^2 \alpha$$

mit der Ordinatenachse, indem wir setzen:

$$\eta = ak - D_0 = ak(1 - \cos^2 \alpha) = ak \sin^2 \alpha.$$

Fig. 12. Verzerrte Scala für das dritte Feld der Distanztafel.



Natürliche Scala mit gleichen Intervallen.

Fig. 12 zeigt die Ordinaten η im dritten Felde für gleiche Abscissenintervalle g von Grad zu Grad. Ziehen wir die Secante AB , so schneidet diese die Abscissenachse in der Entfernung M vor dem Punkte ($\alpha = 20^\circ$), welche sich berechnet aus:

$$M = 10g \cdot \frac{\eta_{20}}{\eta_{30} - \eta_{20}} = 10g \frac{\sin^2 20^\circ}{\sin^2 30^\circ - \sin^2 20^\circ}.$$

Verschieben wir jetzt die Ordinate η , welche zu dem beliebigen Winkel α zwischen 20° und 30° gehört, sich selber parallel, bis ihr Endpunkt

auf die Secante AB fällt und bezeichnen ihren jetzigen Abstand vom Schnittpunkte A mit N , so wird leicht gefunden

$$N : M = \eta : \eta_{20} = \sin^2 \alpha : \sin^2 20^\circ,$$

demnach das verzerrte Abscissenintervall im dritten Felde $x_{III} = N - M$ für $\alpha^0 - 20^0$ aus:

$$x_{III} = 10g \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 20}{\sin^2 30 - \sin^2 20} = \frac{\sin(\alpha + 20^\circ) \sin(\alpha - 20^\circ)}{\sin 50^\circ \sin 10^\circ} \cdot 10g.$$

Nach demselben Vorgange werden Abscissenintervalle im zweiten Felde berechnet aus:

$$x_{II} = \frac{\sin(\alpha + 10^\circ) \sin(\alpha - 10^\circ)}{\sin 30^\circ \sin 10^\circ} \cdot 10g$$

und für das erste Feld nach:

$$x_I = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 10^\circ} \cdot 10g,$$

wie eine einfache Betrachtung auch direct ergibt.

§ 10. Probe für die Möglichkeit, krumme Isoplethen einseitig auszustrecken.*)

Als Kriterium dafür, dass die Hyperbeltafel sich in der Richtung der Abscisse strecken liess, diente uns die Eigenschaft der Ordinaten von irgend einer der Isoplethen, Vielfache der gleichliegenden Ordinaten der ersten Hyperbel zu sein. Dieselbe Eigenschaft kommt auch den Curven zu, welche im zweiten Beispiele des vorigen Paragraphen in Polygone ausgestreckt worden sind. Es ist dabei nicht nöthig, dass die zu gleichen Abscissen gehörigen Ordinaten zweier Isoplethen ganze und rationale Vielfache von einander seien. Wenn wir aber überhaupt die Probe der Streckbarkeit auf den Vergleich der ganzen Ordinatenlängen unter sich gründen, so machen wir uns abhängig von der Lage der Abscissenachse, welche doch willkürlich verschoben werden darf. Denn es ist an sich klar, dass jede einzelne Curve, welche Gestalt sie auch haben mag, durch Verzerren ihrer Abscisse zur Geraden ausgedehnt werden kann. Wie § 8 uns lehrt, gehört dazu nur, dass die Abscissenintervalle $\mathcal{A}v$ im Verhältniss der entsprechenden Ordinatendifferenzen $\mathcal{A}u$ verzogen werden. Heissen die verzerrten Abscissenintervalle $\mathcal{A}x$, so erscheint die früher gefundene Proportion in der kürzeren Bezeichnung:

$$\mathcal{A}x^I : \mathcal{A}x^{II} : \dots = \mathcal{A}u^I : \mathcal{A}u^{II} : \dots,$$

welche Proportion unverändert bleibt, wenn rechter Hand durch die constante Abscissendifferenz $\mathcal{A}v$ dividirt wird. Heissen U die Ordinaten einer zweiten Curve, welche mit der ersten zugleich zur Geraden werden

*) Kann unbeschadet des Zusammenhanges vorläufig übergangen werden.

soll, so muss die Proportion auch für diese gelten, natürlich unter entsprechender Umdeutung von Δu in ΔU . Daraus entsteht die Proportion

$$\Delta x^I : \Delta x^{II} : \dots = \frac{\Delta w^I}{\Delta v} : \frac{\Delta w^{II}}{\Delta v} : \dots = \frac{\Delta U^I}{\Delta v} : \frac{\Delta U^{II}}{\Delta v} : \dots,$$

woraus folgt:

$$\frac{\frac{\Delta U^I}{\Delta v}}{\frac{\Delta w^I}{\Delta v}} = \frac{\frac{\Delta U^{II}}{\Delta v}}{\frac{\Delta w^{II}}{\Delta v}} = \dots = k.$$

Beim Uebergang zu verschwindend kleinen Intervallen dv wird daraus:

$$\frac{dU}{dv} : \frac{dw}{dv} = k,$$

(ein Verhältniss, das auch für die trigonometrischen Tangenten der Neigungen ausgestreckter Isoplethen zu ihrer Abscissenachse gilt. Letztere werden parallel, wenn $k = 1$.) Sollen sämmtliche Isoplethen zugleich gestreckt werden, so müssen daher die Differentialquotienten nach v von je zwei beliebigen Isoplethen in constantem Verhältniss stehen. Diese Differentialquotienten unterscheiden sich aber nur von einander durch den Werth, den man der dritten Variablen w beigelegt hatte, also muss die Constante der rechten Seite eine Function von w sein. Da der

Differentialquotient $\frac{dU}{dv}$ aus $\frac{du}{dv}$ entsteht, wenn man in letzterem für w den Werth $w + \Delta w$ einsetzt, so lässt sich schon aus der Form von $\frac{du}{dv} = \frac{df(v, w)}{dv}$ schliessen, ob aus obigem Quotienten $\frac{dU}{dv} : \frac{du}{dv}$ die Glieder, welche v enthalten, herausfallen. Es wird dies eintreten, wenn sich $\frac{du}{dv}$

in zwei Factoren von der Form

$$\frac{du}{dv} = \varphi(v) \cdot \psi(w)$$

zerlegen lässt, von denen der eine nur von v , der andere nur von w abhängt. Dann wird:

$$\frac{df(v, w + \Delta w)}{dv} : \frac{df(v, w)}{dv} = \psi(w + \Delta w) : \psi(w) = k.$$

So zeigen sich die a -Isoplethen, welche im vorigen Paragraph aus der Gleichung

$$D_0 = ak \cos^2 \alpha$$

hervorgingen, wenn α und D die Abscissen- und Ordinatenargumente bildeten, nach der Richtung der α hin streckbar, weil

$$\frac{dD_0}{d\alpha} = -ak \sin 2\alpha = \varphi(\alpha) \cdot \psi(\alpha).$$

Dagegen lassen sich α -Isoplethen, welche aus der folgenden Gleichung hervorgehen:

$$D = c \cos \alpha + ak \cos^2 \alpha \quad (\text{A})$$

streng genommen nicht ausstrecken, weil die Differentialformel

$$\frac{dD}{d\alpha} = -c \sin \alpha - ak \sin 2\alpha$$

das verlangte Product nicht liefert.

In diesem Falle aber, wo die beiden rechtseitigen Glieder der vorletzten Gleichung Functionen darstellen, bei denen Wachstum und Abnahme wenigstens gleichzeitig erfolgen, und selbst nahezu in der Weise, dass der Differentialquotient des einen Gliedes als ein Vielfaches des Differentialquotienten des anderen betrachtet werden kann, dürfen wir uns durch eine Annäherung helfen. Wir nehmen an, dass die Verzerrung der Abscissenintervalle für beide Glieder dieselbe sei, berechnen die Anfangs- und Endordinate der Isoplethen streng, verbinden sie aber geradlinig. Der auf die Zwischenwerthe treffende Fehler ist um so geringfügiger, je näher die Zwischenwerthe den streng berechneten liegen, wird also bei polygonaler Ausführung der Isoplethen verkleinert. Wie eine leichte aber etwas weitschweifige Rechnung zeigt, wird er in dem Falle geradezu verschwindend, dass man die Abscissenverzerrung wie in dem zweiten Beispiele des vorigen Paragraphen anordnet, auf 4 Hauptordinaten die strengen Werthe aufträgt und die zusammengehörigen Ordinatenendpunkte durch gebrochene Linien verbindet.

Wenn nun auch in obiger Gleichung (A) die α -Isoplethen durch einseitige Verzerrung streng nicht streckbar sind, so sind es dagegen die α -Isoplethen, denn

$$\frac{dD}{d\alpha} = a^0 k \cos^2 \alpha = \varphi(\alpha) \cdot \psi(\alpha).$$

Wir werden uns übrigens in den folgenden Paragraphen, die den allgemeineren Fall der zwiefachen Coordinatenverzerrung behandeln sollen, nicht weiter eines Kennzeichens bedienen, das den Differentialquotienten der Function zu bilden verlangt, sondern sofort aus der Form der Function selbst zu erkennen suchen, ob sie in der Gestalt von Geraden oder gegebenen Curven abgebildet werden kann*).

§ 11. Zwiefache Coordinatenverzerrung. Functionen der Argumente als neue Variable.

Die einseitige Verzerrung des Coordinatennetzes bietet die Möglichkeit, in der unverzerrten Richtung Functionswerthe von zwei Variablen in ihrem natürlichen gegenseitigen Verhältniss abzugreifen oder unmittelbar aufzutragen, empfiehlt sich also besonders für die im § 7 erwähnten durchsichtigen Schichtentafeln. Wir geben diesen Vortheil jedoch zu Gunsten anderer auf, wenn wir sowohl auf der Abscisse als Ordinate

*) Vergl. dagegen Helmert, über graphische Tafeln mit zwei Eingängen, Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1876, Heft 1.

die Werthe der Argumente nicht unmittelbar, sondern in gesetzmässig verzerrtem Maassstabe, also Functionen der Argumente auftragen.

Das einfachste Verfahren dieser Art ist dasjenige, welches Functionen der Argumente, die schon in der gegebenen Gleichung vorkommen, auf die Coordinatenachsen überträgt. Ist uns nämlich eine Gleichung von der Form

$$f(w) = F[\varphi(u), \psi(v)]$$

gegeben, worin F , f , φ und ψ Functionszeichen bedeuten, so können wir setzen:

$$f(w) = z; \quad \varphi(u) = x; \quad \psi(v) = y;$$

und nun über den rechtwinkligen Coordinaten der x und y die Gleichung abbilden:

$$z = F[x, y].$$

Durch diese letztere Gleichung wird die Form und der Grad der entstehenden Curven entschieden; dagegen richten sich die Maschen unseres Coordinatennetzes nach den Intervallen, in welchen wir die Argumente u und v wachsen lassen, und die Abstände der Isoplethen nach den Stufen, in welchen wir die abhängig Variable w steigend annehmen.

Wir wollen hier sogleich die Fälle betrachten, in welchen die angedeutete Operation auf die Construction gerader Linien führen kann.

a) Die w -Isoplethen aller Gleichungen von der Form:

$$f(w) = \varphi(u) + \psi(v) \tag{a}$$

können durch ein System gerader Linien vertreten werden, wenn man setzt: $z = f(w)$; $x = \varphi(u)$; $y = \psi(v)$ und darauf die z -Isoplethen der hieraus folgenden Gleichung construirt:

$$z = x + y \tag{a^*}$$

und zwar sind die Geraden parallel, unter 45° gegen die Coordinatenachsen geneigt und schneiden dieselben in den Punkten $\varphi(u) = 0$, und $\psi(v) = 0$. Man kann aber auch ausserdem noch eine gleichmässige Verzerrung eintreten lassen, indem man y und x mit beliebigen Constanten a und b multiplicirt, einerlei ob dieselben zu $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ Bezug haben oder nicht. Auch

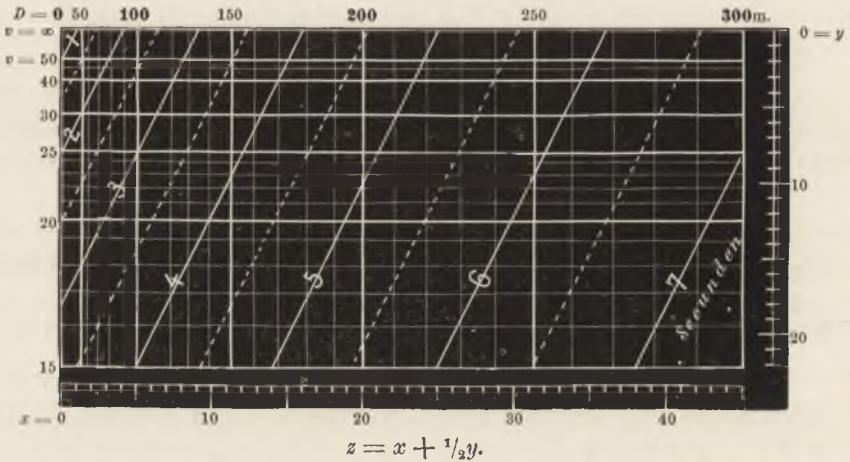
$$z = ax + by$$

vertritt ein System paralleler Geraden. Als Beispiel kann die Mittelpunktsgleichung der Ellipse oder Hyperbel dienen, da bei diesen Kegelschnitten die Variablen in der durch (a) angedeuteten Weise getrennt werden können. Während wir also in § 5 concentrische Ellipsen durch eben solche Kreise darzustellen lernten, ist es uns nun auch möglich, concentrische Ellipsen und Hyperbeln durch parallele Gerade wiederzugeben.

Ein anderes Beispiel für die Abbildung einer Function durch parallele Gerade liefert uns die in § 60 1) d enthaltene Gleichung, welche den mittleren Visurfehler Φ in Sekundenmaass für die Vergrösserung v des Fernrohres und die Entfernung D in Metern angibt und die wir schreiben:

$$\Phi^2 = \left(\frac{50}{v}\right)^2 + 5 \left(\frac{D}{100}\right)^2.$$

Fig. 13. Visurfehler Φ in Sekunden.



Wir setzen nun $\Phi^2 = z$; $\left(\frac{50}{v}\right)^2 = by$; $5 \left(\frac{D}{100}\right)^2 = ax$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ und, indem wir die Scaleneinheit für x und y von vorn herein als gleich festsetzen, berechnet sich von selber die Lage der Scaleneinheiten für $v = 1, 2, 3 \dots$, für $D = 10, 20, 30 \dots$, ganz wie in Fig. 13 angegeben. Die geradlinige Verbindung der Coordinatenpunkte ($x = 1, y = 1 \times 2$) gibt die Isoplethe für $\Phi^2 = 1$, also auch für $\Phi = 1$, die Verbindung von ($x = 4, y = 4 \times 2$) gibt sodann die Isoplethe $\Phi = 2$ u. s. f., und danach müssen die Isoplethen auch beschrieben werden. So ist es in der kleinen Schichten-tafel Fig. 13 geschehen. Neben den verzerrten Coordinatenscalen sind darin die Scalen der x und y mit ihren gleichen Intervallen aufgetragen. Wir hätten obensowohl $a = b = 1$ setzen dürfen und immer noch dieselbe Figur erhalten, wenn wir für y die doppelte Scaleneinheit wählten.

Für die Zukunft behalten wir uns vor, das Verhältniss der Coordinateneinheiten in den Figuren willkürlich zu wählen, anstatt die Verzerrung durch Coefficienten der Variablen algebraisch auszudrücken. Diese Coefficienten werden vielmehr alsbald eine andere Deutung erhalten.

Weitere Beispiele von Gleichungen der Form (a) finden sich in dieser Schrift noch öfters, und es sei hier vorläufig nur noch auf die Barometerformel für trockene Luft hingewiesen, welche in § 29 entwickelt und dargestellt wird, sowie auf die Gleichung für den Einfluss eines constanten Ablesungsfehlers auf barometrische Messungen, berechnet in § 37 und ebenda abgebildet.

b) Alle Gleichungen von der Form

$$f(w) = \varphi(u) \cdot \psi(v) \quad (b)$$

lassen sich durch ein Bündel geradliniger, für u isoplether Strahlen abbilden, wenn y, q, x die Bedeutung:

$$y = f(w), \quad q = \varphi(u), \quad x = \psi(v)$$

haben und die Gleichung

$$y = qx \quad (b^*)$$

in der Weise des § 7 durch ein System von Geraden wiedergegeben wird, welche für q isopleth sind. Steht die Scaleneinheit der Coordinaten für y und x fest, so sind damit auch die Scaleneinheiten für w und v gegeben und das Coordinatennetz kann entworfen werden. Sodann errichtet man zu einer beliebigen Abscisse x_0 die Senkrechte und trägt auf derselben die Ordinaten

$$y = qx_0 = \varphi(u) \times x_0$$

für bestimmte Stufen von u ab. Die Ordinatenendpunkte, mit dem Coordinatenanfang geradlinig verbunden, bestimmen die Lage des Strahlenbündels. Fällt der Coordinatenanfang ausserhalb der Tafel, so müssen zwei derartige Senkrechte errichtet und eingetheilt werden. Die geradlinige Verbindung zusammengehöriger Ordinatenendpunkte ergibt die Isoplethen.

Von den zahlreichen Beispielen der Gattung (b), welche diese Schrift enthält, sei hier nur die Rath'sche Barometertafel § 34 erwähnt. Die Gleichung, welche ihr zu Grunde liegt, kann geschrieben werden:

$$\log 760 - \log b = \frac{H}{18412} \times \frac{1}{1 + 0,004t},$$

ist somit wirklich von der Form:

$$f(b) = \varphi(H) \cdot \psi(t).$$

Das Nähere über ihre Abbildung findet sich am angeführten Orte.

Betrachten wir von dem gleichen Gesichtspunkte aus das zweite Beispiel des § 9, so kann die dortige Gleichung $D = ak \cos^2 \alpha$ auch geschrieben werden:

$$f(D) = \varphi(\alpha) \cdot \psi(\alpha),$$

was mit (b) übereinstimmt. Da $f(D) = D$, so wird bei der Abbildung die Achse der D gleichmässig getheilt, die Verzerrung des Coordinatennetzes also nur eine einseitige. Wir erkennen demnach die einseitige Dehnung des Coordinatennetzes, von der § 8 handelt, als einen besonderen Fall der Verzerrung nach zwei Richtungen hin, und es ist unschwer einzusehen, dass die allgemeinere Auffassung auch übersichtlicher ist. Immer dann, wenn y oder x einer linearen Function der ursprünglichen Variablen (w, u, v) gleichgesetzt wird, fällt die Theilung der betreffenden Achse gleichmässig aus.

c) Anknüpfend an das Beispiel des § 10 und die Gleichung

$$D = c \cos \alpha + ak \cos^2 \alpha,$$

von welcher dort nachgewiesen wurde, dass sie durch geradlinige α -Isoplethen darstellbar ist, haben wir die algebraische Form aufzusuchen, unter der diese Geraden erscheinen werden. Die Formen (a*) und (b*)

genügen hier nicht. Verallgemeinern wir aber die letztere durch Beifügen einer zweiten Constanten wie folgt:

$$y = p + qx, \tag{c^*}$$

so vertritt diese allgemeinste Form der linearen Gleichung alle Functionen von der Gattung:

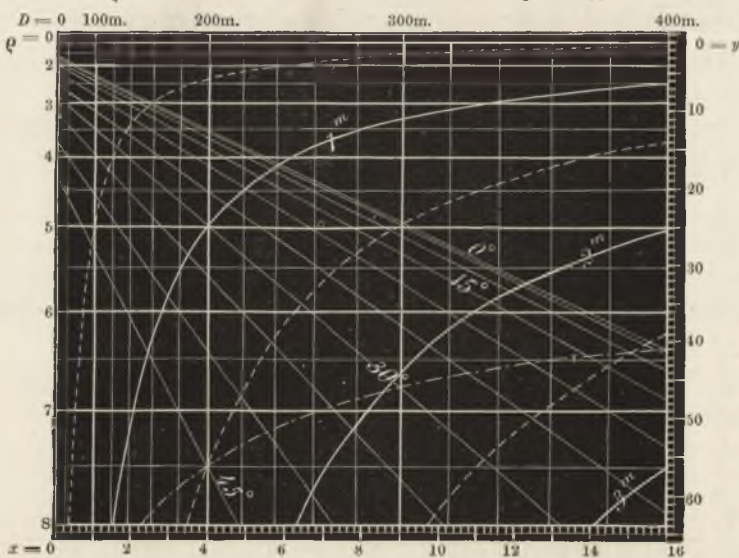
$$f(w) = \chi(u) + \varphi(u) \cdot \psi(v), \tag{c}$$

also auch die obige, wenn man setzt: $f(w) = y$, $\chi(u) = p$, $\varphi(u) = q$, $\psi(v) = x$. Die u -Isoplethen werden also Gerade sein, aber weder parallele noch solche, die sich in einem Punkte schneiden. Die Lage der Geraden wird vielmehr ganz davon abhängen, welche Werthe $\chi(u)$ und $\varphi(u)$ für jedes gegebene u annehmen.

Ein zweites Beispiel hierzu liefert die Gleichung für den mittleren Fehler ρ der gemessenen Distanz in Tausendeln ihrer Grösse, welche in § 60 entwickelt und in Fig. 14 abgebildet wird. Wir haben nämlich:

$$\rho^2 = \underbrace{2,95 + 15,63 \operatorname{tg}^2 \alpha}_p + \underbrace{2,36 \operatorname{sec}^4 \alpha}_q \left(\frac{D}{100}\right)^2,$$

Fig. 14. ρ = mittlerer Fehler der Distanzmessung in ‰ der Distanz.



also wie vorstehend $p = \chi(\alpha)$ und $q = \varphi(\alpha)$. Setzen wir dann noch $y = \rho^2$, $x = \left(\frac{D}{100}\right)^2$, so kommen wir auf Gleichung (c*), die sich leicht graphisch darstellen

lässt. Statt der gleichgetheilten xy -Coordinaten entwerfen wir ein Netz, dessen Ordinatenheilung aus dem Wachstum des ρ von Einheit zu Einheit, und dessen Abscissenscala aus der Zunahme des D in Intervallen von je 20 (50) Einheiten hervorgeht. Die Lage der Isoplethen ergibt sich leicht durch Berechnen der Ordinaten für $x = 0$ und $x = 16$ unter Substitution von α in Stufen von je 5 Graden. Die Curven der Fig. 14 haben an dieser Stelle keine Bedeutung für uns.

d) Schreiben wir nun auch noch an Stelle von (a*) die allgemeinste Form einer symmetrisch geordneten Gleichung des ersten Grades an, so lautet dieselbe:

$$1 = mx + ny \quad (d^*)$$

und es steht uns abermals frei, sowohl die Variablen x und y als Functionen zweier gegebenen Argumente u und v , wie auch die beiden Coefficienten der Gleichung (d*), nämlich m und n als Functionen einer gemeinsamen dritten Veränderlichen w aufzufassen, wenn w , u und v in dem Zusammenhange stehen:

$$1 = \chi(w) \cdot \varphi(u) + \mu(w) \cdot \psi(v) \quad (d)$$

oder auch

$$f(w) = \chi(w) \cdot \varphi(u) + \mu(w) \cdot \psi(v),$$

weil diese letztere Form leicht in die vorhergehende überzuführen ist. Durch Division mit $\varphi(u)$ und Umtausch der Argumente entsteht aus (d) eine Gleichung von derselben Gestalt wie (c), woraus hervorgeht, dass das eben betrachtete Beispiel auch hierher passt und es eines neuen nicht bedarf.

Dem aufmerksamen Blick entgeht im vorigen die Bedingung nicht, unter welcher die w -Isoplethen einer gegebenen Gleichung

$$f(u, v, w) = 0 \quad (I)$$

durch eine Curvenschaar von vorgeschriebener Art zur Darstellung kommen können. Sei

$$F(x, y, a, b, c \dots) = 0 \quad (II)$$

die allgemeine Gleichung einer geforderten Curve, so müssen sich die Verbindungen von u, v, w in (I) derart gruppieren lassen, dass die vorkommenden Functionen der Argumente u und v durch die laufenden Coordinaten x und y , die vorhandenen Functionen von w durch die Coefficienten $a, b, c \dots$ vertreten werden können und hiernach Gleichung (II) zum Vorschein kommt. (I) muss sich also umbilden lassen in

$$F[\varphi(u), \psi(v), \chi(w), \mu(w), \varrho(w) \dots] = 0.$$

Durch die Substitutionen

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v) \quad (III)$$

wird das Coordinatennetz für gleichmässig wachsende u und v festgestellt (wobei noch die Einheiten von x und y willkürlich gewählt werden dürfen); die Substitutionen

$$a = \chi(w), \quad b = \mu(w), \quad c = \varrho(w) \dots \quad (IV)$$

sind für Gestalt und Lage der einzelnen w -Isoplethen entscheidend, und die zusammengehörigen Werthe von $a, b, c \dots$ für stufenweise wachsende w zu berechnen. Zum Zwecke der Curvenconstruction werden die berechneten Coefficienten jedesmal in (II) eingesetzt.

§ 12. Functionen von Functionen der Argumente als neue Variable.

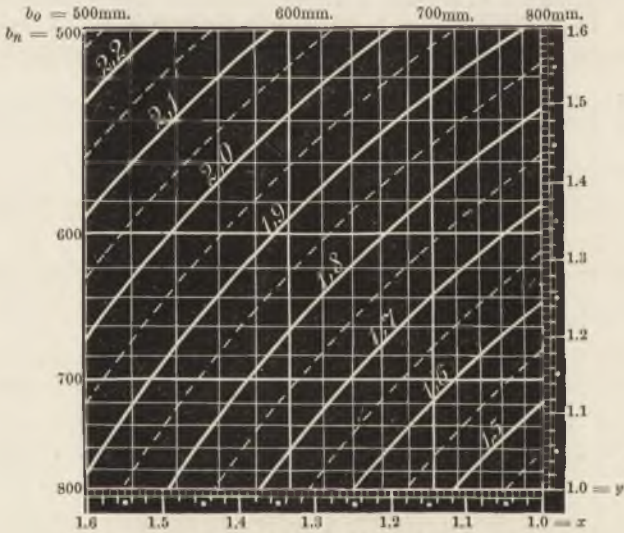
Wir werden jetzt Fälle betrachten, wo erst wieder vorbestimmte Functionen von denjenigen Functionen der Argumente, welche die darzustellende Gleichung $f(u, v, w) = 0$ enthält, das Verhältniss bedingen, nach dem die Coordinatenscalen der Schichtentafel zu entwerfen sind.

a) Ein Fall dieser Art geht aus der Verallgemeinerung der Aufgabe am Schlusse des § 5 hervor. Dort wurden Ausdrücke von der Form

$$w^2 = mu^2 + nv^2$$

durch concentrische Kreise abgebildet, und es genügte dazu immer nur

Fig. 15. Einfluss eines mittleren Ablesungsfehlers von $\pm 0,1$ mm. am Barometer.



In Metern: $\Delta h = \pm \sqrt{\left(\frac{800}{b_0}\right)^2 + \left(\frac{800}{b_n}\right)^2}$; $\Delta h^2 = x^2 + y^2$.

eine gleichmässige Verzerrung des Coordinatennetzes. Soll aber die allgemeinere Gleichung

$$f(w) = \varphi(u) + \psi(v), \tag{a}$$

worin beide Glieder der rechten Seite als wesentlich positiv vorausgesetzt sind, durch Kreise dargestellt werden, so müssen wir sie zuerst in die Form bringen:

$$r^2 = x^2 + y^2, \tag{a^*}$$

wo für die Achsen der x und y gleichmässige Eintheilung zu Grunde liegt und darauf die Werthe

$$x = \sqrt{\varphi(u)} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\psi(v)}$$

abzutragen sind, indem für u und v die gewünschte Stufenfolge von Zahlen eingeführt wird. Nach den soeben vollzogenen Substitutionen $x^2 = \varphi(u)$ und $y^2 = \psi(v)$, gibt uns die dritte $r^2 = f(w)$ für stufenweise wachsende w die Kreisradien r der w -Isoplethen.

In dieser Weise bildet Fig. 46 die Formel ab:

$$\Delta h^2 = \left(\frac{800}{b_o}\right)^2 + \left(\frac{800}{b_n}\right)^2,$$

worin Δh den Einfluss (§ 46) eines mittleren Ablesungsfehlers am Barometer von $\pm 0,1\text{mm.}$ auf die Höhenmessung angibt. Die Gleichung ist schon in der Form (a*) angeschrieben, und wir setzen nach obiger Anleitung:

$$r = \Delta h; \quad x = 800 : b_o; \quad y = 800 : b_n,$$

wonach die weitere Ausführung der Schichtentafel, welche für die Argumente b_o und b_n symmetrisch wird, keine Schwierigkeiten bietet. Der Koordinatenanfangspunkt liegt ausserhalb der Figur. Ein anderes Beispiel derart findet sich im § 60, Ablesungsfehler wegen Lattenschiefe etc. Die Gleichung für Φ^2 , welche in Fig. 13 durch Gerade abgebildet wurde, hätte sich ebensowohl zur Darstellung durch Kreise geeignet.

b) Durch Kreise darstellbar sind alle Gleichungen, welche sich mittelst entsprechender Substitutionen auf die Form bringen lassen:

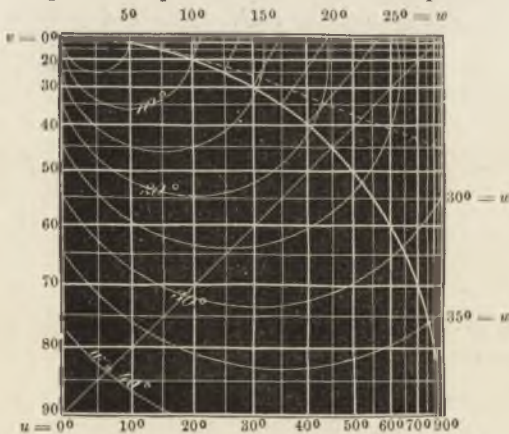
$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \tag{b^*}$$

Dabei können x und y als laufende Coordinaten nur von den Argumenten u und v der Gleichung $f(u, v, w) = 0$ abhängig sein, während r, a, b , welche Radius und Mittelpunktslage jeder einzelnen w -Isoplethe bestimmen, offenbar Functionen von w sein müssen. Die abzubildende Gleichung muss daher umgeformt werden können in:

$$[\chi(w)]^2 = [\varphi(u) - \mu(w)]^2 + [\psi(v) - \rho(w)]^2, \tag{b}$$

wobei das Verbindungszeichen $+$ wesentlich ist.

Fig. 16. Beispiel excentrischer Kreisisoplethen.



So bildet vorstehende Fig. 16 die Gleichung ab:

$$\text{tg}^2 w = (\sin u - \sin w)^2 + (\cos v - \cos w)^2.$$

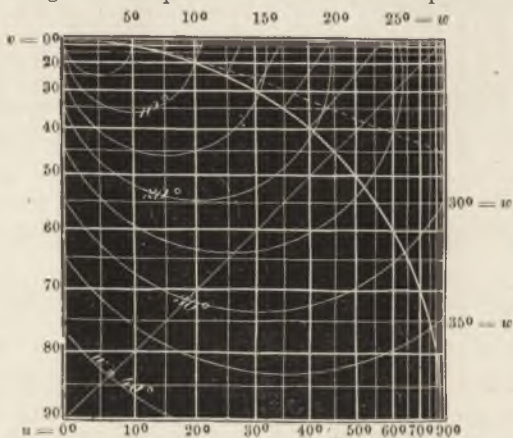
Auf den Coordinaten wird $\sin u$ und $\cos v$ mit Intervallen von 5° für u und v Vogler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln. 3

abgetragen und dadurch das Netz festgestellt. Der Ort der Mittelpunkte der w -Iso-plethen ist ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Centrum im Coordinatenanfang ($x = 0$) ($y = 0$), weil

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sin^2 w + \cos^2 w} = 1;$$

und zwar liegen jene Mittelpunkte jedesmal um den Bogen w von dem Punkte ($u = 0$, $v = 0$) entfernt. Verbindet man sie insgesamt mit dem Centrum ($x = 0$, $y = 0$) des Kreises vom Radius Eins, so schneiden die gezogenen Strahlen von der Tangente,

Fig. 16. Beispiel excentrischer Kreisiso-plethen.



welche im Punkte ($u = 0$, $v = 0$) errichtet ward, Stücke ab gleich den Radien der Iso-plethen. Hieraus kann man folgern, dass die Kreisiso-plethen sich nicht schneiden.

Ein Beispiel sich schneidender Kreisiso-plethen ist das folgende:

$$\sin^2 w = (\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} w)^2 + (\cos v - \cos w)^2.$$

Der Ort der Kreismittelpunkte ist nämlich die punktirte Curve der Fig. 16, und der Radius langsamer wachsend als die Mittelpunktsabszisse.

Nach Analogie der hier behandelten beiden Fälle ist nun auch das allgemeine Problem zu lösen, eine Gleichung

$$f(u, v, w) = 0 \tag{I}$$

mit den Argumenten u und v in eine Schichtentafel zu bringen, für deren w -Iso-plethen eine vorbestimmte Form gewählt ist, nach der Gleichung:

$$F[\Phi(x), \Psi(y), a, b, c \dots] = 0. \tag{II}$$

Die Aufgabe ist nur dann ausführbar, wenn (I) sich ebenso gruppieren lässt wie (II), also umgeformt werden kann in:

$$F'[\varphi(u), \psi(v), \chi(w), \mu(w), \rho(w) \dots] = 0. \tag{III}$$

Dabei wird durch die Substitutionen:

$$\Phi(x) = \varphi(u); \quad \Psi(y) = \psi(v) \tag{IV}$$

die Gestalt des Coordinatemetzes festgestellt, während die Coefficienten $a, b, c \dots$ der Gleichung (II), durch die sich Form und Lage der

einzelnen w -Isoplethe bestimmt, als Functionen von w darstellbar sein müssen, also wie früher gelten muss:

$$a = \chi(w), \quad b = \mu(w), \quad c = \varrho(w) \dots \dots; \quad (V)$$

§ 13. Aufsuchen der Isoplethengleichung bei vorgeschriebener Form des Coordinatennetzes.

Mit der Form des Coordinatennetzes ist allemal die Beziehung zwischen den neuen Variablen x, y und den Argumenten u, v der darzustellenden Function $f(u, v, w) = 0$ festgestellt, wie aus der Bedeutung der Gleichungen (IV) des vorigen Paragraphen folgt. Jene Beziehung und damit das Coordinatennetz kann mitunter vorgezeichnet werden, sei es durch den Wunsch, die linearen Abstände der Isoplethen in beliebiger Weise zu regeln, sei es durch Rücksichten auf die Genauigkeit der Ablesung.

So könnte man finden, dass in Fig. 5 und 6 die Isoplethen, welche den Coordinatenachsen zunächst liegen, verhältnissmässig zu grosse senkrechte Abstände haben, und dem dadurch abhelfen wollen, dass man die Einheiten der Coordinaten ungleich macht und etwa wie die Differenzen der Tangenten der Winkel von 5 zu 5° wachsen lässt. Es wäre also darzustellen:

$$f(u, v, w) = 0,$$

nämlich: $uv - w = 0$, oder auch $mu \cdot mv - m^2 w = 0$,
und zwar durch Isoplethen, deren gesuchte Gleichung (II) die Form haben wird:

$$\Phi(x) \cdot \Psi(y) - a = 0,$$

da in (III) und (IV) zu setzen ist:

$$\varphi(u) = mu \quad \text{und} \quad \psi(v) = mv.$$

Nun sollten zur Construction des Coordinatennetzes die Gleichungen dienen

$$x = \text{tg } mu, \quad y = \text{tg } mv,$$

für gleichmässige Stufen im Wachsthum von u und v , wobei der Factor m die Ueberführung der gemeinen Zahlen in Winkelmaass vermittelt. Nach dem vorigen geben sonach die Gleichungen (IV):

$$\Phi(x) = \text{arc tg } x, \quad \Psi(y) = \text{arc tg } y,$$

und die Gleichung der Isoplethen wird

$$\text{arc tg } x \cdot \text{arc tg } y - m^2 w = 0,$$

worin für w constante Intervalle einzuführen sind. Die Construction gestaltet sich bei wirklicher Ausführung ganz einfach und braucht hier nicht erst durch eine Figur versinnlicht zu werden. Man wird unter Umständen bequemer das verzerrte Coordinatennetz zum Eintrag der Isoplethen benützen.

Wollten wir zur Abbildung der Gleichung

$$f(\varphi[u], \psi[v], w) = 0$$

die Coordinatenscalen nach einem weniger willkürlichen Gesetze einteilen, und zwar nach solchen Functionen $x = II [\varphi (u)]$, $y = II [\psi (v)]$, dass der Einfluss eines constanten Linearfehlers Δx oder Δy , begangen beim Ablesen der Coordinaten, immer in constantem Verhältniss zu dem abgelesenen Argumente u oder v steht, dass also wird:

$$\Delta \varphi (u) : \varphi (u) = k \Delta x \text{ und } \Delta \psi (v) : \psi (v) = k' \Delta y,$$

so folgt nach Uebergang zum unendlich Kleinen aus den Differentialgleichungen:

$$dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{d \varphi (u)}{\varphi (u)} \quad \text{und} \quad dy = \frac{1}{k'} \cdot \frac{d \psi (v)}{\psi (v)}$$

durch Integration, wobei die Constanten $\log \text{nat } m$ und $\log \text{nat } n$ zuzufügen sind,

$$x = \frac{1}{k} \log \text{nat } m \cdot \varphi (u), \quad y = \frac{1}{k'} \log \text{nat } n \cdot \psi (v),$$

und wenn wir $k = k' = \log \text{nat } 10$ setzen, also zu Briggs'schen Logarithmen übergehen:

$$x = \log m \cdot \varphi (u) = II [\varphi (u)]; \quad y = \log n \cdot \psi (v) = II [\psi (v)].$$

Es folgt daraus, dass wir die Coordinatenscalen logarithmisch zu theilen haben, wenn Ablesungsfehler von constantem Linearbetrag an denselben immer den gleichen Procentsatz des abgelesenen u oder v betragen sollen.

Da diese logarithmische Theilung besondere Vortheile mit sich führt, so verdient sie nähere Betrachtung, und es fragt sich zunächst, welches die Form der Isoplethen über logarithmisch getheilten Coordinaten wird. Wir untersuchen dies vorerst an einem Beispiele. Soll etwa wieder die Function:

$$f(u, v, w) = 0, \quad \text{nämlich} \quad uv - w = 0$$

über logarithmischem Coordinatennetz so abgebildet werden, dass für die Isoplethen die vorläufig nicht näher bestimmte Gleichung:

$$P(\Phi [x], \Psi [y], a, b, c) = 0,$$

und die Bedingungen gelten:

$$x = \log u, \quad y = \log v,$$

so erhalten wir durch Substitution der hieraus folgenden Werthe von u und v in die gegebene Gleichung die folgende:

$$\text{num } \log x \times \text{num } \log y - w = 0.$$

Setzen wir nun noch für die willkürliche Constante a die Beziehung zu w fest: $\log w = a$, so wird daraus

$$\text{num } \log x \times \text{num } \log y = \text{num } \log a,$$

woraus, der Bedeutung des Logarithmus nach, folgt:

$$x + y = a,$$

oder auch

$$\log u + \log v = \log w.$$

Demnach ist die w -Isoplethe eine Gerade, denn um constante w zu

bilden, kommen stets zwei Argumente u und v zusammen, deren zugehörige Coordinaten $x = \log u$ und $y = \log v$ eine constante Summe ergeben.

Die vorstehende Betrachtung bleibt in Kraft, wenn wir uns an Stelle von u, v, w überall $\varphi(u), \psi(v), \chi(w)$ gesetzt denken.

§ 14. Anwendung logarithmischer Coordinatentheilung. Logarithmische Producten- und Quotiententafel.

Wir sind jetzt im Stande, alle sogenannten logarithmischen Formeln, d. h. solche, welche nur Producte und Quotienten von Functionen der Argumente enthalten, durch Systeme von parallelen Geraden abzubilden, weil durch Logarithmiren solcher Formeln wie:

$$\chi(w) = \varphi(u) \cdot \psi(v) \text{ und } \chi(w) = \varphi(u) : \psi(v)$$

Gleichungen entstehen von der linearen Form

$$a = x \pm y,$$

wenn man die Substitutionen ausführt, die uns schon geläufig sind, also nicht die gegebenen Functionen der Variablen, sondern erst die Logarithmen dieser Functionen auf den Coordinatenachsen abträgt. Wir könnten noch weiter gehen und Formeln wie

$$f(u) = \chi(w) \cdot \psi(v)^{\varphi(w)}$$

durch geradlinige Isoplethen darstellen, denn durch Logarithmiren gehen sie über in

$$\log f(u) = \log \chi(w) + \varphi(w) \cdot \log \psi(v),$$

oder

$$y = p + q \cdot x,$$

also die bekannte Gleichung der Geraden, deren Lage sich durch p und q bestimmt.

Wir wollen indess das einfachste der logarithmischen Schichtenetze, in welchem die Argumente sowohl als auch der darzustellende Functionswerth von w gemeine Zahlen sind, zuerst näher kennen lernen. Wird die Gleichung:

$$w = uv$$

logarithmirt, so können wir durch entsprechende Substitutionen statt

$$\log u + \log v = \log w$$

setzen

$$x + y = a.$$

Auf dem ersten Lichtdruckblatte, der logarithmischen Rechentafel, wird diese Gleichung abgebildet. Die Seiten der Tafel sind zugleich die Einheit, in welcher x und y aufgetragen werden. Man überträgt auf die Abscissenachse die Maasse $x = \log u$, auf die Ordinatenachse $y = \log v$ in geeigneten Intervallen für u und v , und beziffert das hieraus entstehende Coordinatennetz nach den letzteren Variablen. Sodann werden auf beiden Coordinatenachsen die Maasse $a = \log w$ für gleich-

mässige Intervalle von w aufgetragen, je zwei gleichwerthige Punkte durch eine Transversale verbunden, und diese nach der Variablen w beschrieben. Die Coordinaten x und y beliebiger Punkte einer dieser Transversalen ergänzen sich zu der constanten Summe $a = \log w$; die w -Isoplethen sind also gerade Linien, welche die Coordinatenachsen unter 45° schneiden. Man kann das logarithmische Schichtennetz betrachten als entstanden aus der hyperbolischen Productentafel des § 4 durch gleichzeitige Verzerrung in der Richtung beider Coordinatenachsen. Durch die einseitige Verzerrung wurden die Hyperbeln zu convergenten Strahlen, durch die doppelte werden sie zu parallelen Geraden ausgestreckt.

Wie die Hyperbeltafel gestattet die logarithmische, das Product w der Factoren u und v an den Isoplethen unmittelbar abzulesen, umgekehrt den Dividenden w an den Isoplethen, den Divisor u auf den Abscissen aufzusuchen und den Quotienten v der Ordinate zu entnehmen. Diejenige Diagonale der Schichtentafel, welche durch den Anfangspunkt geht, ist wie früher der geometrische Ort zum Aufsuchen der Quadratzahlen, deren Dignanden beliebig an der Abscisse oder Ordinate abgelesen werden; umgekehrt wird man Radicanden längs der Diagonale an den Isoplethen aufsuchen und der Ordinate oder Abscisse des Schnittpunktes von Isoplethe und Diagonale sofort die Quadratwurzel entnehmen. Man beachte, dass den Isoplethenzeigern in der rechten oberen Dreieckshälfte von Blatt I in Gedanken je eine Null anzuhängen ist.

Auf die Endpunkte der Diagonale treffen zwei andere Linien, deren Gleichungen lauten:

$$y = 2x \quad \text{und} \quad y + 1 = 2x.$$

Setzt man für x und y die logarithmischen Werthe und geht zu den Zahlen über, so folgt, dass längs dieser Geraden gilt:

$$v = u^2; \quad 10 v = u^2;$$

sodann $w = uv = u^3; \quad 10 w = 10 uv = u^3.$

Zum bequemen Ablesen der Cubikzahlen wird man den Isoplethen, da wo sie von jenen Geraden geschnitten werden, in entsprechenden Intervallen die Zahlen w (von 1 bis 31,6) und $10 w$ (von 31,6 bis 1000) beschreiben. Umgekehrt lassen sich längs dieser Geraden Quadrat-, Cubik- und $\frac{3}{2}$ te Wurzeln ablesen, letztere an den Ordinaten.

Zwei feine Parallellinien, welche von links oben nach rechts unten laufen, haben die Gleichungen:

$$2y = 2 - x \quad \text{und} \quad 2y = 1 - x,$$

woraus folgt, dass man an ihnen ablesen kann:

$$0,1 v = \frac{1}{\sqrt{u}}; \quad \text{und} \quad 0,1 v = \frac{1}{\sqrt{10 u}}.$$

Man wird der bequemen Ablesung wegen den Abscissen längs dieser Geraden die Werthe u und $10u$ in geeigneten Stufen beischreiben.

Zum Aufsuchen der n ten Potenzen, sowie zum Ablesen der n ten und

$\frac{n}{n-1}$ -ten Wurzeln ziehe man Gerade von den Gleichungen:

$$y = (n-1)x; \quad y + 1 = (n-1)x; \quad y + 2 = (n-1)x; \quad \dots\dots\dots$$

$$y + n - 1 = (n-1)x.$$

Durch Einsetzen der logarithmischen Werthe und Uebergang zu den Zahlen führen diese Ausdrücke auf:

$$v = u^{n-1}; \quad 10v = u^{n-1}; \quad 100v = u^{n-1}; \quad \dots\dots\dots 10^{n-1} \cdot v = u^{n-1}.$$

An den Isoplethen liest man längs dieser Geraden ab:

$$w = uw = u^n; \quad 10w = 10uw = u^n; \quad 100w = 100uw = u^n; \quad \dots\dots\dots$$

$$10^{n-1} w = u^n.$$

Die Schnitte der Geraden mit den Isoplethen sind also mit w , $10w$, $100w$, $\dots\dots 10^{n-1} w$ zu bezeichnen. Die n ten Wurzeln dieser Zahlen

liest man an den Abscissen der Geraden, die $\frac{n}{n-1}$ -ten Wurzeln an den (mit $10^0, 10^1 \dots 10^{n-1}$ zu multiplicirenden) Ordinaten derselben ab.

Sind mehrere Zahlen mit einem constanten Factor, z. B. π , zu multipliciren, so frage man $y = \log \pi$ auf, und ziehe eine Parallele mit der Abscissenachse. Entlang dieser Geraden wird $w = u\pi$ an den Isoplethen abgelesen. — Oder man ziehe senkrecht zu den Isoplethen die Geraden, deren Gleichungen lauten:

$$y = x + \log \pi \quad \text{und} \quad y + 1 = x + \log \pi,$$

um daran abzulesen:

$$v = \pi u \quad \text{und} \quad 10v = \pi u$$

oder umgekehrt: $u = v : \pi \quad \text{und} \quad u = 10v : \pi,$

oder endlich an den Isoplethen die Kreisinhalte:

$$w = uw = \pi u^2 \quad \text{und} \quad 10w = 10uw = \pi u^2.$$

Man beschreibe die Isoplethen längs dieser Geraden mit w und $10w$. Die Abscissen der Geraden liefern die Radien gegebener Kreisinhalte.

Zieht man Gerade entsprechend den Gleichungen:

$$y = 2x + \log \sqrt[4]{\pi}; \quad y + 1 = 2x + \log \sqrt[4]{\pi}; \quad y + 2 = 2x + \log \sqrt[4]{\pi};$$

so lassen sich an den Ordinaten derselben die Werthe ablesen:

$$v = \sqrt[4]{\pi} \pi u^2; \quad 10v = \sqrt[4]{\pi} \pi u^2; \quad 100v = \sqrt[4]{\pi} \pi u^2;$$

und an den Isoplethen die Kugelinhalte:

$$w = uw = \sqrt[4]{\pi} \pi u^3; \quad 10w = 10uw = \sqrt[4]{\pi} \pi u^3; \quad 100w = 100uw = \sqrt[4]{\pi} \pi u^3.$$

Beschreibt man die Isoplethen längs dieser Geraden mit w , $10w$, $100w$,

so liefern die zugehörigen Abscissen den Kugelradius zu gegebenem Inhalt.

In den Fällen, wo multiplicirt oder potenziert wird, ist die Stellung des Komma's durch eine Ueberschlagsrechnung festzustellen und aus der

Tafel nur die Ziffern des Resultats zu entnehmen. Einige Aufmerksamkeit verlangt das Komma beim Wurzelausziehen; sucht man die n te Wurzel aus w , so gibt die Tafel, ebenso wie die Zahlenrechnung, nur dann die richtigen Wurzelziffern (multiplicirt oder dividirt mit 10 , 10^2 , $10^3 \dots 10^p$), wenn man das Komma in w um n , $2n$, $3n \dots pn$ Stellen versetzt.

Beispiele: Man suche $\sqrt{5,43} = 2,33$; $\sqrt{54,3} = 7,37$; $\sqrt{543} = 23,3$; $\sqrt{0,543} = 0,737$ und beachte, dass diejenigen Radicanden an derselben Tafelstelle aufgesucht werden, bei welchen das Komma um eine gerade Anzahl Stellen versetzt erscheint. Man suche $\sqrt[3]{543} = 8,16$; $\sqrt[3]{54,3} = 3,79$; $\sqrt[3]{5,43} = 1,76$; $\sqrt[3]{0,543} = 0,816$; $\sqrt[3]{0,0543} = 0,379$; $\sqrt[3]{0,00543} = 0,176$; und merke darauf, dass man, um die Wurzelziffern richtig zu erhalten, das Komma des Radicanden stets nur um $3p$ Stellen verrücken darf. Beim Aufsuchen des Radius aus Kreisinhalt gilt die Kommaegel der Quadratwurzel, beim Aufsuchen aus Kugelinhalt die Regel der Cubikwurzel. Durch das oben erwähnte Anschreiben der Isoplethenwerthe w , $10w$, $\dots 10^{n-1}w$ längs der Quadrat- und Cubenlinie, der Kreisinhalt- und Kugeinhaltlinie etc., wird das Radiciren wesentlich erleichtert.

Wem diese Beispiele und Andeutungen nicht genügen, um die Einrichtung der logarithmischen Schichtentafel zu verstehen und deren Gebrauch zu erlernen, der findet die ausführlichste Unterweisung in Gustav Herrmann's „graphischem Einmaleins“, Braunschweig 1875, dem auch die Anordnung der Cubenlinie auf Blatt I entnommen wurde.

§ 15. Zweite Form einer logarithmischen Quotienten- und Productentafel.

Eine Fortsetzung und zugleich eine Umkehrung der vorigen bildet die folgende Schichtentafel. War die vorige ein Bild der Gleichung

$$\log u + \log v = \log w \quad \text{oder} \quad x + y = a$$

unter Annahme von u und v als Argumenten, so kann die folgende die Gleichung darstellen:

$$\log u - \log v = \log w, \quad \text{oder kurz: } x - y = a,$$

und insofern ist sie die Fortsetzung der vorigen nach der Seite der negativen Ordinaten hin. Nach Vertauschung der Buchstaben w und u jedoch ist die zweite Gleichung der ersten congruent, und alsdann die folgende Tafel als eine Umkehrung der vorigen zu betrachten, weil andere Grössen, nämlich w und v , Argumente geworden sind.

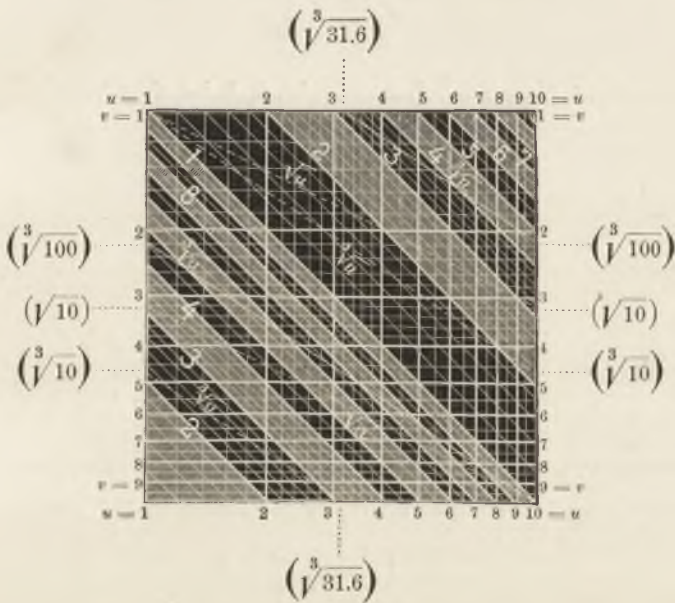
Das Coordinatennetz der Fig. 17 entsteht ebenso, wie das auf Blatt I, indem man die Tafelseite als Einheit nimmt, und auf den Coordinatenachsen, von ihrem mit $1; 1$; bezeichneten Anfangspunkte aus, die Grössen $x = \log u$ seitwärts und $y = \log v$ abwärts aufträgt, nach gleichmässigen Stufen von u und v steigend. Für $y = 0$ findet man

die Durchschnittspunkte der Isoplethen mit der Abscissen- und für $x = 0$ die mit der Ordinatenachse aus den Gleichungen :

$$x = a = \log w \quad \text{und} \quad y = -a = \log \frac{1}{w},$$

welche Grössen für eine gewünschte Reihe von w aufgetragen werden. Die Isoplethe für $w = 1$ oder $a = 0$ geht durch den Coordinatenanfang und schneidet die Achsen unter 45° . Damit parallel werden die übrigen w -Isoplethen gezogen und gehörig beziffert. An den Isoplethen liest

Fig. 17. Logarithmische Quotiententafel.



man direct den Quotienten $w = u : v$ ab. Darum denke man sich die Isoplethen-Zeiger in der linken unteren Dreieckshälfte der Fig. 17 mit 10 dividirt.

Häufig gebrauchte constante Dividenten oder Divisoren lassen sich durch verticale oder horizontale Linien von besonderer Stärke oder Farbe auszeichnen. Zwei Linien von den Gleichungen :

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

führen sowohl auf den Ordinaten als auf den Isoplethen zu den Quadratwurzeln der Abscissen; denn aus vorstehenden Gleichungen folgt :

sowohl $v = \sqrt{u}$ und $v = \sqrt{10u}$,
als auch $w = u : v = \sqrt{u}$ und $10w = 10u : v = \sqrt{10u}$.

Die Cubikwurzel wird an Linien aufgesucht, deren Gleichungen lauten:

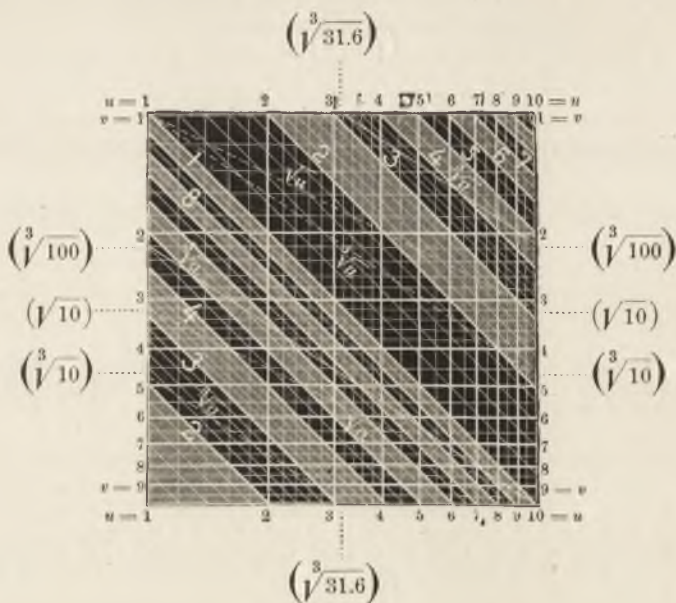
$y = \sqrt[2]{3}x$; $y = \sqrt[2]{3}(x + 1)$; $y + 1 = \sqrt[2]{3}(x + 1)$; $y + 1 = \sqrt[2]{3}(x + 2)$; und aus denen folgt:

$$v = \sqrt[3]{u^2}; v = \sqrt[3]{100u^2}; 10v = \sqrt[3]{100u^2}; v = \sqrt[3]{10u^2};$$

und endlich:

$$w = \sqrt[3]{u}; 10w = \sqrt[3]{10u}; w = \sqrt[3]{10u}; 10w = \sqrt[3]{100u}.$$

Fig. 17. Logarithmische Quotiententafel.



Bei Erweiterung des Coordinatennetzes über eine logarithmische Einheit hinaus würde sich das Bild der Tafel stets wiederholen, und die Linien vorstehender Gleichungen setzen sich zu einer einzigen, der verlängerten ersten, zusammen, wenn wir Fig. 17 uns in dieser Weise

□□ wiederholt denken. Um Verwechslungen des Stellenwerthes der Abscisse vorzubeugen, sind an die Schnitte der Wurzellinien mit den Verticalen die zugehörigen Radicanden in passenden Zwischenräumen beizuschreiben. Da bei dieser Einrichtung die Ordinaten gar nicht wirklich abgelesen werden, die Abscissen und Isoplethen aber ganz wie im vorigen Schichtennetz angeordnet sind, so lassen sich die Wurzellinien der Fig. 17 auch auf Blatt I übertragen, und das ist theilweise geschehen. Die Ordinaten der Quadratwurzellinie sind zugleich die reciproken

Quadratwurzeln ihrer Abscissen. Rechnungsbeispiele hier vorzuführen, scheint überflüssig. Auch die Möglichkeit, diese zweite Tafel wie die erste als Productentafel zu benutzen, drängt sich von selbst auf.

§ 16. Darstellung allgemeiner logarithmischer Formeln.

Statt der Variablen der Gleichung

$$\log w = \log u + \log v$$

können, wie schon früher bemerkt, wieder Functionen von Variablen stehen. So lange die letzteren von einander abhängig sind, reichen geometrische Oerter, wie in den Tafeln auf Blatt I und in Fig. 17, für die Ablesung von w an den Isoplethen aus. So z. B. für

$$w = \sqrt[4]{3} \pi u^3$$

oder

$$\log w = \log \sqrt[4]{3} \pi u + \log u^3$$

eine Linie, deren Coordinaten sich verhalten wie die Glieder der rechten Seite. Sobald aber in der Gleichung:

$$f(w) = \varphi(u) \cdot \psi(v),$$

oder:

$$\log f(w) = \log \varphi(u) + \log \psi(v),$$

u und v von einander unabhängig sind, werden wir genöthigt, das Coordinatennetz nach den Gleichungen

$$x = \log \varphi(u); \quad y = \log \psi(v)$$

für gleichmässig wachsende u und v zu entwerfen. Die Lage der Isoplethen findet sich, wenn

$$a = x + y,$$

und demnach

$$a = \log f(w)$$

gilt, für gleiche Stufen von w aus der geradlinigen Verbindung zusammengehöriger Punkte (a) der Coordinatenachsen.

Ist $\varphi(u)$ eine trigonometrische Function, z. B. $\varphi(u) = \operatorname{tg} \alpha$, so tragen wir auf der Abscissenachse nicht die Logarithmen der natürlichen Zahlen, sondern sogleich die der Tangenten auf und errichten in den Theilungspunkten Ordinaten, welche mit den zugehörigen Winkeln überschrieben werden. Da die Tafel aber nur eine logarithmische Einheit zur Verfügung stellt, die Logarithmen der Tangenten unendlich viele durchlaufen, so muss man die vorhandene für die Logarithmen derjenigen Tangenten benützen, welche am häufigsten in Rechnung gezogen werden. So verwendet die erwähnte Herrmann'sche Rechentafel ihre Abscissenscala für die Logarithmen der zehnfachen Tangenten von $5^\circ 43'$ bis zu 45° ; $10 \operatorname{tg} 5^\circ 43' = 1$, $10 \operatorname{tg} 45^\circ = 10$. Da ferner $10 \operatorname{tg} 34' = 0,1$, so umfassen die Logarithmen der Tangenten von $34'$ bis $5^\circ 43'$ wieder eine logarithmische Einheit und könnten daher auf die Abscisse einer zweiten Schichtentafel aufgetragen werden; bei der Herrmann'schen Tafel finden sie sich der vorigen Scala gegenüber.

Dass Gleichungen von der Form

$$f(u) = \chi(w) \cdot \psi(v) \varphi(w)$$

nach logarithmischer Behandlung durch geradlinige w -Isoplethen abzubilden sind, ward schon Eingangs des § 14 erwähnt, und dabei angenommen,

dass $x = \log \psi(v)$ und $y = \log f(u)$ gesetzt würde. Für den Fall $\chi(w) = 1$ werden die Isoplethen zu Strahlen, die sich im Coordinatenanfange schneiden. Man greift dann besser zu der Auskunft, zu setzen:

$$x = \log [\log \psi(v)], \quad y = \log [\log f(u)],$$

und die Lage der w -Isoplethen zu berechnen aus

$$a = \log [\log \varphi(w)],$$

da durch zweimaliges Logarithmiren und Substitution von x , y und a aus der gegebenen Gleichung wird:

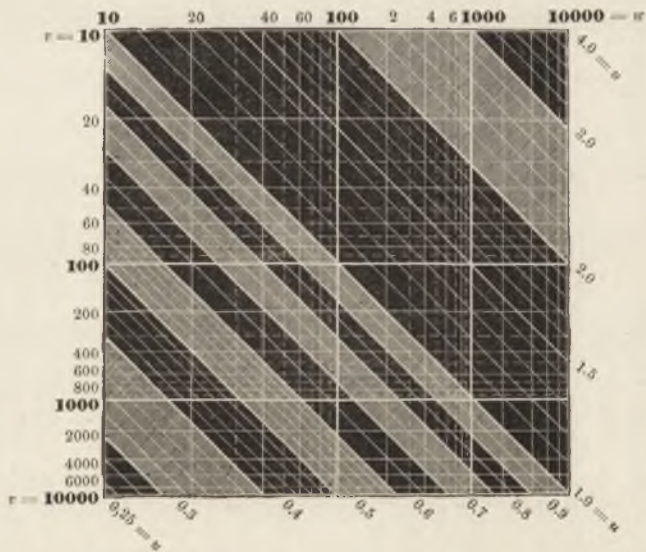
$$a = y - x.$$

Fig. 18 stellt die Function

$$\log w = u \cdot \log v,$$

oder die congruente: $\log (\log w) - \log (\log v) = \log u$

Fig. 18. Exponententafel.



$$v^u = w.$$

nach logarithmischen Scalen dar, bietet also Gelegenheit, Gleichungen von der Form $w = v^u$ aufzulösen, einerlei, welche von den drei Grössen die Unbekannte ist; also auch Exponentialgleichungen.

Wollte man die Argumente stets auf den Coordinaten aufsuchen, so würden aus jeder gegebenen Function drei verschiedene Tafeln entstehen, welche nur dann auf zwei beschränkt werden, wenn die Function in Bezug auf zwei Variable symmetrisch ist. Logarithmische Schichten-tafeln, deren Isoplethen keine Geraden sind, wird man nicht ausführen.

Einseitige gleichmässige Verzerrung des Coordinatennetzes gibt der logarithmischen Schichtentafel ein anderes Format, den Isoplethen eine andere Neigung gegen die Achsen, ändert aber sonst nichts an der ganzen Anlage.

Mehrere, theils theoretisch interessante, theils practisch verwendbare Beispiele behandelt ein längerer Aufsatz über graphische Tafeln von Lalanne in den „Annales des Ponts et Chaussées“*). Auch in dieser Schrift werden noch einige Erwähnung finden.

Der mehrerwähnte Aufsatz von Helmert**), welcher die Bedingungen für die Umbildbarkeit gegebener Curven in andere, leichter construirbare, allgemeiner untersucht und damit den Lalanne'schen ergänzt, lehrt auch die Construction logarithmischer Formeln durch Kreise. Hat man die gegebene Gleichung durch Logarithmiren in eine lineare verwandelt und, nöthigenfalls durch Beifügen von Constanten, in

$$\log f(w) = \log \varphi(u) + \log \psi(v)$$

die Glieder der rechten Seite für alle vorkommenden Werthe von u und v positiv gemacht, so wird daraus die Gleichung eines Kreises, wenn man schreibt:

$$\sqrt{\log f(w)} = \sqrt{\log \varphi(u)} + \sqrt{\log \psi(v)},$$

und nach § 12 setzt: $x = \sqrt{\log \varphi(u)}$; $y = \sqrt{\log \psi(v)}$.

Die Scalen werden hier also getheilt im Verhältniss der Wurzeln aus den Logarithmen der Grössen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$, und die Kreisradien r der w -Isoplethen berechnen sich ganz nach der früher angewandten Methode, indem man $r = \sqrt{\log f(w)}$ für stufenweise wachsende w aufsucht.

Für die einfache Formel $w = uv$ hat Helmert ein sogenanntes graphisches Einmal-eins in Kreisen entworfen.

Cap. III. Werkzeuge der mechanischen Rechnung.

§ 17. Der logarithmische Rechenschieber.

Die Eigenschaft der Schichtentafeln, einem einzigen Blick die Resultate weitläufiger Formeln zu liefern, macht darum doch noch nicht ein Instrumentchen entbehrlich, das durch Einfachheit und Leistungen gleich sehr ausgezeichnet ist, den Rechenschieber. Im letzten Paragraphen sahen wir, wie leicht der Fall eintreten kann, dass die Grenzen eines Argumentes weit über die eine logarithmische Einheit hinausragen, welche das quadratische logarithmische Schichtenetz darbietet. Dehnt man die Tafel über mehrere Einheiten aus, so wächst ihre Fläche zugleich ganz unverhältnissmässig an und muss auf einige Blätter vertheilt werden. In diesem und verschiedenen anderen Fällen

*) Sur les tables graphiques et sur la geometrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingenieur; par Léon Lalanne, ingenieur des ponts et chaussées. Annales des Ponts et Chaussées, 1846 1er Semestre, p. 1—69.

**) Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1876. Heft 1.

tritt der Rechenschieber in sein Recht, weil er, ohne unhandlich zu werden, über mehrere logarithmische Einheiten gebietet. Es sollen darum die Grundzüge seiner Einrichtung hier dargelegt werden, im Anschluss an die Form, welche Mannheim, Professor der polytechnischen Schule zu Paris, dem Instrumentchen gegeben hat.

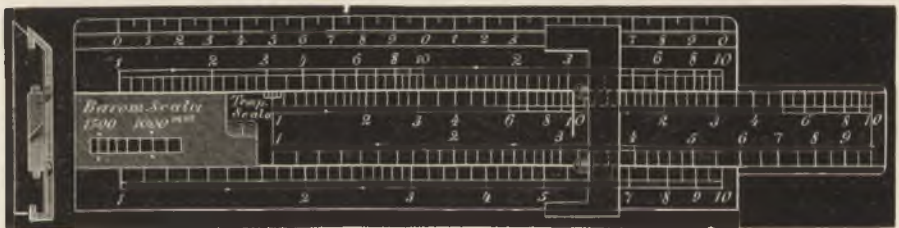
Am Rande eines Lineals, wie es der „Stab“ in Fig. 19 zeigt, sei eine logarithmische Scala so angebracht, dass nach Feststellung der Länge für die logarithmische Einheit die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100 aufgetragen wurden. Den Maassen sei ihr Werth mit Weglassung des Logarithmenzeichens beigeschrieben. Mit Beihülfe eines Zirkels bietet schon diese Scala eine Producten- und Quotiententafel. Denn greift man $\log a$ ab, setzt das Maass an $\log b$ an und kommt dadurch auf $\log c$, so ist

$$c = ba,$$

weil $\log c = \log b + \log a$ geworden; trägt man dagegen das Zirkelmaass $\log a$ vom Endpunkte des $\log b$ aus rückwärts ab und trifft auf $\log d$, so wird, weil $\log d = \log b - \log a$ geworden ist:

$$d = \frac{b}{a}.$$

Fig. 19. Der logarithmische Rechenschieber.



(Ansicht).

Stab.

Läufer.

Schieber.

Etwas bequemer wäre der Ersatz des Zirkels durch ein zweites Lineal, das am Rande des ersten hin und her schleift und auf dem jedesmal zwei Bleistiftmarken das Maass $\log a$ von der Scala herübernehmen, um es dahin zu versetzen, wo es gebraucht wird. Besser aber werden auch diese Bleistiftmarken ersetzt durch eine zweite Logarithmen-Scala auf dem verschiebbaren Lineal. Um das Gleiten beider Scalen an einander gleichmässig zu machen, lässt man das zweite Lineal (Schieber) in das erste (Stab) mittelst Federn und Nuth oder mittelst Schwalbenschwanz ein, so dass die Oberflächen beider in eine Ebene fallen (Fig. 19, Ansicht). Als Marke zum Uebertragen eines Maasses der einen Scala auf die andere dient ein fein eingeritzter Strich auf dem messingenen Läufer, dessen umgebogene Ränder sich ebenfalls in Nuthen an den Rändern des Stabes bewegen. An den letzteren bringt

man ausserdem eine Millimetertheilung an. Es ist nun leicht einzusehen, wie logarithmisch gebaute Formeln mit dem Rechenschieber berechnet werden: Obwohl dabei Stab und Schieber ihre Rollen gegenseitig vertauschen können, so soll diese Reciprocität in nachfolgender Aufführung der wichtigsten Operationen doch nicht jedesmal von neuem betont werden. Alle Resultate mögen auf der Scala des Stabes abgelesen werden. Auf der Scala des Schiebers unterscheiden wir daher einen ersten und zweiten Zeiger, und verstehen darunter den Anfangspunkt jeder logarithmischen Einheit. Beim Anführen von Scalennaassen lassen wir das Logarithmenzeichen weg.

Gegeben $ab = x$. Der Schieber rückt vor bis sein Zeiger gegenüber a auf dem Stabe steht. Die Marke des Läufers rückt auf b des Schiebers vor und deutet zugleich gegenüber auf x .

Gegeben $\frac{a}{b} = x$. Der Läufer wird auf a des Stabes eingestellt, der Schieber soweit hinter die Marke des Läufers zurückgezogen, dass letztere auf b des Schiebers deutet, dessen Zeiger nun gegenüber x steht.

Gegeben $a^2 = x$. Man geht vor wie zur Multiplication mit gleichen Factoren.

Gegeben $\sqrt{b} = x$. Der Läufer wird auf b am Stabe eingestellt, der Schieber unter ihm weggezogen und durch Probiren der Stand aufgesucht, wo dem Zeiger des Schiebers gegenüber am Stabe dieselbe Ablesung erscheint, wie am Schieber unter der Laufmarke. Diese Ablesung ist x .

Beide Operationen, das Quadriren und Radiciren, werden durch folgende Einrichtung sehr vereinfacht: am zweiten Schieberrand, welcher der untere heissen möge, wird eine neue logarithmische Scala angebracht, deren Einheit die doppelte der oberen Scala ist. Die Zeiger beider Scalen stehen sich genau gegenüber. Dem entsprechend wird auch eine zweite untere Scala auf dem Stabe aufgetragen, so dass wieder die Zeiger beider Stabscalen übereinstimmen. Endlich ist eine zweite untere Marke gegenüber der ersten auf dem Läufer anzubringen. Diese unteren Scalen geben einen zweiten, weniger umfangreichen, aber genaueren Rechenschieber ab. In Verbindung mit den oberen sind sie direct zum Quadriren und Radiciren zu verwenden. Steht der Läufer unten auf a ein, so zeigt er oben auf $b = a^2$; und indem er oben b angibt, deutet seine untere Marke auf $a = \sqrt{b}$. Man beachte den Unterschied beim Aufsuchen von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{20}$ (Fig. 19).

Gegeben $a^3 = x$ und $\sqrt[3]{b} = y$. An der unteren Scala stelle man den Zeiger des Schiebers auf a am Stab, an der oberen Scala den Läufer auf a am Schieber, und lese ebenda am Stab x ab; stellt man den Läufer auf b an der oberen Scala des Stabes und verrückt den Schieber so lange, bis durch Probiren die Schieberablesung oben am Läufer gleich wird der Stabablesung unten am Zeiger des Schiebers, so sind diese Ablesungen gleich y . Man beachte den Unterschied des Verfahrens beim Aufsuchen von $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{80}$ und $\sqrt[3]{800}$, suche also den Radicanden der Reihe nach in der ersten, zweiten und dritten (= ersten) logarithmischen Stabeinheit auf. Als Zeiger zum Ablesen der Wurzel dient entweder der Anfangs- oder der Endpunkt der unteren Schiebescalas, der Endpunkt z. B. im letzten der drei Fälle.

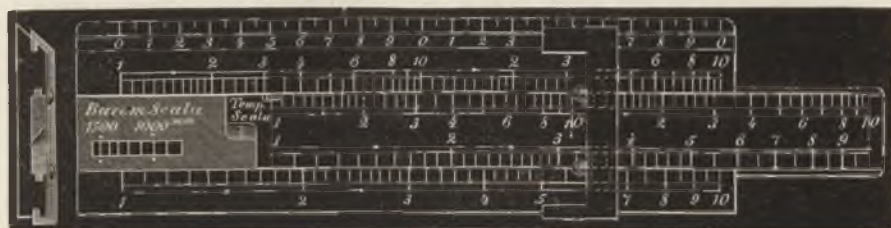
Gegeben $\frac{ab}{c} = x$. Nach Ausführung der Multiplication wird der Schieber



zurückgezogen, bis am Läufer, welcher auf das Product eingestellt wurde, der Divisor erscheint. Am Zeiger des Schiebers liest man x ab. Oder zweckmässiger so:

Gegeben $\frac{a}{c} y = x$; für y sollen nach und nach mehrere Werthe eingehen. Man stellt den Schieber ein wie bei der Division $\frac{a}{c}$ und geht mit dem Läufer dann zu den einzelnen Schieberwerthen y , denen gegenüber x abgelesen wird. Noch einfacher wird die Operation, wenn a oder c gleich Eins sind.

Fig. 19. Der logarithmische Rechenschieber.



(Ansicht).

Stab.

Läufer.

Schieber.

Gegeben $\frac{\gamma}{\delta} \frac{ab}{c} = x$, $\frac{\gamma}{\delta}$ ein constanter Factor, der für mehrere Fälle von a , b und c wiederkehrt. Man bestimmt $\frac{\gamma}{\delta}$ auf dem Stab durch Division, wodurch der Zeiger des Schiebers auf den Quotienten eingestellt wird. Gegenüber dem Anfangspunkt der Stabskala macht man nun mit Tinte einen Hilfszeiger auf dem Schieber und benützt diesen, wenn man auf a einstellt, kehrt aber nach der Division durch c zur Ablesung des Resultates zum ersten Zeiger zurück. Die Gründe sind leicht einzusehen, und das Verfahren ändert sich nicht, wenn γ oder δ oder eine andere Grösse gleich Eins werden.

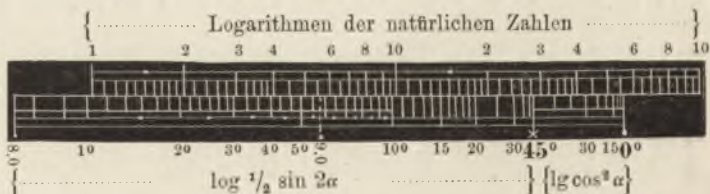
Bei allen diesen Operationen benutzt man nach Bedürfniss den ersten oder zweiten Zeiger des Schiebers und bestimmt das Komma durch eine Ueberschlagsrechnung.

Will man eine häufig wiederkehrende Formel

$$z = kx \cdot f(y), \text{ also etwa } z = kx \cos^2 \alpha$$

mit dem Rechenstab berechnen, so wird eine der aneinander hingleitenden

Fig. 20. Rechenschieber für Tachymeteraufnahmen.



den Scalen so getheilt, dass sie die Logarithmen von $f(y)$ enthält, und mit dem Argument y ($= \alpha$) beschrieben (Fig. 20). Mittelst dieser Scala lassen sich nun beliebige Werthe von $\log f(y)$ an die Werthe $\log x$

anlegen und die Summen oder Differenzen an der Scala für $\log x$ ihrem Zahlenwerthe nach ablesen. Man hat also gefunden

$$z' = x \cdot f(y)$$

und diesen Werth nur noch auf gewöhnliche Weise mit k zu multipliciren. Ist k eine constante Zahl, so wird man auf dem Schieber, welcher $\log f(y)$ enthält, einen Hilfszeiger so anbringen, dass das auf die Scala der x zu übertragende logarithmische Maass den Werth erhält: $\log k + \log f(y)$.

Den Schiebern des Rechenstabes von Richer (Paris), Tavernier-Gravet (Paris), sowie von Dennert & Pape (Hamburg und Altona, Preis etwa 10 Mark), sind auf der Rückseite die Scalen der $\log \sin$ und $\log \tan$, letztere über eine, erstere über zwei logarithmische Einheiten sich erstreckend, beigegeben. Es ist klar, dass nach Bedürfniss die logarithmische Scala einer und derselben Function über 3, ja über alle 4 verfügbaren Einheiten der zweiten Seite des Schiebers hinlaufen könnte. Auch kann ein Rechenschieber so eingerichtet sein, dass man Formeln folgender Gestalt damit berechnen kann:

$$z = k \cdot \varphi(x) \cdot \psi(y);$$

man theilt zwei aneinander hingleitende Scalen, z. B. die unteren, im Verhältniss $\log \varphi(x)$ und $\log \psi(y)$, und überträgt wie bisher die logarithmischen Maasse der einen auf die andere. An den oberen Scalen, die nach den Logarithmen der gemeinen Zahlen eingetheilt sein müssen, fügt man den Factor k bei und liest das Resultat z ab. Ist k eine Constante, so wird sie, wie vorhin, durch einen Hilfszeiger beigelegt.

Die hier aufgeführten Einrichtungen und Verfahren sind zweckmässig, können aber kaum alle auf einen und denselben Rechenstab Anwendung finden, wesshalb man sich zuweilen mit dem weniger Guten begnügen muss, wenn die Vielseitigkeit des Instrumentchens nicht beschränkt werden soll.

Man hat auch *Rechenscheiben* construiert, bei denen eine logarithmische Scala auf dem Umfange einer um ihr Centrum drehbaren Kreisscheibe aufgetragen ist, und an einer zweiten ebenfalls kreisförmigen festen Scala schleift, während der Kreisumfang die logarithmische Einheit oder ein Vielfaches derselben abgibt. Das logarithmische Lineal erscheint hier gleichsam aufgerollt und der Läufer wird durch einen radialen Zeiger vertreten. Rechenscheiben mit Scalen auf dem Mantel zweier Cylinder von gemeinsamer Achse und Umfang weichen von der vorbeschriebenen Form nicht wesentlich ab, auch sind Vorzüge und Nachtheile beiden Arten gemeinsam. Erstere bestehen in dem Gewinn grosser Scaleneinheiten auf kleinem Raum und darin, dass Längenänderungen der Scalen unschädlich werden, wenn sie nur nicht einseitig

erfolgen. Nachtheilig wirkt die mögliche Excentricität der Achsen und die Unbequemlichkeit der Handhabung gegenüber dem Rechenschieber.

Die Londoner Ausstellung wissenschaftlicher Instrumente von 1876 enthielt zwei Rechenscalen, bei denen die logarithmische Einheit in zehn Stücke zerlegt war, welche parallel neben einander hinlaufen. Die eine dieser Constructionen ist von Prof. Mannheim angegeben und das ausgestellte Exemplar gehörte dem Conservatoire des Arts et Metiers in Paris. Man denke sich einen Hohlcyylinder mit fünf Schlitzen, parallel zur Achse und ebenso breit als die dazwischenliegenden Metalllamellen. Letztere sind gegen den Rand hin abgeschrägt und nehmen daselbst die zehnmahl gebrochene logarithmische Scala auf. — In dem durchbrochenen Hohlcyylinder gleitet ein zweiter, welcher auf seiner glatten Mantelfläche ebenfalls 10 Scalenstücke in gleichen Bogenabständen trägt, deren jedes aber auf zwei Seiten beziffert ist, damit man es sowohl auf die obere als auch auf die untere Kante eines Schlitzes (die Cylinderachse horizontal dem Auge gegenüber gedacht) einstellen kann. Wenn noch erwähnt wird, dass der durchbrochene Hohlcyylinder dem Stab, der innere dem Schieber des logarithmischen Lincals entspricht und dass, um den Schieber immer nur zur Hälfte herausziehen zu müssen, der Nullpunkt seiner Scala in der Mitte angebracht ist, während die Scala des Stabes am Ende eines Schlitzes beginnt, so ist nach allem vorigen über den Gebrauch dieses Rechenschiebers zu Multiplicationen und Divisionen mit gemeinen Zahlen nichts mehr zu sagen. Das ausgestellte Exemplar besass eine sorgfältig getheilte Scala von 1,250m. Länge, war nicht ganz 0,15m. lang, wenige Centimeter dick, hübsch in Neusilber von Herrn Gravet, Lenoir's Nachfolger, rue Cassette 14 Paris, gearbeitet, dem das Instrument patentirt ist. (Die Endknöpfe zum Handhaben des Schiebers waren etwas zu klein und ein Zeiger nach Art des Mannheim'schen Läufers würde die Ablesung der Scalen erleichtern.)

Der zweite Apparat mit gebrochener Scala war die Rechenscheibe von Prof. Gustav Herrmann in Aachen, deren 5m. lange logarithmische Theilung von dem Erfinder selbst auf Stein gezeichnet wurde. Sie gleitet hier nicht, wie bei Mannheim, an einer zweiten Scala hin, dafür aber werden die 10 concentrischen Bänder, in welche die logarithmische Einheit zerfällt, von zwei radialen Läufern überragt. Die Zeigerradien derselben lassen sich so stellen, dass ihr Abstand einem bestimmten $\log a$ entspricht, der sich zusammensetzen soll aus $x + (n \text{ Zehnthellen der Scala})$. Um diesen zu $\log b = y + (m \text{ Zehnthelle der Scala})$ zu addiren, dreht man die Scheibe unter den Zeigern weg, bis der erste derselben auf b deutet, welche Zahl im $m + 1$ ten Ring gefunden wird. Am

zweiten Zeiger liest man im $\overline{m+n+1}$ ten Ringe das Product $a \cdot b$ ab, dessen Logarithmus sich zusammensetzt aus:

$$\log a + \log b = y + x + (\overline{m+n} \text{ Zehnthelle der Scala}).$$

Das Instrument ist Herrn Prof. Herrmann in Aachen patentirt worden und kostet 25 Mark.

Entscheidend für die Güte eines Rechenschiebers ist ausser der Correctheit der Theilung die Art der Längenänderung des Materials bei wechselnder Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre. Stab und Schieber sollten sich dabei ganz gleich verhalten, was für Metall leicht und auch für Holz dann erreichbar ist, wenn die genannten Theile aus demselben Stücke geschnitten sind. Sonst kommt es vor, dass die Scalen bei feuchtem Herbstwetter übereinstimmen, nach Beginn der Winterheizung aber bis zu einem Betrage von 3mm. auf das Meter von einander abweichen. Statt $\log a + \log b$ bildet man also $\log a + (1 \pm 0,003) \log b$, statt ab wird $ab \cdot b^{\pm 0,003}$ gefunden. Nun ist genau genug:

$$b^{\pm 0,003} = 1 \pm 0,003 \cdot \log \text{ nat } b = 1 \pm 0,007 \log b$$

und $\mp 0,007 \log b$ das Verhältniss des begangenen Fehlers zum gewünschten Resultat ab . Man wird darum mit dem Schieber stets den kleineren Factor einstellen, sich aber auch dann auf beträchtliche Fehler gefasst machen müssen. Denn obwohl wir es vermeiden können und werden, dass $\log b$ jemals mehr betrage als $\pm \frac{1}{2}$ (logarithmische Einheit), so ist doch die Fehlergrenze 1:290 oder rund ein Dreihundertel des berechneten Productes oder Quotienten noch weit ausserhalb der Fehler eines richtigen Rechenschiebers gelegen, die bei den genannten Rechnungen und auf die obere Scala bezogen (logarithmische Einheit 0,125m. lang) nur unter 1000 Fällen einmal rund 1:600 betragen werden (S. § 24). Eine Längendifferenz der Stab- und Schieberscala von 0,001 könnte dagegen hier als unschädlich gelten. Elimination des Fehlers durch doppelte Ablesung ist in manchen Fällen möglich, aber zu umständlich.

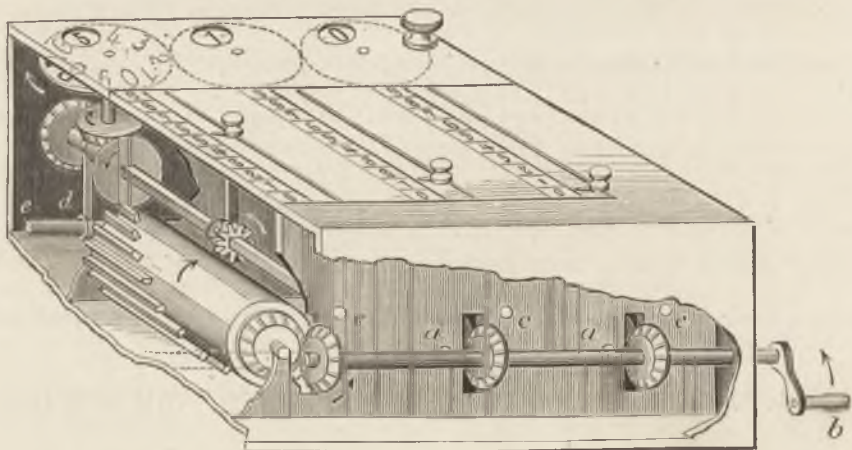
§ 18. Grundzüge der Rechenmaschine oder des Arithmometers.

Weniger um eine vollständige Beschreibung des kunstreichen Mechanismus dieser Maschine zu geben, als um die Aufmerksamkeit des Lesers auf ihre staunenswerthen Leistungen zu lenken, soll hier in wenigen Zügen der Grundgedanke entwickelt werden, auf welchem das Arithmometer von Thomas, wie auch die ältere Hahn'sche Rechenmaschine, gemeinsam fussen. Für alles weitere Detail kann man die Schrift von F. Reuleaux über „die Thomas'sche Rechenmaschine, Separat-Abdruck aus dem Civilingenieur, Bd. VIII, Heft 3“ zu Rathe ziehen. Vergleiche ferner § 19.

Mehrere nebeneinander liegende gezahnte Walzen (siehe die schematische Fig. 21) mit horizontalen und parallelen Achsen a , a vollenden, wenn sie durch die Kurbel b einer sie alle quer übergreifenden Triebachse in Bewegung gesetzt werden, gleichzeitig mit der Kurbel eine ganze Umdrehung. Schräg über jeder Walze liegt wieder eine parallele Achse, etwa von der doppelten Länge der Walzen und zwischen ihren

beiden Zapfen, von denen der vordere mit *c* bezeichnet ist, vierkantig gearbeitet. Auf diesem Vierkant lässt sich längs der Walze hin ein Zahnradchen mit 10 Zähnen verschieben, welches seine Bewegung von den neun Zähnen der Walze erhält. Damit es aber in unserem Belieben steht, das Rädchen mit jeder Walzenumdrehung um 9 oder um weniger Zähne weiter zu bewegen, oder auch ganz still stehen zu lassen, haben die leistenförmigen Walzenzähne ungleiche Längen erhalten; sie überragen einander wie cylindrisch gruppirte Orgelpfeifen. Je nach der Stellung des verschieblichen Rädchens auf seinem Vierkant wird es nun von allen 9 Zähnen der Walze erfasst, oder von einer kleineren Zahl, oder gar nicht, wenn man es ganz von der Walze zurückgeschoben hatte. Die Stellung des Rädchens aber wird auf dem Deckel der

Fig. 21. Haupttheile der Rechenmaschine von Thomas.



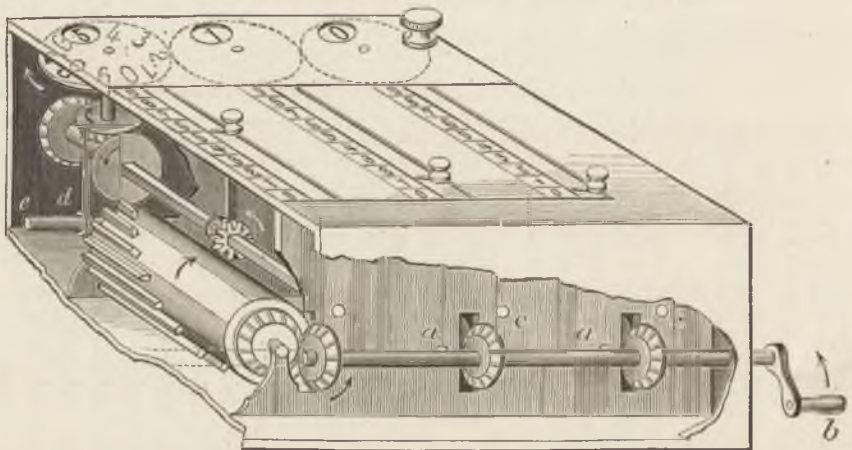
Maschine durch einen Knopf mit Zeiger markirt, welcher auf die eingegrabenen Ziffern 0 bis 9 deutet, je nachdem das Rädchen daselbst bei einer Kurbeldrehung von 0 bis 9 Walzenzähnen erfasst wird. Seine Bewegung überträgt es durch Kegelgetriebe sofort auf ein Zifferblatt mit den 10 im Kreisumfang eingeschriebenen Ziffern 0 bis 9, welches über dem verlängerten Theil der vierkantigen Radachse und unter dem Deckel horizontal angebracht ist, und von welchem stets nur eine Ziffer durch ein Schauloch im Deckel sichtbar wird. An der Verticalachse des Zifferblattes sitzt ein Kegelzahnrad, zwei ebensolche auf der wagrechten Vierkantachse, von welchen aber immer nur Eines eingreift. Denn durch einen Stellhebel *d* an durchlaufender horizontaler Achse *e* können diese Kegelräder auf dem Vierkant um ein Weniges hin- und hergeschoben werden, und da sie mit dem Kegelgetriebe des Zifferblattes von entgegengesetzten Seiten in Berührung treten, so kann letzteres nach

Belieben recht- oder rückläufig bewegt werden, so dass entweder, wie beim Addiren, immer höhere Ziffern im Schauloch erscheinen oder, wie beim Subtrahiren, niedrigere Ziffern zum Vorschein kommen. Mit jeder Kurbelumdrehung rückt also das Zifferblatt um soviel Einheiten weiter, recht- oder rückläufig, als der Zeigerknopf auf dem Kastendeckel andeutet, oder auch, als die Zahl der Walzenzähne beträgt, welche in das mit jenem Kopf verbundene 10theilige Zahnradchen auf der Vierkantachse eingreifen. Fig. 21 zeigt die Zifferblätter so, wie sie nach einmaliger Kurbeldrehung erscheinen würden, wenn sie zuvor sämmtlich auf Null gestanden hätten.

Stellt man die Zeigerknöpfe von vier nebeneinander liegenden Walzen der Reihe nach auf die Ziffern 1, 2, 3, 4, den Stellhebel und damit die Kegelgetriebe auf der Vierkantachse auf Addition und zeigen die 4 entsprechenden Zifferblätter Null, so erscheint nach einer Kurbeldrehung in den vier Schaulöchern des Deckels die Zahl 1234, nach einer zweiten Drehung das Doppelte 2468. Um nun durch fernere Kurbeldrehungen auch das Drei- und Mehrfache der Zahl 1234 zu erhalten, ist eine Vorrichtung nöthig, welche nach jeder vollen Umdrehung eines Zifferblattes das nächste zur Linken um einen Zahn weiterbewegt. Das kann einfach durch einen Stift geschehen, der aus dem ersten Zifferblatt hervorragt und in die Zähne des nächsten dann eingreift, wenn jenes zur Rechten eben von 9 auf 0 übergehen soll. Nur darf das linke Zifferblatt nicht in Bewegung sein, sonst wäre das Eingreifen des Stiftes wirkungslos. Bei der beschriebenen einfachen Einrichtung muss also noch dafür gesorgt werden, dass die Zähne jeder Walze zur Linken erst in das Zahnradchen des Vierkants eingreifen, wenn der Nachbar zur Rechten seine Bewegung schon vollzogen hat. Diese Bedingung und die Nothwendigkeit, dass alle Räder in der erteilten Stellung auch beharren, trotz Erschütterungen durch Bewegung der übrigen Theile, verlangen eine grössere Complication der Maschine, als es nach den gegebenen Grundzügen nöthig erscheinen mag, hier soll jedoch auf genauere Beschreibung nicht eingegangen, sondern nur noch als wesentlich erwähnt werden, dass der Theil des Deckels, welcher die Zifferblätter trägt, in der Richtung von deren Verbindungslinie seitlich verschiebbar ist, so dass jedesmal vier beliebige, neben einander liegende Zifferblätter den Zeigerknöpfen gegenüber gestellt werden können. Es ist also möglich, um bei dem gewählten Beispiel zu bleiben, nicht nur die Zahl 1234 etwa sechsmal durch sechs Kurbeldrehungen auf die gegenüberstehenden vier Zifferblätter zu übertragen, sondern auch das Zehnfache der Zahl 1234, sagen wir dreimal durch drei Kurbeldrehungen, hinzuzufügen, nachdem wir die Deckelklappe mit den Zifferblättern um je ein Schauloch weiter nach rechts gerückt haben, und so fort. Mit

einem Worte, die Maschine befähigt uns Multiplicationen auszuführen. — Setzen wir den Stellhebel *d* und mit ihm die Kegelgetriebe an der Vierkantachse um, so können wir Subtractionen und Divisionen vornehmen, und das Alles mit einer Schnelligkeit und Sicherheit, welche auch der beste Zahlenrechner nicht erreicht. Eine Nebenvorrichtung der Maschine, welche jedoch in Fig. 21 fehlt, bringt dabei noch den Multiplicator und beim Dividiren den Quotienten zum Vorschein. Auch die Stellung des Kommas lässt sich durch Elfenbeinknöpfechen zwischen den Schaulöchern angeben. Ist die Rechnung beendet, so sorgt der Auslöschler in einigen Secunden dafür, dass sämtliche Zifferblätter wieder auf Null zeigen. Das ganze Instrument ist in ein Kästchen gefasst und nimmt bei geöffnetem Deckel auf dem Tisch nicht viel mehr Platz ein, als ein aufgeschlagener Foliant.

Fig. 21. Haupttheile der Rechenmaschine von Thomas.



Alle Rechnungen, welche sich aus den vier Species zusammensetzen, liefert die Maschine rasch und genau. Ihre relativ höchste Leistung entfaltet sie bei der Bildung einer Reihe von Producten, welche algebraisch addirt werden sollen. Die Sicherheit der Resultate ist von nichts anderem mehr abhängig, als von der Zuverlässigkeit der in die Rechnung eingeführten Zahlenwerthe. Sind diese aus Messungen gewonnen, also nicht absolut genau, so entwickelt das Arithmometer freilich eine Anzahl Ziffern, welche als bedeutungslos schliesslich abgeworfen werden, gleichwohl rechnet sie fast in allen Fällen schneller, als man es mit Logarithmen vermag. So kann eine Multiplication zweier sechsstelligen Zahlen in 18 Secunden, die Division einer zwölfstelligen Zahl durch eine sechsstellige in 24 Secunden ausgeführt werden.

Die A. M. Hoart'sche Fabrik in Paris, Rue Cardinal Fesch 44, lieferte bis vor kurzem (Preisliste von 1873) Thomas'sche Arithmometer zu folgenden Preisen: solche für fünfstellige Factoren und zehnstellige Producte zu 150 Franken; solche mit 6 auf 12 Ziffern zu 300, mit 8 auf 16 Ziffern zu 400 und mit 10 auf 20 Ziffern zu 800 Franken. Nur die drei letzteren Grössen wurden mit Quotienten und auf Wunsch mit Auslöscher versehen, wodurch sich der Preis, den letzten ausgenommen, noch um je 100 Franken erhöhte. Derselbe ist gleichwohl erstaunlich billig gestellt, was nur durch die Opferfähigkeit des Erfinders ermöglicht ward. Bei vernünftiger, nicht eben schonender Behandlung ist die Dauerhaftigkeit der Maschine auf Jahre hinaus erprobt. Seit Einführung des Dezimalsystems in die Reichswährung wird das Arithmometer allmählich auch in die Comptoirs, wie bisher in die Ingenieurbüreaus eindringen und eine Menge geistiger Kraft für bessere Dinge als mechanische Rechnungen ersparen helfen.

§ 19. Historisches.

Die Begriffe Maass und Zahl, so abstract sie sind, müssen sich dennoch schon früh entwickelt haben, als das Menschengeschlecht eben zu denken anfang; gehören doch die unbestimmten Zahlbegriffe „wenig, mehr, viel“ noch jetzt zu den ersten, welche dem erwachenden Bewusstsein des Kindes sich aufdrängen. Schon der tägliche Verkehr musste bald lehren, die sich anhäufenden Maass- und Zahlengrössen in ein Maass- und Zahlensystem übersichtlich zu gruppieren und von einer Grösse zur anderen in verschiedener Weise zu gelangen, also zu rechnen. Man fing nach Regeln zu rechnen an, aber Regeln konnten den Rechnern nicht mehr genügen, als sie ihre Kunst in den Dienst der Bau- und der Sternkunde stellten, zweier im Alterthum hochgeachteter Zweige menschlicher Weisheit und Kunstfertigkeit. Vornehmlich die Aufgaben der Astronomie sind von der Art, dass man sich nicht mit ihrer allgemeinen Lösung begnügen kann, es gilt vielmehr die Erscheinungen des Himmels beständig rechnend zu verfolgen, also ein- und dieselbe Art der Rechnung mit geänderten Zahlenwerthen häufig zu wiederholen. Bald zeigte sich das Bedürfniss, diese Rechnungen wenigstens insoferne zu erleichtern, als es möglich war einen Theil derselben zum künftigen Gebrauche im Voraus auszuführen und auf Vorrath bereit zu stellen. Auf diese Weise entstanden bei den griechischen Astronomen die numerischen Hülftafeln, seitdem ein vielfach angewandtes und ausgebildetes Hilfsmittel der Rechenkunst. Ihr erstes Erscheinen knüpft sich an die Auflösung der Dreiecke mittelst Kreischorden, und mit der Verbreitung dieser Methode haben auch die Hülftafeln allgemeine Aufnahme und zahlreiche Verbesserungen erfahren, vornehmlich seit Erfindung der Buchdruckerkunst.

So hatten zwar schon die Araber die Chorden des Ptolemäus mit dem Sinus vertauscht, aber erst Georg Peurbach († zu Wien 1461) ersetzte die ptolemäischen Zahlenwerthe durch genauere, und beseitigte

die sexagesimale Theilung des Kreishalbmessers wenigstens der Hauptsache nach, sein Schüler Johannes Müller (Regiomontanus, † zu Rom 1476) sogar vollständig, indem er zugleich Sinustafeln von Minute zu Minute für den Radius 10 Million, (statt 600000 bei Peurbach) berechnete, ferner fünfstellige Secanten- und Tangententafeln einfuhrte. Georg Joachim Rhaeticus († zu Kaschau in Ungarn 1576) trieb die Genauigkeit noch weiter. Diese Tafeln kamen allmählich ausser Gebrauch seit Erfindung der Logarithmen durch den schottischen Edelmann John Neper († 1617 bei Edinburgh), womit ein neues treffliches Mittel zur Abkürzung der Zahlenrechnung gegeben war, zuerst der trigonometrischen, da Neper mit der Herausgabe logarithmischer Sinustafeln begann. Zwar übertrieb man Anfangs auch bei Zusammenstellung der Logarithmentafeln die Genauigkeit der Zahlenangaben: Henry Briggs († 1630 zu Oxford), der mit Neper's Zustimmung neue Logarithmen der natürlichen Zahlen mit der Grundzahl 10 berechnete, ging bis zu 14 Dezimalen, Adrian Vlacq, niederländischer Buchhändler und Mathematiker, gab 1628 zu Gouda zehnstellige Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 heraus. Mit der Ausbreitung ihres Gebrauches erlernte man jedoch sparsamer mit den Dezimalstellen und der zu ihrer Interpolation erforderlichen Zeit umgehen, und bei Rechnern, die nicht blose Dilettanten sind, gilt heutzutage der Grundsatz, nicht mehr Stellen oder höchstens eine mehr zu verwenden, als für die erreichbare Genauigkeit des Resultates erforderlich. Schon Georg von Vega († 1802 zu Wien) gab ausser seinem zehnstelligen thesaurus logarithmorum siebenstellige Tafeln heraus, die der Fachmann jetzt nur noch seltener gebraucht, während die Production sechs-, fünf- und vierstelliger Logarithmentafeln in Deutschland, dem Bedürfniss entsprechend, sehr ergiebig geworden ist*). Ausserdem hat das System der Hülftafeln für specielle Zwecke eine grosse Ausdehnung erlangt, erstreckt sich gegenwärtig auf alle Gebiete der Beobachtungswissenschaften, und fördert nicht nur die Raschheit der Rechnung, sondern auch deren Sicherheit, insoferne grobe Rechenfehler beim Gebrauche von Tafeln seltener werden.

Bildlich nennt man das Rechnen mit Hülftabellen „mechanisches Rechnen“, obwohl kein Werkzeug im eigentlichen Sinne dabei behülfflich

*) Sechsstellige Logarithmen von Bremiker, Berlin 1868, Stereotypausgabe; fünfstellige von Houël, französische und deutsche Ausgabe, Paris und Berlin 1864, 2. Aufl.; fünfstellige von Wittstein, Hannover 1874, 6. Aufl.; vierstellige von Joh. Heinr. Traugott Müller, 2. Aufl. Halle 1860, enthält auch eine Logarithmentafel zum Aufschlagen der Zahl bei gegebenem Logarithmus u. s. w. — Von Neper, dem Erfinder der Logarithmen, rührt auch eine Art beweglicher, Productentafeln her, in England Napiers bones genannt, weil sie aus beinernen Ziffernstäbchen zusammengelegt wurden. Sie sind durch die Logarithmentafeln längst verdrängt worden.

ist und ihre Benützung zuweilen nicht geringe geistige Arbeit erfordert. Das eigentliche mechanische Rechnen ist viel älter als die Hülfs tafeln, ja so alt als das Rechnen überhaupt, wenn man das Händepaar mit seinen zehn Fingern, die Grundlage unseres dekadischen Zahlen- und Maasssystems, als die älteste Rechenmaschine betrachtet. Der natürlichen offenbar nachgebildet, entstand die erste künstliche Rechenmaschine in dem Suanpan, der seit undenklichen Zeiten den Indern und Chinesen die Zahlenrechnung nach den vier Species erleichtert hat, und der, einfach genug, nichts enthält als in einem Rahmen fünf Schnüre, an welchen je zehn Kugeln als Zählmarken dienen. An jeder Schnur zur Linken bedeuten die Kugeln das zehnfache ihrer Nachbarn zur Rechten, wesshalb Alexander von Humboldt vermuthet, dass dem Suanpan unser Ziffersystem mittelbar seinen Ursprung verdanke.

Noch jetzt setzt der geschäftsgewandte chinesische Kaufmann den Europäer in Erstaunen durch sein flinkes Rechnen mit dem Suanpan, der ihm die Schreiftafel vorthellhaft ersetzt. Aber es ist mehr die Versinnlichung der Operationszahlen und des Resultates, die er ihm leistet, als die mechanische Ausführung der Rechnungsoperation selber. In Bezug hierauf verdient der in § 17 beschriebene Rechenstab weit eher die Benennung einer Rechenmaschine. Seine Construction ist in England, kurz nach Erfindung der Logarithmen, von dem Astronomen Edmund Gunter († in London 1626) wenige Jahre vor seinem Tode zuerst angegeben worden*). Eine ganze Reihe von Fingerbewegungen bringt am Suanpan erst das zu Wege, was eine einzige Einstellung am Rechenschieber vermag. Dagegen rechnet jenes Urbild einer Rechenmaschine stets mit vollständigen Zahlen, der Rechenschieber aber wie die Logarithmentafel stets mit unvollständigen, die er noch dazu sehr früh abrechnen muss: nach der dritten, höchstens vierten Stelle. Darum auch die unablässigen Bemühungen bedeutender Geister, eine Rechenmaschine zu erfinden, welche mit vollständigen Zahlen operirt, und dennoch in der Leichtigkeit, Multiplicationen und Divisionen auszuführen, mit den gleichstelligen Logarithmentafeln concurriren kann. Von berühmten Namen, welche durch die grösstentheils misslungenen Versuche ihrer Träger mit der Erfindung der Rechenmaschine verknüpft sind, begegnen wir einem Pascal (geb. 1623 zu Clermont-Ferrand, † 1662 zu Paris), Leibnitz (geb. 1646 zu Leipzig, † 1716 zu Hannover), Cavendish

*) Siehe R. Wolf's Handbuch der Mathematik, Zürich 1870, woselbst auch ein Literaturverzeichnis. Darin hervorgehoben: Karl Culmann, der Rechenschieber und sein Gebrauch, Dünkelberg's Culturingenieur 1868. S. auch Deutsche Bauzeitung 1874, Bd. 8, S. 136; „der Rechenstab von Dennert und Pape in Altona“, und eine Brochüre von Tetmaier, welche das betreffende Capitel von Culmann's graphischer Statik weiter ausarbeitet. Zürich 1875.

(geb. 1731 zu Nizza, † 1810 in London), Babbage (geb. 1791, † 1871 zu London). Die eigentliche Ausführung von Rechenmaschinen zum wirklichen Gebrauch ist Männern gelungen, deren Name im Uebrigen in der Wissenschaft wenig bekannt zu sein scheint, deren Verdienst deshalb aber nicht geringer zu schätzen ist. Einen Schmuck der Londoner Ausstellung wissenschaftlicher Instrumente im Jahre 1876 bildete die kleine Sammlung von Rechenmaschinen, welche sich dort eingefunden hatte und, obwohl nicht vollständig, doch einen Blick in die Geschichte dieser Instrumente gestattete.

Das älteste derselben war die Additions- und Subtractionsmaschine von Pascal mit der Aufschrift: *Esto probati instrumenti symbolum hoc.* — Blasius Pascal Aruernus inventor. 20. May 1652. Sie zeigte eine Reihe Rädchen zum Einstellen des Summanden, der sich sogleich auf eine zweite, gegenüberstehende Räderreihe, das Zählwerk, überträgt, wobei denn die Zehnerübertragung correct vor sich geht. Bei Thomas ist, wie wir sahen, die Einstellung des Summanden nur eine vorbereitende, dafür aber erfolgt die Uebertragung auf das Zählwerk fast mit einem Schlage durch die Kurbeldrehung, und wiederholte Addition verlangt nicht wieder, wie bei Pascal, erneute Einstellung der Rädchen. Sinnreich und einfach ist Pascal's Uebergang von Addition auf Subtraction: die Zifferblätter seines Zählwerkes haben Walzenform und sind doppelt beschrieben, so dass je zwei hintereinanderstehende Ziffern sich zu 9 ergänzen. Ein Schieber bedeckt die hintere oder vordere Hälfte der Walzen, je nachdem die Einstellung einer Zahl auf der Maschine Addition oder Subtraction bewirken soll. Denn die gleiche Drehung der Walzen bringt im einen Falle wachsende, im anderen Falle abnehmende Zahlen nach oben.

Von den Versuchen, welche Leibnitz angestellt hat, eine Rechenmaschine zu bauen, war in London kein Zeichen erschienen, dass aber Pascal's Gedanke auf fruchtbaren Boden gefallen war, das bewiesen zwei Exemplare der Rechenmaschine, welche Pfarrer P. M. Halm († 1790 zu Echterdingen in Württemberg) in den Jahren 1770—76 erfunden hat und die allerdings erst durch dessen Sohn, württembergischen Hofmechanicus, 1809 in vier Exemplaren ausgeführt worden ist. Man sieht, mit unbedeutenden Unterschieden, die Thomas'sche Rechenmaschine vor sich, nur sind ihre Elemente im Kreise nebeneinander gestellt, wodurch die Maschine die Form eines Cylinders erhält, in dessen Mitte die Kurbel spielt. Wie bei Thomas wirken Walzen mit ungleich langen Zähnen, hier jedoch auf lothrechten Achsen, zum Uebertragen der eingestellten Ziffern, für welche die Schieber sich nun auch lothrecht bewegen müssen. Statt dass bei Thomas ein doppeltes Kegelgetriebe (Wendegetriebe) den Gang der Zifferblätter vor- oder rückwärts regelt, haben bei Halm die

Zifferblätter nur eine Bewegung, aber die Pascal'sche doppelte Zahlenreihe, in zwei concentrischen Kreisen. Ob, wie die Aussteller (Ihre Hoheit die Herzogin von Urach und die Gewerbeakademie zu Berlin) vermuthen, die Hahn'sche Maschine der Thomas'schen als Muster gedient hat, bleibt zwar unentschieden, doch gebührt in jedem Falle Hahn die Priorität der Erfindung*).

Aber auch wenn Thomas die Maschine Hahn's nur umformte, so verdanken wir ihm es doch, dass die Rechenmaschine überhaupt Anerkennung und Verbreitung gefunden hat. Thomas (aus Colmar im Elsass) hat mit rastlosem Eifer und mit grossen Geldopfern dahin gestrebt, seinen Maschinen einen Mechanismus zu geben, welcher vollständig zuverlässig arbeitet und dabei wohlfeil herzustellen ist. Beides gelang ihm erst nach und nach, und sein Arithmometer, 1820 patentirt, hat seitdem viele Verbesserungen erfahren, welche die rasche und sichere Arbeit befördern und der Maschine wirklich die Fähigkeit verleihen, gleichstellige Logarithmentafeln bei gewissen Rechnungen weit zu übertreffen.

Sehr merkwürdig ist, dass gleichzeitig mit dem deutschen Landpfarrer der englische Viscount Charles Mahon, später dritter Earl Stanhope, (geb. 1753, † 1816) zu einer brauchbaren Rechenmaschine gelangte. Nur reichten die Mittel des jungen Viscount etwas weiter, als die des Vicars, denn er konnte schon 1775 durch den Mechaniker James Bullock eine, und 1777 die zweite verbesserte Maschine ausführen lassen. Diese arbeitet noch jetzt vorzüglich, und wenn sie die rasche Einstellung des Multiplicands und das Auslöschen des Resultates gestatten würde, wie die Thomas'sche, so verdiente sie immer noch neben der letzteren ihre Stelle. Wie die Walze einer Spieluhr mit ihren Zähnen auf gegenüberstehende Tasten tupft und bei jeder vollen Umdrehung ihr Stückchen ableiert, so überträgt eine gezahnte Walze den Multiplicand auf die Zifferrädchen des Zählwerkes in Mahon's Maschine, so oft man die Walzenkurbel umdreht. Aber die Walze besteht nicht aus einem Stück, sondern aus (neun) Cylinderelementen, von denen jedes neun Zähne trägt und so gestellt sein muss, dass nur so viele davon eingreifen können, als die entsprechende Ziffer des Multiplicands verlangt. Erst wenn jedes Walzenelement die richtige Stellung hat, werden sie alle zusammen-

*) Die geodätische Sammlung der polyt. Schule in München bewahrt eine Rechenmaschine auf, welche der Hahn'schen äusserlich, wahrscheinlich auch im Innern sehr ähnlich sieht und die Aufschrift trägt: „Rechnungsmaschine von Joh. Christ. Schuster in Ansbach in Franken, angefangen 1805, vollendet 1820.“ Es liegt nahe für die drei Constructionen von Hahn, Schuster & Thomas eine gemeinsame Quelle zu vermuthen, deren Ursprung bei Leibnitz zu suchen sein möchte. Doch ist dem Verf. nicht bekannt, wo Leibnitz den Plan seiner Rechenmaschine niedergelegt hat.

geklemmt und als ein Ganzes vor das Zählwerk geschoben, woselbst nun noch eine seitliche Verstellung der Walze um volle neun Stellen möglich ist, so dass Multiplicationen neunstelliger Zahlen ausgeführt werden können. Damit aber nicht bei jeder Umdrehung alle neun Zähne jedes Walzelementes eingreifen, tritt bei einer bestimmten Kurbelstellung Walze und Zählwerk ausser Contact und der übrige Theil der Kurbeldrehung wird nun benützt, um die vorher sehr einfach vorbereitete Zehnerübertragung wirklich auszuführen. Gleichzeitig mit dem Product auf dem Hauptzählwerk erscheint gegenüber auf einem kleineren der Multiplicator und, bei Umkehrung der Walzenbewegung, auf diesem der Quotient, wenn in dem Hauptzählwerk der Dividend eingestellt war. Der Mechanismus ist noch einfacher als der von Thomas, und scheint ganz ebenso zuverlässig zu arbeiten, aber die schon erwähnten Eigenschaften geben der Thomas'schen Maschine den Vorzug für den Gebrauch beim gewöhnlichen Rechnen.

Dagegen konnte C. Babbage, dem die beiden ausgestellten Maschinen Mahon's gehört haben, kein besseres Muster für seine berühmte Rechenmaschine wählen, welche dazu ausersehen war, die Berechnung und den Drucksatz mathematischer Tafelwerke durch einfache Räderbewegung zu bewerkstelligen. Schon 1812 zu Cambridge fasste, wie aus einem Briefe an Humphrey Davy hervorgeht, der einundzwanzigjährige Babbage die geniale Idee, beliebige Reihen von Functionswerthen durch mechanische Entwicklung und Addition ihrer Differenzreihen zu bilden. Wählt man die Intervalle des Arguments hinreichend klein, so können die Differenzreihen, obwohl ihre Anzahl streng genommen nur bei algebraischen ganzen Functionen eine begrenzte ist, doch auf wenige beschränkt werden, da unter genannter Voraussetzung die Glieder der letzten Differenzreihe nur unmerkbar wachsen, und als constant zu behandeln sind. Mit andern Worten: jede Function lässt sich streckenweise als algebraische ganze Function betrachten und berechnen.

Babbage wollte nun eine Maschine construiren mit sechs Zählwerken für die Differenzen und einem siebenten für die Functionswerthe, jedes Werk zu 20 Ziffern berechnet. Zur Berechnung eines einzelnen Functionswerthes gehörte, dass auf dem ersten Zählwerk sich das constante Glied addirte, die Summe sich der nächsten Radreihe mittheilte, diese den Werth, auf den sie dadurch gestiegen war, der Nachbarreihe übertrug und so fort, bis das Zählwerk der Functionswerthe erreicht war. Dasselbe sollte erhabene Ziffern auf seinen Rädern tragen, welche, in eine Bleiplatte abgedrückt, eine Matrize für die Stereotypplatte aus Letternmetall erzeugen konnten. — Jede Radreihe musste demnach zuerst als Zählwerk dienen und dann, bei gemeinsamer Umdrehung aller ihrer

Räder, so auf das nächste Zählwerk wirken, wie die gezahnte Kurbelwalze in Mahon's Maschine.

Die englische Regierung beschloss im Jahre 1823 auf Staatskosten Babbage's Maschine ausführen zu lassen. Ein grosser Theil derselben war schon fertig und ein kleinerer bereits zusammengesetzt, um die Wirkungsweise der Maschine zu zeigen, als 1833 die Arbeit daran für immer eingestellt wurde. Der ausführende Mechaniker, aufgefordert, seine Werkstätte zur Vollendung der Maschine in ein eigens dazu errichtetes Staatsgebäude zu verlegen, erhob dafür so maasslose Forderungen, dass die Regierung vorzog, auf den Weiterbau der Maschine zu verzichten, nachdem dieselbe bereits 17000 Pfund oder 340000 Mark gekostet hatte. Der erwähnte kleine Theil der Maschine wird im South-Kensington-Museum aufbewahrt und war in der Ausstellung von 1876 zur Schau gestellt.

Von englischen Bemühungen, Rechenmaschinen zu construiren, gab daselbst auch noch ein etwas rohes Zählwerk Zeugniß, welches Cavendish zugeschrieben wird, aber wohl nur als ein erster Versuch des berühmten Mitgliedes der Royal Society zu betrachten ist, denn es reicht nicht einmal an Pascal's Maschine heran und ist mit den Rechenmaschinen des Pfarrers Hahn und Viscount Mahon ganz und gar nicht vergleichbar.

Das in England begrabene Project von Babbage's Maschine lebte in Schweden wieder auf und wurde mit manchen Abänderungen, unter grösster Aufopferung von Seiten der uneigennütigen Erfinder, Scheutz Vater und Sohn*), und nachdem endlich die Unterstützung des Staates gewonnen worden war, wirklich zu Stande gebracht. Es sollen zur Zeit zwei dieser Maschinen erbaut sein, und man hat zum Beweise ihrer Brauchbarkeit schon mit der ersten derselben eine Logarithmentafel gedruckt, welche vor anderen den Vorzug vollkommener Freiheit von Fehlern hat, weil die Maschine als Rechner und Setzer gleich infallibel arbeitet, vorausgesetzt, dass die ersten Glieder der Hauptreihe und aller Differenzreihen richtig berechnet und eingestellt worden sind.

Bescheidenere Ziele sind den graphischen Tafeln gesteckt, denen diese Schrift vornehmlich gewidmet ist. Freilich die Rechnungen, deren Resultate sie liefern, dürfen wie immer verwickelt sein, die Anwendung graphischer Tafeln wird dadurch nicht eingeschränkt. Wohl aber durch die geforderte Stellenzahl des Resultates, welche nur auf Kosten der Handlichkeit über jene erhöht werden könnte, welche der Rechenstab gewährt. Gleichwohl sind auch an der Entstehung der graphischen Tafeln manche scharfsinnige Geister betheilig, deren Namen sich schon

*) S. F. Reuleaux, die Thomas'sche Rechenmaschine, Separatabdruck aus dem Civilingenieur, Bd. VIII, Heft 3, S. 7 des Abdruckes.

in dem hellenischen Alterthum aufsuchen und in der Gegenwart noch bedeutend vermehren lassen würden, wollten wir alle Diejenigen aufzählen, welche sich überhaupt um das graphische Rechnen verdient gemacht haben, d. h. um geometrische Construction von Grössen aus gegebenen in der Absicht, dadurch das Werthverhältniss von gegebenen und gesuchten Zahlen darzustellen, ohne Zuhülfenahme der Ziffernrechnung. Die euklidische Geometrie liefert davon Beispiele genug, aber die Methode hat eine hervorragende Bedeutung erlangt, seitdem sie in neuerer Zeit, hauptsächlich durch Culmann, auf Probleme der Mechanik angewandt worden ist. Hier sollen nur nach Lalanne*) die Namen aufgeführt werden, welche zur Ausbildung des Systems der Schichtentafeln, d. h. von Tafeln mit isoplethen Curven und zwei Eingängen beigetragen haben. Denn die Verdienste um Ausbildung der graphischen Tafeln mit einem Argument scheinen nach Erfindung der Geometrie Descartes' († 1650 zu Stockholm) erschöpft.

Die Anwendung isoplether Curven zur Darstellung von Naturgesetzen, deren mathematischen Ausdruck wir nicht kennen, stammt, wenn nicht schon aus älteren Zeiten, aus dem Anfange des 18. Jahrhunderts, zu welcher Zeit Halley († 1742 zu Greenwich) eine Erdkarte mit Curven entwarf, die in Bezug auf die Abweichung der Magnetnadel isopleth sind. Die physikalische Geographie und Meteorologie macht gegenwärtig von der Darstellungsweise durch Isoplethen ausgiebigen Gebrauch. Die scheinbar näher liegende Anwendung von Isoplethen zur Abbildung von Oberflächen ist auf einem selbständigen Wege später gefunden worden. Philippe Buache, der Erfinder der Niveaucurven, hat bekanntlich den Meeresgrund des Canals La Manche durch die Schnitte äquidistanter Niveauflächen dargestellt und seine Karte 1737 der französischen Akademie vorgelegt, wodurch er, vermuthlich ohne den Gedanken an Schichtentafeln zu anderen Zwecken, doch deren geometrisches Vorbild und zugleich eine Darstellungsweise von Gebirgsformen schuf, die bisher unübertroffen blieb. Die erste Anwendung der hyperbolischen Rechentafeln schreibt Lalanne seinem Landsmanne Pouchet zu, welcher dieselbe 1797 einem Buche beifügte, das von der Verwandlung der alten Maasse und Gewichte in metrische handelte. Damit war denn zum erstenmal eine graphische Tafel mit zwei Argumenten zur Darstellung algebraischer Formeln gewonnen. Die Theorie und neue Anwendungen derselben wurden, jedoch ohne Rücksicht auf gestreckte Schichtentafeln, zuerst von d'Obenheim (*Mémorial de l'artillerie*, 1. vol., 1826), sodann von Terquem (ebendort, 3. vol., 1830) behandelt. Unabhängig von ihren Vorgängern kamen die Franzosen Allix, Cousinery, sodann Lalanne

*) Lalanne, S. 57—69.

selber auf die gleiche Darstellungsweise der Functionen durch Isoplethen, der letztere ferner auf das Strecken der Isoplethen (1842) und den logarithmischen Maassstab für die Argumente seiner Tafeln. Weniger glücklich als in der Wahl seiner Methode scheint er in der Wahl ihrer Benennung gewesen zu sein. Er gab ihr den Namen der „anamorphischen (verwandelnden) Geometrie“, weil sie es vermöge, von vornherein die Form festzustellen, welche die Isoplethen auf irgend einer Oberfläche annehmen sollen, sei es nun die von Geraden oder beliebigen Curven, indem sie das Gesetz bestimme, nach welchem die Coordinaten getheilt werden müssen. Den stolzen Namen einer „Geometrie“ verdiente Lalanne's Verfahren aber erst dann, wenn es einen ganz allgemeinen Weg zeigte, die Eigenschaften der Raumgebilde oder der Functionen überhaupt zu untersuchen. Das leistet Lalanne's „anamorphische Geometrie“ bis jetzt noch nicht, wenn es ihr auch zuweilen gelingt, eine besondere Eigenthümlichkeit einer Function auf kürzerem Wege zu finden, als es die höhere Geometrie und Analysis vermag. Lalanne's Verfahren enthält vielmehr bloß eine besondere Methode der Flächen-Abbildung räumlich aufgefasster Functionen von drei Variabeln, und darauf beruht ihre Verwandtschaft mit Mercator's Projection, welche Lalanne selbst erkennt und hervorhebt, weil auch diese einen speciellen Fall der Abbildung krummer Oberflächen vertritt, eines Problems, dessen Ausbildung wir hauptsächlich den deutschen Mathematikern G. Mercator († zu Duisburg 1594), Lambert († zu Berlin 1777) und F. Gauss († zu Göttingen 1855) verdanken. Es ist darum zu vermuthen, dass Lalanne's Verzeichniß seiner Vorläufer noch nicht vollständig ist, sondern noch durch deutsche und englische Mathematiker verstärkt werden muss.

Cap. IV. Genauigkeit der Schichtentafeln *).

§ 20. Interpolation.

Jedem Zeichner ist die Einschaltung von Bruchtheilen der Einheit auf getheilten Scalen geläufig. Dass man auch auf ungleich getheilten Scalen mit der proportionalen Einschaltung ausreichen kann, ist schon im § 9 betont worden. Auf den Schichtentafeln muss die Interpolation der Einheiten des Coordinatennetzes durch Abschätzung nach dem Augenmaass geschehen und der Fall, wo einzuschaltende Punkte auf eine ausgezogene, nicht bloß gedachte Gerade treffen, wird der seltenere sein. Dennoch lehrt die Erfahrung, dass, wenn eine feine Marke, etwa eine Bleistiftspitze, ein Bleistifttupf oder ein (gefärbtes) Strichkreuz auf

*) Kann unbeschadet des Zusammenhanges vorläufig übergangen werden.

der Unterseite eines Horn- oder Glasplättchens zu Hülfe genommen wird, wenn ferner die Maschen des Liniennetzes nicht viel enger als 1mm. und nicht viel weiter als 2mm. gemacht werden, ein gesundes und etwas geübtes Auge noch Zehntelmillimeter mit Sicherheit abzulesen vermag, die Fehlergrenze der Schätzung also innerhalb 0,05mm. bleibt. Diese Erfahrungsgrösse liegt den Genauigkeitsbetrachtungen gegenwärtigen Capitels zu Grunde. Sie wird etwas modificirt, je nachdem ein Punkt einzuschalten, oder die Lage eines gegebenen Punktes abzuschätzen ist, in welchem letzteren Falle die grössere Genauigkeit erzielt wird. Ohne Beihülfe einer Marke ist die Schätzung bedeutend erschwert.

Bei der Interpolation des Zwischenraumes von Isoplethen, sei es krumm- oder geradliniger, handelt es sich darum, den Zeiger jener Isoplethe aufzusuchen, welche durch einen aus seinen Coordinaten bestimmten Punkt laufen würde; oder bei gegebenem Zeiger Punkte zu finden, welche die betreffende Isoplethe enthalten würde. In allen Fällen geschieht dies am besten nach dem Augenmaass durch Proportionaltheilung einer gedachten Linie, welche beide Nachbarisoplethen senkrecht durchschneidet, der sogenannten Trajectorie. Zwar ist dies Verfahren, auch abgesehen von den Fehlern der Schätzung, meistens bloss näherungsweise und nur dann streng gültig, wenn die Trajectorie eine Gerade oder ein Kreis ist und die Abstände der Isoplethen darauf gleich. Auch mag es in manchen Fällen richtiger erscheinen, in der Richtung der Coordinaten, nicht der Trajectorie, proportional zu interpoliren, wie dies z. B. bei der hyperbolischen Productentafel theoretisch nicht angezweifelt werden kann. Sobald aber die Isoplethen von den Coordinaten merkbar schief geschnitten werden, lenkt das Auge unwillkürlich von ihrer Richtung ab in die der Trajectorien, so sehr sind wir gewohnt beim Betrachten des Abstandes von zwei Linien sofort die senkrechte Verbindung aufzusuchen, in deren Richtung auch das Schätzen am sichersten erfolgt.

In welcher Ausdehnung wir berechtigt sind, die senkrechten Abstände zweier Isoplethen proportional dem Zuwachs der Isoplethenzeiger abzuthemen, ergibt sich am besten aus der Betrachtung des 'Taylor'schen' Lehrsatzes für Functionen von zwei unabhängigen Variablen, der in bekannter Schreibweise, wenn $z = f(x, y)$, lautet:

$$f(x+h, y+k) = z + \frac{dz}{dx} h + \frac{dz}{dy} k + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2z}{dx dy} \cdot hk + \frac{d^2z}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \dots$$

Wir fassen die gegebene Function räumlich auf, setzen:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \Delta z$$

und lassen vom Punkte (x, y) aus die Coordinaten der (x, y) -Ebene,

d. h. hier diejenigen in der Ebene der Schichtentafel, derart wachsen, dass die Coordinatenschnitte in einer Geraden liegen, zu deren Neigung gegen die Abscissenachse die trigonometrische Tangente m gehört; dann erhalten wir

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dx} + m \frac{dz}{dy} \right) h + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2m \frac{d^2z}{dx dy} + m^2 \frac{d^2z}{dy^2} \right) \frac{h^2}{1.2} + \dots$$

So lange keiner der Coefficienten unendlich wird, kann h klein genug gewählt werden, dass alle Glieder der rechten Seite ausser dem ersten vernachlässigt werden dürfen. Aus der Gleichung

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dx} + m \frac{dz}{dy} \right) h$$

folgt aber, dass der Zuwachs Δz des Isoplethenzeigers proportional dem Zuwachs h der Abscisse x ist, also auch proportional dem Zuwachs der Geraden, deren Ordinaten m mal so schnell wachsen, als die Abscissen. Dies gilt denn auch von der Geraden, welche senkrecht steht auf der Isoplethe durch den Punkt (x, y) . Ist die Gleichung der letzteren

$$y = \varphi(x, z),$$

so ist in der Taylor'schen Reihe und der daraus abgeleiteten linearen Gleichung zu setzen

$$m = - \frac{dx}{dy} = - \frac{1}{\varphi'(x, z)}.$$

Dadurch wird an der ganzen Betrachtung nichts geändert. Sobald also h oder, worauf es hier ankommt, der entsprechende Abstand $g = h \sqrt{1 + m^2}$ zweier Isoplethen klein genug gewählt wird, dass von der Taylor'schen Reihe nur das erste Glied berücksichtigt zu werden braucht, ist die proportionale Interpolation ihres senkrechten Abstandes zulässig. Da, wo auf einer Schichtentafel die senkrechten Abstände auf einander folgender Isoplethen überhaupt nahezu gleich werden, wäre die proportionale Interpolation auch für grössere Abstände gestattet. Es ist dies beispielsweise auf der hyperbolischen Schichtentafel des § 4. an jenen Stellen der Fall, wo die Hyperbeltangenten den Coordinatenachsen nahezu parallel laufen. Wendet man auf die Gleichung dieser Tafel

$$w = uv$$

den Taylor'schen Lehrsatz an, so hat man ganz strenge:

$$\Delta w = (u + mv)h + mh^2.$$

Aus der Differentiation der Gleichung der Isoplethen

$$u = \frac{w}{v}$$

folgt:

$$m = - \frac{dv}{du} = \frac{v^2}{w} = \frac{v}{u}.$$

Für jene Diagonale der Tafel, welche durch den Coordinatenanfang geht

und auf welcher die Verschiedenheit der Isoplethenabstände am grössten ist, gilt $v = u$, also $m = 1$ und

$$\Delta w = 2vh + h^2.$$

Sobald hier h gegen v (oder u), somit auch h^2 gegen vh sehr klein wird, darf das zweite Glied vernachlässigt werden, und es ist alsdann die Proportionaltheilung des Isoplethenabstandes gestattet; wenn aber in jener Diagonale, dann um so mehr anderwärts, wo ohnehin die senkrechten Isoplethenabstände kleinere Unterschiede zeigen.

§ 21. Einfluss der Schätzungsfehler.

Wir setzen von nun an voraus, dass die proportionale Interpolation der senkrechten Isoplethenabstände auf der ganzen Fläche der Schichtentafeln zulässig sei, d. h. dass die Fehler, welche durch Vernachlässigung der höheren Glieder der Taylor'schen Reihe entstehen, gegenüber den Schätzungsfehlern verschwinden. Diese Voraussetzung ist jederzeit durch Verdichtung der Isoplethen, nöthigenfalls durch Zwischenisoplethen, zu erfüllen. Ebenso nehmen wir fehlerfreie Construction des Schichten-netzes an, denn obwohl diese Annahme nie ganz zutreffen wird, so haben wir doch in der photographischen Reduction und in der geradlinigen Ausführung der Netze Mittel kennen gelernt, welche die Fehler der Zeichnung auf das Geringste beschränken, so dass in manchen Fällen selbst microscopische Ablesung mit Vortheil zu Hülfe genommen werden mag. Aber auch bei der zweckmässigsten Anlage und genauesten Ausführung einer Schichtentafel wird das Auge bei der Interpolation die früher schon erwähnten Schätzungsfehler begehen, deren Einfluss auf das Resultat wir jetzt betrachten müssen. Dabei halten wir uns nur an das unbewaffnete gesunde Auge und die Zahlen-Angaben, die im Eingange des vorigen Paragraphen für ein solches gemacht wurden. Im Allgemeinen werden sich die kleinsten Längen, welche Augen von verschiedener Sehweite noch mit Sicherheit abzuschätzen vermögen, bei gleicher Empfindlichkeit der Netzhaut verhalten wie die Sehweiten. So-dann wird sich für ein und dasselbe Auge das Verhältniss der abzulesenden Zahlen zu dem Werth der kleinsten ablesbaren Längen einer Scala, die „relative Genauigkeit“ der Ablesung, proportional der Grösse der Scaleneinheit ändern. Es hat also keine Schwierigkeiten, von den gewählten Zahlengrössen auf andere, z. B. solche für kurzsichtige Augen, überzugehen, ebensowenig wie aus den Schichtentafeln der Schätzungsfehler in Fig. 23 u. s. w., welche unter Annahme einer Scalenlänge von 0,2m. entworfen wurden, neue abzuleiten für eine andere Scalenlänge. Dazu genügte schon eine Neutheilung der Coordinatenachsen.

Der Einfachheit halber wählen wir zu unseren Genauigkeitsbetrachtungen wieder ein Beispiel, und zwar das schon öfter gebrauchte der hyperbolischen Productentafel, indem wir die Sicherheit ihrer Ergebnisse zunächst mit der Sicherheit gleichstelliger Zahlenrechnung, sodann mit der Genauigkeit vergleichen, welche ein Rechenschieber von gleicher Länge der Scaleneinheit liefern würde. Jene Schichtentafel wird dann ihren Zweck vollkommen erfüllen, wenn ihr ein Product mit derselben Sicherheit entnommen werden kann, welche die Rechnung bei gleicher Beschränkung der Stellenzahl der Factoren gewährt. Um den Grad dieser Sicherheit festzustellen, wenden wir wieder die Taylor'sche Reihe für Functionen von zwei unabhängig Variabeln unter Vernachlässigung höherer Glieder an und erhalten aus:

$$w = uv \quad (1)$$

die Differenzenformel:

$$\Delta w = u \Delta v + v \Delta u \quad (2)$$

und wenn wir, unter Voraussetzung gleichen Vorzeichens, $\Delta v = \Delta u = \delta$, der unsicheren Hälfte der letzten beibehaltenen Decimalstelle beider Factoren gleichsetzen, die andere:

$$\pm \Delta w' = (u + v) \delta. \quad (3)$$

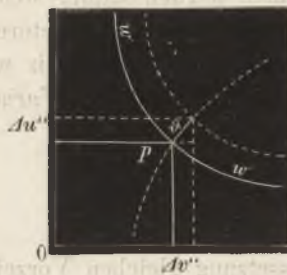
Die Unsicherheit $\pm \Delta w'$ (oder die Grenze der möglicherweise be-
gangenen Fehler) haftet sowohl dem Product der Zahlenrechnung an,
als auch dem aus der hyperbolischen Schichtentafel entnommenen Product,
falls der Fehler, dort durch Abrundung, hier durch Ablesung der
Factoren derselbe ist; dies wird sofort klar, wenn man die con-
centrische Hyperbelschaar unserer Tafel im Sinne von Horizontalcurven
als das geometrische Bild der Function (1) auffasst, wo denn w die
dritte, auf die Bildfläche senkrechte Coordinate vorstellt.

Aber der Unsicherheit des Productes, hervorgerufen durch die Un-
sicherheit der Argumente beim Eingang in die Rechnung oder die
Tafel, gesellt sich für die letztere noch eine zweite $\Delta w''$ bei, veranlasst
durch den Schätzungsfehler des Auges beim Ausgang aus der Tafel
oder beim Ablesen des Resultates. Die Irrthümer, welche das Auge
beim Eintheilen der Curvenabstände begeht, sind, wie im vorigen Para-
graphen hervorgehoben worden, auf den rechtwinkelig schneidenden
Trajectorien der Isoplethen oder den zugehörigen Bogendifferentialen
zu messen, weil der Blick beim Schätzen dieser Richtung unwillkürlich
folgt. Wir haben ferner festgestellt, dass die Bestimmung des Isoplethen-
zeigers für einen gegebenen Punkt des Netzes durch proportionale Inter-
polation zu geschehen hat, aber die Unsicherheit, mit der diese Inter-
polation erfolgt, d. h. mit welcher die Abstände des gegebenen Punktes
von den nächsten beiden Isoplethen abgeschätzt werden, haftet auch an
der Ablesung des Resultates.

Die Hyperbeln unseres Schichtennetzes werden durch ein anderes System von concentrischen gleichseitigen Hyperbeln rechtwinkelig durchschnitten, welche mit jenen den Mittelpunkt gemein haben, und deren Asymptoten die Coordinatenachsen unter 45° schneiden. Ihre allgemeine Gleichung lautet

$$v^2 - u^2 = n,$$

Fig. 22.



denn nimmt man den Differentialquotienten derselben nach v , so findet sich:

$$du : dv = v : u,$$

während die Differentiation der allgemeinen Gleichung $w = w$ ergibt:

$$du : dv = -u : v,$$

woraus folgt, dass, was auch n und w bedeuten, die Curven der beiden Gleichungen sich senkrecht schneiden. Sehen wir nun, wie gross die Unsicherheiten $\Delta v''$ und $\Delta u''$ der Abscisse und Ordinate ausfallen, wenn ein Punkt P der Trajectorie (Fig. 22) um das Stück \mathcal{P} unsicher geschätzt werden kann, so gilt zunächst

$$\Delta u'' : \Delta v'' = du : dv = v : u,$$

weil nach dem Taylor'schen Satze das Verhältniss kleiner Zunahmen der Variablen dem Verhältniss ihrer Differentiale gleich ist, sobald die höheren Potenzen der Zunahmen gegen die erste verschwinden. Da ferner aus der Figur folgt:

$$\mathcal{P}^2 = \Delta v''^2 + \Delta u''^2,$$

so gewinnen wir die Ausdrücke:

$$\Delta v'' = \frac{u \mathcal{P}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{und} \quad \Delta u'' = \frac{v \mathcal{P}}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Dies sind die Maasse der Unsicherheiten, welche durch ungenaue Ableseung des Productes auf jeden der Factoren treffen und welche wir nun wieder in die allgemeine Differenzenformel (2) einsetzen müssen, um ihre Wirkung auf das Product in Zahlen zu erkennen. So kommen wir auf:

$$\pm \Delta w'' = \mathcal{P} \sqrt{u^2 + v^2}, \tag{4}$$

worin wir ϑ den Zahlenwerth beizulegen haben, der ihm vermöge seines Grössenverhältnisses zu δ gegenüber dem Zahlenwerth des letzteren zukommt. Fasst man (3) und (4) zusammen, so erhält man den Grenzfehler φ des Productes $uv = w$, nämlich

$$\pm \varphi = Aw' + Aw'' = (u + v) \delta + \vartheta \sqrt{u^2 + v^2},$$

worin δ und ϑ lineare constante Erfahrungsgrössen sind. Für $\vartheta = \delta$, eine Voraussetzung, der weder Betrachtung noch Erfahrung widersprechen, hat man

$$\pm \varphi = (u + v + \sqrt{u^2 + v^2}) \delta$$

und durch Division mit Aw' nach (3):

$$\varphi : Aw' = 1 + \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u + v}.$$

Für $v = 0$ oder $u = 0$, also für Punkte in den Coordinatenachsen, erhält die rechte Seite ihren grössten Werth, und ihren kleinsten für Punkte in der Diagonale, wo $u = v$. Der Grenzwert φ des Ableungsfehlers schwankt also zwischen dem Doppelten und dem $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$ fachen der Rechnungsunsicherheit Aw' , je nach der Lage des Coordinatenschnittes (u, v) gegen die Achse der Hyperbeln. Für den Maximalfehler gilt der erstere Fall. Während wir also im vorigen Paragraphen festsetzten, dass die Einschaltung von Zwischenpunkten in die Coordinatenmaschen nach den beiden Hauptrichtungen um höchstens 0,05mm. unsicher sei, lesen wir das Resultat so ab, als ob die Grenze dieser Unsicherheit das Doppelte betrüge. Wir müssen demgemäss die Dimensionen des Schichtennetzes verdoppeln, wenn wir nicht nur ebenso fehlerfrei in die Tafel eingehen wollen als in die Rechnung, sondern auch im ungünstigsten Falle ein ebenso sicheres Resultat aus jener entnehmen wollen wie aus dieser.

Ein hyperbolisches Schichtennetz, dessen quadratische Maschen 1mm. Seite haben und dessen Abscissen- und Ordinatenachse je 100 solcher Einheiten abzählen lassen, stellt desswegen noch keine dreistellige Multiplicationstafel vor, weil wir die Factoren dreistellig mit Sicherheit darin ablesen können; dazu macht es erst die Verdoppelung seines Umfanges, weil es nunmehr auch das Product so genau liefert, als die Rechnung mit dreistelligen Zahlen, sobald sich das Auge an die Theilung der Intervalle beim Einschalten von Zwischenpunkten gewöhnt hat.

Die schliessliche Abrundung des Products bleibt hier ausser Betracht. Sie entstellt das Ergebniss der numerischen und der graphischen Rechnung in gleichem Maasse. Wenn, entgegen der Annahme auf S. 67, die Factoren schon vor dem Eingang in die Tafel abgerundet waren, so erhöht sich der Quotient $\varphi : Aw'$ um eine Einheit.

§ 22. Andere Darstellung der Tafelfehler.

So lange wir durch Gleichung (3) den Grenzfehler darstellen wollten, mussten beide Klammerglieder als gleichbezeichnet angenommen werden. Im Allgemeinen sind aber in der Gleichung:

$$\Delta w' = (\pm u \pm v) \delta$$

alle vier angedeuteten Vorzeichencombinationen gleich möglich. Nach dem Quadriren der Gleichung reduciren sie sich auf zwei:

$$\Delta w'^2 = (u^2 + 2uv + v^2) \delta^2.$$

Es gelten demnach die Annahmen, welche der Methode der kleinsten Quadrate zu Grunde liegen, und Glieder, die in einer grösseren Reihe von Fällen gleich häufig positiv und negativ auftreten, tilgen sich in der Durchschnittszahl der Fehlerquadrate; die Unsicherheiten $\pm u\delta$ und $\pm v\delta$ vereinigen sich wie wahrscheinliche Fehler, nämlich wie ihre Quadrate unter gemeinsamem Wurzelzeichen. Wir schreiben also, nach Wegfall des doppelten Productes:

$$\Delta w_1 = \pm \delta \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (5)$$

Wenn wir für Schätzungsfehler das Gauss'sche Fehlergesetz gelten lassen, so ist Δw_1 kein Grenzfehler mehr, also dürfen wir auch δ nicht als Grenze der möglichen Ablesungsfehler auf Scalen einführen, sondern als eine so selten auftretende Fehlergrösse, dass sie sich gewöhnlich der Beobachtung entzieht. Wir wollen annehmen, δ sei der Fehler, der unter je tausend Fällen einmal erwartet werden kann. Die gleiche Bedeutung legen wir dem Ablesungsfehler ϑ bei Interpolation der Isoplethen bei und schreiben statt Gleichung (4)

$$\Delta w_2 = \pm \vartheta \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Die Vereinigung von Δw_1^2 und Δw_2^2 unter gemeinsamem Wurzelzeichen ergibt den Fehler φ' des tausendsten Falles für ein der Hyperbeltafel entnommenes Product und, wenn wie schon oben $\vartheta = \delta$ gesetzt wird, die Formel

$$\varphi' = \pm \delta \sqrt{2} \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (5^*)$$

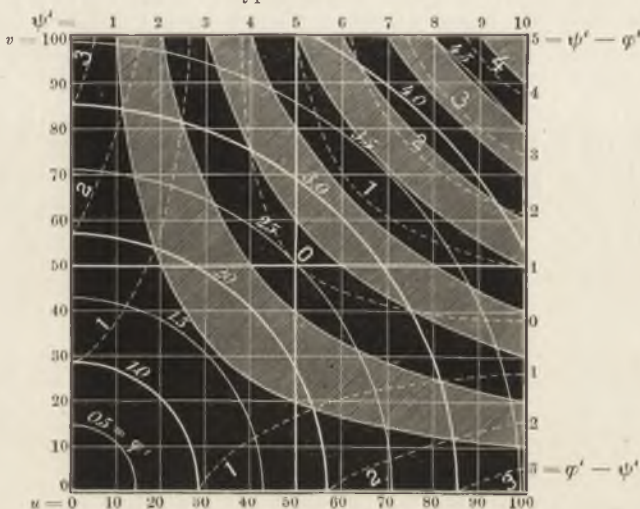
Verglichen mit dem Fehler Δw_1 , welcher aus der Unsicherheit der Ablesung beim Eingang in die Tafel entsteht, ist φ' jetzt das $\sqrt{2}$ fache. Also selbst dann, wenn wir verlangen, dass unter 1000 Fällen nur 999 die Sicherheit dreistelliger Zahlenrechnung gewähren, ist ein hyperbolisches Schichtennetz von 100mm. Seite noch nicht ausreichend. Denn obwohl bei einem solchen die Argumente in 999 von tausend Fällen bis auf drei Stellen abgelesen werden können (wenn, wie früher, angenommen wird, dass $\delta = \pm 0,05\text{mm.}$), so liefert doch erst eine Schichtentafel von der $\sqrt{2} = 1,4142$ fachen Seitenlänge auch das Product entsprechend richtig.

Die Gleichung

$$\frac{\varphi' \sqrt{2}}{2 \delta} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

kann durch eine Schichtentafel dargestellt werden, deren Isoplethen

Fig. 23. Vergleich zwischen den Fehlern ψ' des Rechenschiebers und φ' der Hyperbeltafel.



Kreise sind, was in Fig. 23 geschieht unter Voraussetzung einer Seitenlänge des zugehörigen hyperbolischen Schichtenetzes von 0,2m. In dieser Figur ist dem grössten ablesbaren Product die Zahl 10000 beigelegt und φ' an den Isoplethen in Einheiten dieser Zahl beige-schrieben worden.

§ 23. Vergleich mit den Schätzungsfehlern am Rechenschieber.

Beim Gebrauche des Rechenschiebers zum Multipliciren hat man dreimal die Unsicherheit der Ablesung zu befürchten, die jedesmal das Längenmaass δ betragen möge; nämlich beim Einstellen der logarithmischen Längen beider Factors und beim Ablesen ihres Products an dessen logarithmischem Maass. Damit das Resultat, welches die Ablesung dem Rechenschieber entnimmt, seinem ganzen Umfange nach brauchbar sei, müsste die Unsicherheit 3δ dasselbe nicht ungenauer machen, als um den Betrag der Hälfte der letzten beibehaltenen Dezimale. Das Verhältniss nun, in welchem sehr kleine Aenderungen des Logarithmus zu dem entsprechenden Zuwachs der Zahl stehen, ist gleich dem reciproken Werth der letzteren multiplicirt mit dem Modulus M des Briggs'schen Systems.

$$\Delta y = \Delta x = \frac{M}{x} \Delta x = \frac{0,4343}{x} \Delta x.$$

Zuwachs des Logarithmus und der Zahl sind daher einander gleich, wenn die Zahl x dem Modulus gleich wird, nämlich bei der Zahl 0,4343; sie verhalten sich wie 1 : 10 bei der Zahl 4,343 und wie 0,43 : 10 oder wie 1 : 23 bei der Zahl $x = 10$. Die Unsicherheit des logarithmischen Maasstabes kann sich also im 23fachen Verhältniss auf die Zahl übertragen.

Es fragt sich nun, wie gross die logarithmische Einheit des Rechenschiebers, d. h. seine Länge zwischen den Zahlzeigern 1 und 10 (oder zwischen 10 und 100 etc.) gewählt werden müsste, um daran das Product jederzeit auf drei Stellen sicher ablesen zu können. Der Grenzfehler einer logarithmischen Scala wird dem einer gleichgetheilten dann äquivalent sein, wenn die erstere im 23fachen Maasstabe entworfen ist, wenn also ihre Einheit das 23fache der Einheit eines gleichgetheilten Maasstabes beträgt. Sind Centimeter die Einheiten eines Maasstabes zum Ablesen dreistelliger Zahlen, so wird die Einheit eines logarithmischen Maasstabes 0,23m. betragen müssen, damit beiden Scalen bei der Zahl 10 dieselbe Unsicherheit zukommt. Wir sahen früher, dass ein Maasstab von 10cm. Länge und auf Millimeter getheilt zum Ablesen dreistelliger Zahlen ausreicht; also wird auch diejenige Scala des Rechenschiebers von Richer und Dennert & Pape (S. § 17), welche zum Ausziehen der Quadratwurzel dient, da sie 25cm. lang ist, selbst bei der Zahl 10 noch dreistellige Ablesung einer Zahl gestatten.

Da aber beim Ablesen von Producten der einfache Ablesungsfehler dreimal begangen wurde, so muss, damit das Resultat auf drei Stellen sicher sei, die logarithmische Einheit nochmals verdreifacht werden, mithin 69mal soviel betragen, als die Einheit einer dreistelligen gleichgetheilten Scala. Ein Rechenschieber von 69cm. Länge der logarithmischen Einheit, also mindestens von 1,38m. Gesamtlänge und (nach § 21) eine hyperbolische Schichtentafel von 0,20m. Seite ergeben somit Producte mit derselben Genauigkeitsgrenze, nämlich auf drei Stellen sicher.

Nehmen wir aber wieder $\delta = 0,05\text{mm.}$ als den Ablesungsfehler des tausendsten Falles an und verlangen blos, dass in 999 Fällen von je tausend die dreistellige Ablesung verbürgt sei, so häufen sich die Ablesungsfehler δ , ebenso wie der wahrscheinliche Ablesungsfehler, von dem sie Vielfache sind, nur wie die Wurzel aus der Summe der Quadrate an, die dreifach auftretende Unsicherheit δ also wie $\delta\sqrt{3}$. Die vorhin berechnete Einheit eines dreistelligen Rechenschiebers von 0,69m. ermässigt sich jetzt auf $0,23\sqrt{3}$ oder etwa 0,40m., seine Gesamtlänge auf 0,8m., wobei wir freilich befürchten müssen, dass unter je tausend

berechneten Producten eines nicht auf drei Stellen sicher sei. Nach § 22 ist ein hyperbolisches Schichtennetz von 0,1414m. Seitenlänge diesem Rechenschieber aequivalent, wenn nämlich nur die Maximalfehler des tausendsten Falles entscheiden sollen.

Gewöhnlich macht man die Einheit geradliniger Rechenschieber nur zwischen 0,125 und 0,25m. lang, erreicht demnach bei weitem nicht die zuletzt berechnete Länge 0,4m. für einen dreistelligen Rechenschieber. Dass das Instrument zwei solcher Einheiten enthält, läuft in Hinsicht der Genauigkeit ganz auf dasselbe hinaus, als ob nur eine vorhanden wäre. Für die Berechnung vierstelliger Producte müsste die logarithmische Einheit schon die zehnfache berechnete Länge erhalten. Man glaube nicht einen vierstelligen Schieber zu erhalten, wenn man dem dreistelligen noch eine Einheit zufügte, sowenig als z. B. eine vierstellige Logarithmentafel dadurch genauer wird, dass man sie mehrmals hinter einander abdruckt und den Argumenten jeder neuen Zahlenfolge höhere Stellenwerthe beilegt.

Kreisförmige sogenannte Rechenscheiben können jenes Maass von 0,40, ja von 0,69m. bei mässigem Durchmesser in ihrem Umfange erreichen und somit die dritte Decimale auch schon für das blose Auge sicher geben. Sie gewähren ausserdem, wenn auf Metall gravirt, den Vortheil genauester Theilung und gleichmässiger Ausdehnung durch die Wärme und erlauben daher mittelst Anwendung der Lupe beim Ablesen eine Verminderung von δ , büssen dann aber die Bequemlichkeit des Gebrauchs ein, welche den Rechenschieber auszeichnet, und werden theurer als dieser, ohne dass ihr Nutzen in gleichem Verhältnisse steigt.

§ 24. Graphische Darstellung der Schätzungsfehler am Rechenschieber.

Durch Umkehren des Differenzenausdrucks des Logarithmus bekommen wir

$$\Delta w = 2,3 w \Delta \log w.$$

Hierbei ist $\Delta \log w$ durch die logarithmische Einheit auszudrücken, indem deren Längenmaass r in die lineare Grösse von $\Delta \log w$ dividirt wird. Ist $w = uv$, so beträgt diese für den Grenzfehler 3δ , für den Fehler des tausendsten Falles $\delta\sqrt{3}$ und es folgt daher entweder

$$\Delta w = 6,9 uv \delta : r = \psi \tag{6}$$

oder
$$\Delta w = 4,0 uv \delta : r = \psi' \tag{7}$$

d. h. in beiden Fällen: die Unsicherheit des Productes steht zu diesem in constantem Verhältniss und ist der Grösse δ direct und der logarithmischen Längeneinheit umgekehrt proportional. Beim Rechenschieber lassen sich also die Fehler nach Procenten des Resultates angeben. Ist

$\delta = 0,05\text{mm.}$ der Grenzfehler der Ablesung und $r = 125\text{mm.}$ (wie bei Richer und Dennert & Pape), so beträgt der Grenzfehler eines berechneten Productes $0,276\%$ desselben, oder nahe $\frac{1}{4}\%$; der Fehler des tausendsten Falles aber nur $0,16\%$ oder $1 : 625$.

Wenn $\delta : r$ eine constante Grösse, so können die vorstehenden Gleichungen wieder durch Schaaren gleichseitiger Hyperbeln dargestellt werden. Dies geschieht auf der Schichtentafel der Figur 23 unter der Annahme, dass $\delta = 0,05\text{mm.}$ und $r = 0,2\text{m.}$ sei. Unter denselben Voraussetzungen erlaubt die Figur an ihren kreisförmigen Isoplethen die Grössen $\delta \sqrt{2u^2 + 2v^2}$ aufzusuchen, aus denen sich nach § 22 der Fehler des tausendsten Falles einer hyperbolischen Productentafel von $0,2\text{m.}$ Seite bildet.

Diese gleichzeitige Darstellung der Fehler zweier verschiedenen Rechenwerkzeuge gibt Gelegenheit zu einem übersichtlichen Vergleich der Leistungen beider. Dazu dienen Isoplethen anderer Art, welche in der Figur punktirt sind. Die hyperbolische Scheidelinie $0 \dots 0$ trennt die Figur 23 in zwei Theile; jenseits ist die Schichtentafel dem Rechenschieber in Hinsicht der Sicherheit des Resultates überlegen, diesseits untergeordnet.

Die Gleichung der Scheidelinie entspringt aus der Gleichstellung der Rechenfehler φ' und ψ' für beide Arten von Hilfsmitteln der Rechnung, nämlich nach (5*) und (7) aus:

$$\delta \sqrt{2u^2 + 2v^2} = 0,0399 uv\delta,$$

woraus entsteht:

$$y^2 = \frac{x^2}{0,0008 x^2 - 1},$$

eine Curve mit zwei Aesten von gemeinsamer Achse mit der Schaar der Fehlerhyperbeln vom zweiten Grade in derselben Figur. Der Schnittpunkt ihrer den Coordinatenachsen parallelen Asymptoten hat die Coordinaten $u = v = 25 \sqrt{2} = 35,355$. Weniger übersichtlich werden die Gleichungen der punktirtten Isoplethen $1 \dots 1$, $2 \dots 2$, etc., welche die Ueberlegenheit einer oder der anderen Rechenweise um 1 , $2, \dots$ Fehlereinheiten andeuten. Statt die beiderseitigen Rechenfehler ψ' und φ' einander gleichzustellen, wie oben geschah, haben wir ihre Differenz zu bilden und gleich $1, 2, \dots$ zu setzen, um die algebraische Form dieser Curven zu erkennen.

Wie schon früher erwähnt, liegt dieser Figur eine Coordinatenscala zu Grunde, auf welcher 100 Theile gezählt werden können, so dass das grösste Product 10000 Einheiten enthält. Solche Einheiten geben auch die Zeiger der Isoplethen an.

§ 25. Schätzungsfehler beim Gebrauche logarithmischer Schichtentafeln.

Aus der Grundgleichung $w = uv$ geht die Differenzgleichung hervor:

$$A \log w = A \log u + A \log v,$$

worin wir die Glieder der rechten Seite beide gleich $\pm \delta$ setzen, damit

jedoch erst diejenigen Fehler beim Ablesen logarithmischer Isoplethen nach Art von Tafel I berücksichtigt haben, welche durch unsicheren Eingang in die Tafel entstehen. Dazu kommt noch (S. Fig. 22 des § 21) der Fehler ϑ bei Interpolation der Isoplethen. Da diese Schätzung stets in einer Richtung erfolgt, welche unter 45° gegen die Coordinatenachsen geneigt ist, so können wir annehmen, ϑ sei durch zwei gleiche und gleichbezeichnete Schätzungsfehler auf den Coordinatenachsen entstanden, je von der Grösse $\frac{1}{2} \vartheta \sqrt{2}$, so dass sich der Fehler in der Ablesung von $\log w$ vermehrt auf

$$+ \delta + \delta \pm \vartheta \sqrt{2}.$$

Nehmen wir wie bisher $\vartheta = \delta = 0,05\text{mm.}$ als den Ablesungsfehler an, der unter je tausend Fällen einmal vorkommt, so ist der ebenso oft auftretende Fehler in der Bestimmung von $\log w$

$$A \log w = \delta \sqrt{1 + 1 + 2} = 2 \delta.$$

Nun rechnet sich ganz wie im vorigen Paragraphen.

$$Aw = 2,3 w \cdot A \log w = 4,6 uv \delta : r, \tag{8}$$

d. h. der tausendste Ablesungsfehler der Lalanne'schen Productentafel beträgt $0,115 \%$ bei einer Seitenlänge von $0,2\text{m.}$ und nimmt im verkehrten Verhältniss der Seitenlänge ab.

Vorstehende Gleichung gilt nur für solche logarithmische Schichtentafeln, deren Coordinatennetz $\log u$ und $\log v$ direct abzulesen erlaubt und deren Isoplethen wirklich $\log w$ unmittelbar darstellen. Wenn dies nicht der Fall, so ist zu bedenken, dass jeder Uebergang von einer Scala auf eine neue derselben Richtung neuerdings den Ablesungsfehler $\pm \delta$ einführt, während mit dem Uebergang von der schrägen Interpolationsrichtung zu der der Coordinaten oder umgekehrt ein Zuwachs von $\pm \vartheta \sqrt{2}$ zu $A \log w$ verknüpft ist. Es kann sich daher unter Umständen die Constante obiger Gleichung nicht unbedeutend vergrössern und beispielsweise dann, wenn keine der Ablesungen, weder am Coordinatennetz noch an den Isoplethen direct erfolgen kann, bis zu dem Betrage von

$$2,3 \sqrt{5 \delta^2 + 2 [\vartheta \sqrt{2}]^2} = 6,9 \delta$$

steigern, wenn $\vartheta = \delta$ gesetzt wird. Dem würde bei $0,2\text{m.}$ Seitenlänge der Tafel Ablesungsfehler von $0,173\%$ entsprechen, welcher bei geringerer Ausdehnung im verkehrten Verhältniss der Seitenlänge wächst. Man wird also vorziehen, wenn man nicht möglichste Vielseitigkeit einer einzigen Tafel erstrebt, für jede neue Function auch neues logarithmisches Schichtenetz zu entwerfen.

Ist nach § 16 eine Schichtentafel entworfen worden zur Darstellung von

$$\log f(w) = \log \varphi(u) + \log \psi(v),$$

so findet sich vorerst wieder die Differenzgleichung

$$A \log f(w) = A \log \varphi(u) + A \log \psi(v).$$

Ganz dieselbe Betrachtung wie zu Eingang dieses Paragraphen führt uns sodann auf den Ablesungsfehler des tausendsten Falles:

$$A \log f(w) = 2 \delta,$$

dessen Einfluss auf die Sicherheit der Bestimmung von w sich zu erkennen gibt aus:

$$\Delta w = \frac{4,6 f(w) \delta}{r \cdot f'(w)}, \quad (9)$$

worin $f'(w)$ die erste Abgeleitete der Function $f(w)$ nach w bedeutet. Gleichung (8) ist nur ein specieller Fall von (9).

§ 26. Genauigkeit der Quotiententafeln.

Gleichung (9), die mit veränderten Coefficienten auch für den Rechenschieber gilt, lehrt uns, wenn wir für $f(w)$ einführen $w = \frac{x}{y}$, dass auch für den Rechenschieber und die logarithmische Quotiententafel der Fig. 17 die Ablesungsfehler dem abgelesenen Quotienten proportional sind. Will man der Lalanne'schen Tafel I Quotienten $u = \frac{w}{v}$ entnehmen, so führt diese Gleichung auf folgende Differenzgleichung

$$\Delta \log u = \Delta \log w - \Delta \log v.$$

Obwohl in umgekehrter Reihenfolge in die Tafel eingegangen und darin abgelesen wird, bleiben die Schätzungsfehler doch die gleichen wie bei Bildung der Producte, so dass der Fehler des tausendsten Falles für $\log u$ beträgt

$$\Delta \log u = \pm 2 \delta,$$

woraus wie früher folgt

$$\Delta u = \pm 4,6 \cdot \frac{w}{v} \delta : r.$$

In Bezug auf Genauigkeit des Resultates hat demnach keine der eben-erwähnten Tafeln etwas vor der anderen voraus. Unter Annahme gleicher Seitenlängen kommt beiden der gleiche Fehlerprocentsatz zu, dem Rechenschieber ein im Verhältniss 4,0 : 4,6 geringerer. Der letztere würde also erst bei der logarithmischen Längeneinheit von 0,4m. dreistellig gewonnen, da erst dann die Fehler der Ablesung 0,05 % des Quotienten betragen.

Wir suchen jetzt den Fehler auf, der beim Entnehmen von Quotienten aus der Hyperbeltafel des § 4 begangen wird.

Wenn u bestimmt werden soll aus der Gleichung

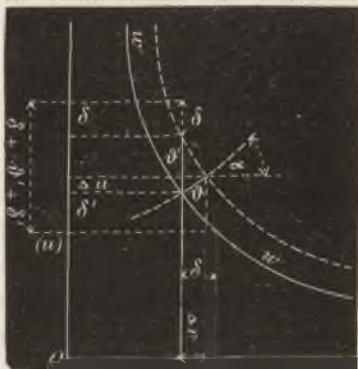
$$u = \frac{w}{v},$$

nach welcher zugleich die Hyperbeln der fraglichen Tafel entworfen sind, so kann uns eine rein geometrische Betrachtung auf das Längenmaass χ des schliesslichen Ablesefehlers an der Ordinatenscala führen; darnach aber ist dem Maasse χ der Zahlenwerth Δu beizulegen, um sein Verhältniss zu den Rechnungsgrössen w, v, u zu erkennen.

Beim Eingange in die Tafel suchen wir die dem Divisor entsprechende Abscisse v auf (Fig. 24) und verfolgen die zugehörige Ordinate bis zum Schnitt mit der Isoplethe w , worauf wir die Ordinate des Schnittpunktes ablesen. Bei der Schlussablesung der Ordinate u wird der Schätzungsfehler δ begangen, also in seinem vollen Betrage im Resultat empfunden. Derselbe Fehler δ lief beim Aufsuchen der Abscisse unter und beeinflusst das Resultat u um δ' , während statt der Isoplethe w eine andere in dem Abstände \mathfrak{F} ins Auge gefasst wurde, wodurch die Ordinate u sich nochmals um \mathfrak{F}' veränderte. Aus obiger Hyperbelgleichung folgt unmittelbar die Differenzenformel:

$$\delta' = -\frac{w}{v^2} \delta = -\frac{u}{v} \delta.$$

Fig. 24.



(v)

\mathfrak{F} ist in einer Richtung geschätzt worden, welche senkrecht zu der Isoplethe steht und mit der Abscissenachse den Winkel α bildet, so dass

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{dv}{du} = \frac{v}{u}.$$

Wie die Fig. 24 zeigt, verlängert sich u dadurch bis zum neuen Schnitt der Ordinate und punktierten Hyperbel um

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \operatorname{cosec} \alpha = \mathfrak{F} \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{\mathfrak{F}}{v} \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Soll $\mathfrak{F} = \delta$ gesetzt und als Fehler des tausendsten Falles betrachtet werden, so vereinigen sich δ^2 , δ'^2 und \mathfrak{F}'^2 unter dem Wurzelzeichen zu dem Fehler χ und es wird:

$$\chi = \frac{\delta}{v} \sqrt{2u^2 + 2v^2}.$$

Nehmen wir die Seite r des hyperbolischen Schichtenretzes als Einheit und von gleicher Länge als die logarithmische Einheit eines Rechenschiebers (und zwar in beiden Fällen gleich 0,2m.), so lassen sich die Fehler

$$A'u = \pm \frac{\delta \sqrt{2}}{r} \sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4000} \sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}$$

vergleichen mit jenen des Rechenschiebers :

$$A''u = \pm \frac{4,0 u \delta}{r} = \pm 0,001 u.$$

Wenn man nun in diesen Gleichungen $A'u = A''u$ setzt, so entsteht eine neue Gleichung zwischen u und v :

$$v^2 - 8 v^2 u^2 + u^2 = 0.$$

Für alle v und u , welche dieser Gleichung genügen, geben Hyperbeltafel und Rechenschieber gleiche Genauigkeit. Trägt man eine entsprechende Curve in die Hyperbeltafel ein, so wird dieselbe in zwei Felder getheilt. In dem grösseren zunächst den Coordinatenachsen ist der Rechenschieber der Tafel überlegen und dies um so mehr, je kleiner der Divisor v . Sobald derselbe kleiner wird als ein Zehntel der Tafelseite, ist die Hyperbeltafel im Allgemeinen für Division unbrauchbar.

§ 27. Genauigkeit der Productentafel zum Abgreifen und Auftragen.

In § 7 lernten wir eine Schichtentafel mit gleichmässig getheilten Coordinaten kennen, worin einer der Factoren durch die Isoplethen dargestellt wird, während man das Product an den Ordinaten abliest oder abgreift, oder endlich durch unmittelbares Anlegen der Tafel aufträgt. Die Einheiten der Abscissen und Ordinaten haben also verschiedene Bedeutung und das Maass der letzteren richtet sich nach dem Maassstabe der Zeichnung, für welche die Tafel angefertigt wurde.

Betrachten wir wieder zuerst die lineare Genauigkeit der Ordinatenübertragung, sodann die numerische Bedeutung des Fehlers, der endlich mit den zulässigen Fehlern zu vergleichen ist. Wir begehen beim Eingange in die Tafel auf der Abscissenachse den Fehler δ , welcher sich mit δ' auf die Ordinate überträgt, auf den Isoplethen den Schätzungsfehler \mathfrak{S} , welcher mit \mathfrak{S}' auf der Ordinate empfunden wird, und endlich noch beim Abgreifen der Ordinate den Fehler γ . Die Gleichung der Isoplethen lautet

$$w = qv,$$

worin q die trigonometrische Tangente ihrer Neigung gegen die Achse der (v) bedeutet. Daraus folgt die Differenzenformel

$$\delta' = q \delta.$$

Aehnlich wie im vorigen Paragraphen ergibt sich sodann die Wirkung eines Linearfehlers \mathfrak{S} in der Auswahl der Isoplethe zu

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \sqrt{1 + q^2}.$$

Und man hat als Gesamtfehler η des tausendsten Falles, wenn $\delta = 9$,

$$\eta = + \sqrt{\delta^2 + 2q^2 \delta^2 + \gamma^2}.$$

In vielen Fällen wird auch $\gamma = \delta$ gesetzt werden dürfen, wonach sodann:

$$\eta = + \delta \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + q^2}$$

gefunden wird. Die Art, wie in unserer Tafel die Gleichung

$$w = uv$$

abgebildet wird, lässt leicht erkennen, dass q proportional dem Factor u wächst, welcher durch die Isoplethen dargestellt ist. Die Grösse dieses Wachstums hängt mit der Wahl des Maassstabes für die Abscissen zusammen. In Fig. 9 ist $q = 0,1 u$, somit

$$\eta = + 0,1414 \delta \sqrt{100 + u^2}.$$

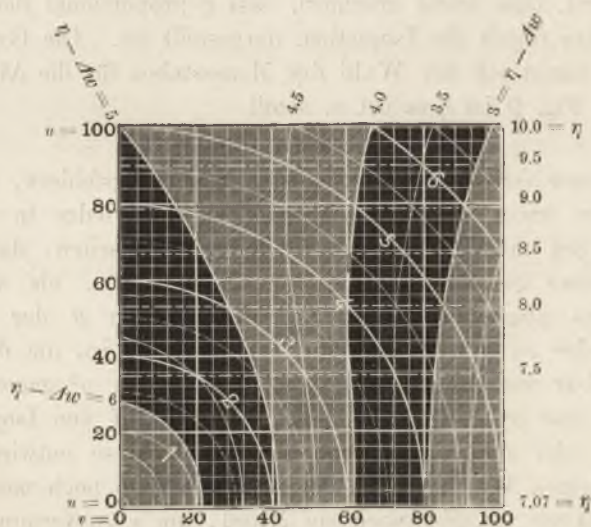
Dies die lineare Grösse des tausendsten Schätzungsfehlers, um welche es sich hier in erster Linie handelt, weil wir ihn wieder in eine Zeichnung übertragen müssen. Es ist freilich zu wünschen, dass wir das Maass w ebenso genau in die Zeichnung eintragen, als wir Maasse wieder daraus abgreifen können, nämlich, wenn δ der tausendste Schätzungsfehler an einem Endpunkte einer Linie ist, um $\delta \sqrt{2}$. Das ist hier offenbar nur näherungsweise möglich, wenn u^2 gegen 100 sehr klein, wenn also jedenfalls der kleinere Factor auf den Isoplethen abgelesen wird, oder auch dann, wenn man die Tafel so entwirft, dass m einen sehr kleinen Werth erhält, die Abscissen also noch mehr gedehnt erscheinen. Aber es gibt noch ein Mittel, um η zu vermindern: man kann durch eine mechanische Vorrichtung beim Auftragen der Grössen w den Fehler $\gamma = 0$ machen; schon wenn man das Schichtennetz auf einer durchsichtigen Platte aufträgt, und an deren geschliffener Kante die Endpunkte von w durch einen fein geschärften, immer gleichmässig angelegten Bleistift aufträgt, ist zu vermuthen, dass $\gamma < \delta$ werde.

Es fragt sich noch, wie sich η zur Genauigkeit des Rechnungsergebnisses verhält. Ist in der Gleichung $w = uv$ der tausendste Fehler der Factoren von der Grösse δ , so sahen wir früher schon, dass alsdann $\Delta w = + \delta \sqrt{u^2 + v^2}$ der Fehler ist, den die Rechnung in je tausend Fällen einmal erwarten lässt. Geben wir in den Gleichungen für Δw und η der Grösse δ eine bestimmte Zahlenbedeutung, z. B. in der Tafel $\delta' = 0,05$ der Einheit, da in Fig. 9 die Einheit des Productes nicht genauer abgelesen werden kann, während wir bei dreistelliger Zahlenrechnung der Einheit der Factoren den Fehler $\delta'' = 0,005$ zuschreiben, so lassen sich beide Fehlerwerthe unmittelbar mit einander vergleichen. Wir können nämlich in ein und dasselbe gleichgetheilte Coordinatennetz über den Achsen der u und v Isoplethen nach den Gleichungen

$$u = \sqrt{\frac{\eta^2}{2 \delta'^2} - 100} \quad \text{und} \quad \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\Delta w}{\delta''}$$

eintragen. Die letzteren werden die schon aus Fig. 23 uns bekannten Kreise, die ersteren Gerade parallel zur Achse der (v). Δw und η nehmen in Fig. 25 in gleichen Stufen zu. Die Gleichstellung ihrer Werthe führt auf eine Curve, welche angibt, für welche Reihe von Producten

Fig. 25. Fehler der Multiplicationstafel zum Abgreifen, verglichen mit denen dreistelliger Zahlenrechnung.



Rechnung und Construction gleiche Genauigkeit liefern. Es ist eine gleichseitige Hyperbel von der Form

$$u^2 = v^2 - 200,$$

die jedoch nicht mehr in den Bereich der Tafel fällt. Aehnlich wie früher werden auch jene Isoplethen gefunden, welche die Ueberlegenheit einer über die andere Rechnungsmethode auf bekannte Weise abbilden. Um die Fehler in Ganzen zu erhalten, wurden wie früher die Einheiten der Factors mit 10, also die Einheiten des Productes mit 100 multiplicirt.

§ 28. Schätzungsfehler an Schichtentafeln mit gestreckten Isoplethen.

Wir haben dabei zwei Fälle zu unterscheiden, den, wo die gesuchte Grösse an den Coordinaten, und den, wo sie an den Isoplethen selbst abgelesen wird.

1) Haben die Fehlergrößen η , δ' , ϑ' und γ dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen und ist wie dort m die trigonometrische Tangente der Neigung gestreckter Isoplethen gegen die Abscissenachse, während,

wie in Taf. V (§ 9, zweites Beispiel), an den Ordinaten der gesuchte Functionswerth (hier die Distanz), abgelesen wird, so gilt wie in § 27:

$$\eta = \sqrt{\delta'^2 + \vartheta'^2 + \gamma^2},$$

ferner nach der Construction als selbstverständlich:

$$\delta' = q \delta, \quad \vartheta' = \vartheta \sqrt{1 + q^2}$$

und wenn $\vartheta = \delta = \gamma$:

$$\eta = \delta \sqrt{2} \sqrt{1 + q^2}. \tag{10}$$

Ein Functionswerth $f(w) = H(u, v)$, den wir auf den Ordinaten abgreifen wollen, muss, wenn die u -Isoplethen Gerade sein sollen, nach § 11 (c) jedenfalls von der Form sein:

$$f(w) = \chi(u) + \varphi(u) \cdot \psi(v), \tag{c}$$

oder
$$y = p + q \cdot x, \tag{c^*}$$

woraus hervorgeht, dass

$$q = \varphi(u).$$

In unsrem Beispiele ist $D_0 = ak \cos^2 \alpha$, also $q = ak$ zu setzen. Dabei ist angenommen, dass für $x = \cos^2 \alpha$ und $y = D_0$ gleiches Längenmaass gewählt worden sei, da sonst die Grösse y noch mit β zu multipliciren wäre, dem Verhältniss der y -Einheit zur x -Einheit; man erhielte in diesem letzteren Falle eine neue Gleichung

$$Y = \beta y = \beta p + \beta q x = P + Qx$$

über gleichgetheilten Coordinaten, für welche die Einheit der x -Achse das Maass ist.

Unter der Voraussetzung von $k = 100$ finden sich in den drei Feldern der Tafel V drei verschiedene β , welche der verschiedenen Abscissentheilung entspringen. Ist wie früher $10g$ die Breite eines Feldes, so berechnet sich für jedes die Abscisseneinheit, wenn α' und α'' die Argumente der Feldergrenzen sind, aus:

$$\frac{\cos^2 0^\circ - \cos^2 90^\circ}{\cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha''} \cdot 10g \quad \text{oder} \quad \frac{10g}{\cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha''}$$

und da Blatt V so construirt ist, dass (für $k = 100$) sich die Ordinateneinheit zu $10g$ verhält wie 1:85, so ist das Verhältniss β der Ordinaten- zur Abscisseneinheit:

$$\beta = \frac{\cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha''}{85}.$$

Dies Verhältniss verkleinert sich noch in dem Maasse, als die Constante k sich vergrössert und wir erhalten allgemein für Blatt V:

$$\beta = \frac{\cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha''}{0,85 k}; \quad Q = ak\beta = \frac{\cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha''}{0,85} \cdot \alpha;$$

also für die drei Felder der Reihe nach:

$$Q_1 = 0,00036 a; \quad Q_2 = 0,00104 a; \quad Q_3 = 0,00156 a.$$

Statt (10) ist nun zu bilden:

$$H = \pm \delta \sqrt{2} \sqrt{1 + Q^2}. \tag{10^*}$$

Haben wir aus (10*) das Längenmaass des Ablesungsfehlers gefunden, so lässt es sich sehr leicht in Einheiten der Distanz ausdrücken, da ja auch das Maass dieser Einheiten auf Blatt V, sobald es zum Gebrauche fertig, eingetragen ist.

2) Ist die gesuchte Grösse w durch die Isoplethen vertreten, in der Schichtentafel also die Function:

$$\psi(v) = \chi(w) + \varrho(w) \varphi(u) \quad (d)$$

dargestellt durch Gerade, deren Gleichung lautet:

$$y = p + qx, \quad (d^*)$$

wobei wieder $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(v)$ gesetzt wurde, so sind, ähnlich wie in § 21, die Grössen der Schätzungsfehler zuerst in Linearmaass der Coordinaten auszudrücken und dann überzugehen zu dem Einfluss auf die Ablesung der Grösse w .

Zunächst werden in der Richtung der x und y die Fehler δ beim Aufsuchen des Coordinatenschnittes begangen, sodann, senkrecht zu den Isoplethen, bei der Interpolation ihres Abstandes, der Fehler ϑ . Dieser zerlegt sich nach der Gleichung:

$$\vartheta^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

wobei wieder nach Fig. 22, wenn q die trigonometrische Tangente der Isoplethen, gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{q}; \quad \Delta x = +q \vartheta \sqrt{\frac{1}{1+q^2}}; \quad \Delta y = +\vartheta \sqrt{\frac{1}{1+q^2}}.$$

Wie in § 21 geschehen, könnten wir nunmehr den Einfluss der beiden δ , sowie der zusammengehörigen Projectionen Δx und Δy auf die Ablesung w berechnen; doch finden wir diesen Einfluss bequemer, wenn wir zuvor sämtliche Ablesungsfehler so auf die Ordinaten- oder Abscissenachse reduciren, dass ihre Wirkung unverändert bleibt. Das Verfahren des vorigen Paragraphen liefert uns diese Grössen η oder ξ , die erstere, so wie wir sie dort finden (unter der Annahme $\gamma = \delta$):

$$\eta^2 = (\delta^2 + \vartheta^2) (1 + q^2); \quad \text{oder:} \quad \xi^2 = (\delta^2 + \vartheta^2) \frac{1 + q^2}{q^2}. \quad (11)$$

Für gestreckte Isoplethen ist insbesondere:

$$q = \varrho(w); \quad \eta = \Delta \psi(v) \quad \text{oder} \quad \xi = \Delta \varphi(u)$$

zu setzen und durch Differenziren die Aenderung Δw aufzusuchen, welche w in Gleichung (d) erleidet, wenn z. B. $\psi(v)$ sich um η ändert. Dabe werden wir $\vartheta = \delta$ setzen und in Einheiten der xy -Coordinatenachsen ausgedrückt denken.

Nehmen wir als erstes Beispiel die logarithmische Rechentafel auf Blatt I vor, so folgt dafür aus (11) die Gleichung:

$$\eta = \delta \sqrt{2} \sqrt{1 + q^2} = 2 \delta.$$

Denn in der aus $w = w$ durch Logarithmiren entstandenen Formel:

$$\log v = \log w - \log u$$

ist $\varrho(w) = q = 1$; $\chi(w) = \log w$; $\psi(v) = \log v$; und wenn wir die vorerwähnte Differentiation ausführen, entsteht:

$$M \cdot \frac{dw}{w} = d \log v = \eta,$$

woraus:

$$\Delta w = 4,6 w \delta = 4,6 u v \delta.$$

Es entspricht dies Resultat dem des § 25 vollkommen, da wir hier unter δ schon das Verhältniss des zu befürchtenden Schätzungsfehlers zu der Coordinateneinheit, also zu der Seitenlänge (12,5cm.) der logarithmischen Rechentafel verstehen. Nach unseren bisherigen Annahmen ist der Ablesungsfehler des tausendsten Falles auf Blatt I:

$$\Delta w = + 0,00184 w,$$

also nicht ganz 0,2% des Productes, eine Sicherheit, die häufig ausreicht.

Als zweites Beispiel wählen wir ein solches, wo die Einheiten der x - und y -Achse beliebig festgestellt wurden. Blatt IV der Lichtdrucktafel gibt die m -Iso-plethen nach der untergeschriebenen Gleichung, die wir so ordnen:

$$\frac{b_0 + b_n}{1600} = \frac{10}{m} \cdot (1 + 0,004 t),$$

wobei $b_0 + b_n$ Millimeter, t Celsiusgrade und m Meter bedeuten. Sie geht über in

$$y = qx$$

wenn $y = (b_0 + b_n) : 1600$; $q = 10 : m$ und $x = 1 + 0,004 t$ gesetzt wird. Blatt IV ist nun so entworfen, dass 5° und 50mm. je ein Centimeter der Coordinatenscalen einnehmen. Nach den soeben erfolgten Gleichstellungen macht dies 0,02 Einheiten der Abscissen- und $50 : 1600 = \frac{1}{32}$ Einheiten der Ordinatenachse aus, oder es wird jede Ordinateneinheit gleich 0,64 ($= \beta$) Abscisseneinheiten. Ueber gleichtheiligen Coordinaten hätten wir also nicht die vorstehende Gleichung, sondern die folgende abgebildet:

$$Y = \beta y = \beta q x = Q x.$$

Rechnen wir $\delta = \beta = 0,005$ cm. wie bisher, so ist $\delta = 0,005 \times 0,02 = 0,0001$ Einheiten der Achsen der x und Y , und folglich analog (11):

$$H = 0,0001 \sqrt{2} \sqrt{1 + Q^2}. \tag{11^*}$$

Durch Differenziren erhalten wir nun:

$$x \cdot dQ = dY \quad \text{oder} \quad - 10 \beta (1 + 0,004 t) \frac{dm}{m^2} = dY,$$

woraus folgt, weil $\Delta Y = H$:

$$\frac{\Delta m}{m} = \pm \frac{0,0001 \sqrt{2} \sqrt{m^2 + 6,4^2}}{6,4 (1 + 0,004 t)}.$$

Da auf Blatt IV die Grösse m zwischen 10 und 20m. variirt, so wechselt bei $t = 0^\circ$ das Fehlerverhältniss $\Delta m : m$ zwischen:

$$\frac{\Delta m}{m} = \pm 0,00026 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta m}{m} = \pm 0,00046,$$

kann also (selbst noch für $t = - 15^\circ$) innerhalb der Tafel nicht über 1 : 2000 steigen. Gegenüber der Genauigkeit der Barometermessungen, ja schon gegenüber der der Babinet'schen Formel, ist dies ausreichend. Ein constantes Fehlerverhältniss für die ganze Tafel würden wir bei logarithmischer Coordinatentheilung gewonnen haben. Vergl. § 35.

Zweiter Abschnitt.

Verwendung von Schichtentafeln bei Aneroidmessungen.

Seit Erfindung der Aneroide oder Federbarometer haben barometrische Höhenmessungen grössere Wichtigkeit erlangt als je zuvor. Während man dieselben vormals fast nur zur Ermittlung bedeutender Höhenunterschiede anwandte, für welche sich die umständliche Aufstellung und Anwendung des Quecksilber-Reisebarometers wenigstens lohnte, hat sich jetzt dieser Methode der Bahnbauingenieur zu seinen Vorarbeiten bemächtigt und die Erfahrung gemacht, dass das Aneroid gerade kleine Höhendifferenzen mit einer Genauigkeit angibt, welche im Verein mit seiner raschen Wirksamkeit vortreffliche topographische Grundlagen für die erste vergleichende Beurtheilung concurrirender Bahnprojecte liefern kann. In erstaunlich kurzer Zeit werden weite Flächen einer Generalstabskarte oder eines Katasterplanes mit den nöthigen Höhenangaben zur Construction von Horizontalcurven bedeckt, so dass mit geringeren Kosten weit grössere Strecken in den Bereich der Voruntersuchung gezogen werden als bei Anwendung irgend einer anderen Nivellirmethode, die Auswahl der günstigsten Linie also unter einer grösseren Zahl von Projecten getroffen werden kann. Nicht minder werthvoll ist das kleine Dosenbarometer dem Bergsteiger, der es mit der nöthigen Umsicht anwendet, und es kann nicht fehlen, dass die Geographie, seitdem sich die Freiwilligencorps der Alpenvereine mit Aneroiden bewaffnet haben, jetzt im Laufe weniger Jahre eine ebensogrosse Ausbeute zuverlässiger Höhenangaben über Berggipfel und Thäler bezieht, als früher in Jahrzehnten.

Bei einem so ergiebigen Messverfahren ist jede kleine Erleichterung der Aufnahme oder Berechnung wichtig, und diejenigen Vortheile, welche die Anwendung von Schichtentafeln gewährt, machen sich bei jeder einzelnen Messoperation eindringlich geltend. Um sie in das rechte Licht zu stellen, soll die Methode der barometrischen Höhenmessung nebst ihren theoretischen Grundlagen kurz, aber im Zusammenhang hier vorgetragen werden.

Cap. V. Die Barometerformel.

§ 29. Die Barometerformel für constante Temperatur und ihre Abbildung.

Für permanente Gase, wie es die Hauptbestandtheile der atmosphärischen Luft sind, ist von Mariotte das Gesetz gefunden worden, wonach die Spannkraft oder der Druck der Luft bei constanter Temperatur ihrer Dichtigkeit proportional ist. Ein gewisses Luftquantum von 0° C. z. B., das, in dem geschlossenen Schenkel eines Heberbarometers abgesperrt, einer Quecksilbersäule von 760mm. Höhe das Gleichgewicht halten könnte, vermag das doppelte Gewicht dieser Säule zu balanciren, wenn es durch Aufguss von Quecksilber in dem offenen Schenkel auf die Hälfte seines Volumens, d. h. auf die doppelte Dichte gebracht worden ist. (Dabei kommt, wenn das Experiment im luftgefüllten Raume ausgeführt wird, der äussere Luftdruck oder die ihn vertretende Quecksilbersäule mit in Anrechnung.)

Sei eine freie, ruhende cylindrische Luftsäule in gleiche Schichten von h Meter Höhe abgetheilt (Fig. 26), so repräsentirt jede Schichte das gleiche Volumen, aber nicht das gleiche Gewicht Luft. Denn das Gewicht der oberen Schichten ruht auf den unteren und veranlasst den gleichen Gegendruck und eine ihm entsprechende Dichtigkeit der unteren Schichten. — Seien unter Voraussetzung gleicher Temperatur $b_0; b; b_n$ die Quecksilbersäulen, denen das Luftgewicht über der untersten, zweiten, dritten Grenzscheide proportional ist, so sind die Gewichte, also auch die Dichtigkeiten $d_0, d,$ der ersten, zweiten Schichte etc. proportional den Unterschieden des Luftdruckes, unten und oben, somit auch den Unterschieden der Quecksilbersäulen.

$$d_0 : d, = (b_0 - b,) : (b, - b_n).$$

Die Dichtigkeiten dieser Schichten verhalten sich aber auch nach Mariotte direct wie ihre Spannungen, welche wiederum durch den Druck der darüber ruhenden Luftsäulen oder durch die entsprechenden Barometerhöhen gemessen werden; also

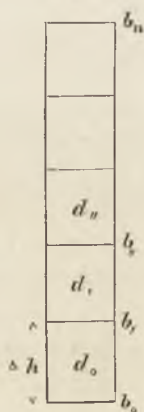
$$d_0 : d, = b, : b_n,$$

was um so näher richtig ist, je dünner die Schichten sind, je eher uns also gestattet ist, die Dichtigkeiten in jeder Schichte als constant zu betrachten. Aus dem Vorstehenden folgt:

$$b, : (b_0 - b,) = b_n : (b, - b_n)$$

$$b, : b_0 = b_n : b,$$

Fig. 26.



und da sich die Reihe dieser gleichen Verhältnisse beliebig weit fortsetzen liesse:

$$b_1 : b_0 = b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = \dots = b_n : b_{n-1} = k,$$

d. h. die Barometerstände für gleichmässig wachsende Höhen bilden eine geometrische Progression. Demnach ist

$$b_n = k^n b_0,$$

also nach Besteigen der Höhe $n\mathcal{H} = h$ fällt das Barometer von b_0 auf $k^n b_0$. Wir können k experimentell bestimmen, wenn wir bei constanter Temperatur von einem Punkte aus, wo das Barometer b zeigt, um \mathcal{H} steigen. Ist das Barometer um \mathcal{H} gefallen, so hat man:

$$k = \frac{b - \mathcal{H}b}{b} = 1 - \frac{\mathcal{H}b}{b},$$

sodann durch Einsetzen dieses Werthes in die vorige Gleichung und Logarithmiren:

$$n \log \left(1 - \frac{\mathcal{H}b}{b} \right) = \log \frac{b_n}{b_0}.$$

Wendet man auf die Klammergrösse die bekannte Reihenentwicklung an, wonach

$\log \text{briggs} (1 + x) = 0,434294 (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots)$, so wird unter Rücksicht auf das Vorzeichen und bei Vernachlässigung der höheren Glieder, da man x beliebig klein wählen darf:

$$n = 2,3026 \frac{b}{\mathcal{H}b} \log \frac{b_0}{b_n}$$

Indem wir endlich beiderseits mit der Beobachtungsgrösse \mathcal{H} multipliciren, wird

$$h = n\mathcal{H} = 2,3026 b \cdot \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}b} \cdot \log \frac{b_0}{b_n} = Q \cdot \log \frac{b_0}{b_n}. \quad (1)$$

Die Zahl Q heisst die Barometerconstante; nicht blos durch das ebenerwähnte Experiment, sondern auch aus folgenden Daten können wir

$$Q = 2,3026 b \cdot \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}b}$$

numerisch bestimmen:

Nach Regnault ist die Dichte reiner atmosphärischer Luft von 0°C . und bei 760mm. Druck (unter 45° Breite und in der Nähe des Meerespiegels) bezogen auf Wasser von grösster Dichte 0,00129277 oder 1 : 773,53. Bei diesem Druck von 760mm. hält die Atmosphäre eine Wassersäule von 10,333m. im Gleichgewicht, wenn das specifische Gewicht des Quecksilbers 13,596 beträgt, wie Regnault für chemisch reines gefunden hat. Wir müssen demnach eine Quecksilbersäule von 1mm. Höhe mit $13,596 \times 0,77353 = 10,517$ multipliciren, um die Höhe der balancirten Luftsäule von genannter Beschaffenheit in Metern zu erhalten.

Die Höhe h in Metern, den Barometerstand b in Millimetern gedacht, finden wir also für $b = 760$:

$$\Delta h : \Delta b = 10,517.$$

Diese Zahlen in die Gleichung für Q eingesetzt ergeben $Q = 18404$. Mit Rücksicht auf den Kohlensäuregehalt der Atmosphäre vermindert Rühlmann*) die Constante auf

$$Q = 18400. \tag{2}$$

Fig. 27 stellt die Barometerformel für trockene Luft von 0°C .

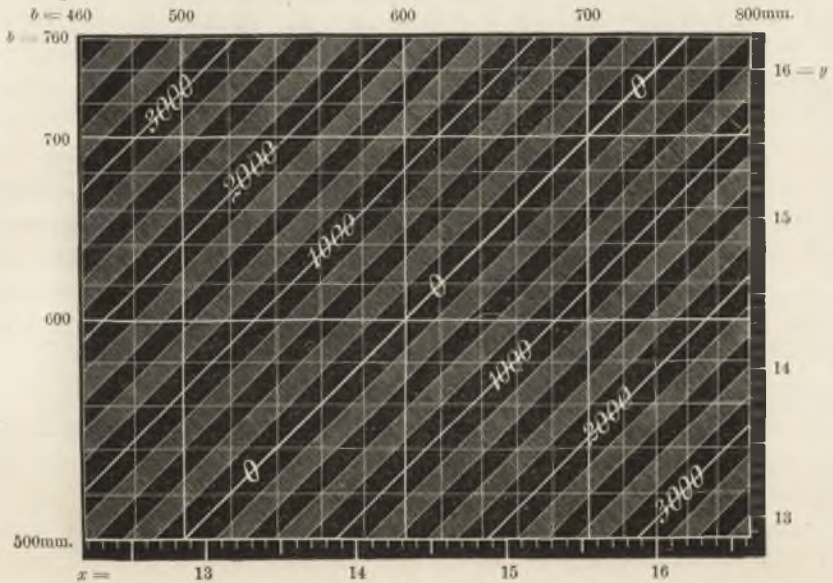
$$h = 18400 (\log b_0 - \log b_n)$$

durch eine Schichtentafel dar, welche nach Anleitung des § 12 leicht verständlich ist. Setzen wir nämlich $h = 1000z$; $x = 18,4 \log b_0$ und $y = 18,4 \log b_n$, so folgt die lineare Gleichung

$$z = x - y,$$

die in der Figur construirt ist, indem für z Stufen von 0,2 Einheiten, für h also solche von 200 Metern angenommen wurden. Zum Entwerfen des verzerrten Coordinaten-

Fig. 27. Barometerformel für trockene Luft von 0° und constante Schwere.



$$h = 18400 \log \frac{b_0}{b_n}; \quad h = x - y.$$

netzes wurden sodann auf die Scala der x und y die Maasse $18,4 \log b$ aufgetragen mit Stufen von je 10mm. für b . Der Gebrauch ist einfach. An der logarithmischen Scala der Abscissen wird der Barometerstand b_0 der unteren Station, an der der Ordinate jener b_n der oberen Station abgelesen, an den Isoplethen das Q fache der logarithmischen Differenz, also die Höhe h . Die Isoplethen haben gleiche Abstände. Soll eine solche Tafel nicht bloß zur Uebersicht dienen, sondern auch zum practischen Gebrauch, so gewährt sie bei geringem äusseren Umfange nur dann hinreichende Genauigkeit, wenn sie bloß einen kleinen Theil der Barometerscala umfasst.

*) Die barom. Höhenmessungen von Dr. Richard Rühlmann, Leipzig 1870, p. 42.

§ 30. Lufttemperatur.

Gay Lussac hat gefunden, dass die Gase bei constantem Druck ihr Volumen proportional der Temperaturzunahme vergrössern und Regnault hat aus sehr sorgfältigen Versuchen den Ausdehnungscoefficienten der Luft zu 0,00367 für Celsiusgrade festgestellt. Nehmen wir für die Luftsäule, deren Gewicht durch eine gegebene Differenz der Stände eines oberen und unteren Barometers gemessen werden möge, durchaus die gleiche Temperatur t an, so wächst bei unverändertem Gewicht die Höhe der Säule auf das $(1 + 0,00367 t)$ fache, während die Temperatur von 0° auf t° steigt. Demnach wird

$$h = 18400 (1 + 0,00367 t) (\log b_0 - \log b_n).$$

Dasselbe gilt, wenn die Lufttemperatur eine lineare Function der Höhe und t das Mittel ist aus den Lufttemperaturen beider Stationen. Umgekehrt lässt sich diese Formel benützen, um aus dem bekannten Höhenunterschied h zweier Stationen und den daselbst gleichzeitig beobachteten Barometerständen b_n und b_0 die Temperatur der zwischenliegenden Luftschichten unter der Voraussetzung zu berechnen, dass dieselbe entweder auf die ganze Höhe h dieselbe, oder eine lineare Function der Höhe sei. Zuerst hat E. Plantamour*) diese Rechnung für die Monatsmittel 10jähriger Barometerbeobachtungen in Genf und auf dem St. Bernhard durchgeführt und gefunden, dass der eingeschlagene Weg bis jetzt der einzige ist, auf welchem die Lufttemperatur mit Sicherheit bestimmt werden kann, weil die unmittelbaren Angaben des Thermometers in allen Fällen durch die Ausstrahlung des Bodens, überhaupt der Umgebung, beeinflusst sind. Später hat R. Rühlmann*) dieselbe Rechnung mit Bezug auf dieselben Stationen für 6jährige Beobachtungen vorgenommen, konnte sich aber auf ein trigonometrisches Nivellement beider Orte, ausgeführt durch Plantamour, stützen, während Letzterem früher nur ein barometrisches Nivellement (aus 10 Jahresmitteln) zur Verfügung stand. Das Resultat der Rühlmann'schen Rechnung ist in Fig. 3 A übersichtlich niedergelegt und zeigt grosse und regelmässige Abweichungen von den Temperaturen, welche aus dem arithmetischen Mittel der Thermometerangaben beider Stationen gezogen sind. (Fig. 28.) Man könnte zwar vermuthen, dass daran die Unsicherheit der Hypothese stetiger Temperaturabnahme mit der Höhe der Luftschichten Schuld sei. Indessen ist diese Annahme innerhalb der uns zugänglichen Höhen gerechtfertigt, worauf schon die Monatsmittel langjähriger Thermometerbeobachtungen auf den

*) S. Seite 5, Anmerkung. Gegen Strahlung vollkommen geschützte Thermometer sind sehr schwierig aufzustellen und nur auf meteorologischen Stationen ersten Ranges neuerdings anzutreffen.

meteorologischen Stationen der Schweiz und Deutschlands hindeuten.*) Unabhängiger von der Bodenstrahlung sind indessen die Thermometerbeobachtungen im Luftballon, sobald grössere Höhen erstiegen werden; die in Fig. 1 dargestellten Erfahrungen Glaisher's bei Messungen im verankerten Ballon deuten denn auch auf die stetige Verminderung der

Fig. 3 A. Wahre Lufttemperatur in mittlerer Höhe (1442m.) zwischen Genf und dem St. Bernhard.

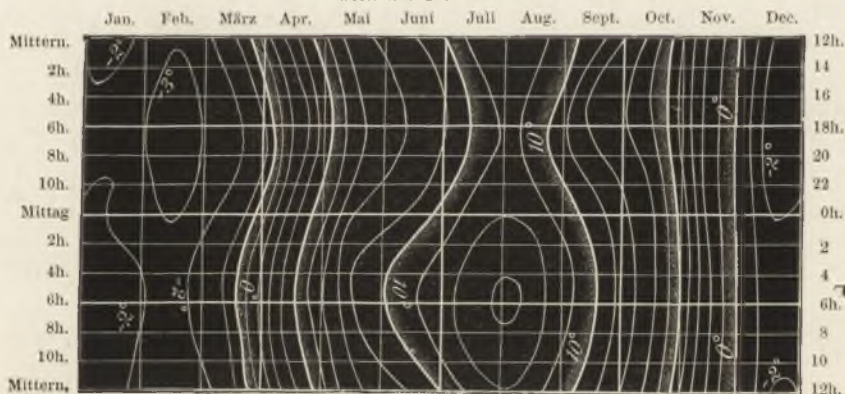
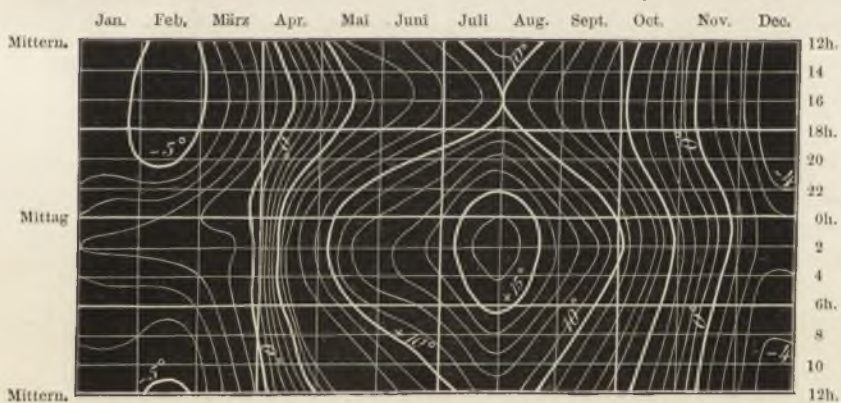


Fig. 28. Mittel der Thermometerangaben für Genf und den grossen St. Bernhard.



Lufttemperatur mit der Höhe, sobald der Einfluss der strahlenden Wärme auf das Ballonthermometer zu schwinden beginnt**). Sowohl aus Glaisher's

*) A. Weilenmann, Schweizer meteorol. Beob., 8. Jahrgang, und Naturforscher VI, 345, über 8jährige Thermometerbeobachtungen an 53 Stationen der Schweiz. — Hann, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Januar 1870. Band LXI, Abth. II, 65. — Hirsch, über Temperaturabnahme mit der Höhe. Bulletin de la société des sciences naturelles de Neuchâtel, 1868; Naturforscher II, 100.

**) Mechanic's Magazine, Sept. 1869; Glaisher's Bericht vor der British Association zu Exeter. Naturforscher II, 387.

Thermometerbeobachtungen wie aus denen der meteorologischen Stationen ergibt sich, dass die Abnahme der Temperatur mit der Höhe, ganz ebenso wie die Lufttemperatur einer bestimmten Höhe, einer jährlichen und täglichen Periode unterworfen ist. Aber die auf eine und die andere Weise gefundenen Zahlenwerthe können nicht übereinstimmen, weil die Einflüsse der Ausstrahlung fremder Körper auf das Thermometer im einen Falle gar nicht, im andern nicht völlig ausgeschlossen sind. Bündigen Aufschluss über dieses Thema kann nur Plantamour's Methode geben; ein ausgiebiges aber schwer zugängliches Material liegt dazu in den langjährigen Barometerbeobachtungen der meteorologischen Stationen Europa's bereit, ist aber noch nicht bearbeitet. Um desto willkommener ist ein Beitrag Rühlmann's in der angeführten Schrift, woselbst er aus den Bauernfeind'schen 5tägigen Beobachtungen am hohen Miesing*) die Abnahme der Temperatur mit der Höhe berechnet und dieselbe zu allen Beobachtungszeiten sehr nahe als eine lineare Function der Höhe erkennt. Folgende Zahlen geben nach Rühlmann (p. 91) die Höhen in Metern an, innerhalb welcher die Lufttemperatur zu den Bauernfeind'schen Beobachtungsstunden um 1° C. sich änderte. Im Allgemeinen stimmt die Zeit der Maxima und Minima mit den Beobachtungen auf Luftfahrten überein.

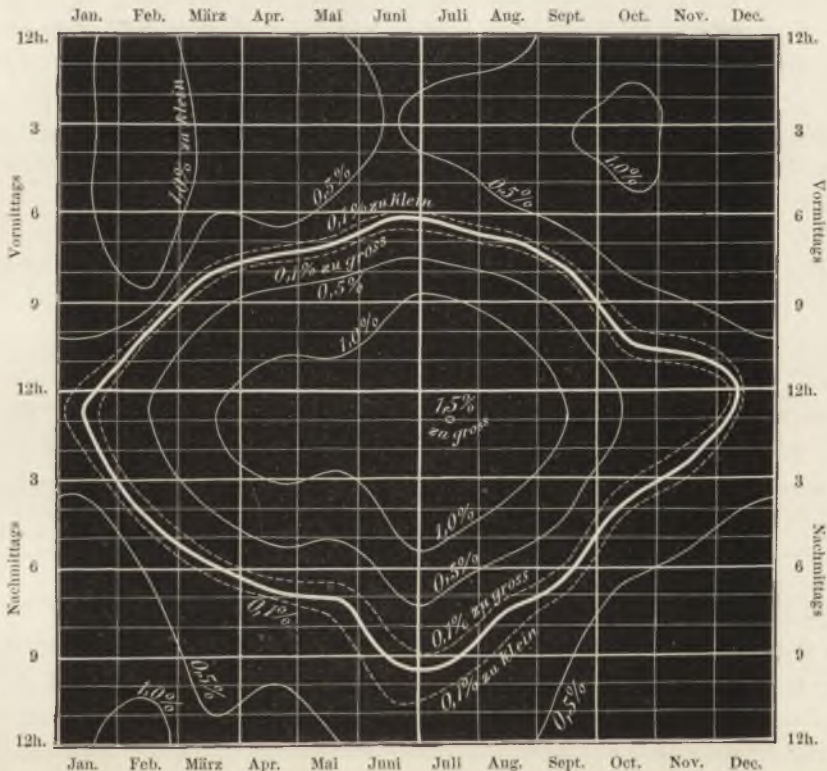
11.—29. August 1857.	Beobachtet zwischen den Meereshöhen:		
	1085,5 und 1349,5m.	1349,5 und 1619,5m.	1085,5 und 1619,5m.
Stunde:	Abnahme um je 1° C. auf die Höhe von:		
Früh 8	528m.	450m.	487m.
„ 9	330	337	334
„ 10	147	135	141
„ 11	203	208	206
Mittags 12	156	159	157
„ 1	126	129	127
„ 2	126	123	125
„ 3	156	150	154
„ 4	176	180	178
„ 5	294	270	281
Abends 6	378	386	382

Aus Vorstehendem folgt, dass man berechtigt ist, für die Temperatur t in der Barometerformel das arithmetische Mittel aus den zu gleicher

*) Bauernfeind, barometrische Höhenmessungen, München 1862.

Zeit herrschenden Lufttemperaturen t_1 und t_2 , der oberen und unteren Barometerstation einzusetzen, aber keineswegs die betreffenden Thermometerangaben. Zu gewissen Tageszeiten jedoch fallen beide zusammen und dann ist eine directe Bestimmung der Lufttemperatur

Fig. 29. Fehler barometrisch gemessener Höhen im Falle gleichzeitiger Bestimmungen der Lufttemperatur am Thermometer.



durch das Thermometer gestattet*). Diese der barometrischen Höhenmessung günstigsten Zeiten verbindet auf Fig. 29 die stark ausgezogene Curve, während die übrigen Isoplethen Fehlerprocente angeben, welche in den barometrisch berechneten Höhen durch die irrige Annahme entstehen, dass auch zu andern Tageszeiten das Mittel aus den Thermometerablesungen t_1 und t_2 für die mittlere Lufttemperatur t in obige Formel eingesetzt werden könne. Freilich gilt die Tafel der Fig. 29 nur für die mittlere Seehöhe von Genf und dem St. Bernhard (1442m.), denn sie wurde nach den Profilen entworfen, welche der Rühlmann'schen

*) Vergl. C. Koppe, Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. III, Heft 1. Der günstige Ausfall seiner Barometermessungen rechtfertigt sein Verfahren.

Schrift beigegeben sind. Es lässt sich aber vermuthen, dass, wenn nicht die Fehlerprocente, so doch die Zeiten der Uebereinstimmung von Lufttemperatur und Thermometerangabe in allen Höhen wesentlich dieselben sind. Denn nach unsren jetzigen Kenntnissen fallen sie sehr nahe mit jenen Tagesstunden zusammen, wo die Temperaturabnahme der Luft mit der Höhe ihre Minimalwerthe erreicht, und diese Werthe sind nicht allzuweit von denjenigen verschieden, welche aus Thermometermessungen in verschiedenen Höhen, aber in der Nähe des Erdbodens, festgestellt worden sind. Es stehen also zwei Wege zur Bestimmung der Lufttemperatur für barometrische Höhenmessungen zu Gebote, entweder die indirecte mit Benützung schon bekannter Höhen oder die directe durch das Thermometer, welche jedoch auf gewisse Tageszeiten beschränkt bleibt.

§ 31. Luftfeuchtigkeit.

Die Barometerformel des vorigen Paragraphen bedarf einer Modification wegen der stets in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdämpfe. Nach neueren Untersuchungen*) ist man genöthigt anzunehmen, dass diese einen Theil der permanenten Gase verdrängen und, an ihre Stelle tretend, das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft vermindern. Denn bei gleichem Druck und Temperatur beträgt das specifische Gewicht des Wasserdampfes nur 0,625 von dem der trockenen Luft. Das Verhältniss ψ , in welchem das Volumen des Wasserdampfes zu dem der Luft steht, darin er enthalten ist, findet sich aus dem Verhältniss ihrer Spannkraft. Man könnte nach Lamont dasselbe feststellen, indem man ein beliebiges Quantum der freien atmosphärischen Luft in einem Kolben mit Manometer hermetisch abschliesst und, nach Absorption des Wasserdampfes durch Chlorkalk, die Druckverminderung β misst, welche dadurch entsteht, dass sich die permanenten Gase in dem frei werdenden Raume ausdehnen. War der Luftdruck zuvor b , so verhielten sich nach Mariotte's Gesetz das Volumen der permanenten Gase im Kolben zum ganzen Rauminhalt wie $(b - \beta) : b$ und das Gewicht der Mischung zu dem eines gleichen Volumens trockner Luft von derselben Spannkraft wie

$$(b - \beta + 0,625 \beta) : b = (1 - 0,375 \psi) : 1.$$

In diesem Verhältniss ist feuchte Luft leichter als trockne, und im umgekehrten :

$$1 : (1 - 0,375 \psi) = (\text{nahe}) (1 + \frac{3}{8} \psi) : 1$$

*) Zeitschr. der österr. Gesellsch. f. Meteorologie 1868, Nr. 15; von Lamont über den „Druck der trockenen Luft“. Ebenda 1875, Nr. 2, H. Hildebrandson und Hann, der Wasserdampf in der Atmosphäre und das Dalton'sche Gesetz. Poggendorff's Annalen 1873, Nr. 4, S. 526. Oskar Emil Meyer und Ferdinand Springmühl, über die innere Reibung der Gase. Ebenda Bd. 118, S. 168, Lamont, die Dalton'sche Dampftheorie.

erhöht sich eine Säule dunsthaltiger Luft gegenüber trockner bei gleichem Barometerstand. Dadurch tritt zu der Barometerformel des vorigen Paragraphen ein neuer Factor und sie lautet nun:

$$h = 18400 (1 + 0,00367 t) (1 + \frac{3}{8} \psi) (\log b_0 - \log b_n).$$

Nach Rühlmann ist der Feuchtigkeitsfactor in dieser oder ähnlicher Form schon von Bohnenberger (naturw. Abhandl. II, p. 183), Soldner (Ueber d. Einfluss der Feuchtigkeit auf das Höhenmessen mit d. Barometer, in Gilbert's Ann. XXXII, p. 204—24, 1809) und Andersen (Zeitschr. f. Phys. u. Math. v. Baumgartner, I, p. 1), ferner von Baumgartner selbst entwickelt worden (Naturlehre, 4. Aufl., Wien 1832, p. 700). Biot schrieb $(1 + \frac{3}{8} \psi)$, da er das spezifische Gewicht des Wasserdampfes etwas grösser annahm (Traité d'astronomie physique, III), und führte Erfahrungsgrößen für die mittlere Dampfspannung bei 0° C. und höheren Temperaturen ein, was auch Brandes (Artikel Höhenmessung in Gehler's phys. Wörterbuch, Leipzig 1829, V, 1, p. 307) unter Anwendung richtigerer Zahlenwerthe thut, zugleich aber darauf hinweist, wie directe Hygrometermessungen zu verwerthen seien. Letztere ausschliesslich anzuwenden empfiehlt Bauernfeind (Beobachtungen und Untersuchungen, München 1862, p. 32) und lässt darum den Factor $(1 + \frac{3}{8} \psi)$ in der Barometerformel unverändert stehen. Wir werden unten zu Biot's Verfahren und zu runden Zahlenwerthen zurückkehren, die schon Laplace (Mecan. celeste IV, livre 10) einführte. — Mehrere der genannten Autoren nehmen die Gültigkeit des Dalton'schen Gesetzes auch für die freie Atmosphäre an, eine Voraussetzung, welche übrigens zu dem nämlichen Resultate führt, wie die obige.

Wie im vorigen Paragraphen zur Bestimmung von t , so wird es sich hier zunächst um die Mittel zur Bestimmung von ψ handeln. Ein Apparat dafür wurde schon erwähnt, andere finden sich in empirisch eingetheilten Hygrometern; als brauchbarstes gilt das August'sche Psychrometer, welches die Differenz der Lufttemperatur t und des feuchten Thermometers τ angeben soll und hieraus, sowie aus dem Maximal-Dunstdruck σ , der nach Magnus' Versuchen die Temperatur τ begleitet (Fig. 2), unter Rücksicht auf den herrschenden Barometerstand b nach folgender empirischen Formel von August den wahren Dunstdruck β liefert:

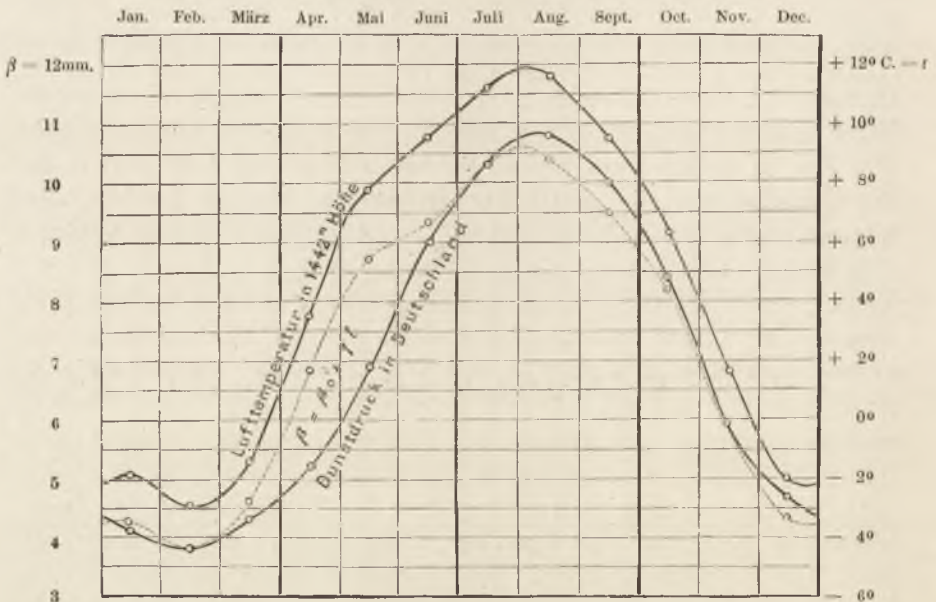
$$\beta = \sigma - 0,0008 (t - \tau) b.$$

Obige Barometerformel setzt voraus, dass das Verhältniss ψ des Dunstdrucks zum Barometerstand entweder in der ganzen Luftsäule h constant oder, wie die Lufttemperatur, eine lineare Function der Höhe sei, so dass die Einführung des arithmetischen Mittels $\frac{1}{2} (\psi' + \psi'')$ aus den gefundenen Zahlen beider Barometerstationen zur Bestimmung von ψ genüge. Die Richtigkeit dieser Annahmen ist aber mehr als je in Frage gestellt durch die Beobachtungen englischer und französischer Gelehrten in Luftballons. Nach Flammarion*) nimmt die relative Feuchtigkeit (wenigstens in unsrem Klima) vom Erdboden bis zu einer bestimmten Luftschichte zu; dann wieder ab; diese Schichte hat eine verschiedene Höhenlage je nach Tageszeit, Jahreszeit und Witterung. Nur selten, und

*) Sitzung der Pariser Akademie vom 25. Mai 1868, Naturforscher I, 231.

dann gegen Morgen, ist sie der Erdoberfläche nahe, wurde aber bei Sonnenaufgang einmal in 150m., ein andermal in 1100m. Höhe ange-
 getroffen. Ausser mit der Höhe wechselt die Luftfeuchtigkeit ihrer Grösse
 nach mit der Zeit, dem Zustande des Himmels und selbst mit der Be-
 schaffenheit des Terrains, über dem man sich befindet. Letztere Bemerkung
 wird, mehr im Detail und für geringe Höhen, unter Anderen
 nachgewiesen durch Vogel's*) Versuche, welche eine Zunahme der Luft-
 feuchtigkeit über vegetationsreichem Boden zeigten. Dies beweist zum
 wenigsten, dass die einzelne Bestimmung der Luftfeuchtigkeit in der
 Nähe des Erdbodens fast werthlos ist und dass auch die Doppelmessung
 an beiden Barometerstationen die darauf verwandte Mühe nicht lohnt.
 Man hat fast dieselbe Aussicht auf richtige Höhenberechnung, wenn man
 statt einzelner Beobachtungswerthe mittlere Erfahrungsgrössen für die

Fig. 30. Der Dunstdruck als Function der Lufttemperatur.



Die punktirte Dunstdruckcurve (für Meereshöhe) berechnet sich aus $\beta = \beta_0 + \gamma t$, woein
 die Näherungswerthe $\beta_0 = 2,0\text{mm.} + \frac{H}{200} \gamma$ und $\gamma = 0,45$ eingesetzt werden.

Luftfeuchtigkeit in die Barometerformel einführt. In den auf meteorologischen Stationen beobachteten Monatsmitteln des Dunstdruckes gibt sich eine regelmässige jährliche Periode zu erkennen, die in sehr verschiedenen Gegenden nahe dieselben Zahlenwerthe durchläuft. Aus

*) Sitzung der Münchener Akademie vom 5. Dec. 1868, Naturf. II, 131.

Fig. 30, welche die Mittelwerthe eines von Jordan *) zusammengestellten Täfelchens graphisch vorführt, wird man den Parallelismus dieser Zahlengrößen mit denen der Lufttemperaturen erkennen und die Berechtigung entnehmen, beide meteorologische Größen durch eine lineare Function aneinander zu knüpfen, nämlich:

$$\beta = \beta_0 + \gamma t.$$

Der Feuchtigkeitscoefficient der Barometerformel erhält dadurch die Form:

$$1 + 0,375 \cdot \frac{\beta_0 + \gamma t}{b}$$

und die Barometerformel selbst ändert ihre Gestalt in die folgende einfachere

$$h = 18418 (1 + 0,004 t) (\log b_0 - \log b_n), \quad (3)$$

wenn man $\beta_0 = 2,0$, $\gamma = 0,67$ und $b = 760\text{mm.}$ einsetzt, Werthe, deren Aenderung von geringem Einfluss auf das Resultat bleibt. Diese letzte Barometerformel berücksichtigt also einen mittleren Betrag der Luftfeuchtigkeit für jede Jahreszeit, ohne der Tagesperiode, den Witterungsschwankungen oder den Bodeneinflüssen Rechnung zu tragen. Es ist jedoch vorauszusehen, dass mehrere dieser Verhältnisse noch in einfacher Weise Berücksichtigung finden können, sobald erst eine grössere Zahl von wissenschaftlichen Ballonfahrten das nöthige Material geliefert hat.

In der hier gegebenen Form ist der Temperaturcoefficient $(1 + 0,004 t)$ schon von Laplace angewandt und es ist neuerdings wieder von Helmholtz**) darauf hingewiesen worden, in wie einfacher Weise durch ihn (in Verbindung mit dem Zuwachs der Constanten) ein Theil der Feuchtigkeitswechsel in der Atmosphäre berücksichtigt wird. Es wurde hier an schon gebräuchliche Constanten angeknüpft, während der Figur 30 besser entsprechen würden die Interpolationswerthe: $\gamma = 0,45$; $\beta_0 = 2,0 + \frac{H}{200} \gamma$; wobei H die mittlere Seehöhe beider Stationen bedeutet und für b der zugehörige mittlere Barometerstand eingesetzt werden müsste. Der Bruch $\frac{H}{200}$ bezieht sich auf die Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe, welche hier zu $1^\circ \text{C. pro } 200\text{m.}$ angenommen ward. In die Barometerformel eingeführt würden vorstehende Werthe einen mit der mittleren Seehöhe variablen Barometercoefficienten ergeben, wogegen für den Temperaturcoefficienten ein einziger Mittelwerth ausreichte. Die Formel:

$$h = 18400 \left(1 + \frac{2 + 0,00225H}{b} \right) (1 + 0,00392 t) (\log b_0 - \log b_n) \quad (4)$$

würde in dieser Beziehung bis zu bedeutenden Höhen ($H = 2000\text{m.}$) genügen und den Dunstdruck so berücksichtigen, wie er durch die punktirte Curve in Fig. 30 dargestellt

*) Jordan, Taschenbuch der pract. Geometrie, Stuttgart 1873, S. 191. Die daselbst mitgetheilten Zahlen für Nord- und Süddeutschland erhielten gleiches Gewicht.

**) Zeitschrift für Vermessungswesen, 1874, 342.

ist, welche nur in den Monaten April und Mai wesentlich von den Angaben für Deutschland abweicht. Die Veränderlichkeit des mittleren Dunstdruckes mit der Höhe ist übrigens auch in (4) noch nicht voll berücksichtigt.

§ 32. Veränderlichkeit der Schwere.

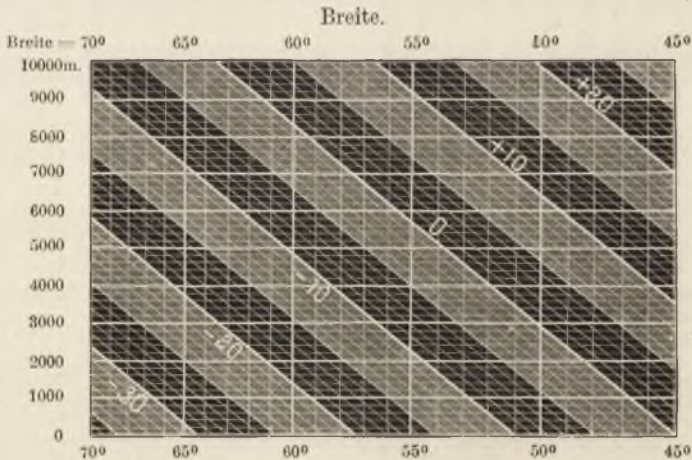
Die Abnahme der Erdanziehung von unten nach oben bewirkt, dass eine Luftschichte von der Höhe Δh und der Dichte d nicht allenthalben den gleichen, sondern einen mit ihrer Höhenlage veränderlichen Druck auf die unteren Schichten ausübt. Ist dieser Druck gleich Eins an der Meeresfläche, deren mittlerer Radius r sei, so nimmt er bei wachsender Höhe z mit der Schwere zugleich ab. Die Entwicklung des § 29 und die Gleichung

$$b_n = k^n b_0$$

gelten aber dennoch, wenn man die Verminderung des Drucks durch entsprechende Vermehrung der Schichtenhöhe ausgleicht. Wir werden also den Luftschichten der Fig. 26 statt gleicher Höhen Δh ungleiche geben, welche im umgekehrten Verhältnisse der Schwere stehen, also mit dem Quadrat ihres Abstandes $r + z$ vom Mittelpunkte der Erde wachsen, oder sehr nahe im Verhältniss:

$$(r^2 + 2zr) : r^2 \text{ oder } \left(1 + \frac{2z}{r}\right) : 1;$$

Fig. 31a. Wachstum der Barometerconstante mit der Höhe und geographischen



d. h. die Schichtenhöhen, von der beliebigen Höhe z an gerechnet, bilden eine arithmetische Reihe ersten Ranges:

$$\Delta h \left(1 + \frac{2}{r} z\right); \quad \Delta h \left(1 + \frac{2}{r} (z + \Delta h)\right); \quad \dots \dots$$

$$\Delta h \left(1 + \frac{2}{r} (z + \frac{2}{n-1} \Delta h)\right),$$

deren Summe, verglichen mit der Höhe $h = n \cdot h$ in der Formel des § 29 sich vergrößert hat im Verhältnisse:

$$\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right) : 1.$$

Mit diesem Factor ist demnach die Barometerconstante des vorigen Paragraphen zu multipliciren in dem Sinne, dass für z die Seehöhe der unteren, und für h der wahre Höhenunterschied der unteren und oberen Barometerstation eingeführt wird.

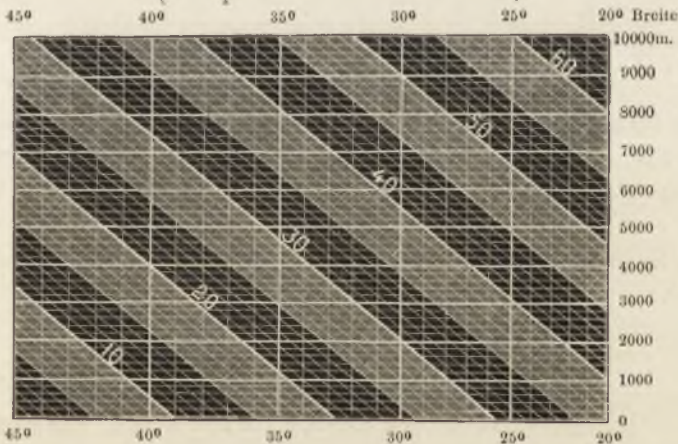
In ganz ähnlicher Weise ändert sich, unabhängig von der Höhe, das Gewicht der Luft mit der geographischen Breite. Die Luftsäule, welche den Barometerstand im Verhältniss $b_0 : b_n$ erhöht, verkürzt sich nach Mariottes Gesetz in dem Maasse, als die Schwere g und mit ihr der Druck jeder oberen Schichte auf die unteren zunimmt, mithin, wenn die Schwere g_{45} unter 45° Breite als Einheit gilt, im Verhältnisse $g_{45} : g$. Ist der Höhenunterschied h_{45} nach der Barometerformel des vorigen Paragraphen gefunden, so ergibt sich h für beliebige Breiten nach:

$$h : h_{45} = g_{45} : g.$$

Wie Rühlmann nach Baily anführt, ist dies Verhältniss gleich:

$$\frac{g_{45}}{g} = \frac{9,7806 + 0,05145 \sin^2 45}{9,7806 + 0,05145 \sin^2 \varphi}.$$

Fig. 31b. Wachstum der Barometerconstante mit der Höhe und geographischen Breite (stets positiv bei Breiten unter 45°).



Oder nach einer leichten Umformung des Nenners und Einsetzen des Zahlenwerthes von $\sin 45$

$$\frac{g_{45}}{g} = \frac{9,8063}{9,8063 - 0,02573 \cos 2\varphi} = (\text{sehr nahe}) 1 + 0,00262 \cos 2\varphi.$$

Mit diesem Factor ist demnach die Barometerconstante des vorigen Paragraphen ebenfalls zu multipliciren.

Fig. 31 a und b zeigen, um wie viele Einheiten die Barometerconstante durch Berücksichtigung der beiden soeben entwickelten Factoren wächst, stellten also die Formel

$$18418 (1 + 0,00262 \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{2z + h}{r}\right) - 18418$$

nach den Argumenten φ und $(2z + h)$ graphisch dar. Es ist darin $r = 6378000\text{m.}$ angenommen und man ersieht daraus, dass eine Constante, welche z. B. für $\varphi = 50^\circ$ berechnet wurde, für 11° südlich und 12° nördlich erst um $0,1\%$ fehlerhaft wird.

Bisher setzten wir das Verhältniss $b_0 : b_n$ der Barometerstände für das der Luftdrucke; dies gilt wohl für Aneroide, deren Federkraft durch die Einwirkungen der Schwere in keiner Weise verändert wird. Bei Flüssigkeitssäulen vermindert sich dagegen in grösseren Höhen der Druck auf die Unterlage, ähnlich wie für die freie Luft, aber nicht ganz so rasch, wenn das Barometer nicht etwa im Luftballon, sondern auf der Erdoberfläche angewandt wird, deren Erhöhungen der Hauptform nach stets plateau-artig sind. Nimmt man nach Poisson den Stand des Barometers auf einem Plateau an, das sich nach allen Richtungen gleichmässig ausdehnt, wenigstens bis zur Grenze des Einflusses seiner Anziehung auf das Quecksilber des Barometers, und bringt diese letztere neben der Erdschwere in Rechnung, so findet man das Verhältniss, in welchem die Angabe der Flüssigkeitssäule vermindert werden muss, um mit der Angabe eines Barometers in Meereshöhe gleichwerthig zu sein, gleich:

$$1 : 1 + \frac{z}{r} \left(2 - \frac{3}{2} \frac{\delta}{A}\right) \text{ das ist nahe: } 1 - \frac{z}{r} \left(2 - \frac{3}{2} \frac{\delta}{A}\right),$$

wo δ die Dichte der Erdschichten über Meereshöhe, A die mittlere Erddichte vorstellt, z aber die frühere Bedeutung hat. Mit diesem Factor, worin man $\delta : A = 5 : 12$ setzen darf, muss jede einzelne Barometerablesung multiplicirt werden, wenn Flüssigkeitssäulen als Maass des Luftdruckes dienen. Da es bei der Barometerformel nur auf das Verhältniss $b_0 : b_n$ ankommt, so genügt es, dasselbe mit

$$\frac{1 - \frac{11}{8} \frac{z}{r}}{1 - \frac{11}{8} \frac{z + h}{r}} = 1 + \frac{11}{8} \cdot \frac{h}{r}$$

zu multipliciren; dieser Factor kann nach Laplace auf einfache Weise durch eine kleine Veränderung der Barometerconstanten*) berücksichtigt werden, was hier jedoch nicht geschehen soll, da es sich zumeist um eine Formel für Aneroidmessungen handelt.

*) Rühlmann, bar. Höhenm. p. 43. Die Barometerconstante wächst auf 18450.

Eine solche Formel*) lautet denn nach allem vorangegangenen:

$$h = 18418 (1 + 0,004t) (1 + 0,00262 \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{2z + h}{6378000}\right) \cdot (\log b_0 - \log b_n). \quad (5)$$

Cap. VI. Graphische Darstellung der Barometerformel.

§ 33. Barometrische Schichtentafel mit Logarithmenscala.

Graphische Barometertafeln sind schon von Rath**), ferner von Hettig***) herausgegeben, Vorschläge dazu von Jordan†) gemacht worden. Knüpfen wir hier zunächst an die Tafel an, welche im § 29 für constante Temperatur entworfen wurde (Fig. 27), so zeigt die Schlussformel des vorigen Paragraphen, dass die Werthe, welche jener Tafel entnommen werden, noch mit mehreren Factoren zu multipliciren, demnach als Argumente einer oder einiger anderen Productentafeln zu behandeln sind. Wir beschränken die Gesamtzahl der Tafeln auf zwei, indem wir für die mittlere geographische Breite und Höhe unsrer Beobachtungen bestimmte Werthe einführen, nämlich

$$\varphi = 50^\circ; \quad z = 220; \quad h = 750;$$

so dass z etwa die mittlere Meereshöhe der deutschen und Schweizer Sternwarten darstellt. Nun geht die Barometerformel (5) in folgende über:

$$h = 18412 (1 + 0,004t) (\log b_0 - \log b_n). \quad (5^*)$$

Wir könnten wieder eine Tafel nach Art von Fig. 27 entwerfen für die Werthe $h_0 = 18412 (\log b_0 - \log b_n)$ und unmittelbar daneben eine andere Schichtentafel fügen, für welche h_0 und t die Argumente wären. Für den Gebrauch aber wird das erste Feld A, Fig. 32 bequemer so eingerichtet, dass b_0 an den Isoplethen, b_n und h_0 an den Coordinatenachsen abgelesen werden, wodurch der Uebergang zu dem zweiten Feld B, Fig. 32 wesentlich erleichtert wird, auch durch eine einfache mechanische Vorrichtung (ein Parallellineal) unterstützt werden kann. Setzen wir nämlich $h_0 = u$, $18412 \log b_n = v$, $18412 \log b_0 = w$, so haben wir die lineare Gleichung zu construiren

$$u + v = w,$$

*) Die darnach berechneten barometrischen Höhen bedürfen, wenn Quecksilberbarometer zur Messung verwandt wurden, eines Zuschlages von 11 : 6400 (nach Poisson gegen 1 : 400 nach Laplace, der die Erdschichten über dem Meeresspiegel ausser Acht lässt). — Die Aenderung der Schwere mit der geogr. Breite berührt das Verhältniss $b_0 : b_n$ nicht.

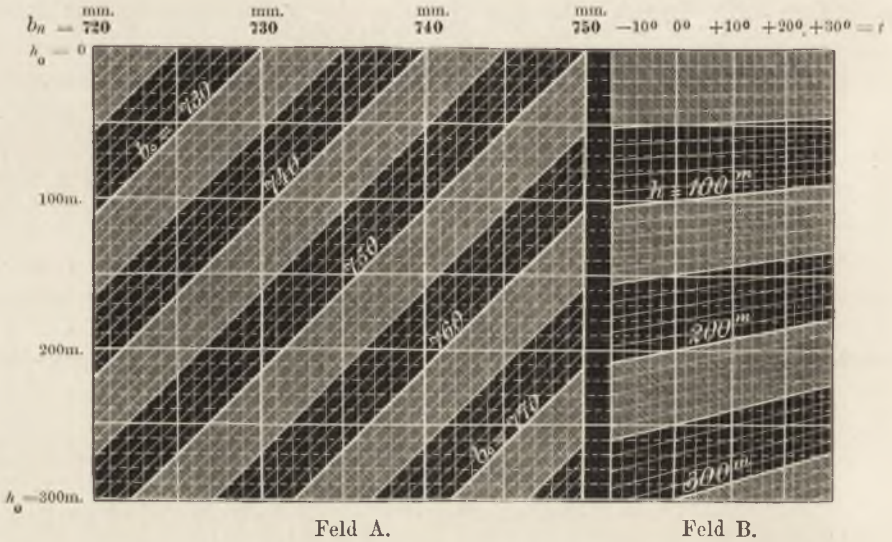
**) Franz Rath, Bestimmung der Seehöhen auf graphischem Wege, herausgegeben von Schön, Wien 1871.

***) Zeitschr. des bayr. Arch. u. Ing. Vereins, Jahrgang 1873, Heft 4, S. 65.

†) Taschenbuch der pract. Geom. Stuttgart 1873, p. 193.

in welcher wir w in Stufen wachsen lassen, welche je einem Millimeter Wachstum von b_0 entsprechen. Dadurch folgen sich die parallelen Iso-plethen in Abständen einer logarithmischen Scala, ebenso wird die Scala der b_n logarithmisch; die Ordinatenachse jedoch ist gleichtheilig.

Fig. 32. Barometertafel zur Vermeidung jeder Zwischenrechnung.



Feld A. Feld B.

$$h_0 = 18412 (\log b_0 - \log b_n). \quad h = (1 + 0,004 t) h_0.$$

Anmerkung: h_0 wird nicht in Zahlen abgelesen, sondern sein lineares Maass als Argument nach dem Felde B übertragen.

Die Gleichung

$$h = h_0 (1 + 0,004 t),$$

welche im Tafelfelde B zur Darstellung kommt, ist die einer Hyperbel über den gleichtheiligen Coordinatenachsen der t und h_0 . Setzen wir aber $h_0 = y$, $1 : (1 + 0,004 t) = x$, $h = q$, so wird jene Hyperbel durch eine lineare Gleichung vertreten von der Form:

$$y = q x,$$

welche für gleichmässig wachsende $h = q$ die Schaar radialer Geraden bezeichnet, deren Abbildung in Fig. 32 B und Fig. 35 B vorliegt, in letzterer Figur mit Andeutung der gleichmässigen Abscissentheilung für x .

Schichtentafeln nach Fig. 32 eignen sich hauptsächlich für Hügelland mit mässigen Höhenunterschieden, wo sie bei geringem Umfang leichte Uebersicht und grosse Genauigkeit gewähren können. Man geht mit dem Barometerstand b_0 der unteren Station in die Iso-plethen des linken Feldes ein und mit dem Barometerstand b_n der oberen Station in die Scala der Abscissen; überträgt den Schnittpunkt der zugehörigen Ordinate und der Iso-plethe horizontal auf das rechte Feld, wo man die mittlere Lufttemperatur t an den Abscissen aufsucht und für den Coordinatenschnitt an den Iso-plethen den Höhenunterschied h der unteren und oberen Station unmittelbar abliest.

Man sieht, dass beim Gebrauche solcher Tafeln Zwischenrechnungen vermieden werden und die Ableitung von Grössen wegfällt, die man schliesslich nicht bedarf.

Dem Umfange jeder einzelnen Tafel entsprechend, wird man z und h in dem Factor $\left(1 + \frac{2z+h}{r}\right)$ besonders auswählen. Uebrigens zeigt Fig. 31 a und b, dass es hierbei nicht auf die grösste Strenge ankommt.

§ 34. Tafel der Seehöhen.

Setzt man in der Schlussformel (5) des § 32 die Lufttemperatur $t = 0^\circ$, ferner $\varphi = 50^\circ$, $b_0 = 760\text{mm.}$, sodann in dem Factor, welcher von der Höhe über dem Meere abhängt, $z = 0$, $h = a \cdot 350\text{m.}$, und bezeichnet das Ergebniss mit H statt h , so entsteht die Barometerformel der mittleren (oder „rohen“) Seehöhen H für 0° Celsius:

$$H = (18410 + a) (\log 760 - \log b). \quad (6)$$

Dass diese Grösse H nur dann die wirkliche Seehöhe der Barometerstation vorstellt, wenn die Beobachtungstemperatur 0° war und der gleichzeitige Luftdruck am Meeresspiegel genau 760mm. betrug, dies kommt hier gar nicht in Betracht. H ist uns nur eine Hilfsgrösse der Rechnung, welche für jede Barometerstation, unabhängig von den übrigen, gebildet werden kann. Die Differenz A zweier solcher Hilfsgrössen H , und H'' , ist der Grösse h_0 , welche aus (5) für $t = 0$ hervorgeht, gleich und bedarf darum nur noch der Multiplication mit dem Temperaturcoefficienten, um in h übergeführt zu werden.

Schreiben wir nämlich statt (6) wieder:

$$H = k \left(1 + \frac{H}{r}\right) \log \frac{760}{b}, \quad (7)$$

worin $k = 18410$ und r der Erdradius; dann wird, wenn die Barometerstände b , und b'' , gemessen sind:

$$\begin{aligned} A = H'' - H &= k \left(\log \frac{b_1}{b''} + \frac{H''}{r} \log \frac{760}{b''} - \frac{H_1}{r} \log \frac{760}{b_1} \right) \\ &= k \log \frac{b_1}{b''} + \frac{H''^2}{r + H''} - \frac{H_1^2}{r + H_1}; \end{aligned}$$

oder wenn man die Brüche in Reihen auflöst, bis auf Glieder des zweiten Grades genau:

$$A = k \log \frac{b_1}{b''} + A \left(\frac{H_1 + H''}{r} - \frac{H_1^2 + H_1 H'' + H''^2}{r^2} \right).$$

Bringt man A auf die linke Seite, befreit es von seinem Coefficienten und entwickelt bei der Division nur Glieder des zweiten Grades, so kommt:

$$\begin{aligned} A \left(1 - \frac{H_1 + H''}{r} + \frac{H_1^2 + H_1 H'' + H''^2}{r^2} \right) &= k \log \frac{b_1}{b''}; \\ A &= k \left(1 + \frac{H_1 + H''}{r} + \frac{H_1 H''}{r^2} \right) \log \frac{b_1}{b''}. \end{aligned} \quad (8)$$

Durch das Glied $\frac{kH, H,,}{r^2} \log \frac{b,}{b,,}$, welches näherungsweise ersetzt werden kann durch $H, H,, A : r^2$, unterscheidet sich A von h_0 , wie aus (5) gefunden wird, wenn man darin $\varphi = 50^\circ$, $t = 0^\circ$, $b,$ statt b_0 , $b,,$ statt b_n , $H,$ statt z und $H,,$ statt $z + h$ setzt. Das unterscheidende Glied ist jedoch von der zweiten Ordnung und wir sind deshalb vollkommen berechtigt zu setzen:

$$A = H, - H,, = h_0 \\ A (1 + 0,004 t) = h = h_0 + 0,004 t h_0. \quad (9)$$

Gesetzt es seien Tafeln für (6) und das zweite Glied von (9) vorhanden, so hätten wir vorerst $H,$ dann $h - h_0$ daraus zu entnehmen, und beim Gebrauche der zweiten Tafel zu berücksichtigen, dass unter t die mittlere Lufttemperatur zwischen denjenigen Barometerstationen verstanden wird, deren rohe Seehöhen $H,$ und $H,,$ den Unterschied h_0 ergeben. Man kann also der ersten Tafel die rohen Seehöhen H für eine ganze Reihe von Barometerstationen mechanisch entnehmen, die Differenzen h_0 dann nach Bedürfniss und mit Rücksicht auf Zeit und Reihenfolge der Aufnahmen bilden. Mit h_0 und der zugehörigen Lufttemperatur geht man darauf in die zweite Tafel ein und findet ohne Mühe die Temperaturcorrection und durch Beifügen derselben zu h_0 die gesuchte Höhendifferenz h .

Zwei solche Tafeln bieten die Blätter II und III. Die erste ist keine Schichtentafel, sondern, wie schon in § 1 erwähnt, mit neben einander laufenden Scalen entworfen, da sie nur ein Argument (b) enthält. Für a in (6) wurden nur ganze Zahlen eingesetzt und jedesmal um eine Einheit vorgeschritten, wenn ein mittlerer Barometerstand erreicht war, welcher der Seehöhe $H = (2a - 1) 175\text{m.}$ entsprach. Im übrigen ist zu der Tafel, an der eine logarithmische neben einer gleichtheiligen Scala hinläuft, nichts zu bemerken, was nicht auch § 1 enthielte.

Auch die zweite Tafel, Blatt III, ist leicht verständlich. Logarithmirt man die Gleichung:

$$\text{Correction} = 0,004 t \cdot h_0,$$

so geht sie nach § 11 in eine lineare über, welche auf Blatt III so abgebildet wird, dass h_0 an den Ordinaten, t an den Abscissen und die Correction an den parallelen Isoplethen abzulesen ist.

Man kann Blatt III auch aus der logarithmischen Productentafel Blatt I dadurch entstanden denken, dass die Zeiger der Isoplethen durch 250 dividirt wurden, denn

$$t \cdot h_0 = 250 \cdot \text{Correction}.$$

Das ganze System der Isoplethen erscheint um ein Stück gleich $\log 250$ vorwärts geschoben. Uebrigens lässt sich zur Berechnung der Temperaturcorrection auch Blatt I selbst nach § 14 benutzen, ebenso der Rechenschieber nach § 17.

Mit ganz denselben Argumenten und in der nämlichen Reihenfolge wie auf der Doppeltafel der Fig. 32 geschehen die Ablesungen auf Blatt

II und III, nur dass bei jener der Uebergang vom linken in das rechte Feld mit einem Blick erfolgt, während von der Tafel der rohen Seehöhen zur Temperaturtafel eine kleine Rechnung (Subtraction) die Brücke bildet. Endlich verlangt die Berechnung von h noch die algebraische Addition $h_0 + \text{Temperaturcorrection}$. Dafür entschädigt jedoch wieder der grosse Umfang der Seehöhentafel, der freilich in Gegenden ohne Werth ist, wo nur geringe Höhenunterschiede vorkommen.

Der Uebergang von einer Tafel zur andern ist stets mit Verlust an Zeit und Sicherheit des Resultates verknüpft. Darum hat schon Biot*) numerische Seehöhentafeln mit doppeltem Eingange für Barometerstand und Temperatur berechnet. Graphische Tafeln der Seehöhen in einem Felde werden nach Rath in folgender Weise entworfen. Indem man in (5*)

$$p = 18412 (1 + 0,004 t)$$

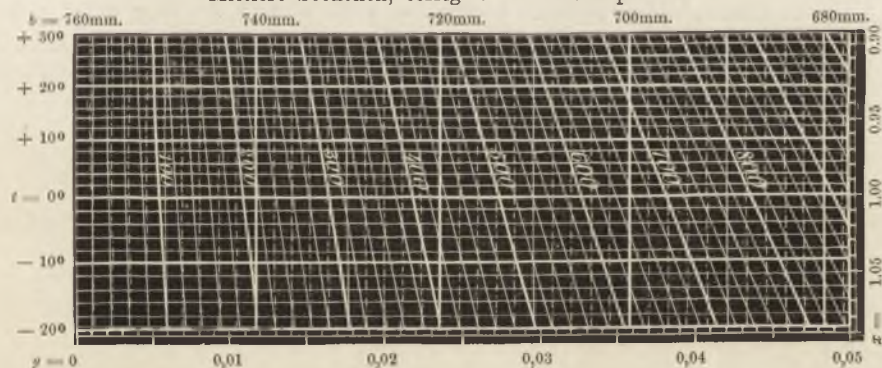
und für t stufenweise wachsende Temperaturen einsetzt, (wobei p für ganz Deutschland gültig bleibt), erhält man Gleichungen von der Form:

$$H = p \log 760 - p \log b,$$

welche, über gleichtheiligen rechtwinkeligen Coordinatenachsen für H und b dargestellt, ein System von Isoplethen ergeben, deren Zeiger Temperaturen bedeuten. Liest man an den Abscissen b , an den Isoplethen t ab, so findet sich H an den Ordinaten. Gilt für zwei gleichzeitige Barometerbeobachtungen b , und b'' , die mittlere Lufttemperatur t , so werden mit

Fig. 33. Barometertafel nach Franz Rath.

Mittlere Seehöhen, corrigirt für Lufttemperatur.



dieser Temperatur für beide die entsprechenden Seehöhen aufgesucht und von einander subtrahirt, um den richtigen Höhenunterschied h beider Beobachtungsstationen zu erhalten.

*) Biot, tables barométriques portatives, donnants les hauteurs par une simple soustraction. Paris 1811.

Da es stets bequemer ist, die Argumente an den Coordinatenachsen und das Resultat der Rechnung an den Isoplethen abzulesen, so formt man die Rath'sche Seehöhentafel wohl besser so um, dass b und t die Coordinaten der Curven sind. Letztere werden nun, wenn die Abscissenachse für b im logarithmischen Maasse getheilt wird, Hyperbelstücke, welche jedoch nur schwach gekrümmt sind und durch eine geringe ungleichmässige Verzerrung der Ordinatenachse gestreckt werden können. Eine Probe dieser Tafel gibt Fig. 33. Setzt man nämlich in der Gleichung:

$$H = 18412 (\log 760 - \log b) (1 + 0,004 t)$$

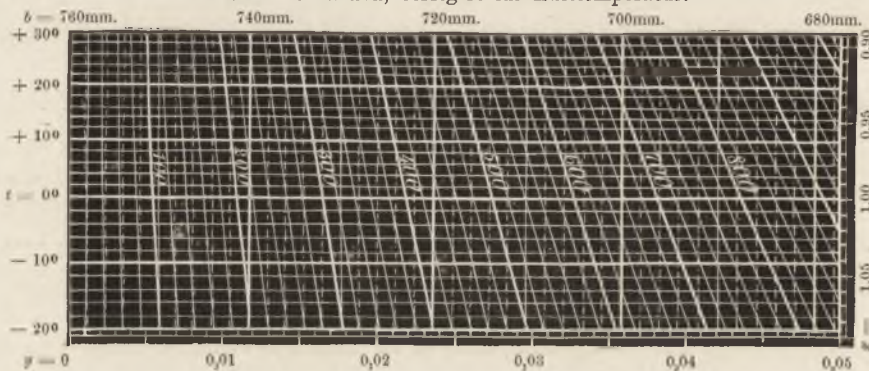
$\log 760 - \log b = y$; $1 : (1 + 0,004 t) = x$; $H : 18412 = q$; so erhält man die lineare Form:

$$y = q x,$$

welche für jeden gegebenen Werth von q , also auch von H , eine bestimmte geradlinige Isoplethe vorstellt. Alle Isoplethen gehen durch den Punkt ($x = 0, y = 0$) und sind

Fig. 33. Barometertafel nach Franz Rath.

Mittlere Seehöhen, corrigirt für Lufttemperatur.



daher leicht zu construiren, wenn man ausserdem noch für jede einen zweiten Punkt ($x = 1, y = q = H : 18412$) festlegt. Zum Aufsuchen der Argumente b und t werden auf der y -Achse noch die Punkte $y = \log 760 - \log b$ für bestimmte Stufen von b und auf der x -Achse die Punkte $x = 1 : (1 + 0,004t)$, ebenfalls in bestimmten Temperaturintervallen, aufgetragen und nach b und A beschrieben. (Dass die Einheiten der y -Achse das 10fache von jenen der x -Achse betragen, wird in der Gleichung $y = q x$ nicht ausgesprochen und beruht auf Willkür.)

Soll diese Tafel schon in der Nähe von 760mm. bequem zu brauchen sein, was in Fig. 33 wegen des sehr schiefen Schnittes der Isoplethen mit dem Coordinatennetz nicht der Fall ist, so muss $\log 800$ statt $\log 760$ mm. in obige Formel für H eingeführt werden, wodurch die Grösse H allerdings jedes Recht auf die Benennung „mittlere oder rohe Seehöhe“ verliert.

Sind beim Gebrauche die Barometerstände b_0 und b_n zweier Stationen (innerhalb Deutschlands) und die zugehörige mittlere Lufttemperatur t gegeben, so werden die entsprechenden Seehöhen H_0 und H_n der Tafel entnommen, von einander subtrahirt und damit der Höhenunterschied h beider Stationen ohne Weiteres gewonnen. Denn:

$$\begin{aligned} H_n - H_0 &= 18412 (1 + 0,004 t) [\log 760 - \log b_n - (\log 760 - \log b_0)] \\ &= 18412 (1 + 0,004 t) \log \frac{b_0}{b_n} = h. \end{aligned}$$

§ 35. Die Babinet'sche Formel und ihre Abbildung.

Wir setzen nun in Formel (5*) des § 33 statt $(\log b_0 - \log b_n)$ die Reihe ein :

$$\log \frac{b_0}{b_n} = 2M \left[\frac{b_0 - b_n}{b_0 + b_n} + \frac{1}{3} \left(\frac{b_0 - b_n}{b_0 + b_n} \right)^3 + \dots \right],$$

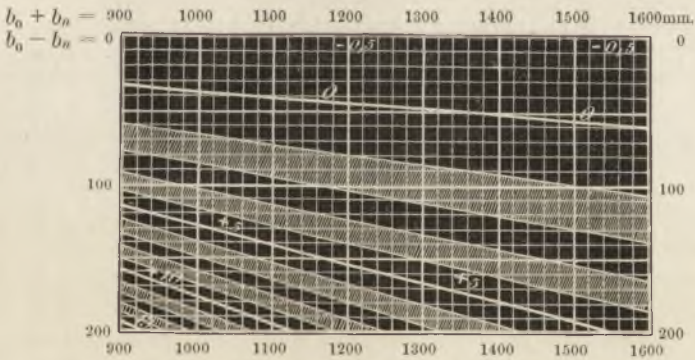
worin M den Modul 0,434294 des Briggs'schen Logarithmensystems vorstellt. Vernachlässigen wir die höheren Glieder der Reihe, so entsteht die von K. v. Fischer und Babinet vorgeschlagene Barometerformel*):

$$h = 16000 (1 + 0,004 t) \cdot \frac{b_0 - b_n}{b_0 + b_n}, \quad (10)$$

deren Constante um etwa 8 Einheiten erhöht ward, um den Ausfall der höheren Reihenglieder theilweise zu compensiren. Der Fehler $\frac{\Delta h}{h}$ dieser Formel gegenüber (5*) ist sehr nahe wiedergegeben durch

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b_0 - b_n}{b_0 + b_n} \right)^2 - \frac{8}{16000}$$

Fig. 34. Beträge, ausgedrückt in Tausendtheilen, um welche vermehrt die Höhen der Babinet'schen Formel bei 0° Lufttemperatur denen der strengen Formel gleich werden.



und die Schichtentafel der Fig. 34 stellt hiernach in Tausendtheilen der Höhe h die Abweichung der Fischer-Babinet'schen Formel von der strengen dar. Es ergibt sich daraus die Brauchbarkeit der Formel für geringe Barometerdifferenzen $b_0 - b_n$.

Die Gleichung (10) lässt sich auf dreierlei Weise graphisch behandeln. Es lassen sich :

*) R. Wolf, Handbuch d. Math. etc. Zürich 1870, I, p. 373.

1) Tafeln entwerfen, welche mit den Argumenten $b_0 + b_n$ und t das Product

$$m = 16000 (1 + 0,004 t) \cdot \frac{1}{b_0 + b_n} \quad (11)$$

geben, wonach noch durch rechnerische oder mechanische Multiplication das Product

$$m (b_0 - b_n)$$

zu bilden ist.

2) Man setzt:

$$h = 16000 \frac{b_0 - b_n}{b_0 + b_n} + 64 t \cdot \frac{b_0 - b_n}{b_0 + b_n} = D + 0,004 D t \quad (12)$$

und entwirft eine Tafel, aus welcher D mit den Argumenten $b_0 + b_n$ und $b_0 - b_n$ entnommen, sodann eine zweite, aus der mit den Argumenten D und t das zweite Glied gefunden und, mit dem Vorzeichen von t versehen, dem ersten beigefügt wird.

3) Man setzt:

$$h' = 16000 \frac{b_0 - b_n}{b_0 + b_n}$$

und entwirft dafür eine Schichtentafel mit den Argumenten $b_0 + b_n$ und $b_0 - b_n$, deren Isoplethen Gerade sind und den Werth von h' stufenweise darstellen. Zur Berechnung des Products

$$h' (1 + 0,004 t) = h' + 0,004 t \cdot h'$$

kann dann die Temperaturtafel III dienen, welche auch die Differenzen roher Seehöhen auf die Beobachtungstemperatur reducirte. (§ 34.)

Jede dieser drei Darstellungsweisen bedingt also zwei Schichtentafeln, von denen jede wieder, bei anderer Wahl der Argumente, in dreierlei Formen gebracht werden kann. So fällt z. B. die graphische Barometertabelle von Hettig unter 1) und enthält ein erstes Feld mit hyperbolischen Isoplethen zur Bestimmung von m , ein zweites Feld mit geradlinigen zur Multiplication von m mit $b_0 - b_n$ *). Hier sollen jedoch nicht alle möglichen, sondern nur einzelne bestimmte Formen von Schichtentafeln für die vorgenannten drei Fälle aufgeführt werden.

Erste Darstellung. Setzt man für m stufenweise wachsende Zahlenwerthe, ferner $b_0 + b_n = y$; $16000 : m = q$ und $1 + 0,004 t = x$, so wird (11) durch die lineare Gleichung vertreten:

$$y = q x,$$

aus welcher die geradlinigen Isoplethen der Lichtdrucktafel Blatt IV entspringen. Entwurf und Gebrauch dieser übersichtlichen Tafel sind

*) Zeitschr. des bayr. Arch.- u. Ing.-Vereins, 1873. Heft 4. S. 65.

gleich leicht verständlich. Das Maass für 1°C . ist das 10fache desjenigen für 1mm. der Barometerablesung $b_0 + b_n$.

Zweite Darstellung. Die beiden Tafeln zur Abbildung der zwei Glieder in (12) können so entworfen werden, dass die Isoplethen Gerade sind. Nennt man $b_0 - b_n = y$; $b_0 + b_n = x$, so ist

$$y = \frac{D}{16000} \cdot x$$

augenscheinlich die Gleichung von Geraden, sobald D stufenweise wachsende Zahlenwerthe annimmt; construirt man darnach über den Achsen der x und y eine Tafel, so wird D an deren geradlinigen Isoplethen abgelesen. Auch in Bezug auf die Argumente $b_0 - b_n$ und D bleibt die Gleichung linear.

Die zweite Tafel für das Glied

$$d = 0,004 D t$$

erhält geradlinige Isoplethen, wenn entweder d und D oder d und t die Argumente sind oder wenn man sie logarithmisch construirt, wie auf Blatt III der Lichtdrucktafeln geschehen ist. Wollte man den Uebergang von der ersten zur zweiten Tafel erleichtern und auch mechanischen Hilfsmitteln zugänglich machen, so würde man als laufende Coordinaten $b_0 - b_n$ und D für das erste, d und D für das zweite Feld wählen und zum Aufsuchen der D ein System von Parallelen ziehen, das beiden Feldern gemein wäre.

Dritte Darstellung. Eine ganz ähnliche Anordnung treffen wir, um in zwei benachbarten Feldern A und B Fig. 35 mit gemeinsamer Ordinatenscala die barometrische Höhe aus h' und h' ($1 + 0,004 t$) zu entnehmen. Setzt man

$$u = 16000 : (b_0 + b_n) \qquad q = b_0 - b_n$$

und demnach

$$h' = q u,$$

so hat man eine lineare Gleichung, in der wir u als Abscisse, h' als Ordinate betrachten und für $q = b_0 - b_n$ stufenweise wachsende Werthe einführen. Es entsteht so das Strahlensystem des Feldes A. Setzt man sodann wie in § 33

$$x = 1 : (1 + 0,004 t),$$

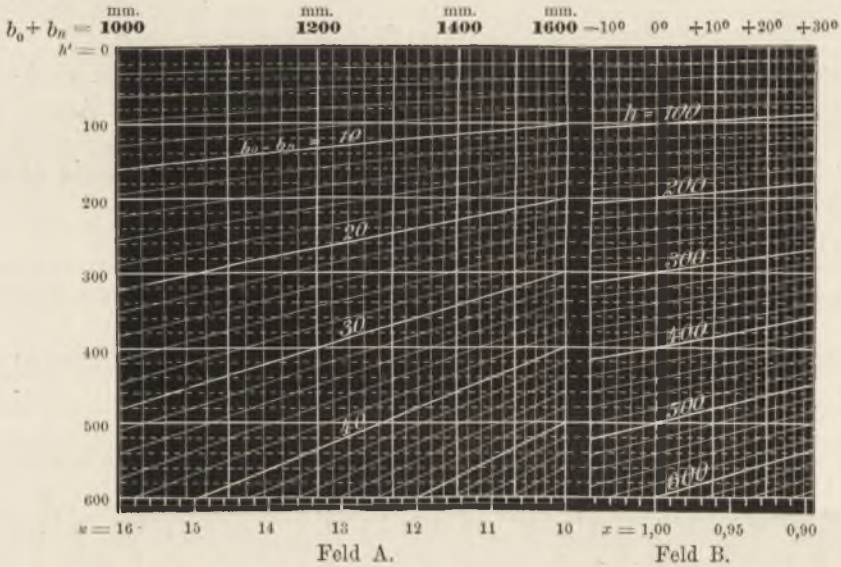
so ergibt sich eine zweite lineare Gleichung für das Feld B, nämlich:

$$h' = h x,$$

in welcher x die Abscisse und, der obigen Bedingung gemäss, h' wieder die Ordinate vorstellt, während h als stufenweise zunehmende Constante behandelt wird. Im Felde A sucht man $b_0 + b_n$ an der Abscissenachse, $b_0 - b_n$ an den Isoplethen auf, verfolgt die zugehörige Ordinate (h'), ohne sie erst abzulesen, in das Feld B bis zur Abscisse t und liest im Coordinatenschnitte (h', t) die zugehörige Isoplethe h ab.

Diese dritte Darstellung ist der im § 33 für die strenge Barometerformel in manchen Punkten ähnlich. Aber abgesehen von dem unbequemen Aufsuchen der Argumente an den Isoplethen leiden die Darstellungen der Babinet'schen Formel an dem Ueberfluss von Zwischenrechnungen,

Fig. 35. Die Babinet'sche Barometerformel.



den sie nothwendig machen; denn obwohl es nur Additionen und Subtractionen sind, so werden dieselben doch bei der Darstellung der strengen Formel nach § 30 (Fig. 32) vermieden; die Zwischenrechnungen aber, welche die Tafel der Seehöhen erfordert, führen wenigstens auf eine grössere Genauigkeit hin. Somit empfehlen sich die zweite und dritte Abbildung der Babinet'schen Formel wenig. Die erste aber (auf Blatt IV) ist zu Ueberschlagsrechnungen sehr geeignet; auch zu genauen, wenn es sich um geringe Höhenunterschiede h und um eine mässige Zahl von Beobachtungen handelt, so dass der Zeitverlust durch die Multiplication mit $b_0 - b_n$ nicht in Anschlag kommt.

§ 36. Die Barometerformeln und der Rechenschieber.

Gerade bei der soeben genannten Operation lässt sich der Rechenschieber mit Vortheil verwenden. Man wird sich dazu der unteren Scala bedienen, deren logarithmische Einheit gross genug ist, um den gesuchten Höhenunterschied in den meisten Fällen so genau zu liefern, als ihn die Aufnahme erwarten lässt. Noch genauer gibt ihn die Thomas'sche Rechenmaschine, aber mit grösserem Zeitaufwand.

Auch bei Berechnungen nach der strengen Barometerformel kann der Rechenschieber gute Dienste leisten und unter Anderm bei Anwendung der rohen Seehöhen (S. § 34) die Temperaturtafel ersetzen, wenn man den Anfangspunkt des Schiebers jedesmal auf die Zahl $(1 + 0,004 t)$ einstellt, sodann am Schieber h_0 (S. § 34) aufsucht und sofort gegenüber am Stab $h = h_0 (1 + 0,004 t)$ abliest. Jene Einstellung kann durch eine kleine Zuthat sehr erleichtert werden. Für alle 5 Grade der Lufttemperatur $+ t$ trifft der Werth von $(1 + 0,004 t)$ auf einen Theilstrich des Rechenschiebers. Klebt man an die betreffende Stelle der Scala des Stabs einen feinen Papierstreifen mit der Bezifferung nach Graden, so kann bei der Einstellung von $(1 + 0,004 t)$ die Temperatur unmittelbar als Argument dienen. Theilstriche für negative Temperaturen wird man auf der Rückwärtsverlängerung der Scala des Stabs anbringen, woselbst es nicht an Raum gebricht, oder am entgegengesetzten Ende der Stabscala bezeichnen. Offenbar können auch Stab und Schieber die ihnen hier ertheilten Rollen tauschen.

Dieselbe Einrichtung lässt sich auch benützen, um nach einem Vorschlage von C. Koppe*) mit Hülfe des Rechenschiebers allein die ganze Babinet'sche Formel zu berechnen. Denken wir uns nämlich auf dem Schieber die Logarithmen der Zahlen

$$w = \frac{16000}{b_0 + b_n}$$

in Intervallen des Argumentes $b_0 + b_n$ von je 20 Millimetern vom Anfangspunkte aus aufgetragen, so können wir nach diesem Argumente den Factor w unmittelbar einstellen. Stand der Anfangspunkt des Schiebers schon auf der Zahl $(1 + 0,004 t)$ des Stabs und stellten wir w etwa mit Hülfe des Läufers ein, so markirt dieser am Stab das Product

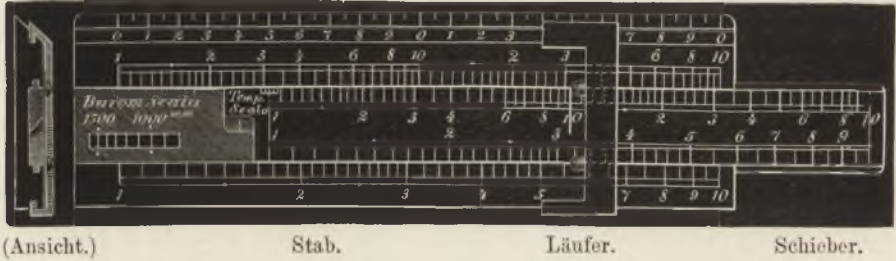
$$16000 \cdot \frac{1 + 0,004 t}{b_0 + b_n},$$

welches nun noch auf bekannte Weise mit $b_0 - b_n$ multiplicirt werden muss. Wie vorhin, so können auch im vorliegenden Falle Stab und Schieber ihre Rollen tauschen, und die Plätze für die beiden Hülffscalas mannigfach verlegt werden, wovon Koppe a. a. O. Gebrauch gemacht hat, um an älteren Rechenschiebern eine recht practische Einrichtung zu treffen. Bei Neuanschaffungen dürfte es sich empfehlen, die Scala der w in der Vertiefung des Stabes, über welche der Schieber hinschleift, anzubringen, den Schieber aber mit einem passenden Zeiger dafür und ausserdem mit der vorbeschriebenen Temperaturscala zu versehen.

*) Zeitschrift für Vermessungswesen, 1874, Heft I, S. 13 etc.

Es ist dies in Fig. 19 angedeutet, und dabei die Scala der $\log w$ im Maasse der oberen Stabscala aufgetragen, woselbst sie nur 0,301 der ganzen Einheit betragen kann, wenn $b_0 + b_n$ zwischen 1600 und 800mm., also w zwischen 1 und 2 variirt. Steht der versenkte Schieberzeiger auf 1600, so zeigt der Scalenanfangspunkt des

Fig. 19. Der logarithmische Rechenschieber.



Schiebers auf 1, steht jener auf 800, so zeigt dieser auf 2 etc. Beim Gebrauche wird der versenkte Index auf das Argument $b_0 + b_n$ der Barometerscala, der Läufer auf das Argument t der Temperaturscala eingestellt, sodann der Anfangspunkt des Schiebers wieder bis zum Läufer vorgeschoben, worauf der letztere seinen Platz verlässt, um das Argument $b_0 - b_n$ auf dem Schieber und damit zugleich die gesuchte Grösse h gegenüber auf dem Stab zu markiren.

Auch nach der strengen Barometerformel ausschliesslich mit Hülfe des Rechenschiebers zu rechnen wäre möglich, jedoch nicht ohne Weitläufigkeiten. Dagegen verdient Beachtung, dass die Temperaturtafel auf Blatt III, welche die Tafel der Seehöhen begleitet und die Formel:

$$c = 0,004 t h_0$$

darstellt, sehr bequem auch durch den Rechenstab ersetzt wird, wenn man auf dem Schieber einen Index so anbringt, dass gleichzeitig mit $\log t$ auch $\log 0,004$ eingestellt wird und sich die Summe dieser beiden Logarithmen dem von h_0 am Stabe beifügt. Der Index fällt mit dem Scalenthail 2,5 zusammen, dieser kann also durch eine beliebige Marke hervorgehoben werden. Sei $h_0 = 500\text{m.}$, $t = + 15^\circ$, so tritt die Marke des Schiebers der 5 auf dem Stab gegenüber, der Läufer wird auf 1,5 des Schiebers gestellt und am Stabe 3 abgelesen, d. h. $+ 30\text{m.}$, welche der Höhe h_0 beizufügen sind.

Cap. VII. Die Barometercorrectionen und ihre Abbildung.

§ 37. Reductionen der Quecksilbersäule.

Unter den Beobachtungsgrössen, mit welchen man in die Barometerformel einzugehen hat, ist das Verhältniss $b_0 : b_n$ der beiden Barometerstände die wichtigste. Man findet dies Verhältniss des unteren und oberen Luftdruckes jedesmal richtig, wenn Flüssigkeitssäulen von gleichem specifischen Gewichte zur Beobachtung dienen; ward ein- und dieselbe Flüssigkeit benützt, aber bei verschiedenen Temperaturen, also verschiedener Dichte, so reducirt man alle Beobachtungen auf gleiche Dichtigkeit, indem man die Volumvergrösserung der Flüssigkeit durch die Wärme in Abrechnung bringt. Der cubische Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers ist 0,00018018 für 1° C. und

$$1 + 0,0001802 T$$

die Volumvergrösserung für T^0 . Bedeutet T die Differenz der Beobachtungs- und Normaltemperatur (gewöhnlich 0^0), so ist die Höhe der Quecksilbersäule durch die vorstehende Grösse zu dividiren, wodurch die Reduction auf die Dichtigkeit der Normaltemperatur ausgeführt ist.

Der Ausdehnung durch die Wärme unterliegt nicht minder der Messingmaassstab, welcher an guten Barometern die Höhe der Quecksilbersäule misst. Letztere wird in Folge der Ausdehnung des Maassstabes zu klein abgelesen, und muss daher durch Multiplication mit

$$1 + 0,0000188 T$$

auf die Normaltemperatur reducirt werden. Ist ferner bei dieser Temperatur die Einheit des Maassstabes, verglichen mit dem Urmaass, um die kleine Länge γ zu gross gefunden worden, so hat man die Quecksilbersäule b ausserdem mit $1 - \gamma$ zu multipliciren. Dieser Factor fällt im Verhältniss $b_0 : b_n$ nur dann weg, wenn beide Barometerstände mit einem und demselben Instrumente beobachtet wurden. Der auf Normaltemperatur und Normalmaass reducirte Barometerstand lautet also:

$$b \cdot \frac{1 + 0,0000188 T}{1 + 0,0001802 T} \cdot (1 - \gamma) = b - b \gamma - b \cdot 0,0001614 T.$$

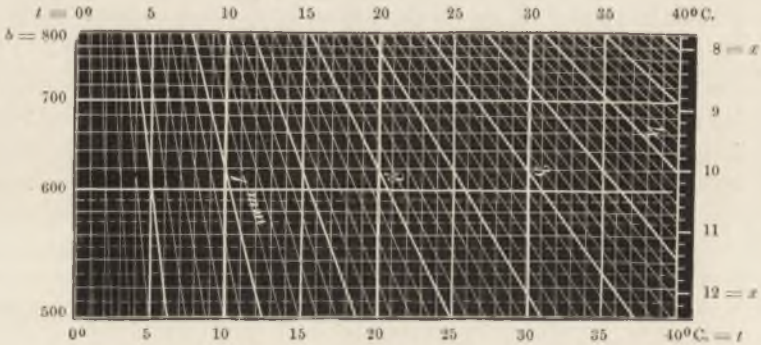
Sobald γ bekannt, lassen sich die beiden letzten Correctionsglieder bequem in eine graphische Tafel bringen. Wir müssen uns hier mit einer Schichten-tafel für das letzte Glied begnügen, welche auch immer ausreicht, wenn ein und dasselbe Barometer zur Höhenmessung verwandt wird. Der Fig. 36 liegt die Correctionsgleichung:

$$c = - 0,0001614 T \cdot b$$

zu Grunde und wenn wir darin von dem Vorzeichen absehen, und ferner setzen: $1 : 0,0001614 \cdot b = x$, somit

$$T = cx;$$

Fig. 36. Reduction der Quecksilbersäule auf 0°, bezogen auf eine messingene Millimeterscala mit der Normaltemperatur 0°.

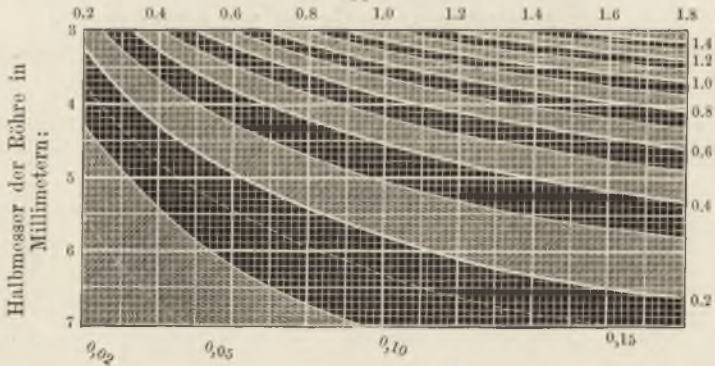


so können wir diese lineare Gleichung über den Coordinatenachsen der x und t bei stufenweise wachsender Constante c abbilden und erhalten strahlenförmige Isoplethen, deren Zeiger Millimeter bedeuten, während auf den Coordinaten Celsiusgrade und Millimeter der Quecksilbersäule die Argumente sind.

Ausser dieser Correction ist an jedem beobachteten Barometerstande noch eine andere, wegen der Capillardepresion des Quecksilbers in Glasröhren, anzubringen. Diese Grösse ist eine Function der Röhrenweite

Fig. 37. Betrag der Capillardepresion in Millimetern.

Höhe der Kuppe in Millimetern:



und der Höhe der Quecksilberkuppe und ihr empirisch gefundener Betrag aus der kleinen Schichtentafel der Fig. 37 zu entnehmen. Bei Gefäßbarometern, wie z. B. dem Fortin'schen Reisebarometer, kommt eine

solche Correction nur an dem oberen Ende der Quecksilbersäule als veränderlich in Frage, bei Heberbarometern an beiden Enden.

Zeigen Versuche die Capillardepression eines Barometers innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler constant und überhaupt sehr klein, so kann dieselbe beim barometrischen Höhenmessen oft vollständig vernachlässigt werden. Denn sei Δb die constante Depression und entwickelt man $\log(b_0 + \Delta b) - \log(b_n + \Delta b)$ nach dem Tailor'schen Satze, so kommt nach Abzug von $\log b_0 - \log b_n$ eine Differenz δ zum Vorschein:

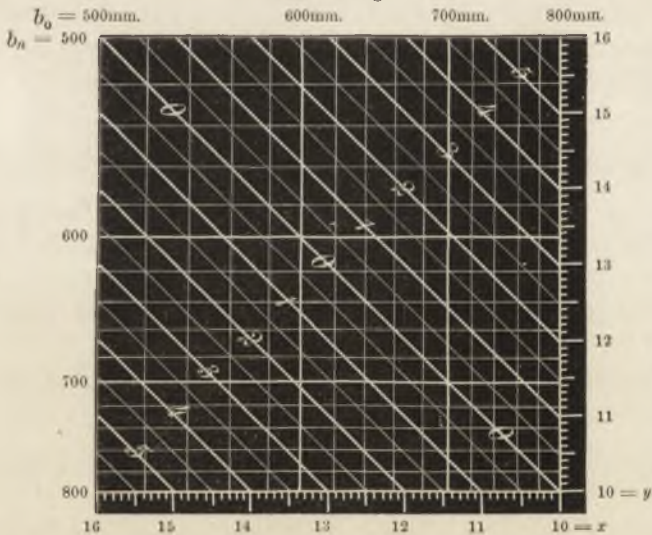
$$\delta = 0,4343 \left(\frac{\Delta b}{b_0} - \frac{\Delta b}{b_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta b^2}{b_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta b^2}{b_n^2} + \frac{1}{3} \frac{\Delta b^3}{b_0^3} - \frac{1}{3} \frac{\Delta b^3}{b_n^3} - + \dots \right),$$

deren höhere Glieder wir übersehen dürfen; dieser Differenz entspricht ein Fehler Δh in der Bestimmung der Höhe h nach (5*) auf Seite 99 von 18412 $\delta (1 + 0,004 t)$ oder:

$$\Delta h = 8000 \Delta b (1 + 0,004 t) \frac{b_0 - b_n}{b_0 b_n},$$

welcher für $\Delta b = 1\text{mm.}$ und $t = 0^\circ$ in der Schichtentafel Fig. 38 dargestellt wird und um den die berechnete Höhe zu klein ist. Für andere

Fig. 38. Einfluss eines constanten Ablesungsfehlers von 1mm. auf barometrische Höhenmessungen.



In Metern: $\Delta h = \frac{8000}{b_n} - \frac{8000}{b_0}$; $y = \Delta h + x$.

Werthe von Δb hat man die Isoplethenzeiger, welche Meter bedeuten, entsprechend zu multipliciren. Trägt man statt der Grössen b_n und b_0 auf den Coordinaten die achttausendfachen Reciproken $y = 8000 : b_n$ und $x = 8000 : b_0$ auf, aber mit den Zeigern b_n und b_0 , so ist

$$y = Ah + x$$

die lineare Gleichung der Isoplethen in Fig. 38. Zugleich zeigt die Schichtentafel den Einfluss constanter Ablesungsfehler, oder constanter Fehler in der Lage des Nullpunktes der Messingscala.

Eine ganz strenge Bestimmung aller Reductionsgrössen eines Barometers ist eine sehr schwierige Arbeit und erfordert z. B. auch die Untersuchung der Reinheit des Quecksilbers, eine sorgfältige Maassvergleichung, die Probe der Uebereinstimmung des Nonienzeigers mit den Diopterfäden etc. Solche Bestimmungen werden gewöhnlich blos für die Normalbarometer meteorologischer Stationen und Sternwarten ausgeführt. Für Reisebarometer muss oft die indirecte Prüfung durch den Vergleich ihrer Angabe mit Normalbarometern genügen. Auch geben Reisebarometer, wenn sie nur unter sich verglichen sind und nur geringe constante Fehler (Standcorrectionen) enthalten, bei Höhenmessungen ausreichende Resultate.

Werden zur Höhenmessung Aneroide verwandt, so thut man wohl, diese täglich zur Bestimmung der Standcorrection mit einem Quecksilberbarometer zu vergleichen, vielleicht selbst während der Messung periodische Ablesungen am Quecksilberbarometer zu machen. Man wird hierbei in der Regel über ein Fortin'sches Reisebarometer verfügen und es sei deshalb kurz der Vorsichtsmaassregeln gedacht, welche bei dem Gebrauch eines solchen beachtet werden müssen. Hat man sich durch Neigen des Instruments davon überzeugt, dass es keine Luftblase enthält, sodann das Barometer passend im Schatten aufgehängt, so versäume man nicht, es direct vor der Ablesung nochmals stark zu bewegen, um dadurch die Reibung des Quecksilbers an den Glaswänden und damit verbundene Verzögerungen der Gleichgewichtsstellung zu überwinden. Man lese sodann sofort aus ziemlicher Entfernung das Thermometer ab, damit die Körperwärme nicht stört, stelle die Gefässschraube so, dass die Stahlspitze ganz wenig in das Quecksilber eintaucht und ziehe die Schraube nun sachte und unter leichten Erschütterungen zurück, bis das Auge, gegen das Licht gekehrt, keine Spur einer Grubenbildung an der Oberfläche des Quecksilbers mehr entdeckt und das Spiegelbild der Spitze die wirkliche eben zu berühren scheint. Nun erst erfolgt die Messung der Quecksilbersäule, indem das vom Lichte abgewandte Auge die zwei Diopterfäden auf den Kuppenscheitel deckt, wobei der Hintergrund durch ein Blatt Papier erhellt wird. Nach Ablesen des Nonius kann die zweite Einstellung auf die Kuppenbasis mit geringerer Sorgfalt erfolgen.

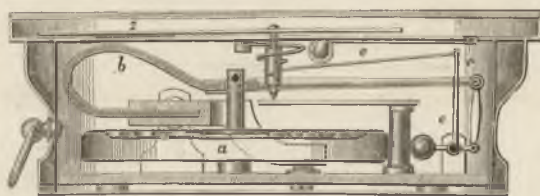
Vergleicht man Aneroide mit dem Quecksilberbarometer, so muss die Reihenfolge der Beobachtungen symmetrisch angeordnet werden, z. B. so: Aneroid I, Aneroid II, Quecksilberbarometer zweimal, Aneroid II, Aneroid I, weil der Luftdruck Schwankungen unterworfen ist, welche in

kurzen Zeiträumen der Zeit proportional angenommen werden dürfen und bei symmetrischer Anordnung im Mittel der Beobachtungen verschwinden. Grosse Sorgfalt verwende man auf Messung der Quecksilbertemperatur und wiederhole diese Messung bei der zweiten Barometerbeobachtung nicht, wenn man Grund hat anzunehmen, dass das Thermometer schneller von der Körperwärme beeinflusst wurde, als der Inhalt des Barometers.

§ 38. Die Aneroide von Naudet und Goldschmid.

Die beiden Hauptformen von Aneroiden, welche bis jetzt in allgemeineren Gebrauch gekommen sind, die von Naudet und die von Goldschmid, werden durch die Figuren 39 und 40 nach Höltschl's „Aneroiden“ schematisch skizzirt. Der äussere Luftdruck wirkt beim Aneroid auf eine luftleere Metallkapsel *a* mit gerippten, federnden Wänden, welche bei Naudet ausserdem durch eine Zugfeder *b* gespannt werden. Bei

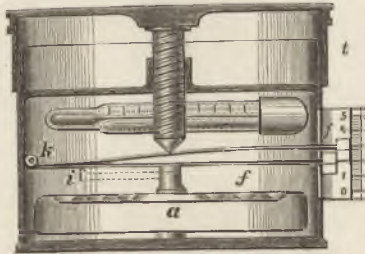
Fig. 39. Naudet's Aneroid.



wachsender Luftspannung wird die Kapsel sammt Feder zusammengedrückt, die Bewegung überträgt sich durch ein Hebelgestänge *cc* auf ein Kettchen *c*, welches auf der Zeigerwelle aufgerollt ist und, wenn es abgewickelt wird, die Kraft einer feinen Spiralfeder zu überwinden hat. In dem Maasse, als dies geschieht, dreht sich die Welle und mit ihr der Zeiger *z* über dem Zifferblatt, das am Rande mit einer gleichtheiligen Scala versehen ist. Die Zeigerbewegung pro Millimeter Aenderung des Quecksilberbarometerstandes beträgt etwa zwei kleinste Scalentheile, wesshalb je zwei derselben zwischen grösseren Theilstrichen zusammengefasst werden, von denen jeder zehnte so numerirt wird, als ob man eine gleichmässig gedehnte Millimeterscala des Quecksilberbarometers vor sich sähe. Da an den grösseren Naudet's die halbe Scaleneinheit noch immer 1mm. lang bleibt, so lassen sich, bei vorsichtiger Vermeidung von Parallaxe, noch Zwanzigstel der Einheit mit Sicherheit ablesen. Die Instrumentaltemperatur wird durch ein in das Zifferblatt eingelassenes Thermometer gemessen.

Bei Goldschmid wirkt dem Luftdruck nur die Federkraft der starken Kapselwände entgegen. Die Bewegung der oberen Wand misst eine Mikrometerschraube mit flachen Gewinden und sehr grosser Trommel; letztere schliesst zugleich das Barometergehäuse nach oben ab, und ihr umgebogener Rand *t* trägt eine hunderttheilige Scala, deren Stellung an einer Marke auf der Gehäuswand abgelesen wird. Ganze Trommelumdrehungen könnten ebenda auf einer Scala unmittelbar beobachtet werden, es wird diese Ablesung aber bequemer mit der Beobachtung des Federfühlhebels *ff* verbunden, welcher zwischen Kapsel und Schraubenspindel eingeschaltet ist, um zu verhüten, dass die directe Berührung dieser beiden Theile einen neuen und zwar sehr veränderlichen Druck

Fig. 40. Goldschmid's Aneroid.



auf die elastischen Kapselwände ausübe. Der sehr geringe, fast constante Druck des Federfühlhebels verschwindet gegenüber dem Luftgewicht, das auf jenen Wänden lastet. Die Einstellung des Goldschmid'schen Aneroids geschieht nun dadurch, dass die Mikrometerschraube der Kapsel genähert wird, bis die Horizontalmarken an den Endschildchen der Fühlhebelarme sich gegenüberstehen; durch Klopfen auf den Gehäusdeckel werden dabei etwaige Reibungswiderstände überwunden. In dieser Lage weisen die Marken mit ihrer Verlängerung auf eine Scala, auf welcher die ganzen Schraubenumdrehungen gezählt werden, deren kleinste Theile also nach unsrer Skizze das Doppelte der Ganghöhe betragen sollten. Der Nullpunkt dieser Scala liegt etwas tiefer als die Fühlhebelmarken bei dem grössten vorkommenden Atmosphärendruck, so dass die Scala in jedem Falle ausreicht. Nach Ablesung dieser und der Trommelscala wird die Mikrometerschraube sogleich wieder (in der Richtung eines auf die Trommel gravirten Pfeils) gelüftet, damit bei eintretender Verminderung des Luftdruckes und Ausdehnung der Kapsel der Fühlhebel nicht verbogen werde, wodurch die Coincidenzstellung der Marken um eine constante Grösse sich ändern würde. Dass die Beobachtung ihrer Coincidenz mittelst einer Lupe geschieht, an der zur Verhütung von Parallaxe ein Zeiger die Absehrichtung angibt; dass der Fühlhebel (dessen Feder sich nur soweit sperren kann, als ein kleiner Metallsteg am unteren

Arm es erlaubt) zu weiteren Reisen ausserdem noch von aussen durch einen gabelförmigen Schubriegel festgeklemmt wird, sei nur nebenbei erwähnt. Wichtiger ist die Zugabe eines Thermometers, das bei den neueren Goldschmid's in die Gehäuswand eingeschraubt ist, bei der Ablesung gelöst und soweit herausgezogen wird, dass die Theilung freiliegt, das Quecksilbergefäss aber jedenfalls drinnen bleibt*).

Beide hier betrachteten Aneroide werden in Lederetuis am Riemen getragen und vor einseitiger Erwärmung behütet, damit das Thermometer stets die Temperatur des ganzen Instrumentes angebe. Den grösseren Naudet'schen Aneroiden ist im Futteral noch ein zweites Thermometer zur Bestimmung der Lufttemperatur beigelegt. Zum Ablesen des Barometerstandes wird jedesmal der Gehäusdeckel, bei Goldschmid auch die Scala der Seitenwand entblöst. Die Ablesung von Naudet's Aneroid geschieht sehr einfach, nachdem die Trägheit des Zeigerwerkes durch Klopfen auf den Gehäusdeckel überwunden worden, in horizontaler Lage des letzteren**) durch einen Blick auf Thermometer und Nadelspitze, wobei die glänzend polirte Stahlwelle des Zeigers, wenn sie diesen geradlinig zu verlängern scheint, das Auge in eine Ebene senkrecht zum Zifferblatt verweist.

Auf der Londoner Ausstellung wissenschaftlicher Instrumente von 1876 waren Aneroide der Naudet'schen Fabrik überhaupt nicht vertreten, wohl aber ähnlich gebaute englischer Firmen. Einige Tascheninstrumente derselben trugen ausser der Millimeterscala eine drehbare Seehöhenscala in Metern; da sie ausserdem gegen Temperatureinflüsse compensirt sein sollten, so mag die Zugabe dem Touristen erwünscht sein. Diese Instrumentchen kosten 84 Mark; mit englischer Maasstheilung, die leider noch vielfach im Gebrauche zu sein scheint, nur 70 Mark. Naudet's Tascheninstrumente von gleicher Form, jedoch ohne drehbare Scala der Seehöhen, sind im Handel für 45 Mark zu haben, seine vortrefflichen grossen Aneroide für etwa 75 Mark.

Es ist möglich, dass sich im Laufe der Zeit noch ein anderes Aneroid, das von Weilenmann-Goldschmid neuester Form, für den Bergsteiger empfohlen wird. Mit Vermeidung aller Hebelübersetzung trägt dasselbe im Innern eine Säule von luftleeren Metallkapseln, deren gemeinsame Ausdehnung bei abnehmendem Luftdruck sich an einer Stange mit Marke beobachten lässt, welche die Fortsetzung der Säule nach aussen

*) Statt des in unserer Skizze angegebenen Auflagepunktes des unteren Hebelarmes über der Mitte der Federbüchse ist bei grösseren Goldschmid-Aneroiden der Lagerpunkt näher an die Drehachse k , etwa nach i hin, verlegt. Nach einer Zeichnung in Höltschl's Aneroiden, Wien 1872, verhalten sich die Abstände des Lagerpunktes und der Schraubenspitze von der Drehachse wie 1 : 3; die verticale Ausdehnung der Federbüchse wird in diesem Falle dreifach (nicht fünffach, wie bei H. aus Versehen angegeben wird) von der Schraube gemessen. Die ganze Länge des unteren Hebelarmes beträgt ausserdem das Doppelte des Abstandes von Schraubenspitze und Drehachse, wonach die Zählmarken für die ganzen Schraubenumgänge doppelt soweit auseinander rücken müssen, als die Ganghöhe beträgt.

**) Weil sonst das Kugelgewicht bei c Fig. 39 nicht wirkt, welches den todten Gang in dem Hebelgestänge vermindern soll.

bildet. Die Bewegung der Marke wird durch ein kleines Mikroskop beobachtet und durch eine Mikrometerschraube gemessen, welche das Mikroskop so verschiebt, dass seine Lage gegen die Marke beim Ablesen immer die gleiche wird. Die ältere Weilenmann'sche Construction, welche ebenfalls ausgestellt war und welche noch Hebelübersetzung für die Bewegung der Marke anwendet, complicirt das Goldschmid'sche Aneroid, ohne es wesentlich zu verbessern. Das zuvor genannte Instrument aber gestattet durch richtige Wahl der Kapseln zur Zusammensetzung der Säule eine Ausgleichung der hauptsächlichsten Unregelmässigkeiten, welche bei Aneroiden vorkommen.

Der einzige deutsche Verfertiger von Aneroiden, Deutschbein in Hamburg, stellte Barometer nach Reitz'schem System aus, deren Construction jedoch, um den Forderungen des Bergsteigers zu genügen, noch der Verbesserung bedürftig ist.

§ 39. Reduction der Aneroidangaben auf Quecksilbersäulen. Schichtentafel für Naudet's Aneroid.

Um die Angaben eines Aneroids direct in der Barometerformel verwenden zu können, wird nur verlangt, dass dieselben proportional dem Luftdruck wachsen, also im luftleeren Raume Null betragen und bei ganzem Atmosphärendruck das Doppelte als bei halbem. Werden aber, wie gewöhnlich, verschiedene Aneroide zur Höhenmessung gebraucht, so müssen deren Angaben ausserdem unter sich übereinstimmen, weshalb man übereingekommen ist, sie alle in Uebereinstimmung mit dem Quecksilberbarometer zu bringen. Die Reduction eines Aneroids auf die Quecksilbersäule sollte also angeben, welche Höhe einer Säule reinen Quecksilbers von 0° C. unter 45° Breite und am Meeresspiegel jeder beliebigen Aneroidablesung entspricht. Geschähe dies, so würden an gleichen Orte sämmtliche Aneroide nach der Reduction gleiche Barometerstände liefern. Es genügt jedoch, die bei einer und derselben Arbeit verwendeten Aneroide mit einem einzigen fest aufgestellten Quecksilberbarometer zu vergleichen, dessen Säule proportional dem Luftdruck wächst; dies setzt nach § 37 bei Gefässbarometern voraus, dass der Anfangspunkt der Scala mit dem Quecksilberniveau im Gefässe zusammenfalle, keine Luft im torricellischen Raum und die Capillardepression sowie der Ausdehnungscoefficient der Scala und des Quecksilbers richtig bestimmt, nicht aber dass das Quecksilber rein sei. Nach Fig. 38 auf Seite 113 reicht es sogar häufig aus, Aneroide auf ein ausgewähltes Instrument der gleichen Art zu reducirern, von dessen (reducirter) Angabe man schon weiss, dass sie eine lineare Function des Luftdruckes mit sehr kleinem constanten Gliede ist.

Vergleicht man ein Naudet'sches Aneroid bei constantem Druck aber wechselnder Temperatur mit dem Quecksilberbarometer, dessen Temperatur 0° sei, so zeigt sich die Aneroidangabe um eine Grösse veränderlich, welche in der Regel der Temperatur proportional wächst, vom Druck aber unabhängig ist, wie die Wiederholung des Versuches bei ver-

ändertem Luftdruck zu beweisen pflegt. Um demnach die Aneroidablesung A von dem Einflusse der Instrumentaltemperatur T zu befreien, muss davon ein Glied in Abzug gebracht werden von der Form wT , wo w , der sogenannte Temperaturcoefficient, sich auf das Scalennaass des Instrumentes bezieht. Sei A_0 die auf 0° reducirte Aneroidangabe, so ist

$$A_0 = A - wT$$

dennoch selten identisch mit dem gleichzeitig beobachteten auf 0° reducirten Quecksilberbarometerstande b , es besteht vielmehr im Allgemeinen eine Differenz $a = b - A_0$, welche die Standcorrection für A_0 heisst, so dass wir haben:

$$b = A - wT + a. \quad (13)$$

Wird nun unter sehr verschiedenen Drucken beobachtet und $a = b - A_0$ als constante Grösse erwiesen, so folgt daraus, dass der Einheit des Zifferblattes auf dem Aneroid genau die Bedeutung eines Millimeters der Quecksilbersäule von 0° C. zukommt, in welchem Falle die vorstehende Formel zur Reduction der Aneroidablesungen hinreicht.

In den meisten Fällen wird sich jedoch ergeben, dass a mit dem Luftdruck sich ändert, wobei es denn mehrentheils, und für mässige Druckschwankungen immer, anzunehmen ausreicht, dass seine Aenderung den Druckdifferenzen proportional ist. Entspricht dem Aneroidstande A_0' die Standcorrection α , so gilt hiernach für A_0 die andere:

$$a = \alpha + (A_0' - A_0) \sigma, \quad (14)$$

worin σ der Scalencoefficient genannt wird. Setzt man diesen Werth in die vorige Formel ein, so kommt:

$$b = A - wT + \alpha + (A_0' - A_0) \sigma.$$

Nehmen wir an, wir hätten α für $A_0' = 760$ mm. direct bestimmt oder mittelbar berechnet, und setzen wir ferner $\omega = w(1 - \sigma)$, so wird

$$b = A - \omega T + \alpha + (760 - A) \sigma \quad (15)$$

die Reductionsformel des Naudet'schen Aneroids auf die Quecksilbersäule, worin auf der rechten Seite nur unmittelbar beobachtete Grössen (A und T) und Constanten vorkommen. Von letzteren ist erfahrungsgemäss ω und σ recht beständig*), α dagegen allmählichem, zuweilen selbst sprungweisem Wechsel unterworfen. Doch kann α jederzeit nach vorstehender Formel mit Hülfe eines einzigen neuen Vergleichs mit dem Quecksilberbarometer frisch bestimmt werden.

Die beiden Correctionsglieder von bleibender Form bringt man zweckmässig in eine Schichtentafel nach der linearen Gleichung:

$$c = -\omega T + (760 - A) \sigma.$$

*) Mittheilung von H. Hartl, Oestr. Zeitschr. f. Meteorologie, 1875, Bd. X. S. 106; daselbst 171, über die Temperaturefficienten Naudet'scher Aneroide.

Als Beispiel diene die Reducionsgleichung, welche Schoder*) für ein Naudet'sches Aneroid bestimmt hat:

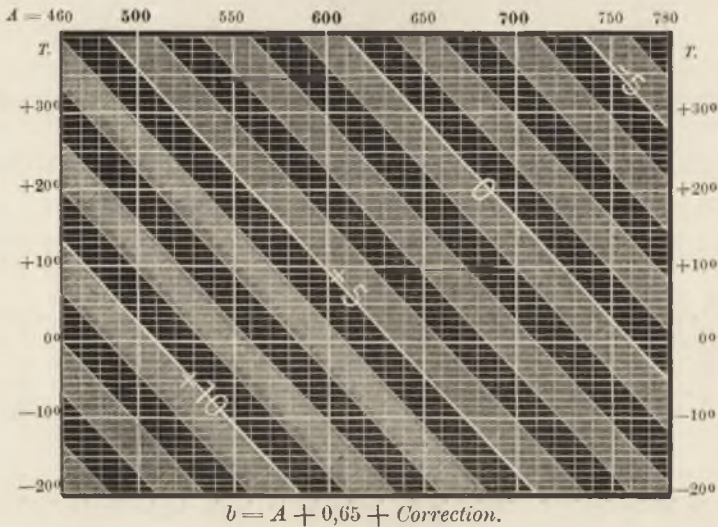
$$b = A - 0,156T + 3,05 + 0,04(700 - A_0),$$

worin nach unsrer Bezeichnung: $A_0 = A - wT$; $w = 0,156$; $\sigma = 0,04$; folglich $\omega = w(1 - \sigma) = 0,150$ ist. Addiren und subtrahiren wir sodann $60 \times 0,04$, so erhalten wir die nach (15) gebildete Reducionsformel:

$$b = A + 0,65 - 0,150T + 0,04(760 - A), \quad (16)$$

deren drittes und viertes Glied für die Argumente T und A durch die Isolethen der Schichtentafel Fig. 4 dargestellt werden. Um die Isolethen nahe unter 45° gegen die Coordinatenachsen legen zu können,

Fig. 4. Reductionstafel für Naudet's Aneroid.



ist der Maassstab für die Einheit von T viermal so gross als der für die Einheiten von A (Millimeter der Aneroidscale) gewählt worden. Unter Rücksicht hierauf vervierfacht sich die trigonometrische Tangente der Isolethenneigung gegen die Abscissenachse, welche aus der Gleichung hervorgeht:

$$T = -6\frac{2}{3}c + \frac{4}{15}(760 - A),$$

und wird nahe der Einheit gleich. Der Betrag der Correction c wird aus der Schichtentafel in Millimetern entnommen, mit dem dortigen Vorzeichen \pm versehen und zu $A \pm c$ algebraisch addirt.

*) H. Schoder, Hülftafeln zur barom. Höhenbestimmung nebst Anleitung zur Untersuchung und zum Gebrauch der Federbarometer, 2. Aufl. Stuttgart 1874. S. 22. Unsere Tafel greift weit hinaus über das Gebiet derjenigen Temperaturen und Drucke, bei welchen Schoder sein Instrument geprüft hat, d. h. also über das Gebiet ihrer Gültigkeit.

Eine genauere Anweisung zur Beobachtung und Berechnung der Reductionsgrößen a , σ , w , ω als die obige findet sich, bündig gefasst, in dem schon angeführten Werkchen von Schoder*). Hier sollen zu dem Gesagten nur noch wenige Bemerkungen Platz finden.

Bei Bestimmung des Temperaturcoefficienten w wird es nicht möglich sein, genau denselben Luftdruck längere Zeit hindurch zu erhalten. Da aber σ stets klein ist und man nur bei geringen Druckschwankungen vergleichen wird, so darf man a für alle Versuche constant annehmen und der Berechnung die Gleichung (13) zu Grunde legen:

$$a - wT = b - A, \quad (13^*)$$

worin w und a unbekannt sind und aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen entweder streng nach der Methode der kleinsten Quadrate, oder näherungsweise auf graphischem Wege aufgefunden werden. Wir wollen hier vier Beobachtungen von Schoder (S. 15) graphisch ausgleichen; die nach (13*) gebildeten Gleichungen lauten:

$$a - 5,4 w = 745,1 - 744,6 = 0,5,$$

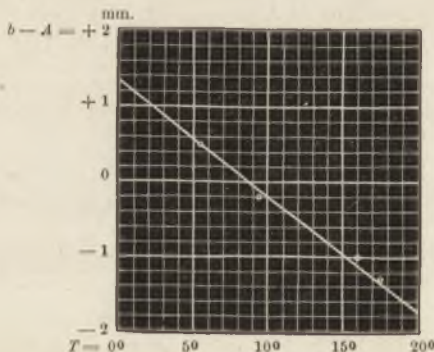
$$a - 9,4 w = 744,9 - 745,1 = -0,2,$$

$$a - 16,0 w = 744,4 - 745,4 = -1,0,$$

$$a - 17,5 w = 743,5 - 744,8 = -1,3.$$

Tragen wir, wie es in Fig. 41 geschehen, die rechtseitigen Differenzen als Ordinaten über den Temperaturen als Abscissen rechtwinkelig auf, so würden, wenn sie fehlerfrei beobachtet wären, sämtliche Ordinatenendpunkte in einer Geraden liegen. Wir ziehen

Fig. 41. Graphische Bestimmung des Temperaturcoefficienten.



diese ideale Gerade näherungsweise so, dass die Summe der Quadrate ihrer Abstände von allen Ordinatenendpunkten darüber und darunter möglichst klein wird. Am Durchschnitt der Geraden mit der Ordinatenachse lesen wir $a = 1,3$ ab; das Verhältniss der Differenz zweier ihrer Ordinaten zu der Differenz der beiden zugehörigen Abscissen gibt uns $w = 0,152$. Man stellt derartige Beobachtungen am besten im Winter an, wo man leicht noch grössere Temperaturdifferenzen erzeugen kann, als sie hier zur Anwendung kamen.

Die Druckdifferenzen zur Bestimmung von σ verschafft man sich entweder durch Bergbesteigungen oder durch künstliche Luftverdünnung im Recipienten. Dies letztere Verfahren ist oft missglückt, vielleicht

*) Zwei ausgeführte Ausgleichungsrechnungen finden sich auch als Beispiele von Berechnungen nach der Methode d. kl. Qu. in Jordan's Geometerkalender 1875 und Kalender f. Vermessungskunde 1876.

darum, weil das Klopfen auf den Deckel des Aneroids unterm Recipienten unmöglich war; jedoch Bauernfeind hat brauchbare Resultate mit der Luftpumpe erhalten und Schreiber Apparate eigens für Aneroidvergleichen construiert. Ein solcher, für die Praxis völlig genügend, ist in Dingler's polyt. Journal Bd. CCXV, Jahrgang 1875, und mehrere andere in dem kürzlich erschienenen „Handbuch der barometrischen Höhenmessungen von Dr. Paul Schreiber, Weimar 1877“ beschrieben und abgebildet. Durch bloßes Aussaugen oder Einblasen von Luft können in denselben hinlängliche Druckschwankungen hervorgerufen werden, um die ganze Aneroidscala zu untersuchen. Ein vorzüglich gearbeiteter, einfacher Apparat ähnlicher Art ist für die geodätische Sammlung der Aachener polytechnischen Schule von deren Mechaniker Herrn Feldhausen ausgeführt und bisher speciell für Naudet'sche Aneroide eingerichtet worden, jedoch auch wohl für andere verwendbar. Er gestattet, das darin befindliche Instrument zu erschüttern, und erlaubt allmähliche Luftverdünnungen um 150mm. durch bloßes Ansaugen, Verdichtungen bis auf 45mm. Druckunterschied gegenüber der äusseren Luft, was meistens genügen wird. Versuche damit haben bestätigt, dass die Scalencorrection in solchen Apparaten ganz wohl bestimmt werden kann.

Sowohl nach Bergreisen, als nach künstlichen Druckverminderungen kehrt die Nadel nicht sofort an ihre alte Stelle zurück, sondern eine Aenderung der Standcorrection α , welche ihrem Hauptbetrage nach bei der Umkehr der Nadel von ihrem tiefsten Stande aus eintritt, gleicht sich erst nach mehreren Stunden oder Tagen wieder aus.

Ist einmal w berechnet, so kann aus jedem Vergleich des Aneroids mit dem Quecksilberbarometer nach Gleichung (13) α gefunden werden, und nachdem dies für recht verschiedene Aneroidstände A_0 geschehen, so setzt man nach (14) die Fehlergleichungen an:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + (760 - A_{0'}) \sigma, \\ \alpha'' &= \alpha + (760 - A_{0''}) \sigma \text{ und so ferner,} \end{aligned}$$

welche entweder nach der Methode der kleinsten Quadrate oder nach dem vorhin behandelten graphischen Verfahren aufgelöst werden. Diesmal wird die Grösse $760 - A_0$ auf den Abscissen, die Beobachtungsgrösse α auf den Ordinaten aufgetragen. Wenn die Aneroidvergleichen bei recht verschiedenen Drucken und Temperaturen gemacht worden sind, so kann man wohl auch die Ableitung von Formeln ganz umgehen und die graphische Ausgleichung der Beobachtungen sofort mit der Construction der Correctionstafel verbinden. Man denke sich letztere, wie in Fig. 4, bereits ausgeführt, und eine Anzahl Punkte P über das Coordinatennetz zerstreut, für welche man die Correction c aufsuchen soll. Ist nun, im umgekehrten Falle, die Lage der Punkte P und die zugehörige Correction gegeben, die Lage der Isoplethen aber nicht, so betrachte man die c als Höhen der gegebenen Punkte über dem Niveau eines Situationsplanes und construire aus Situation und Höhen die isoplethen Niveaucurven für runde Werthe von c , so wie es § 45 lehrt. Diese Curven macht man schliesslich nach dem Augenmaasse einander ähnlich und je nach Umständen zu parallelen Geraden, wodurch einzelne Beobachtungswidersprüche ausgeglichen werden.

Erweist sich σ bei mehreren Aneroiden gleich, so kann die Scalencorrection derselben vernachlässigt werden, wenn vor der Arbeit die Standcorrectionen entsprechend geregelt worden sind. (Die dadurch ersparte Zeit bleibt jedoch bei Anwendung von Schichtentafeln statt numerischer Tabellen ohne Belang.) Dabei ist wohl zu beachten, dass nach Fig. 38 der Wegfall der Scalencorrection erst dann ganz unschädlich wird, wenn die Standcorrection bei dem Luftdruck Null entweder verschwindet oder doch sehr klein ausfällt. Zu dem Ende müsste z. B. in (16) die Standcorrection $\alpha = -30,4$ statt $+0,65$ betragen. Alsdann würden Scalen- und Standcorrection zu vernachlässigen sein. Nun lässt sich zwar bei Naudet's Aneroiden der Standcorrection ein willkürlicher Werth ertheilen, aber nicht innerhalb so weiter Grenzen als hier nöthig würde. (Es ist nämlich bei s in Fig. 39 eine Schraube sichtbar, die in einen starken Metallhebel, den Träger der Feder b eingreift. Durch Verstellen der Schraube wird die Spannung der Feder und zugleich der Zeigerstand verändert.)

§ 40. Schichtentafel zur Reduction von Goldschmid's Aneroid auf das Quecksilberbarometer.

Die Untersuchung des Aneroids von Goldschmid kann nach demselben Verfahren und auf Grund derselben Gleichungen erfolgen, wie die im vorigen Paragraphen entwickelten. Nur kommt bei Goldschmid's häufiger als bei Naudet's Aneroiden der Fall vor, dass schon für kleine Barometeramplituden die Wärmecorrection keine lineare Function der Temperatur mehr ist, sondern eine quadratische oder cubische von der Form:

$$wT + vT^2 + uT^3.$$

Zur Bestimmung der drei Coefficienten w , v , u dienen aber wieder Gleichungen, welche nach (13*) gebildet sind, mit dem Unterschiede, dass auf der linken Seite noch das quadratische und cubische Glied auftreten und dass zur Bestimmung der Coefficienten eine grössere Anzahl von Gleichungen erforderlich ist. Im Falle die graphische Auflösung derselben zur Anwendung kommt, ist es keine Gerade mehr, welche zwischen den Ordinatenendpunkten hindurchgelegt wird, sondern eine Curve, zuweilen mit einem Wendepunkt. Diese Curve der Wärmecorrection wird in Goldschmid's Werkstätte für jedes einzelne Instrument schon ziemlich genau bestimmt und in sauberer Zeichnung dem Etui angeheftet. Für ein Exemplar, welches der geodätischen Sammlung im Aachener Polytechnikum gehört, gibt Fig. 42 im Felde A diese Temperaturcurve wieder.

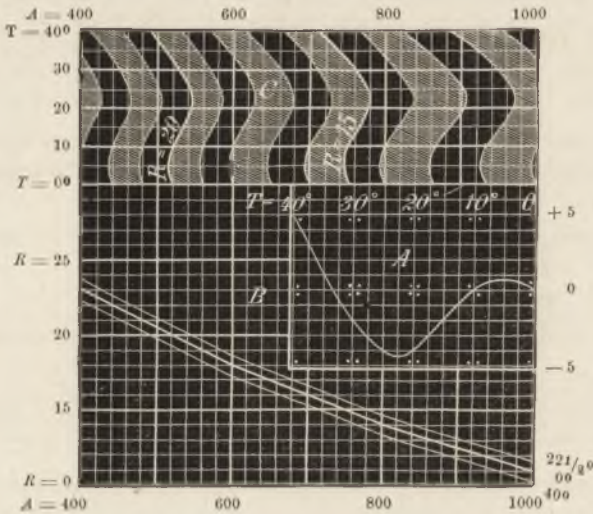
Die Untersuchung der Wärmecorrection ganz von der der Scalencorrection zu trennen, ist bei Goldschmid schwieriger als bei Naudet, wegen des weit grösseren Betrages der letzteren. Wir können also, auch

wenn der Luftdruck nur wenig schwankt, α in (13*) nicht als constant annehmen, sondern müssen sogleich seinen variablen Werth

$$\alpha = \alpha + (A_0' - A) \sigma$$

mitberücksichtigen. Dadurch würde für die Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate eine neue Unbekannte σ in die Bedingungsgleichungen eingehen, was eben keine besondere Schwierigkeit mitbringt. Ist die Differenz $A_0' - A$ aber klein, so lässt sich auch das vermeiden, wenn man die von Goldschmid jedem Instrumente beigegebene Tabelle

Fig. 42. Reduction der Ablesung an Goldschmid's Aneroid.



benützt, worin die Verwandlung der auf 0° reducirten Aneroidablesungen in Quecksilbersäulen schon mit einer Sicherheit angegeben ist, welche für den vorliegenden Zweck bestimmt ausreicht. Ermittelt man daraus σ für den Stand A_0' , so lässt sich das Glied $(A_0' - A) \sigma$ numerisch berechnen, so dass uns, wie früher, blos Bedingungsgleichungen bleiben, deren Unbekannte ausser α nur ein oder einige Temperaturcoefficienten sind.

Dem erwähnten Aneroid ist die folgende Vergleichstabelle von Goldschmid beigegeben worden:

Aneroid, verglichen mit dem Quecksilberbarometer bei 0°.

A_0	b	A_0	b	A_0	b	A_0	b
400	779.0	1200	677.0	2000	588.0	2800	510.0
500	65.5	1300	65.5	2100	77.5	2900	1.5
600	52.0	1400	54.0	2200	67.0	3000	493.0
700	39.0	1500	42.7	2300	57.0	3100	85.0
800	26.0	1600	31.5	2400	47.0	3200	77.0
900	13.5	1700	20.5	2500	37.5	3300	69.5
1000	1.0	1800	9.5	2600	28.0	3400	462.0
1100	689.0	1900	598.7	2700	19.0		

Hat man nun etwa beobachtet $b = 638,0\text{mm.}$; $T = 20^\circ$; $A = 1530$, und beabsichtigt α für $A_0' = 1500$ zu berechnen, so findet sich aus der Tabelle nach den Gleichungen:

$$\begin{aligned} b' &= A_0' + \alpha' & \text{oder:} & & 642,7 &= 1500 + \alpha' \\ b'' &= A_0'' + \alpha' + (A_0' - A_0'') \sigma & & & 631,5 &= 1600 + \alpha' - 100 \sigma \\ & & & & & \sigma = 1,112 \end{aligned}$$

$$\alpha = \alpha' + A\alpha = -857,3 + A\alpha,$$

wonach die anzusetzende Fehlergleichung für die erwähnten Beobachtungen lautet:

$$638,0 = 1530 - 857,3 + A\alpha - 33,36 + 20w + 400v + 8000u,$$

$$\text{oder} \quad 0 = 1,3 + A\alpha + 20w + 400v + 8000u.$$

In derselben Weise werden alle übrigen Fehlergleichungen gebildet.

Um, nach Bestimmung der Wärmecorrection, auch die Scalencorrection zu untersuchen, hat man wieder die Wahl zwischen Bergbesteigungen und Luftpumpenversuchen. Letztere können wegen der eigenthümlichen Einstellungsweise der Goldschmid-Aneroide jedenfalls nur mit grosser Mühe in Schreiber's Apparat, bequem aber nicht wohl anderswo geschehen als in Luftpumpen, wie sie in Kaltwasserheilbädern angetroffen werden, um Lungenleidende aufzunehmen und einige Zeit bei verändertem Luftdruck athmen zu lassen. Uebrigens will man erfahren haben, dass Aneroide von Goldschmid bei Bergreisen nicht so leicht ihre Standcorrection α verändern, als die Naudet's. Nach Aufstellung der Fehlergleichungen, die ganz wie im vorigen Paragraphen zu geschehen hat, wird man wieder die Bemerkung machen, dass das lineare Glied nicht ausreicht, die Scalencorrection darzustellen und zum wenigsten noch ein quadratisches beigefügt werden muss, die Gleichungen also von der Form werden:

$$a = \alpha + (A_0' - A) \sigma + (A_0' - A)^2 \varrho.$$

Sind auch die Constanten der Scalencorrection bestimmt, so lässt sich die allgemeine Reductionsgleichung

$$c = b - A = \alpha + wT + vT^2 + uT^3 + (A_0' - A) \sigma + (A_0' - A)^2 \varrho$$

wieder in eine Schichtentafel bringen, auf deren rechtwinkeligen Coordinatenachsen die Argumente T und $A_0' - A$ aufgetragen werden, während c an den Isoplethen abgelesen wird.

Fig. 42 stellt eine solche Schichtentafel vor, entworfen nach der mitgetheilten graphischen und numerischen Tabelle Goldschmid's, ohne dass daraus die Constanten obiger Formel abgeleitet worden wären. Auch gibt Fig. 42 nicht die ganze Correction c wieder, sondern wir bilden:

$$b = 800 - 0,11 A + R, \quad (17)$$

worin das zweite Glied rechts jedesmal leicht auszurechnen, das dritte kleinere Glied R aber der Tafel zu entnehmen ist. Um diese zu entwerfen, benützen wir eine Hilfstafel (Feld B), deren Argumente A und R sind und deren Isoplethen für constante Temperatur gelten. Die Isoplethe für 0° ist aus den Werthen obiger Tabelle sehr leicht zu construiren; wir erhalten

für $A_0 = 400$: $R_0 = 23,0$;	für $A_0 = 800$: $R_0 = 14,0$;
500 20,5;	900 12,5;
600 18,0;	1000 11,0;
700 16,0;	u. s. w.

Wie wir die Ordinaten R der Isoplethe für T° finden, dazu diene als Beispiel die Temperatur 40° , bei welcher jede Aneroidablesung laut Fig. 42 (Feld A) um 5,0 Scalentheile erhöht werden muss, damit sie der Aneroidablesung bei 0° entspreche; in Zeichen:

$$A_0 = A_{40} + 5,0.$$

In die Gleichung (17) haben wir dem entsprechend den vorstehenden Werth von A_0 für A einzusetzen und für R den zu A_0 gehörigen Werth von R_0 aus obiger Tabelle zu berechnen, oder aus der Null-Isoplethe abzunchmen. Wir bekommen somit:

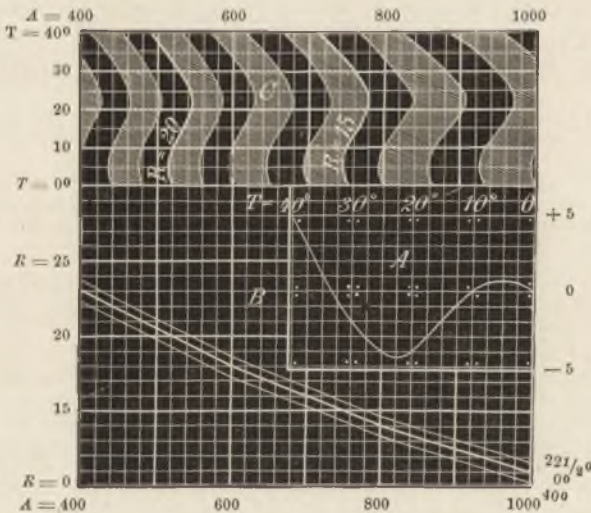
$$b_0 = 800 - 0,11 A_{40} - 0,55 + R_0 \text{ oder: } b_0 = 800 - 0,11 A_{40} + R_{40},$$

wenn wir $R_{40} = R_0 - 0,55$ setzen.

Sei $A_{40} = 400$, also $A_0 = 405$, und das zugehörige $R_0 = 23,0 - 0,05 (23,0 - 20,5) = 22,87$ (wie umstehende Tafel lehrt), so wird

$$R_{40} = 22,87 - 0,55 = 22,32.$$

Fig. 42. Reduction der Ablesung an Goldschmid's Aneroid.



In solcher Weise wurden die Ordinaten der Isoplethen für $T = 40$ und $T = 22\frac{1}{2}^{\circ}$ berechnet und in Fig. 42 (Feld B) eingetragen, andere Isoplethen dagegen des kleinen Maassstabes wegen wogelassen. Denkt man sich aber noch gerade so die Isoplethen von 5 zu 5 Graden construirt, so entsteht eine Schichtentafel, welche nach § 6 ohne Mühe in die andere der Fig. 42 (Feld C) übergeführt werden kann, worin A und T die Variablen sind und R an den Isoplethen abgelesen wird. Zur Erweiterung dieser Tafel über $A = 1000$ hinaus bedarf es keiner besonderen Andeutung als vielleicht der, dass man statt der Constanten 800 eine solche wählen kann, welche der Correction R für die ganze Tafel einerlei Vorzeichen verleiht.

Anmerkung. In Bezug auf Aneroidcorrectionen vergleiche man die umfassende Abhandlung von C. Jelinek: „Ueber die Constanten der Aneroide und über Aneroide mit Höhenscalen“, aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie in Carl's Repertorium der Experimentalphysik Bd. XIII, 1877, S. 43 mitgetheilt. Ferner einen Aufsatz des Verfassers in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1877 Heft 6: „Beitrag zu den Erfahrungen über Naudet's Aneroide“, worin auch die graphische Darstellung einer Correctionsformel mit quadratischem Glied in zwei Gestalten gegeben wird.

Cap. VIII. Aneroidmessungen und deren Genauigkeit.

§ 41. Ungleichheit des Luftdruckes in Meereshöhe nach Ort und Zeit. Reduction auf gleiche Orte.

Die Barometerformel und die Grundregeln der barometrischen Höhenmessung beruhen auf der Annahme völligen Gleichgewichtszustandes der Luft in der Gegend der Messung, wie er in aller Strenge niemals eintritt. Keine andere atmosphärische Erscheinung ist so lange schon und von so vielen Beobachtern messend verfolgt worden, als die unaufhörlichen Druckschwankungen des Luftmeeres. Auch war es längst bekannt, dass die Barometerstände gleich hoher Orte nicht immer die gleichen sind, dass also nicht nur zeitliche, sondern auch räumliche Druckverschiedenheiten stattfinden. Gegenwärtig wird der Luftdruck über Europa durch eine grosse Zahl meteorologischer Stationen mehrmals täglich bestimmt, nach der Barometerformel auf Meereshöhe reducirt, telegraphisch an eine Centralstation gemeldet und von dieser in Karten zusammengestellt, welche sofort veröffentlicht werden. Diese „synoptischen“ oder Uebersichtskarten gleichzeitiger Druckverhältnisse stellen die letzteren durch Isobaren, d. h. Curven gleicher Barometerstände dar und geben dem Kundigen dadurch in grossen Zügen ein Bild von den Witterungsverhältnissen Nordwesteuropas, wie sie zur Zeit herrschten; ein Bild freilich, das keinen Beharrungszustand wiedergibt, und manchmal schon nach wenigen Stunden eine wesentlich andere Gestalt haben müsste, aber aus den telegraphischen Wetterberichten, wie sie jetzt in mehreren deutschen Zeitungen regelmässig erscheinen, sich für jede Zeit construiren lässt*). Für Barometermessungen lassen sich aus dem Anblick einiger charakteristischer Wetterkarten, wie sie Hoffmeier's populäres Schriftchen gibt, schon gewisse Regeln ziehen. Bei beständigem Wetter bewahren die Isobaren weite Abstände untereinander von 8 bis 20 geogr. Meilen auf jedes Millimeter Druckänderung. Orte, die nur ein bis zwei Meilen von einander entfernt sind, werden dann keine wesentliche Druckverschiedenheit erleiden. Bei veränderlichem Wetter gruppiren sich die gleichen Barometerstände um einzelne Barometerminima und Maxima herum, von denen namentlich die ersteren, meist in östlicher Richtung, rasch ihren Ort zu verändern pflegen und dabei Wege von 4 Meilen und darüber in der Stunde zurücklegen. In der Umgebung der Minima

*) Nähere Anleitung zur Interpretation dieser Wetterkarten findet sich in: N. Hoffmeier, Director des meteorol. Inst. zu Copenhagen, Wetterstudien zur Benutzung der täglichen Witterungsberichte, übersetzt v. Parkinson, Hamburg 1874, 1,2 Mark, und H. Mohn, Grundzüge der Meteorologie, deutsche Originalausgabe, Berlin 1875, 6 Mark.

drängen sich die Isobaren häufig eng zusammen; es kommt vor, dass auf $2\frac{1}{2}$ bis 3 Meilen schon ein Millimeter Druckänderung beobachtet wird. Solche Fälle sind stets von heftigen Winden begleitet, welche nahezu parallel den Isobaren wehen und in einer Richtung das Barometerminimum umkreisen, welche den Zeigern der Uhr entgegenläuft. Um Barometermaxima kreist der Wind in entgegengesetzter Richtung, wird aber selten sehr heftig, da hier die der Windrichtung nahezu parallelen Isobaren grössere Abstände behalten. Wenn also bei Barometermessungen auch keine telegraphischen Witterungsberichte zu Gebote stehen, so gibt es doch gewisse Merkmale der Isobarenlage, und es dürfte immer gerathen sein, an Tagen mit heftigem Winde die Orte für correspondirende Beobachtungen nur in mässiger Entfernung von einander, etwa 2 bis 3 Kilometer, zu wählen, weil sich sonst selbst gleichzeitige Beobachtungen nicht mehr auf denselben Luftdruck am Meeresspiegel stützen. Diese Vorsicht empfiehlt sich namentlich für Stationen, deren Verbindungslinie die Windrichtung senkrecht schneidet. Kann man jedoch aus Wetterberichten synoptische Isobarenkarten für die Gegend der Messung zusammenstellen, so hat man ein einfaches Mittel, um die örtliche Druckdifferenz auszuwerthen und in Rechnung zu ziehen. Sind b_0 und b_n die gleichzeitig gemessenen Quecksilbersäulen an zwei Höhenpunkten, B_0 und B_n die entsprechenden Barometerstände in Meereshöhe, einer synoptischen Karte entnommen, so ist zu bilden:

$$b_n + B_0 - B_n \quad \text{oder} \quad b_0 + B_n - B_0,$$

je nachdem wir die Barometerablesung der oberen Station auf die der unteren reduciren wollen oder umgekehrt.

§ 42. Reduction der Aneroidablesungen auf gleiche Zeiten.

Ueber die zeitlichen Aenderungen des Luftdruckes geben Wetterberichte selten die nöthige Auskunft, weil sie nicht ausführlich genug sind und Zeiträume von mehreren Stunden unausgefüllt lassen. Bei unruhigem Wetter treten aber merkliche Standänderungen des Barometers in sehr kurzen Zeiträumen ein, sogar von 10 zu 10 Minuten sind Wechsel möglich, die zuweilen, dann aber nicht in grossen Beträgen, lokaler Natur sein mögen und fast ruckweise aufzutreten scheinen. Das beste Mittel, die zeitlichen Schwankungen des Luftdruckes zu verfolgen, ist demnach ein von Minute zu Minute registrirendes Standbarometer, das aber nur bei Messungen in der Nähe meteorologischer Stationen zur Verfügung stehen dürfte. Und ein einziges Instrument dieser Art macht noch immer die Voraussetzung nothwendig, dass die Druckänderungen auf dem Messgebiet gleichzeitig und in demselben Sinne erfolgen, eine Annahme, welche bei langsamen Aenderungen auch im Allgemeinen erlaubt ist.

Den besten Ersatz für das registrirende Barometer leistet ein Standbarometer, welches während der Zeit der Aufnahme in kurzen Intervallen, alle 10 Minuten etwa, abgelesen wird. Naudet'sche Aneroide eignen sich dazu vorzugsweise, da sie zur Ablesung ein Minimum von Zeit und Kunst erfordern und, wenn sie ihren Ort nicht verlassen, die Standcorrection α im Laufe des Tages unverändert beibehalten. Auf solche Art hat Hettig*) den Gang des Luftdruckes in dem Bureau seiner Eisenbahnbausection durch einen Schreiber oder Zeichner verfolgen lassen. Durch Interpolation dieser Beobachtungen war für alle auswärtigen Barometermessungen, zu welcher Zeit immer sie erfolgt sein mochten, eine gleichzeitige Ablesung auf dem Bureau vorhanden, die Voraussetzung gleicher Druckverhältnisse an beiden Barometerstationen also erfüllt und die Barometerformel direct anwendbar.

Auch Koppe hat mit einem Standbarometer gearbeitet, das seinen Platz mit dem Fortgang der Aufnahme alle paar Tage wechselte.

Oft ist es bequemer, den Gang des Luftdruckes, also die Differenz der ersten Ablesung des Standbarometers von den späteren, allen äusseren Barometerbeobachtungen zuzufügen, wodurch sie sämmtlich auf das gleiche Druckverhältniss, nämlich das der ersten Beobachtung, reducirt und nun ohne Rücksicht auf die Zeit unter sich vergleichbar werden. Ganz streng ist dies Verfahren indess nicht, weil nach der Barometerformel der Gang des Barometers mit der Höhe etwas abnimmt.

Ist kein Standbarometer oder kein Beobachter dafür zur Verfügung, so kann der Aufnehmende selbst durch regelmässige Rückkehr zu einem und demselben Beobachtungspunkte und wiederholte Ablesung seines Aneroids das Standbarometer ersetzen. Die damit verknüpfte Beschränkung auf ein zu enges Messgebiet fällt weg, wenn sich in kurzen Abständen eine grössere Anzahl von Punkten findet, deren gegenseitige Höhenlage durch anderweitige Nivellements bekannt ist. Die Ablesung über jedem später erreichten kann auf den nächst vorhergehenden dieser Punkte (oder umgekehrt) mittelst der Barometerformel reducirt, der Gang des Luftdruckes in der Zwischenzeit so bestimmt, und damit Vergleichsstationen für die inzwischen berührten unbekanntenen Höhenpunkte geschaffen werden. Statt auf mehrere Vergleichsstationen, ist es auch möglich, auf eine einzige derselben zu reduciren, aber nur dann rathsam, wenn das Tagesnivellement sich auf Höhenunterschiede von wenigen hundert Metern erstreckt.

Wie bei dem ersten Verfahren, so ist es auch hier möglich, den Gang des Barometers an den Aneroidablesungen der Zwischenpunkte anzubringen und darnach alle Messungen, oder wenigstens die zwischen zwei Fixpunktaufnahmen erfolgten, direct mit einander zu verbinden. Dies letztere Geschäft lässt sich in manchen Fällen mit Erfolg beschränken auf eine blose Interpolation des Höhenunterschiedes h_n zweier

*) Zeitschr. des bayr. Ing.-Vercins. Jahrgang 1873. Hettig, über die Anwendung von Aneroidbarometern zum Höhenmessen.

Fixpunkte proportional den Barometerstanddifferenzen der Haupt- und Zwischenstationen.

Sei auf den Fixpunkten b_0 und b_n , auf den Zwischenpunkten allgemein b abgelesen worden, so findet man die Höhenlage h der letzteren über der unteren Station nach:

$$h = \frac{b_0 - b}{b_0 - b_n} \cdot h_n, \text{ gültig für } b_0 - b < b_0 - b_n. \quad (18)$$

In dieser Formel dürfen statt der Stände des Quecksilberbarometers unmittelbar die Aneroidablesungen eingeführt werden, wenigstens dann, wenn die Aneroidtemperatur von Fixpunkt zu Fixpunkt constant blieb. Drückt man sämtliche Barometerstände nach (13) auf S. 119 aus, so wird:

$$h = \frac{A_0 - A + w(T - T_0)}{A_0 - A_n + w(T_n - T_0)} \cdot h_n.$$

Nimmt man ferner an, dass die Aenderung der Instrumentaltemperaturen proportional den Aenderungen der Aneroidstände erfolge, dass also die Proportion gelte:

$$(A_0 - A) : (A_0 - A_n) = (T - T_0) : (T_n - T_0),$$

so spricht die Gleichung:

$$h = \frac{A_0 - A}{A_0 - A_n} \cdot h_n, \text{ gültig für } A_0 - A < A_0 - A_n$$

aus, dass das benutzte Aneroid gar nicht mit dem Quecksilberbarometer verglichen zu sein braucht, also ein Instrument von ganz unbekanntem Gang zur Interpolation der Höhen verwendet werden darf. (Jordan, Taschenbuch, S. 214.)

Dies Verfahren verlangt, dass $A_0 - A_n$ beträchtlich grösser sei als der Aneroidablesungsfehler. Sonstige Voraussetzungen desselben ergeben sich, wenn wir in (18) für h_n seinen Werth nach der Babinet'schen Formel einsetzen, wonach wir erhalten:

$$h = 16000 (1 + 0,004 t) \frac{b_0 - b}{b_0 + b_n}.$$

Es wird dabei also ausser der Lufttemperatur auf der ganzen Höhe h_n auch der Nenner $b_0 + b$ als constant angenommen und durch $b_0 + b_n$ ersetzt, was bei geringen Höhen beides erlaubt ist. Uebrigens wird, der strengen graphischen Rechnung gegenüber, nur durch die neue Annahme etwas wesentliches an Zeit gewonnen, dass der Gang des Barometers ebenfalls den Höhenunterschieden proportional interpolirt werden dürfe, also nicht erst, wie oben, für die einzelnen Beobachtungszeiten berechnet zu werden brauche. Je mehr Voraussetzungen es aber macht, desto weniger ist ein solches Verfahren im grossen Style anwendbar.

Bei der ersten Aufnahmeart können neben dem Standbarometer beliebig viele andere im Freien operiren, bei der zweiten wurde ein einziges unabhängig arbeitendes Instrument vorausgesetzt. Es kommen aber Fälle vor, wo man, um die verfügbaren Arbeitskräfte zu verwerthen, auf die Aufstellung eines Standbarometers verzichten wird, andere wieder, wo eine solche überhaupt nicht möglich ist und auch Fixpunkte von bekannter Höhenlage im Messgebiete fehlen. In diesen Fällen müssen wenigstens zwei Beobachter mit Barometern zugleich im Felde thätig sein, denn nur so ist es möglich, während der Arbeit zugleich den Gang des Luftdruckes festzustellen.

Ganz wie bei der Einzelaufnahme geschieht dies durch periodisch wiederholte Ablesung des Barometers auf früher besuchten Höhenpunkten. In der Regel wird derselbe Stützpunkt nur zweimal besucht und je

nachdem dies durch ein und denselben, oder durch zwei verschiedene Beobachter geschieht, unterscheidet man die Rundgang- und die Staffelmethode. Bei der ersteren muss die Arbeit folgendermaassen geregelt sein:

A beginnt im Punkte I mit der Beobachtung und macht einen Rundgang in der Nähe, während sich *B* nach II begibt. Jetzt erfolgt eine gleichzeitige Beobachtung auf I und II. In der Nähe des letzteren Punktes beginnt nun *B* seinen Rundgang, *A* geht während dessen auf III über und es erfolgt eine gleichzeitige Messung auf II und III, worauf sich *B* nach IV in Bewegung setzt und so fort. Während der Rundgänge und Uebergänge werden Detailpunkte aufgenommen. So verfährt man, wenn das Arbeitsfeld sich in die Breite ausdehnt. Das einzige Communicationsmittel zwischen beiden Beobachtern sind richtig gehende Uhren, und die einzige Beschränkung ihrer gegenseitigen Unabhängigkeit liegt in dem Zwang, nach vorbestimmten Zeiträumen abwechselnd einen Stützpunkt auszuwählen und wieder zu einem solchen zurückzukehren. Zeitweise Zusammenkünfte dienen zur Prüfung der Standcorrection beider Barometer.

Ist das Messgebiet mehr in die Länge gestreckt, wie meist bei Bergbesteigungen der Fall, so beginnen *A* und *B* mit einer gleichzeitigen Messung in I und II, *A* geht auf II, *B* auf III über, es erfolgt eine neue Messung zu gleicher Zeit und neuer Aufbruch von *A* nach III und *B* nach IV etc. Die Detailmessung geschieht hier nur bei den Uebergängen, welche von beiden Beobachtern möglichst auf verschiedenen Wegen auszuführen sind. Zur Mittheilung der gewählten Stützpunkte II, III... von *B* an *A* müssen sich beide Beobachter entweder gegenseitig sichtbar bleiben, oder Zeichen von *B* deponirt werden, geschriebene Zettel, Fähnchen etc., die der nachfolgende *A* aufsammelt. Ausserdem müssen Beide nahe gleiches Marschtempo einhalten und zur Ausgleichung desselben manche Pause machen, die der Arbeit verloren geht. Ebenso verlangen die Zusammenkünfte zum Vergleichen der Instrumente im Allgemeinen mehr Zeitaufwand als bei der Rundgangmethode.

Dennoch ist das hier beschriebene Verfahren das correcteste überall, wo ein erstes Längen-Nivellement mit dem Barometer ausgeführt werden muss, und Reisegesellschaften, welche brauchbare Höhenmessungen anzustellen beabsichtigen, sollten sich immer entsprechend in Gruppen theilen, wenn es die Sicherheit des Weges und der Führung, sowie die verwendbare Zeit gestatten. Dies ist freilich im Grunde nur in Culturländern möglich, und selbst da nur, sofern eine halbwegs zuverlässige Karte den nothwendigen Verabredungen als Basis dient. Andernfalls hat der Reisende seine Messungen auf die gleichzeitigen Beobachtungen von meistens weit entlegenen meteorologischen Stationen

zu beziehen, wenn er das Glück hat, das nöthige Material zu erlangen; und auch auf diesem Wege lassen sich, bei günstiger Vertheilung der Stationen, im Ganzen noch brauchbare Resultate erwarten, für beständige Witterung wenigstens, wie der Anblick der europäischen Wetterkarten lehrt. An der Hand der telegraphischen Barometerberichte kann auch der einsame Bergsteiger in Europa, ohne jede weitere Unterstützung, immer noch nützliche Resultate sammeln. Dem einsamen Reisenden in fernen Welttheilen aber bleibt zuletzt noch das Mittel, seine Beobachtungen mit den mittleren Monatsisobaren seines Himmelsstriches zu vergleichen, wonach denn in den Seehöhen, welche er berechnet, wenigstens die Unsicherheit wegen der Jahresamplitude des Luftdruckes vermieden und auf die Fehler eingeschränkt wird, welche die geringeren monatlichen Barometerschwankungen unausbleiblich in die Rechnung einführen.

§ 43. Bestimmung der Lufttemperatur.

Nach den Betrachtungen des § 30 geschieht die sicherste Ermittelung der Lufttemperatur durch gleichzeitige oder auf gleiche Zeiten reducirte Barometermessungen an zwei Stationen von bekanntem Höhenunterschied h . Gibt die Barometerformel für 0° den Höhenunterschied h_0 , so ist

$$h = h_0 + 0,004 t h_0,$$

und da wir im zweiten Gliede ohne merklichen Fehler h_0 durch h ersetzen dürfen:

$$t = \frac{250}{h} (h - h_0),$$

d. h. für je $2,5^\circ$ beträgt die Differenz $h - h_0$ je ein Procent der Höhe h , oder umgekehrt, auf 100m. Höhe zwischen der unteren und oberen Station entspricht jedem Meter Differenz $h - h_0$ eine Lufttemperatur von $\pm 2,5^\circ$ C. Sei nun der mittlere Fehler einer Barometermessung h_0 gleich 1,2m., so folgt, dass die Lufttemperatur um $\pm 3^\circ$ C. falsch gefunden wird, wenn nur 100m. Unterschied der Höhenlage beider Versuchsstationen zur Verfügung stehen. Um den mittleren Temperaturfehler auf $\pm 1^\circ$ zu vermindern, müsste entweder $h = 300$ m. sein, oder die Beobachtung neunmal wiederholt werden. Trotz der theoretischen Strenge dieses Verfahrens dürfte es sich darum doch nur in folgenden Fällen zur regelmässigen Anwendung empfehlen:

a) Wenn während des ganzen Tages zwei Standbarometer bei mindestens 100m. Unterschied ihrer durch Nivellement bekannten Höhenlage beobachtet werden können, welcher Fall auf benachbarten Baubüreaus bei Eisenbahnbauten im Berglande öfter eintritt. Man berechnet

dann die Temperatur aus je zwei correspondirenden Barometerständen, fasst die Beobachtungen grösserer Zeiträume zu Temperaturmitteln zusammen und construirt daraus oder direct aus den Einzelmessungen die Temperaturcurve des Tages. Diese gilt streng nur für die mittlere Höhenlage der Standbarometer, kann aber, wenn es nöthig scheint, für andere Höhen construirt werden nach der groben Durchschnittsregel, dass die Lufttemperatur für je 200m. Höhe um 1° C. abnimmt.

b) Wenn auf dem Messgebiet sich zwei Stationen von bekannter Höhenlage und wenigstens 300m. Höhenunterschied finden, welche zu etwa drei vorausbestimmten Tageszeiten von zwei Beobachtern leicht erreicht werden können. Man benützt die aus ihrer gleichzeitigen Beobachtung erhaltenen drei Lufttemperaturen zur Construction der Temperaturcurve.

c) Wenn eine grössere Anzahl Fixpunkte über dem Messgebiet zerstreut liegt, welche paarweise wenigstens 100m. Höhenunterschied gewähren und ohne Zeitverlust während der Arbeit der Reihe nach von je zwei Beobachtern besucht werden können. Die so gewonnenen, über den ganzen Tag vertheilten Temperaturbeobachtungen müssen nach der genannten Durchschnittsregel auf gleiche Höhen reducirt werden, ehe man die Temperaturcurve aus ihnen ableitet.

Soll für die Aenderung der Lufttemperatur mit Tageszeit und Höhe eine Schichtentafel entworfen werden — eine sehr einfache Arbeit — so liest man an deren Abscissenachse die Tageszeiten, an der Ordinatenachse die mittlere Seehöhe zweier Barometerstationen ab, an den unter sich parallelen Isoplethen endlich die Lufttemperatur. Statt der mittleren Seehöhe wählt man als Argument zuweilen besser eine Function derselben, die Summe des oberen und unteren Barometerstandes eines Stationspaares. Die Wahl dieses zweiten Argumentes richtet sich nach der Berechnungsweise der Höhenunterschiede, ob mittelst der Seehöhentafel oder mittelst der logarithmischen Differenz der Barometerstände. Jede solche Schichtentafel gilt natürlich blos für einen Aufnahmetag.

Als Beispiel wählen wir eine derartige Schichtentafel für die mittleren Tagestemperaturen des Monats August und die mittlere Meereshöhe 1442m. zwischen Genf und dem St. Bernhard. Nach Rühlmann*) berechnen sich die Temperaturen von Morgens 4 bis Abends 8 Uhr:

4h.	6h.	8h.	10h.	12h.	2h.	4h.	6h.	8h.
10,9°	10,6°	10,7°	11,0°	11,6°	12,3°	12,7°	12,9°	12,5° C.

Dies seien die Resultate der Lufttemperaturbeobachtungen eines Tages nach der unter a) beschriebenen Weise. Es möge zugleich der mittlere Gang des Barometers der folgende sein, bei einem Anfangsstande von 648mm.:

4h.	6h.	8h.	10h.	12h.	2h.	4h.	6h.	8h.
0	-0,4mm.	-1,0mm.	-1,5mm.	-2,0mm.	-2,5mm.	-2,0mm.	-1,5mm.	-1,0mm.

Nun fragt es sich, welche Temperatur über Tag bei der Seehöhe 1474,8m. herrschte, nämlich jener Seehöhe, welche aus unserer Tafel für 648mm. folgt. Offenbar um 4h. Morgens die Temperatur $10,9^{\circ}$; aber um 8h. nicht etwa $10,7^{\circ}$ (diese Temperatur kommt

*) Barom. Höhenmessungen S. 75,

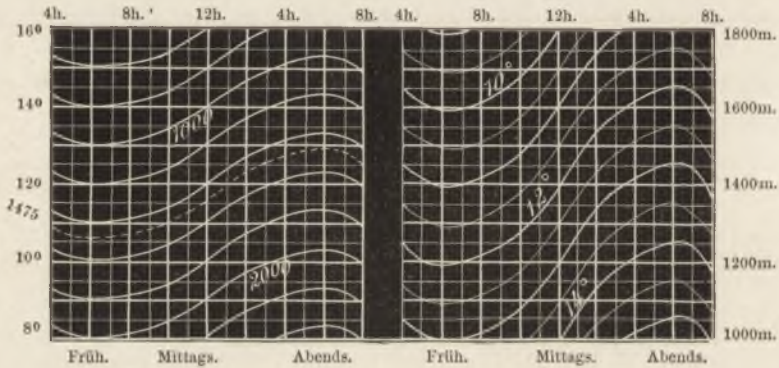
jetzt dem Barometerstand 649mm. oder der Tafelseehöhe 1487,1m. zu), sondern $10,7^{\circ} - \frac{1,0 \times 12,3}{200}$ Celsiusgrade, da die Seehöhe pro Millimeter Abnahme der Quecksilbersäule um 12,3m. wächst und die Temperatur pro 200m. Höhe um 1° C. abnimmt. In ähnlicher Weise werden die übrigen kleinen Änderungen der Lufttemperatur für 1475m. Seehöhe berechnet und an der beobachteten angebracht. Sie werden meistens so unbedeutend, dass man sie vernachlässigen darf; ihre Berechnung fällt ohnehin weg, wenn, wie im vorigen Paragraphen angegeben, der Gang des Barometers an allen Tagesablesungen angebracht wird.

Nehmen wir das letztere an und halten uns an die von Rühlmann berechneten Temperaturen, so können wir dieselben über den Tagesstunden auf der Abscissenachse als Ordinaten nach Maassgabe einer willkürlichen Einheit für die Temperaturen auftragen und erhalten somit eine Isoplethe für gleiche Seehöhen von 1475m. Vermehren

Fig. 43.

Fig. 44.

Lufttemperaturen am 15. August, nach rohen Seehöhen und Tageszeiten.



wir alle Ordinaten um $\frac{3}{8}^{\circ}$ und $1\frac{3}{8}^{\circ}$ C., so entsteht eine zweite und dritte Isoplethe für 1400 und 1200m. Seehöhe u. s. w. Die so entstandene Isoplethentafel Fig. 43 kann direct zu den Temperaturbestimmungen benutzt oder nach § 6 in eine andere mit Isoplethen für die Lufttemperatur verwandelt werden, wie daneben Fig. 44 sie zeigt.

Ist die strenge Bestimmung der Lufttemperatur nicht ausführbar, weil entweder Fixpunkte von dem gehörigen Höhenabstand oder Fixpunkte überhaupt fehlen, so tritt das von C. Koppe eingeschlagene Verfahren in sein Recht. Der Beobachter begibt sich zu den in Fig. 29 S. 91 durch eine starke Linie angedeuteten Zeiten auf einen Ort, der ihm nach seiner Höhenlage und Umgebung zur Messung der Lufttemperatur geeignet scheint. Hier wird die Temperatur nach minutenlangem Aufhängen eines Thermometers im Schatten oder Herumschleudern desselben an einer Schnur, abgelesen und als die wahre Lufttemperatur betrachtet. Die Ablesungen der Morgen- und Abendbeobachtung werden der Zeit proportional interpolirt. Von der Temperaturabnahme mit der Höhe wird abgesehen; Koppe hat die Erfahrung gemacht, dass die Thermometer

auf den sonnigen Höhen auch zur günstigsten Zeit meist höhere Temperaturen angaben, als in den tiefen schattigen Thälern *).

Die geringen täglichen Schwankungen der wahren Lufttemperatur, von denen ja auch die vorstehenden Zahlen eine Probe geben, lassen vermuthen, dass Koppe's Verfahren nicht nur für die günstigsten Beobachtungszeiten (die der Uebereinstimmung zwischen Lufttemperatur und Thermometerangaben), sondern auch für die Zwischenzeit die Luftwärme richtiger bestimmt, als unausgesetzte Thermometerbeobachtungen auf jeder einzelnen Barometerstation es können. Diese letzteren führten vielmehr nach Koppe's Erfahrung zu mancherlei Widersprüchen und einem grossen und ganz unbelohnten Zeitverlust, der sich auch noch auf die Berechnung der Aufnahme überträgt.

Wird die Lufttemperatur dagegen über Tag nahezu constant gefunden, so dass man sie für ganze Gruppen von Beobachtungen, etwa von Stunde zu Stunde, als gleich annehmen darf, so lässt sich nach Helmert**) die Berechnung der Aufnahme sehr vereinfachen. Man sucht alsdann nicht etwa für die Unterschiede der Seehöhen, sondern für die Seehöhen selber, nöthigenfalls nach Abzug einiger hundert Meter, die Temperaturcorrection nach der Lichtdrucktafel Blatt III auf, fügt sie bei und kann nun die so gefundenen Grössen mit beliebigen anderen derselben Gruppe vergleichen, sodann die Correction wegen Aenderung des Luftdruckes, in Höhenmaass übertragen, nachträglich anbringen. Die letztere ergibt sich unschwer mit Hilfe graphischer Interpolation aus dem Vergleich der barometrisch und geometrisch bestimmten Seehöhen vorhandener Fixpunkte oder des Standbarometers.

Koppe hat sein Verfahren nur in einem Terrain angewandt, wo die grössten barometrisch zu messenden Höhenunterschiede 100 bis 200 Meter betragen, aber er hat unausgesetzt von April bis November beobachtet und jederzeit günstige Resultate erhalten. Ein noch einfacheres Verfahren als das seinige hat Schreiber***) bei einer topographischen Aufnahme in Sachsen angewandt, wo ebenfalls nur geringe Höhenunterschiede bestimmt wurden und die Beobachtung auf die Sommermonate August bis September beschränkt blieb. Er bestimmte die Lufttemperatur gar nicht, sondern berechnete die Höhenunterschiede h der Barometerstationen nach der Formel $h = k(b_0 - b_n)$, woein die Babinet'sche Formel übergeht, wenn in ihr für t und $(b_0 + b_n)$ Mittelwerthe eingesetzt werden. Man unterstellt also dabei noch eine physikalische Voraussetzung mehr als bei dem im vorigen Paragraphen erwähnten Interpolationsverfahren, und die dort gemachte Bemerkung gilt in dieser Hinsicht auch für Schreiber's Verfahren. Wie sein Erfolg belehrt, kann es bei glücklicher Wahl des Coefficienten dennoch zur Bestimmung kleiner Höhen im Sommer annehmbare Dienste leisten. Die Erklärung dafür liegt zum grössten Theil darin, dass die Temperatur-

*) Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1874, III, S. 10. **) Ebenda, S. 348.

***) Civilingenieur 1875, XXI, S. 273 u. 381.

schwankungen der Luft während der Monate Juni bis einschliesslich September gering sind. Die tägliche Periode der Lufttemperatur, aus den Monatsmitteln berechnet, durchläuft in 1442 Meter Höhe*) sogar nur Beträge, welche während jener vier Monate kaum innerhalb 3° variiren. Aber nimmt man selbst an, diese Grösse sei die mittlere Abweichung einer Tagestemperatur vom richtig gewählten Temperaturmittel, so werden dadurch bei der barometrischen Berechnung erst 1,2% der Höhe als Fehler eingeführt, ein Betrag, der bei Höhendifferenzen unter 100m. innerhalb des erfahrungsmässigen mittleren Beobachtungsfehlers bleibt.

Ob die Ersparniss an Zeit durch Schreiber's Verfahren in Anschlag kommt gegenüber der einfachen und genaueren Messmethode nach Koppe und der bequemen gruppenweisen Berechnung des Temperatureinflusses, zumal bei Benützung graphischer Tafeln, bleibe dahingestellt.

§ 44. Anordnung der barometrischen Aufnahme grösserer Bezirke.

Ausgedehnte barometrische Flächennivellements sind nur in Gebieten möglich, von denen bereits hinreichend detaillirte Situationspläne vorhanden sind, so dass die nivellirten Punkte darin eingetragen werden können. Gleichzeitige Aufnahme der Situation und barometrischen Höhe von Punkten kann nur ausnahmsweise nothwendig und nützlich werden. Einzelne Fälle derart kommen wohl bei jeder barometrischen Messung vor, da das Detail der vorliegenden Karten nicht immer ausreicht, sondern Ergänzungen, zuweilen auch Correcturen verlangt.

Nächst den Situationsplänen wird man sich nach vorhandenen Grundlagen der Höhenmessung umthun. Sehr erwünscht ist es, wenn ein Dreiecksnetz dritter Ordnung das Arbeitsfeld überzieht und die trigonometrischen Punkte ausser durch ihre geographischen Coordinaten auch nach ihrer Höhenlage trigonometrisch bestimmt sind. Fehlen in den verfügbaren topographischen oder Katasterplänen die Dreieckspunkte, so werden sie mit Sorgfalt nachgetragen. Wo erst ein nivellirtes Dreiecksnetz sich findet, da können auch einige Längennivellements durch die Hauptthäler, Flüssen und Strassen entlang, nicht fehlen, nur findet man dies Vermessungsmaterial selten so gut geordnet wie die Resultate einer Triangulation. Indessen darf man die Reduction von einigen Dutzend willkürlich gewählten Nivellementshorizonten auf den Meeresspiegel, die Umrechnung von einigen hundert Quoten aus Klafter-, Ellen- und Fussmaass in Metermaass nicht scheuen, wenn man erwarten darf, dadurch ein Netz von brauchbaren Stützpunkten zu gewinnen. Sind jedoch geübte Beobachter und Instrumente zur Verfügung, so können fast in derselben Zeit einige Hauptlängennivellements durch die

*) Rühlmann, bar. Höhenm. S. 74, vergl. Fig. 3.

Gegend gezogen und dabei, was bei früheren Nivellements natürlich nicht geschah, die Bedürfnisse des barometrischen Nivellements speciell in's Auge gefasst werden. Auch kann man sich, wenn sonstige Höhenmessungen überhaupt nicht vorhanden waren, sehr gut und in wenigen Tagen auf diese Art die nöthigen Grundlagen selber schaffen.

Nur beim völligen Mangel von Nivellirinstrumenten wird man ganz auf vorausbestimmte sichere Höhenpunkte verzichten und sich begnügen, an günstigen Tagen einige Linien barometrisch zu nivelliren. Durch die Kreuzung mehrerer solcher Nivellementzüge wird man Gelegenheit zu Controlen und einfachen Ausgleichungen erhalten, welche nach Beginn der Detailarbeit weniger leicht benützt werden könnten.

Nun erst schreitet man zum Flächennivellement. Es ist klar, dass es dabei hauptsächlich darauf ankommt, barometrisch bestimmte Punktreihen auf allen charakteristischen Terrainlinien zu erhalten, als da sind Thalsohlen, Bergkämme, Brechungskanten, Schluchten, Thalränder, einzelne Querprofile, Joche, Wasserscheiden, Muldensohlen, Wurzelrücken etc. Aber die Situationspläne werden nicht immer diese Linien enthalten und wenn, nicht immer richtig. Der Beobachter ist also genöthigt, sie selber einzutragen, indem er sie auf das nächstliegende Terraindetail, Wege, Grenzen, Bäche etc. bezieht, wenn nöthig durch Abmessen oder Abschreiten und Benützen einer Boussole oder anderer Hilfsmittel der flüchtigen Aufnahme. Was er im Freien in die Karte nicht genau genug eintragen kann, das deutet er dort nur an und skizzirt das Nöthige in sein Aufnahmeheft. Niemals darf vergessen werden, in dem Plane dieselbe laufende Nummer einzuschreiben, welche im Notizbuch die entsprechende Barometerablesung trägt. Bei der Festlegung der Punkte hat man zu bedenken, dass Irrthümer in deren Lage, bei steilem Terrain schon solche von wenigen Metern, die ganze Sorgfalt der Barometermessung vereiteln können. So sind auch namentlich die Stützpunkte der Barometermessung genau anzugeben und bei jedem neuen Gebrauch richtig wieder aufzusuchen.

Es ist nicht eben leicht, die charakteristischen Terrainlinien zu erkennen, und ferner, zu beurtheilen, durch wie viele Höhenpunkte deren Profil genau genug bestimmt ist. Im Grunde ist dies erst dann erreicht, wenn von einem Höhenpunkt zu jedem Nachbarpunkt eine Gerade über das Terrain gelegt werden kann. Gegenüber der durchschnittlichen Genauigkeit der Barometermessung von höchstens ± 1 Meter wäre eine solche Anhäufung der Standpunkte verfehlt, und man könnte eher feststellen, dass eine charakteristische Terrainlinie hinreichend profilirt ist, wenn die Verbindungslinien der aufgenommenen Punkte sich nicht über 1m. bis 1,5m. nach unten oder oben von der Terrainoberfläche entfernen. Selbst Thalsohlen oder Joche, durch welche möglicherweise ein wichtiger

Strassenzug geführt wird, erfordern keine genauere Behandlung, einfach deshalb, weil der Erfolg der Mühe doch nicht entspreche. An solchen Stellen muss der Barometeraufnahme später ein geometrisches Nivellement nachfolgen; nach dem barometrischen will man bloß entscheiden, ob die Stelle dazu gewählt werden kann. Ob übrigens die gewählten Terrainpunkte zur Darstellung der Horizontalcurven ausreichen werden, entscheidet der praktische Blick dadurch, dass er letztere nach dem Augenmaasse auf der Karte entwirft. In sehr bedecktem Terrain, wie es Wälder und Städte darbieten, hat dies seine besonderen Schwierigkeiten, und darum muss man auf solchem Boden die Höhenpunkte eher etwas dichter wählen als sonst. Gerade in Wäldern ist kein anderes Nivellement so leicht ausführbar, als das barometrische, und der Nutzen der Höhenmessung auch dann nicht gering, wenn die Situation der Standpunkte nicht ganz scharf bestimmt werden kann.

Nächst der Auswahl und dem Eintrag der Höhenpunkte hat der Beobachter seine ganze Aufmerksamkeit dem Aneroid zu widmen. Niemals darf er ausrücken, ohne sein Instrument mit dem Normalaneroid oder dem Quecksilberbarometer wegen der Standcorrection verglichen zu haben, niemals heimkehren, ohne das Gleiche zu thun. Zur richtigen Zeit und an einer Stelle, welche zugleich luftig und doch den directen Sonnenstrahlen während des ganzen Tages möglichst entzogen ist, messe er die Lufttemperatur mit dem Thermometer, wenn nicht geeignete Fixpunkte die indirecte Messung derselben erlauben. Er suche sich die Wettertelegramme zu verschaffen und ziehe sie bei seiner Aufnahme zu Rathe (§ 41). Sein Instrument trägt der Beobachter am besten mit abgenommenem Futteraldeckel, das Glas an den eigenen Körper gelehnt, vielleicht noch mit einem schützenden weissen Tuch überzogen. Goldschmid's Aneroide werden erst bei der Beobachtung aufgeklappt. Zu Pferde muss der Sperrriegel über den Fühlhebel geschoben sein. Nie darf man, weder bei Naudet noch Goldschmid, das Klopfen auf den Gehäusdeckel vor der Beobachtung unterlassen; man sollte überhaupt keine hundert Meter auf einmal steigen ohne, wenigstens bei Naudet, auf den Deckel zu klopfen, und sich zu überzeugen, ob das Kettchen sich richtig auf die Zeigerwelle wickelt, überhaupt keine Verspannungen im Mechanismus entstehen, welche sich später nicht auf einmal, sondern nur in Pausen und ruckweise ausgleichen, zuweilen aber an permanenten Aenderungen der Standcorrection Schuld sind. Gegen den Nachtheil derjenigen Aenderungen, welche nach dem Besteigen hoher Berge bei der Umkehr der Nadel von ihrem tiefsten Stande eintreten, schützt man sich durch Wiederkehr zu Punkten, welche man beim Aufsteigen etwa 100m. unter dem Gipfel ausgewählt und barometrisch bestimmt hatte. Von da an werden die barometrischen Differenzen, welche beim

Niedergang beobachtet werden, wieder mit jenen übereinstimmen, welche man beim Steigen fand.

Auch der Eintrag in die Notizbücher verlangt einige Sorgfalt. Zweckmässig wird die Höhenberechnung von der Aufnahme im Felde und deren Reduction getrennt und demgemäss ein Haus- und ein Feldbuch unterschieden. Letzteres enthält die folgenden neun Rubriken, von denen im Felde aber nur unmittelbar die vier ersten und die letzte, Notizen enthaltend, ausgefüllt werden:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nr.	A	$+T$	Z	$+G$	$+C$	b	$+t$	Bemerkungen,

nämlich: 1) Laufende Nummer, 2) Aneroidablesung A , 3) Instrumentaltemperatur T , 4) Beobachtungszeit Z , 5) Gang G des Luftdruckes, 6) Reduction C auf die Quecksilbersäule von $0^{\circ} C$, 7) reducirter Barometerstand $b = A + G + C$, Lufttemperatur t und eine Spalte für Bemerkungen. Die Spalte für G fällt dann weg, wenn alle äusseren Beobachtungen mit den gleichzeitigen am Standbarometer gepaart in die Barometerformel eingehen, und die Spalte für t dann wenn, wie es in der Regel zu geschehen hat, die Lufttemperatur nicht für jede einzelne Beobachtung bestimmt wird, sondern für eine grössere Reihe derselben gemeinsam.

Das Hausbuch wird verschieden angelegt je nach den Hülftafeln, die man verwenden will. Die folgende Einrichtung setzt den Gebrauch der Lichtdruckblätter II und III voraus. Es wiederholt zunächst die erste, siebente und achte Spalte des Feldbuches und enthält demnach folgende neun Rubriken:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nr.	b	$+t$	H_0	h_0	$+ \gamma$	h	Q	Anmerk.

nämlich: Laufende Nummer, reducirter Barometerstand b , Lufttemperatur t , rohe Seehöhe H_0 , Differenz h_0 der rohen Seehöhen zweier Punkte (die laufende Nummer des Vergleichspunktes kann in einer weiteren Spalte aufgeführt werden, wenn nicht schon durch Unterstreichen oder Einklammern des jedesmaligen Vergleichspunktes für eine ganze Gruppe Missverständnissen vorgebeugt wird), Temperaturcorrection γ , der Tafel zu entnehmen, corrigirte Höhendifferenz h des Punktpaares, Meereshöhe oder Quote Q , berechnet durch Beifügen von h zu der Meereshöhe des Vergleichspunktes; schliesslich Anmerkungen.

Ist die Lufttemperatur t für grössere Gruppen von Beobachtungen gleich, so kann auch die Spalte der h_0 aus der Liste herausfallen, γ bezieht sich dann auf die ganze Seehöhe H_0 , welche nöthigenfalls um einige hundert Meter vermindert ward, und statt h tritt eine mit H , der corrigirten Seehöhe, überschriebene Spalte ein. Also:

1	2	3	4	5	6	7	8
Nr.	b	$+t$	H_0	$+ \gamma$	H	Q	Anm.

Von diesen Listen für Benützung der Seehöhentafel unterscheidet sich die folgende, bei welcher die Schichtentafel Fig. 32 zur logarithmischen Berechnung der Höhenunterschiede h zur Verwendung kommt: Sie enthält die Rubriken:

1	2	3	$\left[\begin{array}{c} a \\ h_0 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} b \\ +\gamma \end{array} \right]$	4	5	6
Nr.	b_n	$+t$			h	Q	Anm.

Die Rubriken a und b kommen nur dann vor, wenn man in der Tafel Fig. 32 das zweite Feld von dem ersten trennt, im ersten h_0 nicht bloß aufsucht, sondern wirklich abliest und dazu nach Blatt III noch die Temperaturcorrection $+\gamma$ fügt. Die unmittelbare Benützung der Schichtentafel Fig. 32 erfordert also nur sechs Spalten.

Der Gebrauch der Rath'schen Tafel Fig. 33 verlangt endlich ein Hausbuch mit folgenden sieben Spalten:

1	2	3	4	5	6	7
Nr.	b	$+t$	H	h	Q	Bemerk.

worin H die auf Lufttemperatur corrigirte Seehöhe bedeutet, h dieselbe vermindert um die Seehöhe H_v des Vergleichspunktes, dessen Quote oder wahre Meereshöhe Q_v heisse, endlich Q die Quote des Höhenpunktes, dem die laufende Nummer zugehört. Da

$$Q = Q_v + h = Q_v + H - H_v,$$

so kann an Stelle von h in Spalte 5 ebensowohl $Q_v - H_v$ treten und, wenn diese Grösse für ganze Gruppen von Punkten constant genommen ist, die Spalte auch ganz wegleiben und durch einzelne Notizen in der letzten Columnne ersetzt werden.

Beim Berechnen aller dieser Listen tritt eine grosse Beschleunigung und zugleich Garantie der Sicherheit dadurch ein, dass das Aufschreiben von dem Aufsuchen der Tafelwerthe getrennt wird. Der Schreiber dictirt die Beobachtungszahlen, eventuell Aggregate derselben, und lässt sich selbst den zugehörigen Tafelwerth dictiren, den er einträgt*).

§ 45. Entwerfen der Horizontaleurven.

Sind die Höhenzahlen oder Quoten für alle aufgenommenen Punkte berechnet, so werden dieselben im Situationsplan, höchstens bis auf Zehntelmeter genau, den Standpunkten beigeschrieben, am besten so gleich mit Tusche. Damit ist denn auf dem Plane alles Material zum Entwerfen der Horizontalcurven gegeben. Es hat wenig Werth, diese letzteren enger zu legen als in 5m. Abstand, Maassstab und Genauigkeit der Aufnahme machen sogar die doppelte Schichtenhöhe rathsam. Man verbindet nun, oder denkt sich verbunden, je zwei benachbarte Punkte durch eine gerade Linie, vorausgesetzt, dass die schon draussen nach dem Augenmaasse skizzirten Curven und Falllinien des Terrains anzunehmen gestatten, jene Gerade falle mit der Bodenfläche zusammen. Ohne die nöthigen Feldskizzen werden die Zahlen allein, namentlich in flacherem Terrain, in Thalsohlen und auf Bergrücken, zu unaufhörlichen Zweifeln, nicht selten auch zu grossen Irrthümern führen.

Auf den Verbindungslinien eines jeden Punktpaares sind nun die

*) Für die Feldaufnahme sei auf die von E. und R. Jacobsen in Berlin erfundenen Copirtintienstifte hingewiesen, deren Züge, angefeuchtet, eine dauerhafte Anilinschrift darstellen. Es ist gut, wenn sich davon die häusliche Schrift, auch Correcturen, unterscheiden.

Schnitte mit den Niveauflächen aufzusuchen, welche die Schichten trennen, und denen man in der Regel runde Quoten gibt. Diese Arbeit geschieht durch eine höchst einfache proportionale Interpolation, von welcher die folgende Rechnung ein Beispiel zeigt.

Es seien die Quoten des Punktpaares A und B , deren horizontale Entfernung 85m. betrage, beziehungsweise 192m. und 235m., die Schichtenhöhe 10m. und ein Haupthorizont auf 200m. gelegen. Der Horizontalabstand x seines Schnittes mit AB , also auch mit der Bodenfläche, von A aus gemessen, findet sich nun aus der Proportion:

$$x : 85 = 8 : 43.$$

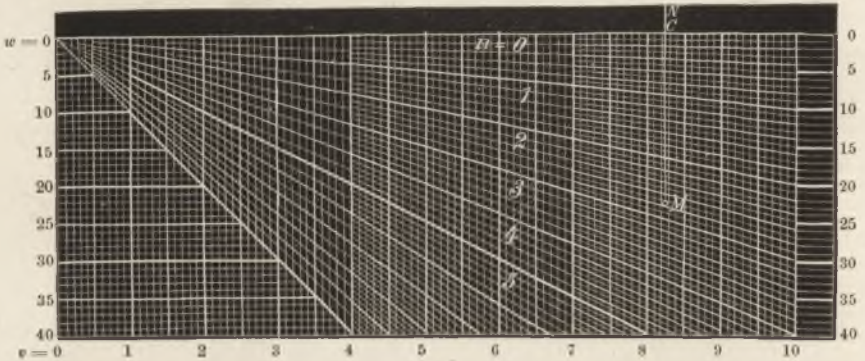
Wie sich hier berechnet: $x = \frac{85}{43} \times 8$, so berechnen sich die Abstände der übrigen Schnitte aus $x_1 = \frac{85}{43} \times 18$; $x_2 = \frac{85}{43} \times 28$ etc. und man erhält der Reihe nach 15,8m.; 35,6m.; 55,2m.

Diese Rechnung ist sehr zur graphischen Behandlung geeignet; nennt man den Verticalabstand des Punktpaares h , des einen Punktes vom nächsten Horizont d , den Horizontalabstand der Punkte a , so ist zuerst der Bruch $a : h$ zu bilden und dann der Reihe nach mit d , $d + 10$, $d + 20 \dots$ zu multipliciren. Mit Vortheil wird dazu der Rechenschieber Fig. 19 S. 110 benützt, der an der Seite eine Millimetertheilung trägt. Man misst damit a , bildet im Kopfe h und stellt den Läufer auf a am Stab, zieht dann den Schieber unter dem Läufer weg bis auf h , so dass der Anfangspunkt des Schiebers auf $a : h$ zeigt. Nun geht der Läufer der Reihe nach auf d , $d + 10 \dots$ am Schieber und gegenüber am Stab kommen die Zahlen x , x_1, \dots zum Vorschein, welche mittelst der Millimeterscala auf den Plan übertragen werden. Der Rechenschieber braucht dabei nicht einmal vom Papier abgehoben zu werden.

Ebenso leicht bedient man sich einer nach Fig. 9 folg. S. entworfenen Schichtentafel mit Parallelen zur Abscissenachse (welche in Fig. 9 nur stückweise angegeben sind), und die, wenn die Tafel nicht durchsichtig ist, bis an den Papierrand gezogen sein müssen. Zwischen diesen Parallelen wird a angelegt und abgemessen, die entsprechende Parallele verfolgt bis sie auf denjenigen der convergirenden Strahlen (Isoplethen) trifft, welcher mit h bezeichnet ist. Die Abscisse des Schnittpunktes hat alsdann den Werth $a : h$. Der zugehörigen Ordinate entlang werden nun an den Isoplethen die Grössen d , $d + 10 \dots$ aufgesucht und die entsprechenden Ordinatenstücke wieder auf den Plan übertragen, wobei ebenfalls angenommen wird, dass die Schichtentafel auf dem letzteren unverrückt liegen blieb. Noch bequemer, und in einer Weise die nach dem vorigen ohne weiteres verständlich ist, bedient man sich eines derartigen Strahlennetzes auf durchsichtiger Platte.

Nach Bestimmung mehrerer Punkte, welche zu derselben Horizontalcurve gehören, bildet den Schluss der Arbeit die Verbindung derselben,

Fig. 9. Strahlennetz zum Abgreifen und Auftragen von Producten.



abermals mit Rücksicht auf jene Curven, welche nach dem unmittelbaren Augenschein auf dem Felde entworfen worden waren.

§ 46. Genauigkeit der Aneroidmessungen.

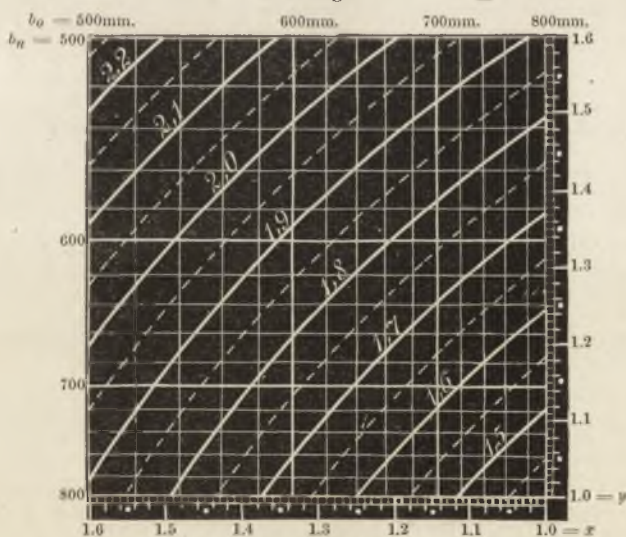
Die Genauigkeit der Barometerformel soll hier ausser Frage bleiben. Die nothwendigen Abkürzungen ihrer strengsten theoretischen Form wurden schon früher besprochen und müssen bis auf Weiteres ausreichen. Auch die grösseren Fehler, welche Babinet's Formel einführt, sind uns schon bekannt und in Fig. 34 S. 105 dargestellt. Für das graphische Rechnungsverfahren haben sie wenig Interesse, da sich die graphischen Tafeln für die strenge Formel bequemer erweisen. Es bleibt somit übrig, den Einfluss der Ablesungsfehler auf die Höhenmessung zu untersuchen und uns mit den Erfahrungsergebnissen der Aneroidmessungen bekannt zu machen, um einestheils zu wissen, welche Genauigkeit wir überhaupt erwarten dürfen, andernteils rückwärts zu schliessen, mit welcher Sorgfalt wir unsere Ablesungen auszuführen haben, um nicht hinter der möglichen Genauigkeit zurückzubleiben.

Die Beobachtung bei Aneroidaufnahmen erstreckt sich auf dreierlei: Lufttemperatur, Instrumentaltemperatur und Barometerstand. Den Einfluss falsch berechneter Lufttemperatur kennen wir bereits. Die Betrachtung der Barometerformel lehrte, dass er proportional der Höhe wächst und für je $2\frac{1}{2}^{\circ}$ Fehler 1% der gemessenen Höhe beträgt. Wie gross aber auch die aufzunehmenden Höhen des Messgebietes sein mögen, immer vermag die indirecte Bestimmung der Lufttemperatur jene Einflüsse herabzudrücken unter denjenigen ungenauer Barometerbeobachtung. Für kleine Höhen gelingt dies schon der directen Temperaturbestimmung.

Die Beobachtungsfehler in der Instrumentaltemperatur können, wenn das Aneroid ungleich erwärmt ist, sehr bedeutend werden. Ist ausserdem der Temperaturcoefficient gross, wie z. B. der von 0,15 Scalentheilen pro Grad, der ungefähr die Mitte hält zwischen den bei Naudet's Aneroiden vorkommenden, und für den die Schichtentafel Fig. 4 entworfen wurde, so übertrifft der Fehler wegen 1° falscher Schätzung der Aneroidtemperatur schon den grössten Ablesungsfehler um das Dreifache, denn dieser wird nur 0,05 Scaleneinheiten betragen. Darum sind die besten Aneroide solche mit geringen Temperaturcoefficienten. Schützt man das Instrument aber durch mehrfache Ueberzüge gegen plötzliche und dann stets ungleiche Erwärmung oder Abkühlung seiner Theile, und beobachtet, ob der Stand des Thermometers für einige Minuten unverändert bleibt, so darf man die Thermometerangabe bis auf einige Zehntelgrade richtig erwarten. Der Rest trägt jedenfalls zur Verstärkung des Ablesungsfehlers bei, dessen Einfluss auf das Resultat durch Differenziren der Barometerformel erkannt wird. Wir erhalten, wenn K die Barometerconstante ist, unter Annahme der Lufttemperatur 0°:

$$dh = 0,4343 K \left(\frac{db_0}{b_0} - \frac{db_n}{b_n} \right).$$

Fig. 15. Einfluss eines mittleren Ablesungsfehlers von $\pm 0,1$ mm. am Barometer.



In Metern: $\Delta h = \pm \sqrt{\left(\frac{800}{b_0}\right)^2 + \left(\frac{800}{b_n}\right)^2}$; $\Delta h^2 = x^2 + y^2$.

Setzen wir statt der Differentiale messbare kleine Grössen, nämlich mittlere Fehler ein und zwar für beide Barometerstände den gleichen $\pm \Delta b$, so wird:

$$\Delta h = \pm 0,4343 K \Delta b \sqrt{\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{b_n^2}} = \pm 8000 \Delta b \sqrt{\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{b_n^2}}.$$

Diesen Fehler stellt die kleine Schichtentafel Fig. 15 unter der Annahme dar, dass $\Delta b = \pm 0,1\text{mm.}$ sei; ist der mittlere Fehler eines Barometerstandes ein anderer, so müssen die Tafelwerthe entsprechend multiplicirt werden. Wir wählen wie in Fig. 38 S. 113 als Abscissen und Ordinaten die Reciproken der Barometerstände und erhalten folglich Kreise als Isoplethen, deren gemeinsamer Mittelpunkt im Koordinatenanfang ($x = 0, y = 0$) liegt, und deren Zeiger Meter bedeuten. Die Isoplethen treffen auf der x - und y -Achse (welche in der Figur fehlen) mit den gleichnamigen Coordinatenendpunkten zusammen.

Fragen wir nun umgekehrt, wie gross aus dem erfahrungsgemässen Fehler $\pm \Delta h$ sich der mittlere Ablesungsfehler $\pm \Delta b$ eines Aneroids berechnet. In den öfter genannten Schriften von Schoder, Bauernfeind und Koppe liegt eine ziemliche Anzahl Genauigkeitsversuche in Aneroidmessungen verglichen mit geometrischen Nivellements vor. So fanden

Schoder aus . . .	47	Versuchen mit dem grösseren Naudet den mittleren Fehler $\pm 1,41\text{m.}$,
Bauernfeind aus .	83	Versuchen mit dem grösseren Naudet den mittleren Fehler $\pm 1,63\text{m.}$,
Koppe aus . . .	248	Versuchen mit dem grösseren Naudet den mittleren Fehler $\pm 1,63\text{m.}$,
Schoder aus . . .	112	Versuchen mit Goldschmid's Aneroid den mittleren Fehler $\pm 2,16\text{m.}$

Vereintigt man die Versuche mit Naudet so, als ob sie unter gleichen Umständen angestellt wären, so erhält man sehr nahe den mittleren Fehler $\pm 1,60\text{m.}$ Diesen für Δh in obige Formel eingesetzt, gibt:

$$\Delta b = \pm 0,0002 \frac{b_0 b_n}{\sqrt{b_0^2 + b_n^2}},$$

welche noch etwas übersichtlicher wird, wenn wir $b_n = b_0 - r$ setzen und im Nenner r^2 vernachlässigen. Dann findet sich

$$\Delta b = \pm 0,0001 \sqrt{2} \sqrt{b_0^2 - r b_0} = \pm 0,00014 \sqrt{b_0 b_n}.$$

Es liesse sich auch dieser Werth für b_0 und b_n als Argumente in eine (logarithmische) Schichtentafel bringen, wenn es sich der Mühe verlohnte; Δb erhält genau den Werth $\pm 0,1\text{mm.}$, wenn $\sqrt{b_0 b_n} = 707$ wird (etwa bei $b_0 = 715, b_n = 700\text{mm.}$), ein Fall, der den Bedingungen nicht fern liegt, unter welchen jene Versuche stattfanden.

Wenn dieser Fehler nun ganz der Ablesung zugeschrieben, die Lufttemperatur demnach als richtig bestimmt betrachtet wird, so setzt er sich zusammen:

- a) aus dem Schätzungsfehler, welcher erfahrungsgemäss innerhalb 0,05mm. bleibt;
- b) dem Fehler des todten Ganges, wenn man die Unsicherheit der Nadelstellung bei wiederholtem Klopfen auf den Aneroiddeckel so nennen darf; und
- c) dem Fehler bei Bestimmung der Aneroidtemperatur.

Alle diese Fehler stellen sich auch ein bei Bestimmung des Temperaturcoefficienten durch Vergleich mit dem Quecksilberbarometer, und Koppe hat bei einer solchen Bestimmung mit drei Aneroiden den mittleren Fehler einer Ablesung nahe gleich $\pm 0,08$ mm. gefunden. Nimmt man nun an, dass er auch im Freien nicht grösser sei, so bleibt für den mittleren Fehler, verursacht durch die Lufttemperatur, noch 0,06mm. oder sehr nahe 1m., was bei 100m. Höhendifferenz schon einem mittleren Fehler von $\pm 2,5^\circ$ C. entsprechen würde. Es ist aber eher anzunehmen, dass der Ablesungsfehler im Felde sich vergrössert, zumal $0,5^\circ$ Irrthum in der Bestimmung der Instrumentaltemperatur bei dem Temperaturcoefficienten 0,15 schon einen Fehler von fast 0,08mm. erzeugen. Um soviel kann aber trotz aller Umhüllungen [Hettig und Koppe empfehlen deren soviele als möglich*)] das Instrumentalthermometer von der wahren Temperatur des Instrumentes abweichen, wenn man abwechselnd durch Schatten und Sonnenschein marschirt und auf den Terrainpunkten nicht Zeit zum Warten hat, sondern sofort ablesen muss.

Die 248 Fehler der Aneroidmessungen Koppe's kann man betrachten als entstanden aus einem Ablesungsfehler, dessen mittlerer Einfluss von so geringen Höhenunterschieden (grösster 116,3m.) unabhängig ist, und dem Fehler in der Messung der Lufttemperatur, der der Höhe h proportional wächst. Jeder Fehler φ hat darnach die Form:

$$\varphi = \sqrt{a^2 + h^2 b^2}.$$

Zur Trennung der beiden Wurzelglieder wurden die Quadrate sämtlicher 248 Fehler gebildet und in 20 Gruppen zu je 12 und 13 nach den zugehörigen Höhenunterschieden geordnet, aus den letzteren die Durchschnittszahlen h_m und aus den Fehlerquadraten die Quadrate φ_m^2 der mittleren Fehler für jede Gruppe gezogen. Durch Interpolation der so gebildeten Grössen unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate und der Berechnungsweise für vermittelnde Beobachtungen nach der Gleichung

$$\varphi_m^2 = a^2 + h_m^2 b^2$$

fand sich $a^2 = 2,4$, woraus folgt: $a = 1,6$ Meter, entsprechend einem Ablesungsfehler von 0,10 Millimeter, also wirklich mehr als jener von 0,08mm., welcher beim Vergleich der Aneroide im Zimmer zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten von Koppe gefunden worden war.

Die zweite Constante b^2 berechnete sich auf $b^2 = 0,000175$, wonach also der mittlere Fehler in der Bestimmung der Lufttemperatur $3,3^\circ$ C. betragen würde, wenn nicht dies Resultat selbst um seinen ganzen Betrag unsicher wäre. Die Koppe'schen

*) Die mehrmals citirten Aufsätze dieser beiden Autoren wären, auch wenn sie weiter Nichts enthielten, schon ihrer praktischen Winke wegen lesenswerth.

Versuche erlauben also nicht zu berechnen, welche Unsicherheit seiner Temperaturbestimmung anhaftet, hauptsächlich darum, weil die grössere Hälfte seiner Beobachtungen Höhenunterschiede unter 20m. betrifft.

§ 47. Schlussregeln.

Als Resultat der Genauigkeitsbetrachtungen lassen sich zum Schlusse folgende Regeln zusammenstellen:

Zur Verminderung des Schätzungsfehlers gehört richtige Haltung des Auges und Uebung. Der Schätzungsfehler bleibt innerhalb 0,05mm.

Gegen den todten Gang des Zeigers empfiehlt sich horizontale Lage des Zifferblattes (bei Naudet) und wiederholtes Klopfen auf den Aneroiddeckel.

Fehler bei Bestimmung der Aneroidtemperatur verringern sich durch Anwendung von Ueberzügen. Aneroiden mit kleinem Temperaturcoefficienten gebührt der Vorzug beim Gebrauch im Felde; die anderen können als Standbarometer dienen.

Die genannten drei Fehlerquellen bewirken, wenn grosse Naudet'sche Aneroide, und zwar als Standbarometer, benutzt werden, einen mittleren Ablesungsfehler von etwa $\pm 0,08$ mm. entsprechend $\pm 1,3$ m. der Höhendifferenz; im Felde etwas mehr.

Der Gang des Luftdruckes wird am besten durch ein Standbarometer, sonst nach den übrigen in § 42 erwähnten Methoden bestimmt. Die Zeitintervalle der Ablesung sollen wo möglich nicht mehr als 10 Minuten betragen.

So lange bei sehr beständigem Wetter die Entfernungen correspondirender Barometer 8 bis 10, bei stürmischem 2 Kilometer nicht überschreiten, ist keine Reduction auf gleiche Orte nöthig.

Die Standcorrection der Feldbarometer wird des Morgens und Abends nach dem Standbarometer bestimmt und Aenderungen werden der Zeit proportional vertheilt.

Sprünge in der Standcorrection, wie sie nach starken und raschen Druckänderungen in der Zeit der Ruhe oder sofort bei der Umkehr der Nadel eintreten, mache man unschädlich durch Ablesen vor und nach der Pause, oder durch Rückkehr zu Orten, welche vor dem Wendepunkt der Bergreise besucht worden waren. Das Auf- und Niedersteigen erfolge stetig und mit Ablesestationen von höchstens 20mm. Druckunterschied.

Von den Bestimmungen der Lufttemperatur des § 43 ist die Thermometermessung zu den günstigsten Zeiten am leichtesten ausführbar. Fehler derselben machen die Höhenbestimmung um 0,4% falsch auf den Grad Celsius.

Bei aller nöthigen Vorsicht und für Höhendifferenzen bis zu 250m. lassen Aneroidmessungen mit dem grossen Naudet $\pm 1,6$ m. mittleren Fehler erwarten; Goldschmid's Aneroid etwa $\pm 2,2$ m. (wohl auch hauptsächlich, und mehr noch als bei Naudet, in Folge mangelhafter Temperaturbestimmung am Instrumente).

Zur Berechnung empfiehlt sich, nicht nur ihrer grösseren Genauigkeit wegen, sondern bei Anwendung graphischer Tafeln auch durch ihre Bequemlichkeit, die strengere logarithmische Barometerformel, sei es in Gestalt eines Productes oder in Glieder zerlegt (rohe Seehöhen und deren Temperaturcorrection).

Tafeln von einer Genauigkeit, welche nur im tausendsten Falle $\pm 0,05$ mm. Ablesungsfehler befürchten lässt, können gegenüber dem mittleren Fehler der Aneroidmessung, welcher einem Ablesungsfehler von $\pm 0,1$ mm. aequivalent ist, als unbedingt correct betrachtet werden. Ebenso Seehöhentafeln, welche die einzelne rohe Seehöhe unter tausend Fällen nur einmal um $\pm 0,05$ m. unrichtig geben. Die Tafeln für die Temperaturcorrection sind ihres Umfanges wegen ebenfalls so gut wie fehlerfrei.

Dritter Abschnitt.

Schichtentafeln zur Anwendung in der Tachymetrie.

Der Wunsch, die Aufnahme der Höhen mit jener der Situation zu verbinden, hat sich bei topographischen Vermessungen schon lange geltend gemacht und zur Construction von mancherlei Instrumenten geführt, die, wie z. B. das Lehmann'sche Diopterlineal, jetzt veraltet sind, weil sie nicht alle Elemente zugleich zu liefern vermochten, aus welchen sich die horizontale und die Höhenlage eines Terrainpunktes bestimmen lassen. Von Anfang an lag diesen Versuchen die einfache und noch heute leitende Idee zu Grunde, aus Richtung, horizontalem Abstand vom Instrumente und Höhenwinkel den Ort des Zieles zu ermitteln, aber die Schwerfälligkeit des Verfahrens verminderte sich erst, als man die Distanzmessung mit der bloßen Visur nach dem Ziele zu verbinden lernte, wie es Hogrewe*) durch seine Höhenschraube (das Vorbild der Stampfer'schen) und bald darauf, in noch einfacherer Weise, Reichenbach durch den optischen Distanzmesser gelang. Uebrigens war die Verbindung der Horizontal- und Höhenaufnahme nicht das Hauptziel bei der Erfindung der beiden genannten Distanzmesser, diese Aufgabe stellte sich vielmehr erst der italienische Major Porro und löste sie, nach einer Modification von Reichenbach's Distanzfernrohr, durch Verbindung desselben mit einem Theodolithen, der ausser dem Horizontal- auch einen Höhenkreis besitzt, also Richtung, Distanz und Höhenwinkel des Zieles gleich auf einmal zu messen erlaubt. In Deutschland hat man die gleiche Fähigkeit auch auf den Messtischapparat übertragen und namentlich der preussische Generalstab hat damit seit etwa 20 Jahren seine topographischen Aufnahmen sehr beschleunigt und vervollkommenet.

Später noch begannen auch die deutschen Ingenieure das Porro'sche Verfahren der sogenannten Tachymetrie oder Schnellmessung (von

*) J. L. Hogrewe, Praktische Anweisung zum Nivelliren nach einer veränderten und erleichterten Methode, nebst Beschreibung der dazu gehörigen Wasserwago, Hannover 1800.

ταχύς schnell und *μετρεῖν* messen) bei ihren Vorerhebungen zu technischen Bauanlagen da zu verwenden, wo brauchbare Situationspläne fehlen oder ergänzt werden müssen. Obwohl dazu jeder Theodolith benützt werden kann, welcher ein Distanzfernrohr nebst Horizontal- und Höhenkreis, etwa auch eine Boussole besitzt, so hat man doch für zweckmässig gefunden, sogenannte Tachymeter, d. h. Theodolithe für tachymetrische Aufnahmen, eigens zu bauen. Ausser dem Porro'schen Distanzfernrohr bietet ihre Construction nur Eigenthümlichkeiten bekannterer Art, welche übrigens ausführlich mitgetheilt werden für das italienisch-französische Muster in Porro's, Moinot's und Werner's Monographien über Tachymetrie, und für das deutsche Tachymeter von Starke in Wien in einem Aufsätze von Tinter*). Wir übergehen die Abbildung und umständliche Beschreibung dieser Instrumente in der Annahme, dass dem Leser Bau und Gebrauch des Theodolithen sowie der Kippregel bekannt sind, und die Zuthaten, welche das Tachymeter erhalten hat, leicht einigen schematischen Figuren entnommen werden können. Dagegen sollen hier die mathematischen Grundlagen der Tachymetrie und das Verfahren selbst erörtert und damit Gelegenheit gewonnen werden, das Nöthige über Construction und Anwendung tachymetrischer Schichten tafeln mit einzuflechten. Die Einfachheit des ganzen Problems macht in diesem Abschnitte eine grössere Kürze als im vorigen möglich.

Solche Tachymeter endlich, deren Bau von dem des Theodolithen und der Messtischkipregel wesentlich abweicht, bleiben hier ausser Betracht. Man hat dieselben gebaut, um damit einen Theil der häuslichen Rechnungen zu ersparen, in dem richtigen Gedanken, dass die Einstellung des Instrumentes auf das Ziel zugleich auch zur Einstellung auf Rechenscalen benützt werden könne. Reichen hierzu die gewöhnlichen Manipulationen beim Visiren aus und ist es dabei möglich, das Resultat graphisch zu fixiren, so hat man erheblichen Gewinn. So lange aber am Instrumente noch neue Einstellungen ausser der des Fernrohres nöthig werden, bleibt es fraglich, ob der grössere Zeitaufwand im Felde ausgeglichen wird durch die Ersparniss an einer fast mechanischen Arbeit, welche zu Hause bei ungünstiger Witterung und von untergeordneten Kräften erledigt werden könnte. Die bisher zu Tage getretenen Versuche lassen übrigens erwarten, dass sich aus ihnen das Richtige herausbilden werde.

*) Porro, la tacheometrie, Paris 1858.

Moinot, Levés de plans à la stadia, Paris 1865.

C. Werner, die Tacheometrie und deren Anwendung bei Tracestudien, Wien 1873.

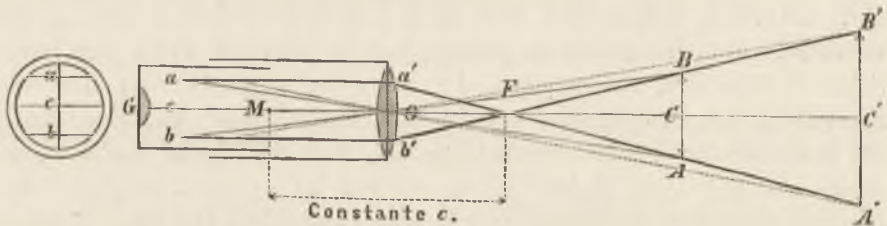
W. Tinter, das verbesserte Tachymeter von G. Starke in Wien, Zeitschr. des östr. Ing.- und Architectenvereins, Jahrgang 1873, p. 42.

Cap. IX. Die tachymetrischen Formeln und ihre graphische Darstellung.

§ 48. Die dioptrischen Distanzmesser.

1) Der von Reichenbach. Fig. 45 stellt den Vertical-Durchschnitt eines gewöhnlichen Kepler'schen Fernrohres von nur zwei Linsen dar, dem Objective O und einem Ocular G . Vor letzterem sei in der Entfernung Gc das Diaphragma so angebracht, dass es sich nach Einstellung des Oculars auf deutliche Sichtbarkeit der Fäden in unveränderlichem Abstände mit ihm verschieben lässt. Auf dem Diaphragma seien ausser dem einfachen Fadenkreuz, wie es bei Nivellirfernrohren gebraucht wird, noch zwei weitere horizontale Ocularfäden in gleichen Abständen vom Mittelfaden aufgezogen (wie es die Skizze andeutet) und das Fernrohr mit horizontaler mittlerer Visirlinie auf eine lothrechte Latte mit Zielscala in C gerichtet. Durch die äusseren Fäden a und b werden wir im Gesichtsfelde ein Lattenstück AB begrenzt sehen, dessen Länge wir auf der Scala unmittelbar ablesen können. Auf dieselbe Weise lesen wir ein Stück $A'B'$ der Latte ab, wenn sie sich in C'

Fig. 45. Reichenbach's Distanzmesser.



befindet. In beiden Fällen sind die Bildpunkte, die von den äusseren Fäden gedeckt werden, zugleich Spitzen der Strahlenkegel, welche von den Grenzpunkten der Lattenstücke AB und $A'B'$ ausgehen. Bekanntlich liegen diese Spitzen aber in verschiedenen Abständen vom Objectiv, je nach der Entfernung des Zieles; auch in der Figur ergibt sich dies aus der Lage der Hauptstrahlen (welche ungebrochen durch den optischen Mittelpunkt O gehen). Die Distanzfäden sollen deshalb parallel der mittleren Visirlinie Oc verschieblich sein; alsdann sind allen jenen Strahlenkegeln, deren Spitzen von den äusseren Fadenkreuzpunkten gedeckt werden können, nur zwei Strahlen $a'a$ und $b'b$ gemeinsam, welche in den Abständen ac und ab der mittleren Visirlinie parallel laufen. Diese Strahlen müssen aber zuvor den vorderen

Brennpunkt F des Objectivs passirt haben*) (eine bekannte Eigenschaft der Convexlinsen), und darum haben wir die Grenzpunkte der zwischen den Distanzfäden sichtbaren Lattenstücke stets in den Richtungen $a'F$ und $b'F$ aufzusuchen.

Aus den ähnlichen Dreiecken ABF und $a'b'F$ folgt:

$$FC : AB = FO : a'b',$$

und da $FO : a'b' = FO : ab = k$ constant bleibt, welche Grösse und Abstand AB auch habe, so folgt:

$$FC = k \cdot AB,$$

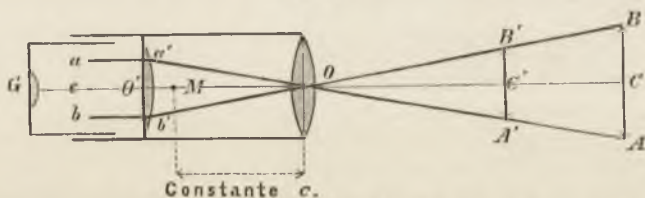
d. h. die zwischen den äusseren Fäden abgelesenen Lattenstücke sind den Entfernungen der Latte vom vorderen Brennpunkte proportional. Will man die Entfernung $CM = D$ wissen, wenn M die Mitte des Instrumentes vorstellt, so zählt man zu CF jedesmal die constante Länge $c = FM$, so dass:

$$D = c + k \cdot AB. \tag{1}$$

Diese einfachste Construction optischer Distanzmesser und die Formel zu deren Benützung ist von Reichenbach angegeben worden.

2) Der Porro'sche Distanzmesser. Wollte man die Lattenabschnitte AB proportional den Abständen der Ziellatte vom Objectiv haben, so müsste man hinter dem letzteren eine Linse einfügen, welche die Hauptstrahlen des Objectives parallel ablenkt, deren vorderer Brennpunkt also mit dem optischen Mittelpunkte des Objectivs zusammenfällt. Alsdann treffen keine anderen Bildpunkte auf a und b als solche,

Fig. 46.



welche zu Hauptstrahlen gehören, die auf der Sammellinse O den Abstand $a'b' = ab$ zwischen sich fassen. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABO und $a'b'O$ (Fig. 46) folgt nun wie vorher

$$OC : AB = OO' : a'b' = k',$$

*) Richtiger den Schnittpunkt der Brennebene mit der mittleren Visirlinie; ist durch das Fadenkreuz keine solche festgelegt oder die Ocularbewegung ihr nicht parallel, so ergibt sich F als Schnittpunkt der vorderen Brennebene und einer Parallelen durch O zur geradlinigen Ocularbewegung. Eine krummlinige Bahn des Fadenkreuzes aber denke man sich in ein Polygon aufgelöst, wonach F wohl seinen Ort in der Brennebene verändert, Dreieck $a'b'F$ aber immer noch gleiche Grundlinie und Höhe behält, das Nachfolgende also richtig bleibt.

und da letzteres Verhältniss constant ist und der Abstand $MO = c$ ebenfalls, so folgt:

$$D = c + k' \cdot AB.$$

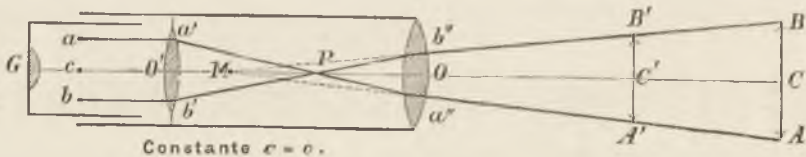
Soll $c = 0$ sein, so müssen offenbar jene Lichtstrahlen, welche von äusseren Punkten aus nach M gerichtet sind, durch die zweite Sammellinse parallel gebrochen werden. Diejenigen von ihnen, welche auf die Sammellinse im Abstand $a'b' = ab$ treffen, fassen zwischen sich (Fig. 47) alle Lattenabschnitte der verschiedensten Entfernungen. Um zu wissen, wo sich die nach M gerichteten äusseren Strahlen vereinigen, betrachten wir diesen Sammelpunkt P als leuchtenden Punkt innerhalb der Brennweite f des Objectivs und suchen seinen Abstand $d = OP$ von letzterem aus der dioptrischen Hauptformel, welche für diesen Fall, wenn $b = MO$ die Bildweite, d. h. den Abstand des imaginären Bildes M von P auf derselben Seite der Objectivlinse bedeutet, lautet wie folgt:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

woraus entsteht:

$$d = \frac{bf}{b + f}. \tag{1^*}$$

Fig. 47. Porro's Distanzmesser.



Demnach wird d , wie zu erwarten war, eine constante Grösse, welche nur von der Brennweite des Objectivs und dem Abstände b desselben von der Mitte des Instrumentes abhängt. Ist die Lage von P gefunden, so wird eine zweite Linse von der beliebigen Brennweite $PO' = \varphi$ so zwischen Fäden und Objectiv eingeschaltet, dass ihr vorderer Brennpunkt mit P zusammenfällt. Diejenigen Strahlen, welche auf O' im Abstände $a'b'$ treffen, oder auf O im Abstände $a''b''$, fassen alle Lattenabschnitte $AB, A'B' \dots$ zwischen sich, welche wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $MBA, MB'A'$ und $Mb''a''$ (welches letztere unveränderlich ist), proportional den Lattenabständen von M wachsen, oder proportional den Zielweiten von der Mitte des Instrumentes aus gerechnet, wenn M daselbst liegt. Nunmehr ist

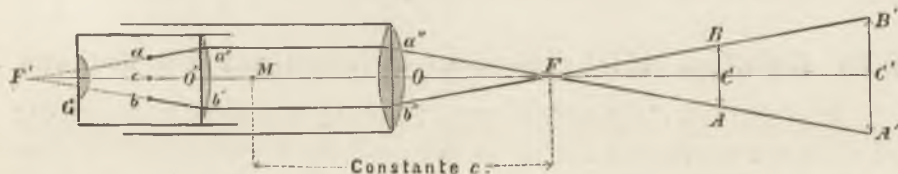
$$D = k'' \cdot AB,$$

wenn $k'' = MO$: $a'' b''$ gesetzt wird, die einfache Gleichung, aus der Porro, der Erfinder dieses Distanzfernrohrs*), die Zielweiten berechnet.

3) Ertel's Distanzmesser. In beiden vorigen Fällen ist die Zwischenlinse mit dem Objectiv fest verbunden zu denken. In dem Huyghens'schen Ocular ist eine solche mit dem Fadenkreuz und der Ocularlinse in festen Abständen verbunden, also gegen das Objectiv (parallel zur mittleren Visirlinie) verschieblich. Zuerst hat Ertel, Reichenbach's Nachfolger, auch das Huyghens'sche Ocular zum Distanzocular eingerichtet, indem er auf das Diaphragma, das mitten zwischen dem Augenglas und der Sammellinse angebracht ist, noch zwei äussere Fäden heftete. Suchen wir (Fig. 48) wieder die Strahlen auf, welche ein- für allemal die Lattenabschnitte zwischen sich fassen, so sind es solche, welche zwischen Objectiv und Sammellinse der mittleren Visirlinie parallel gehen. Alle diese treffen den vorderen Brennpunkt F des Objectivs und den hinteren F' der Sammellinse, und unter ihnen sind jene beiden die gesuchten, welche zugleich durch a und b gehen. Da a und b gegen F' unveränderlich liegt, so sind es immer dieselben. Es folgt aus dieser Anordnung:

$$a' b' : ab = O' F' : c F';$$

Fig. 48. Ertel's Distanzmesser.



das letztere Verhältniss wird nahe gleich 3 : 2 gemacht, wonach

$$a' b' = a'' b'' = \frac{3}{2} ab.$$

Da nun wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ABF und $a'' b'' F$ ganz wie früher bei Reichenbach's Distanzfernrohr

$$D = c + k \cdot AB$$

wird, so muss nur noch beigefügt werden, dass diesmal zu setzen ist:

$$k = OF : a'' b'' = \frac{2}{3} \frac{OF}{ab}.$$

*) Porro nannte dasselbe anallattisch (unveränderlich, von $\alpha\lambda\lambda\alpha\tau\omega = \text{permutio}$) und den Punkt M anallattischen Punkt, weil für ihn der Gesichtswinkel sich nicht ändert, unter welchem die Lattenabschnitte AB erscheinen. In diesem Sinne ist bei Reichenbach's und Ertel's Distanzmesser der vordere Focus des Objectivs anallattischer Punkt.

Die Constanten c werden bequem und genau am Instrumente abgemessen, da ja die Messung der Objectivbrennweite und des Abstandes von Objectiv und Instrumentenmitte, aus welchen Grössen c zusammengesetzt wird, keine Schwierigkeiten macht. Die Constanten k jedoch bestimmt man mittelbar durch Ablesen einiger Lattenabschnitte auf verschiedenen, zuvor abgemessenen Zielweiten und Einsetzen der Ergebnisse in die Distanzenformel. In der Regel nimmt man von den gefundenen Werthen von k die Durchschnittszahl als den wahrscheinlichsten Werth an [was nur dann streng richtig, wenn die Ablesungsfehler proportional der Entfernung wachsen*)].

Gewöhnlich gibt der Mechaniker der Zahl k einen unveränderlichen, nahezu runden Werth, was bei Ueberschlagsrechnungen bequem, bei graphischen und mechanischen Berechnungen aber vollständig gleichgültig ist. Die Unveränderlichkeit von k wird am besten dadurch gewahrt, dass statt des Fadenkreuzes ein feines Strichnetz auf einer Glasplatte in das Diaphragma eingesetzt wird, wozu bei dem Huyghens'schen Ocular noch die Bedingung kommt, dass der Abstand des Diaphragmas von beiden Ocularlinsen in keiner Weise veränderlich sein darf. Es gibt auch Distanzoculare mit complicirten Vorrichtungen zur Verstellung der Fäden; ihr Nutzen ist aber sehr gering, dagegen die Möglichkeit bedeutenden Nachtheils gegeben, wenn man sie nicht mit grösster Sorgfalt behandelt.

§ 49. Reduction schiefer gemessener Distanzen auf den Horizont.

Wir behalten die Annahme einer lothrecht stehenden Ziellatte wie im vorigen Paragraphen bei, geben der mittleren Fernrohrvisirlinie aber beliebige Neigungen α gegen den Horizont. In Fig. 49 ist nun nicht mehr das Lattenstück AB zwischen den äusseren Fäden der Entfernung GH proportional, sondern ein Stück CD , welches wie im § 48 zur mittleren Visirlinie senkrecht gedacht wird. Also gilt die Gleichung:

$$MH = c + GH = c + k \cdot CD.$$

Wir haben CD durch $AB = a$ auszudrücken. Da Winkel $AGB = 2\beta$ durch die mittlere Visirlinie MH halbirt wird, so besteht die Gleichung:

$$CD = 2GH \operatorname{tg} \beta.$$

Ferner ergibt sich nach dem Sinussatze aus den Dreiecken AGH und BGH :

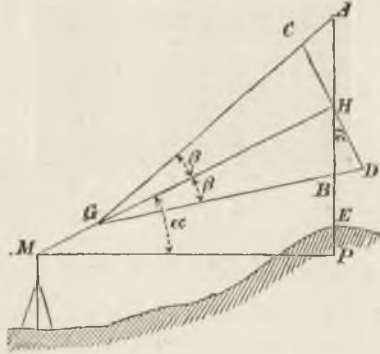
$$a = AH + BH = GH \sin \beta \left(\frac{1}{\cos(\alpha + \beta)} + \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} \right)$$

*) Helmert, Die Ausgleichsrechnung nach der Meth. d. kl. Qu. S. 67 u. f.

und in Verbindung mit der vorigen Formel in einfacher Weise:

$$CD = \frac{a \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos^2 \beta} = a \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\cos \alpha \cos^2 \beta}$$

Fig. 49.



Setzen wir dies in die Formel für MH ein und bilden zugleich die gesuchte Horizontalprojection von MH , nämlich $D = MH \cos \alpha$, so erhalten wir:

$$D = c \cos \alpha + ak \cos^2 \alpha - ak \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Bedenkt man, dass $\cot \beta = 2k$ ist, so können wir das dritte Glied rechts auch anschreiben:

$$a \sin^2 \alpha : 4k.$$

Die aussergewöhnlichen Werthe $a = 4\text{m.}$, $\alpha = 45^\circ$ und $k = 50$ geben diesem Gliede erst die Grösse von 1cm. , welche neben den zufälligen Messungsfehlern völlig verschwindet. Wir schreiben demnach die allgemeine Formel dioptrischer Distanzmesser bei lothrechter Lattenstellung und symmetrischer Anordnung der Distanzfäden einfach:

$$D = c \cos \alpha + ak \cos^2 \alpha. \tag{2}$$

In Fällen, wo die Lattenlänge nicht ausreicht, den ganzen Fadenabstand zu messen, rath man zuweilen ohne Weiteres Benützung des halben Fadenabstandes und Verdoppelung der Ablesung an. Jedoch ist dies Verfahren bei sehr geneigten Visuren nicht ganz unbedenklich; in dem Dreieck ABG ist Winkel G halbirt, wesshalb die Proportion besteht:

$$AH : BH = AG : BG = \cos(\alpha - \beta) : \cos(\alpha + \beta).$$

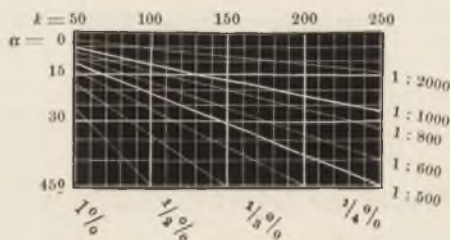
Das letztere Verhältniss wird gewonnen, indem man AG und BG nach dem Sinussatze durch HG und die entsprechenden Winkelfunctionen ausdrückt. Bildet man jetzt die Verhältnisse $AH : (AH + BH)$ und $BH : (AH + BH)$, so erhält man sehr leicht:

$$AH = \frac{1}{2} a (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta); \quad BH = \frac{1}{2} a (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

Diese Werthe, der Vorschrift nach verdoppelt, machen, wenn sie statt a in die Distanzformel eingesetzt werden, deren zweites Glied fehlerhaft um das $\pm \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ -facho

seines Betrages, also, wenn für α und k die vorigen Zahlen gelten, um 1% der Distanz, und um $\frac{1}{2}\%$, wenn α sich auf etwa 27° vermindert. Je grösser jedoch k und je kleiner der Höhenwinkel, desto mehr verschwindet der begangene Fehler, wie die kleine

Fig. 50. Fehler in Theilen der Distanz beim Gebrauche des halben Fadenabstandes statt des ganzen.



$$\mu = 100 \cdot \operatorname{tg} \alpha : 2k.$$

Schichtentafel Fig. 50 andeutet, welche den Ausdruck $\mu = 100 \operatorname{tg} \alpha : 2k$ durch Isoplethen darstellt. (Die Scala der Winkel wächst im Maasse der Tangenten.)

Schreibt man in Fig. 50 für k nur die halben Werthe an, so enthält das Täfelchen die Beträge, um welche Formel (2) zu verbessern ist, wenn ein Distanzfernrohr überhaupt ausser dem Mittelfaden nur noch einen seitlichen Distanzfaden besitzt.

§ 50. Schichtentafel zur Reduction der Distanzen.

Lichtdrucktafel V, deren Anlage schon in § 9, Nr. 2, geschildert wird, bildet das zweite Glied der Gleichung (2) ab, nämlich

$$ak \cos^2 \alpha = D_0,$$

nach den Argumenten α und D_0 und für stufenweise wachsende Lattenablesungen a an den Isoplethen. Die Verzerrung der Abscissen wurde bereits besprochen, und es bleibt nur wenig über den Eintrag der Ordinaten zu sagen übrig. So lange es sich wirklich nur um das obige Glied handelt, werden die Ordinaten an einem System von Parallelen zur Abscissenachse abgelesen, die Scala der Ordinaten hat auf der letzteren ihren Anfangspunkt und wird gleichmässig getheilt nach Einheiten, welche von dem bereits feststehenden Maasse von a abhängen. Setzen wir nämlich $\alpha = 0$, so wird

$$a = \frac{D_0}{k}.$$

Demnach sind zwischen den Durchschnittspunkten der a -Isoplethen mit der Ordinatenachse die Punkte, für welche

$$a = \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k} \dots \frac{n}{k},$$

zum Entwerfen der Ordinatenscala aufzutragen; z. B. für $k = 50$ wäre jede Ordinateneinheit gleich dem Abstände je zweier Isoplethen bei der Abscisse 0° ; für $k = 100$ nur halb so gross. Um die Parallelen zur

Abscissenachse bequem und genau eintragen zu können, sind rechts und links von der Tafel hunderttheilige Maassstäbe angebracht, welche ebenso getheilt sind, wie die Anfangsordinate es durch die a -Isoplethen ist, und deren Anfangspunkte in der verlängerten Abscissenachse liegen.

Soll nun auch das erste Glied $c \cos \alpha$ der Distanzformel mitberücksichtigt werden, so trägt man vorerst die Grössen

$$\frac{c}{k} \cos \alpha$$

jenseits der Abscissenachse auf den Ordinaten (also negativ) ab. Man begnügt sich dabei mit den vier Hauptordinaten von 0° , 10° , 20° und 30° , deren Endpunkte man durch eine gebrochene Linie verbindet. Ist

$\frac{c}{k}$, wie in den meisten Fällen, klein, so wird aus der gebrochenen Linie sogar eine Gerade. Mit dieser sind nunmehr Parallelen durch die Theilpunkte der Ordinatenscala zu ziehen, und zwar ist die Einheit dieser Scala wie früher zu bestimmen, aber ihr Anfangspunkt in die vorgenannte Curve (gebrochene Linie) zu verlegen, welche das Glied $\frac{c}{k} \cos \alpha$ darstellt. Nunmehr kommen, wie es sein muss, den Durchschnittpunkten der Isoplethen mit der Ordinatenachse die Ordinatenwerthe zu:

$$a = \frac{D}{k} - \frac{c}{k}.$$

Auch jetzt bediene man sich der beiden Maassstäbe zur Seite der Tafel zum Eintrag der Parallelen. Es verdient Erwähnung, dass eine solche Tafel, wenn sie nur für ein Instrument oder eine Gattung von Instrumenten entworfen wird, das Glied $c \cos \alpha$ schon beim Entwerfen der Isoplethen berücksichtigen kann, einfach durch Vermehren ihrer Ordinaten um $c \cos \alpha : k$. Diese Einrichtung wird man immer treffen, wenn eine Distanzentafel zum unmittelbaren Auftragen auf durchsichtiger Platte entworfen werden soll.

Man kann fragen, welcher Fehler dadurch begangen wird, dass man nur einzelne Ordinatenwerthe $c \cos \alpha : k$ aufträgt und die erhaltenen Punkte geradlinig miteinander verbindet. Seien die Ordinatenwerthe η' und η'' für α' und α'' aufgetragen worden und es solle dazwischen die Ordinate η'' aufgesucht werden, während bei α'' sich statt dessen y'' findet, so ist der begangene Fehler zu berechnen aus:

$$y'' - \eta'' = \frac{c}{k} (\cos \alpha' - \cos \alpha'') + \frac{c}{k} \cdot \frac{\cos \alpha''' - \cos \alpha'}{\sin^2 \alpha''' - \sin^2 \alpha'} (\sin^2 \alpha'' - \sin^2 \alpha'),$$

welche Grösse naturgemäss verschwindet für $\alpha'' = \alpha'$ und für $\alpha'' = \alpha'''$, aber ihren grössten Werth erhält für: $\cos \alpha'' = \frac{1}{2} (\cos \alpha' + \cos \alpha''')$. Setzen wir diesen ein und

suchen das Verhältniss $(y'' - \eta'') : \eta''$, so findet sich, da $\eta'' = \frac{c}{2k} (\cos \alpha' + \cos \alpha''')$ wird, nach einigen Umformungen:

$$\frac{y'' - \eta''}{\eta''} = - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha''' + \alpha'}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha''' - \alpha'}{2}.$$

Ist z. B. $\alpha' = 15^\circ$, $\alpha''' = 30^\circ$, so wird $\frac{y'' - \eta''}{\eta''} = -1 : 673$, d. h. die Grösse $c \cos \alpha$, welche ohnehin klein ist, wird höchstens um 0,0015 ihres Betrages falsch gefunden!

Streng genommen werden die Distanzen D in Tafel V ebenso wie die Lattenabschnitte a an Curven aufgesucht, es tritt also an diesem Beispiele deutlich hervor, dass auch das Coordinatennetz ein Netz von Isolethen ist, was im Grunde stets stattfindet. Und obwohl hier noch keine Gelegenheit vorkam, wo eine Formveränderung dieser Isolethen nützlich gewesen wäre, so ist dieser Fall immerhin denkbar und das Verfahren mancher Anwendung fähig. So könnte man eben die Schichtentafel zur Reduction der Distanzen auf ein Coordinatennetz von concentrischen Kreisen und radialen Geraden übertragen und nach Art eines Höhenkreises mit der Drehachse des Fernrohres verbinden; unter der letzteren würde alsdann ein feststehender Zeiger die Neigung angeben, zu welcher die reducirte Distanz gesucht werden muss u. s. w. Diese Construction soll durchaus nur als Beispiel dienen, nicht empfohlen werden.

§ 51. Formel für die Höhenmessung und Schichtentafel dazu.

Aus der Höhenquote q der (horizontal gerichteten) Fernrohrvisirlinie, dem Abstände $D = MP$ (Fig. 49) der Ziellatte von der Instrumentenmitte, dem Höhenwinkel $\pm \alpha$ bei der Visur auf das Ziel und der Lattenhöhe $p = HE$, auf welche die mittlere Visirlinie eingestellt wird, berechnet sich die Quote Q des anvisirten Terrainpunktes E zu:

$$Q = q + D \operatorname{tg} \alpha - p, \quad (2^*)$$

wenn nämlich die Höhenquoten von unten nach oben wachsen, also etwa vom Meeresspiegel aus gezählt werden. Wo man sich noch willkürlich gewählter Generalhorizonte über dem Aufnahmegebiet bedient, wird man zweckmässig die Elevationswinkel mit minus bezeichnen, worauf in der allgemeinen Formel nur das Vorzeichen von p zu ändern ist.

Das erste und dritte Glied der Höhenformel lassen sich für die ganze Arbeit auf einem Standpunkte des Instrumentes zusammenziehen, wenn der Mittelfaden stets auf dieselbe Lattenhöhe gerichtet wird. Dies Verfahren ist vortheilhafter, als die Einstellung eines der äusseren Fäden auf eine runde Zahl. Hierzu wäre nämlich eine peinliche Einstellung nöthig, welche mehr Zeit verlangt, als die Schätzung von Centimeterbruchtheilen sammt der Subtraction der beiden Abschätzungen an den Aussenfäden. Die Einstellung des Mittelfadens aber verlangt keine grössere Schärfe, als die von einigen Centimetern; denn schon bei jedem neuen Aufrichten der Ziellatte über Terrainpunkten, die nicht ausgepflocht sind, werden sich Differenzen bis zum genannten Betrage zeigen.

Das zweite Glied $D \operatorname{tg} \alpha$ erhält, wenn man für D den Werth aus der Distanzformel (2) S. 155 einsetzt, die Form:

$$D \operatorname{tg} \alpha = c \sin \alpha + \frac{1}{2} a k \sin 2 \alpha. \quad (3)$$

Lichtdrucktafel Nr. VI ist zunächst für das Glied $\frac{1}{2} a k \sin 2 \alpha = h'$ entworfen, jedoch mit Weglassung der Parallelen zur Abscissenachse und der Zeiger der Isoplethen, welche letztere für constante h gelten, während auf der gleichtheiligen Abscissenachse α abzulesen und auf der Ordinatenachse die Lattenabschnitte a aufzutragen sind.

Man denke sich vorerst die Ordinaten so getheilt, wie es die beiden Maassstäbe zur Seite der Tafel sind und die Curven für $k = 100$ entworfen. Während die α bis 30° gehen, reicht alsdann die Scala der Lattenabschnitte a bis zu 3m., und die Isoplethen folgen sich in Stufen von je 1m. der Höhe h' , wovon man sich leicht überzeugt, wenn man bei der Abscisse 15° die Ordinate der 25ten, 50ten ... Isoplethe abmisst; man wird genau die Grösse erhalten, welche man an den Maassstäben zur Seite der Tafel mit 1m., 2m. ... bezeichnet hatte, entsprechend $k = 100$ und der Gleichung:

$$a = 2 h' : k \sin 2 \alpha.$$

Erhält nun k irgend einen anderen Werth, z. B. $k' = 150$, so müssen wir die Scaleneinheit der Ordinaten im Verhältnisse $k' : k$ verändern, in diesem Falle auf das $1\frac{1}{2}$ fache vergrössern. Wäre $k'' = 50$, so würde $k'' : k = \frac{1}{2}$ und die Scaleneinheit müsste halbirt werden. Für $k''' = 200$ wird $k''' : k = 2$ und eine Verdoppelung der Scaleneinheit nöthig. Weil aber in diesem Falle die ganze Scala der a nur noch bis $a = 1,5$ m. reichen würde, so werden wir vorziehen, die Isoplethenzeiger zu verdoppeln, und in Voraussicht dieses Falles sind eben diese Zeiger in Tafel VI gar nicht angeschrieben worden. Den vergrösserten Stufen der Isoplethen (von je 2m. Höhe) entspricht die verringerte Genauigkeit der Distanzmessung mit grosser Constante k .

Es ist nun noch dem Gliede $c \sin \alpha = h''$ Rechnung zu tragen. Aehnlich wie bei der Distanzentafel verlegen wir zu dem Ende die Anfangspunkte sämmtlicher Ordinaten in eine Curve, welche die Ordinaten $c : k \cos \alpha$, diesmal diesseits der Abscissenachse, also innerhalb der Tafelfläche, begrenzt. Denn es leitet sich allgemein aus der Formel der Höhen, wenn

$$D \operatorname{tg} \alpha = h' + h'' = h \quad (3^*)$$

gesetzt wird, die Ordinate ab:

$$a = \frac{2 h}{k \sin 2 \alpha} - \frac{c}{k \cos \alpha}.$$

Ist $k = 100$ und $c = 0,5$, so werden durch das Verlegen der Anfangspunkte die Ordinaten der Tafel um $0,005 \operatorname{sec} \alpha$ verkürzt, welches Maass in Einheiten der beiden Hülfs-scalen ausgedrückt ist. Für $k = 200$

reducirt es sich auf die Hälfte u. s. w. Auch hier werden wir uns erlauben, nur vier dieser Maasse, nämlich für 0° , 10° , 20° und 30° , aufzutragen und die Curve des Ordinatenanfanges, sowie sämtliche Parallelen dazu als gebrochene Linien zu ziehen, ja es würde, wenn c klein ist, oft ausreichen, nur die beiden äusseren Werthe streng aufzutragen und die betreffenden Punkte einfach geradlinig zu verbinden, in welchem Falle dann auch Gerade als Parallellinien einzuzeichnen sind.

Angenommen $c : k \cos \alpha$ sei für α' und α'' genau aufgetragen worden, so finden wir durch lineare Einschaltung bei α'' einen entsprechenden Werth, welchem der nachfolgende Ordinatenfehler anhaftet:

$$\frac{c}{k} \left[\frac{\alpha'' - \alpha'}{\alpha'' - \alpha'} \left(\frac{1}{\cos \alpha''} - \frac{1}{\cos \alpha'} \right) - \left(\frac{1}{\cos \alpha''} - \frac{1}{\cos \alpha'} \right) \right],$$

den wir, um seinen Einfluss auf die Höhe h zu erkennen, noch mit $\frac{1}{2} k \sin 2\alpha''$ zu multipliciren haben. Setzen wir ausserdem $\alpha' = 0$ und $\alpha'' = \frac{1}{2} \alpha'''$, so ergibt sich der Höhenfehler:

$$\frac{c}{4} (\operatorname{tg} \alpha''' + \sin \alpha''' - 2 \sin \alpha''),$$

welcher für $\alpha''' = 30^\circ$ die Grösse $0,14 c$, für $\alpha''' = 10^\circ$ aber $0,044 c$ erreicht. Die Wahl zwischen gebrochenen und geraden Linien für den geometrischen Ort der Ordinatenanfänge und seine Parallelen wird demnach von der Grösse von c und der gewünschten Genauigkeit abhängen.

Für die Höhenformel $h = c \sin \alpha + \frac{1}{2} a k \sin 2\alpha$ kann nach einer kleinen Abrundung auch eine logarithmische Schichtentafel entworfen werden. Man begeht nämlich nur einen sehr geringen Fehler ($2c \sin \alpha \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$, oder bei $\alpha = 30^\circ$ erst $0,06 c$), indem man schreibt:

$$h = \frac{1}{2} k \sin 2\alpha \left(\frac{c}{k} + a \right) \quad (4)$$

und nun eine Schichtentafel construirt, deren Coordinatenscalen mit $\log \frac{1}{2} k \sin 2\alpha$ und $\log \left(\frac{c}{k} + a \right)$ wachsen. Die eine Scala wird mit den Zeigern α , die andere mit a beschrieben und an den Isoplethen h abgelesen. Von der Beigabe einer solchen Tafel, in welche übrigens die allgemeine Tafel Nr. I umgebildet werden kann, wurde abgesehen, weil die Vervollständigung des Coordinatennetzes in Tafel VI etwas einfacher erfolgt.

§ 52. Rechenschieber für Tachymeternaufnahmen.

Um, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen die Höhenformel, nun auch die Distanzformel logarithmisch zu machen, schreiben wir sie:

$$D = k \cos^2 \alpha \left(\frac{c}{k} + a \right) \quad (5)$$

und begehen dabei in der Distanz den unmerklichen Fehler $2c \cos \alpha \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$ oder $0,115 c$ für $\alpha = 30^\circ$. Die beiden Formeln (4) und (5) eignen sich

zur Berechnung mit dem Rechenschieber. Sucht man nämlich auf dem Stabe eines solchen die logarithmischen Längen der Zahlen $\left(\frac{c}{k} + a\right)$ auf, wobei die Addition der eingeklammerten Glieder im Kopfe erfolgt, so hat man jeder dieser eingestellten Grössen nach der Reihe beizufügen die entsprechenden $\log k \cos^2 \alpha$ und $\log \frac{1}{2} k \sin 2\alpha$. Den beiden logarithmischen Summen entsprechen sodann auf dem Stabe die Ablesungen D und h .

Das Beifügen der logarithmischen Maasse von $k \cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2} k \sin 2\alpha$ erfolgt mittelst eigens entworfener Schieberscalen, auf welchen, der Allgemeinheit wegen, $k = 1$ gesetzt wird.

Da $\log \cos^2 0^\circ = \log 1 = 0$, so wird der Zeiger 0° an den Anfang derjenigen logarithmischen Einheit (Fig. 20) geschrieben, auf welcher die \cos^2 -Scala entworfen werden soll. Ferner ist $\log \cos^2 45^\circ = \log \frac{1}{2} = -\log 2 = -0,301$. Wir haben demnach dieses Maass vom Anfangspunkte aus rückwärts aufzutragen, d. h. den Zahlen des Stabes entgegenlaufend, und schreiben dazu 45° . Wie die beiden genannten, so werden auf der Schieberscala auch alle zwischenliegenden logarithmischen

Fig. 20. Rechenschieber für Tachymeteraufnahmen.



Längen berechnet und aufgetragen. Will man nunmehr die beiden Factoren der Distanzformel (5) mit einander multipliciren, so stellt man den Anfangspunkt der \cos^2 -Scala auf die Zahl $\left(\frac{c}{k} + a\right)$ am Stabe, geht dem Schieber entlang bis zu α und liest gegenüber an der Scala des Stabes die Zahl ab, welche $\left(\frac{c}{k} + a\right) \cos^2 \alpha$ entspricht. Es fehlt nun noch die Multiplication mit k . Da dies aber eine constante Zahl, so fügen wir ihre logarithmische Länge sofort bei der Einstellung zu, indem wir ein für allemal eine Marke in dem Abstände $\log k$ so auf den Schieber setzen, dass beim Einstellen derselben auf die Zahl $\left(\frac{c}{k} + a\right)$ der Anfangspunkt der \cos^2 -Scala um $\log k$ vorgeschoben erscheint. Dieser Anfangspunkt ist damit auf $c + ak$ eingestellt und die Multiplication dieser Zahl mit $\cos^2 \alpha$ ergibt sich nun wie zuvor. Für $k = 200$ z. B. dient der mit 45° bezeichnete Strich als Marke.

Vogler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln.

Wenn wir in ähnlicher Weise eine logarithmische Schieberscala für $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ entwerfen wollen, so beginnen wir am besten mit dem Werthe für 45° ; $\log \frac{1}{2} \sin 2 \times 45^\circ = \log \frac{1}{2} = -0,301$ oder genau dieselbe Grösse, mit der die \cos^2 -Scala schloss. Alle übrigen Werthe für Winkel unter 45° werden noch kleiner, so dass wir die Scala der $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ unmittelbar an die der $\cos^2 \alpha$ anschliessen können. Und zwar überschreitet die Scala der $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ nicht blos die erste logarithmische Einheit (bei $9,000 - 10 = \log \frac{1}{2} \sin 11^\circ 32'$ oder $\alpha = 5^\circ 46'$), sondern sie reicht sogar bis $-\infty = \log \frac{1}{2} \sin 0^\circ$. Wir sind also genöthigt, sie irgendwo abzubrechen, und thun es etwa schon am Ende der zweiten logarithmischen Einheit, also bei $8,000 - 10 = \log \frac{1}{2} \sin 1^\circ 9'$ oder $\alpha = 0^\circ 34' 23''$.

Denn wenn auch geringere Winkel als dieser vorkommen, so reicht es für dieselben vollkommen aus, mit dem doppelten Winkel zu rechnen (z. B. statt bei $45'$ bei $1^\circ 30'$ abzulesen) und das Resultat wieder zu halbiren. Doch ist es für diese Operation wünschenswerth, dass die Scala abwärts bis $30'$ reiche, da die Verdoppelung alsdann 1° nicht überschreitet. Winkel unter $15'$ können mit grösseren Zahlen als 2 multiplicirt oder die zugehörigen Werthe von h auch im Kopfe berechnet werden nach der folgenden Formel, in welcher α' Minuten bedeutet:

$$h = 3438 \alpha' k.$$

Fig. 20. Rechenschieber für Tachymeteraufnahmen.



Während nun in beiden Scalen, der für $\cos^2 \alpha$ und der für $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$, blos negative Logarithmenmaasse vorkommen, unterscheiden sich ihre Zahlzeiger doch wesentlich durch die Richtung, nach welcher sie wachsen. Die Zeiger der Sinusscala steigen in derselben Richtung auf wie die natürlichen Zahlen auf dem Stabe.

Es ist aber kein Unterschied in der Einstellung beider Scalen. Man stellt stets den gemeinsamen Anfangspunkt derselben auf die Zahl $\left(\frac{c}{k} + a\right)$ am Stabe ein, sucht den Winkel α an der betreffenden Scala des Schiebers auf und hat gegenüber auf dem Stabe das Product $\frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{c}{k} + a\right)$. Um es mit k zu multipliciren, dient dieselbe Marke und das gleiche Verfahren, wie es für die \cos^2 -Scala angegeben wurde.

Eine Vereinigung der beiden Schieberscalen so, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen, hat, obwohl diese Anordnung die nächstliegende scheint, doch erst C. Werner in seiner Tachymetrie empfohlen. Nur diese Einrichtung gestattet uns mittelst einer einzigen Einstellung des Schiebers (nämlich seines Anfangspunktes oder der um $\log k$ entfernten Marke auf die Zahl $\frac{c}{k} + a$) zu beiden gesuchten Werthen (4) und (5) zu gelangen.

Werner's tachymetrischer Rechenschieber, der auf starkem Papier lithographirt von Ostheimer in Wien, Papierhandlung, Michaelsplatz, um ein Geringes zu beziehen ist, weicht dem Anscheine nach von der Anordnung der Fig. 20 ab, dem Wesen nach aber nicht, insoferne Werner nur die \cos^2 -Scala um eine logarithmische Einheit nach links und, um Spielraum für die Einstellung zu gewinnen, auf die andere Kante des Schiebers verlegt hat. Seine lithographirten Scalen sind bestimmt, auf Pappdeckelstreifen oder Holzleisten aufgespannt zu werden; ein einfaches Scalenpaar wie in Fig. 20 könnte etwas leichter untergebracht, beispielsweise etwa auf dem Mantel einer cylindrischen Pulverschachtel aufgeklebt werden, wobei die sanfte Reibung zwischen Untertheil und Deckel die sichere Einstellung befördern würde.

Es mag hier noch darauf hingewiesen werden, dass alle graphischen Rechenhilfen, die Tafeln sowohl als der Rechenschieber, nicht nur Aufnahmen sehr bequem zu berechnen erlauben, sondern auch umgekehrt gestatten, projectirte Linienzüge aus Plänen in das Terrain zu übertragen, ein Verfahren, welches bei bloßer Rechnung in unebenem Terrain unanwendbar wird, der beständig wechselnden Fernrohrrichtung halber, welche jedesmal neue Reductionen nöthig macht. Zum Abstecken von Linien untergeordneter Bedeutung, welche ohnehin nur aus freier Hand oder mit dem Curvenlineal auf dem Situationsplan entworfen worden sind (Bach- und Feldwegcorrectionen und deren Böschungsverschnidungen etc.) wird das Tachymeter oder ein aequivalentes Instrument mit Vortheil angewendet.

§ 53. Graphische Hilfsmittel zum Auftragen der tachymetrischen Ergebnisse.

Bedient man sich zur tachymetrischen Aufnahme eines Messtisches mit Kippregel, so ist die Visirrichtung auf dem Papier schon für jeden einzelnen Terrainpunkt fixirt und es bedarf nur noch des Eintragens der Distanz. Um Verwirrung zu vermeiden, muss dieses augenblicklich erfolgen; der Eintrag in das Handbuch dient nur zur Controle und zur späteren Berechnung der Höhen. Nun könnte man Tafel V benützen, um daraus sogleich am Instrumente die Distanzen zu entnehmen; vortheilhafter bedient man sich aber dazu einer im Maassstabe des Planes analog entworfenen Tafel auf durchsichtiger Platte, und benützt dieselbe in der Weise, die im § 7 angedeutet wurde. Mit dem Aufsuchen der Tafelwerthe vereinigt sich dabei der Auftrag der Distanzen ganz von selber. Auf solche Art entsteht ein Terrainbild schon während der Aufnahme, höchst schätzbar für die Anordnung derselben.

Dem Messtische gegenüber besitzt der Theodolith den Vorzug der Verwendbarkeit bei jedem Wetter, und da der Ingenieur in Bezug auf die Zeit zur Aufnahme selten wählerisch sein darf, so wird der tachymetrische Theodolith häufiger in Gebrauch kommen als der Messtisch. Während der letztere aber die Richtung der anvisirten Objecte schon bei der Visur selber graphisch festlegt, können die Winkelmaasse aus der Ablesung am Horizontalkreis des Theodolithen erst nachträglich construirt werden. Man benützt dazu einen Transporteur von Papier, dessen Centrum auf den Standpunkt des Instrumentes im Situationsplan gelegt, und der so lange gedreht wird, bis sein Nullpunkt orientirt ist, d. h. bis die Richtung 0° dieselbe Lage gegen die Objectpunkte des Planes hat, wie früher gegen die Objecte des Feldes. Dies ist der Fall, wenn der Nullpunkt des Transporteurs mit der Verbindungslinie des Standpunktes und eines jener Objecte den gleichen Winkel einschliesst, welcher bei der Visur nach dem Objecte abgelesen wurde. In dieser Lage wird der Transporteur festgeheftet, sodann in seinem Centrum eine feine Nadel eingesteckt, an welche sich der Nullpunkt des prismatischen Maassstabes beim Auftragen der Distanzen jedesmal anlegen muss. Das andere Ende des Maassstabes gleitet über die Kreiseintheilung hinweg und seine Vorderkante, welche als geradlinig vorausgesetzt wird, stellt sich der Reihe nach auf die Richtungen ein, welche für die einzelnen Terrainpunkte am Horizontalkreis des Tachymeters abgelesen worden sind. Ein feiner Nadelstich bezeichnet jedesmal die reducirte Distanz, welche aus der Schichtentafel oder mit dem Rechenschieber vorausberechnet wurde und längs der Scala des prismatischen Maassstabes abgelesen wird. Damit der Nullpunkt des letzteren stets mit dem Standpunkte des Instrumentes zusammenfalle, wird ein untergeleimtes Stückchen Papier dicht beim Nullpunkte ebenfalls von der Mittelpunktsnadel durchstoßen.

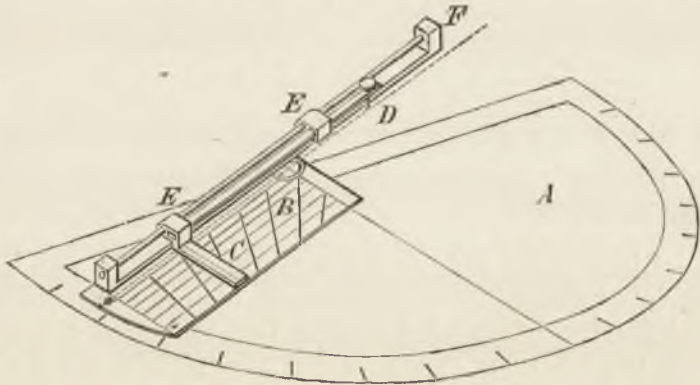
In der beschriebenen Weise geschieht der Auftrag der Tachymeteraufnahmen am Aachener Polytechnicum und zwar mit Hilfe von Transporteuren, welche, denen in C. Werner's Tachymetrie*) ähnlich, aber mit 60- statt 100-Theilung versehen, auf Cartonpapier gedruckt und von Ostheimer in Wien bezogen sind. Man kann dieselben, statt sie festzuheften, auch wie einen Nonienkreis um die Mittelpunktsnadel herum-drehen und dadurch den Durchmesser 0 — 180 in die Richtungen der Detailpunkte bringen. Dafür ist dieser Durchmesser mit einer Millimeterscala versehen und sonach geeignet, den prismatischen Maassstab zu vertreten. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Bezifferung der Kreistheilung des Transporteurs jener am Instrumente entgegenläuft; als Index zum Ablesen der Winkel dient eine Gerade, welche über den Plan durch den Standpunkt des Instrumentes so gelegt wird, dass sie der Nullrichtung des Horizontalkreises auf dem Felde entspricht.

*) C. Werner, Commissär der k. k. Generalinspection der österr. Eisenbahnen, die Tacheometrie und deren Anwendung, bei Tracéstudien, Wien 1873.

Wer die kleine Mühe nicht scheut, kann sich nach Fig. 51 einen Distanzenzirkel anfertigen, dessen Hauptbestandtheile ein Cartontransporteur *A* mit einer daran beweglichen Schichtentafel *B* auf Pappe sind, nebst einem Läufer *C* von Horn und einer Nadelspitze *D* zum Eintupfen der Distanzpunkte in den Plan. Diese Vorrichtung erlaubt, direct aus den Zahlen der Aufnahme (den sogenannten Stammzahlen) Richtung und Distanz der Detailpunkte gleichzeitig aufzutragen.

Man denke sich den Transporteur *A* wie früher auf den Plan gelegt und festgeheftet, sein Centrum aber nicht durchstochen, sondern von einem Ringelchen umgeben, ähnlich den Metalleinfassungen von Knopflöchern in Lederwerk. Auf untergeklebtem Pauspapier oder einem Hornplättchen kann der Mittelpunkt noch besonders bezeichnet sein. Um den kleinen Ring als Achse dreht sich die Distanztafel *B*, welche wie Tafel V, aber im Maassstabe des Planes entworfen und so auf Pappe aufgezogen ist, dass ihre Abscissenachse (die Linie wo $D = 0$) nach aussen liegt und senkrecht geschnitten wird von dem punktierten Kreisdurchmesser, der zugleich die Bahn der Nadelspitze des Tupfers darstellt. Parallele zur Abscissenachse brauchen auf der Schichtentafel gar nicht

Fig. 51. Distanzenzirkel.

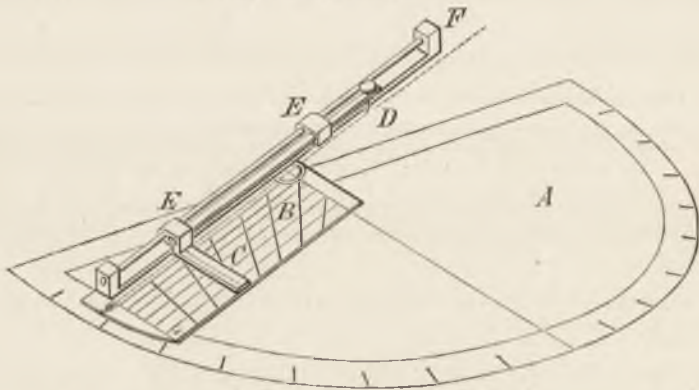


oder nur zur Controle in weiten Abständen angegeben zu sein; sie werden durch eine (punktierte) Linie auf der Unterfläche des Läufers *C* vollständig vertreten. Dieser besteht aus einem rechteckigen Hornplättchen, das sich gleichzeitig mit der Nadelspitze in der Richtung des punktierten Kreisdurchmessers verschieben lässt. Zur Führung können, wie in Fig. 51, zwei Oesen *E, E* von Metall oder Holz (Korkholz) dienen, welche längs einer Stricknadel hin und herschleifen und unter sich durch einen Stab von Fischbein verbunden sind, an dessen Ende sich der Nadeltupfer *D* befindet. Hat die Distanztafel die richtige Horizontalwinkeldrehung, sodann der Läufer den

richtigen Stand nach den Argumenten α und α erhalten, so wird der Tupfer niedergedrückt und ein feiner Stich in's Papier gemacht. Doch kann der Läufer noch weit einfacher hergestellt werden und beispielsweise aus einem grösseren Rechteck von Horn bestehen, das mit einer Seite längs der Kante des drehbaren Lineals F verschoben wird und an der richtigen Stelle durchlocht ist, um daselbst mit einer feinen Nadel durchstechen zu können.

Steht der Läufer auf der Abscissenachse, so muss die Nadelspitze auf das Centrum des Transporteurs deuten. Auf die Kreistheilung des letzteren wird durch einen Pfeil eingestellt und dieser muss so angebracht werden, dass er auf 0° weist, wenn der Tupfer beim Hin- und Herschieben des Läufers dem Hauptdurchmesser des Transporteurs entlang gleitet.

Fig. 51. Distanzenzirkel.



Ist der letztere auf der Zeichnung einmal orientirt, und lässt man sich aus dem Handbuche der Reihe nach für jeden Terrainpunkt den Horizontalwinkel, Höhenwinkel α und Lattenabschnitt a dictiren, so wird durch Einstellen des Pfeiles an der Kreistheilung und Verschieben des Läufers über der Schichtentafel, endlich durch einen Fingerdruck auf den Tupfer der entsprechende Punkt im Situationsplane gewonnen.

Die zugehörige Höhenquote muss inzwischen mit Hülfe der Schichten- tafel für die Höhen ermittelt und dem Punkte beigeschrieben werden.

Cap. X. Die Tachymeteraufnahme und deren Genauigkeit.

§ 54. Prüfung und Berichtigung der Distanzmesser nebst Latten.

1) Die Distanzmesser. Wie die Constanten der Distanzfernrohre bestimmt werden, ist im § 48 schon vorgekommen, aber noch nicht, wie das Distanzfernrohr auf eine vorbestimmte Constante eingerichtet wird. Bei Reichenbach's Distanzfernrohren, wozu auch jene mit Ramsden'schem Ocular zu rechnen sind, ist das überhaupt nur möglich mit Hülfe des schon erwähnten complicirten Federn- und Schraubenapparates, welcher die äusseren Ocularfäden dem mittleren zu nähern und von ihm zu entfernen erlaubt. Man berechnet aus der gemessenen Constanten c und der festgesetzten Constanten k für eine genau bekannte Distanz D den Lattenabschnitt a und sucht diese Grösse wirklich zwischen die äusseren Fäden zu bringen, welche man dabei dem Mittelfaden gleich nahe bringt. Sodann wird zur Controle k nach § 48 auf mehreren abgesteckten Distanzen bestimmt und wenn nöthig noch einmal in der vorigen Weise verbessert, bis der Mittelwerth von k aus mehreren Versuchen dem vorgeschriebenen entspricht. Mittelst Reibungsmuttern lässt sich die unwillkürliche Verstellung der Fäden einigermaassen verhindern. Durch Anbringen der Fadenbewegung verzichtet man übrigens freiwillig auf einen Hauptvorteil von Reichenbach's Distanzfernrohr, die Unveränderlichkeit seiner Constanten, welche, gegenüber den Fehlern der Constantenbestimmung, bei festen Fäden eine vollkommene genannt werden darf. Ausserdem ist es leicht, Strichen auf Glas einen solchen Abstand zu geben, dass dadurch k den verlangten Werth erhält, was zum Gebrauche gemeinsamer Tafeln für mehrere Instrumente erwünscht sein kann.

Porro's Distanzfernrohr besitzt keine Vorrichtung zum Verstellen der Fäden unter sich. Da jedoch seine Constante durch das Verhältniss bestimmt wird:

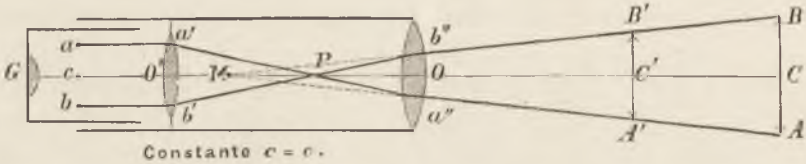
$$k = MO : a'' b''$$

(Fig. 47 folg. S.), der Convergenczpunkt M der äusseren Strahlen aber, welche auf den Ocularfäden sichtbar werden, seiner Lage nach von dem Abstände OP abhängt, so wird jede Verschiebung der Sammellinse O' und ihres vorderen Brennpunktes P auch die Grösse von MO ändern. Da ferner, wenn φ die Brennweite der Hülflinse bedeutet, das Verhältniss

$$a' b' : O' P = a b : \varphi = b'' a'' : O P$$

constant bleibt, so wird sich mit $OP = d$ auch $a''b''$ ändern. Beide Grössen, von denen k abhängt, sind also veränderlich, wenn die Sammellinse O' ihre Stelle verlässt. Aus (1*) § 48 folgt

Fig. 47. Porro's Distanzmesser.



$$MO = b = \frac{fd}{f-d},$$

welche Gleichung zusammen mit dem Vorstehenden für die Constante k ergibt:

$$k = \frac{\varphi}{ab} \cdot \frac{f}{f-d}.$$

Differentiiren wir dies nach d , so findet sich für kleine Verschiebungen Δd der Sammellinse vom Objectiv weg das Wachsthum Δk der Constanten:

$$\Delta k = k \cdot \frac{\Delta d}{f-d}.$$

Ist demnach die Objectivbrennweite f bekannt, d durch directe Messung und die Constante k durch Versuche gefunden, während $k' = k + \Delta k$ gewünscht wird, so haben wir die Sammellinse um das Maass

$$\Delta d = \frac{\Delta k}{k} \cdot (f-d)$$

zurückzuschieben, was dadurch möglich wird, dass dieselbe in einem verschieblichen Röhrchen gefasst ist, welches von aussen durch zwei Schraubchen festgeklemmt werden kann. Dabei ändert sich MO um $f^2 \Delta d : (f-d)^2$, für kleine Δd also nicht wesentlich.

Ertel's Distanzocular wird von dem gleichnamigen Institut zur Zeit mit mehr Correcturvorrichtungen ausgestattet als nöthig. Allerdings ist Huyghen's Ocular nur bei einem festbestimmten Abstände der Collectivlinse vom Augenglase ganz farbenfrei, wesshalb man, wenigstens bei Fernrohren zu astronomischen Zwecken, das letztere nicht für sich verstellbar machen kann, sondern das Fadenkreuz, welches hier zwischen beiden Gläsern des Oculars liegt, zum Vor- und Zurückschieben einrichtet. Hierdurch ändert sich aber wieder die Constante der Distanzfäden, so dass für Augen von verschiedener Sehweite das Fernrohr als Distanzmesser nicht gebraucht werden kann. Also macht man das Augenglas doch verstellbar und verzichtet damit entweder auf völligen

Achromatismus des Oculars, oder stellt diesen her, indem man das Augenglas aus zwei Linsen zusammensetzt. — Sind nun die äusseren Fäden nach Reichenbach durch Schrauben und Federn gegen einander verstellbar, so genügt diese Vorrichtung allein, um die gewünschte Constante zu erlangen; dann aber ist die Verschiebbarkeit des Diaphragmas nutzlos und wegen geringerer Solidität des Ganzen sogar schädlich. Ohne Reichenbach's bewegliche Fäden kann jedoch die Verstellbarkeit des Diaphragmas gegen die Collectivlinse dazu dienen, der Constanten bestimmte Werthe zu ertheilen; es geschieht dies aber zweckmässiger durch Verstellung der Collectivlinse in dem Muttergewinde ihrer Fassung, als durch Verschieben des Ringes, welcher das Diaphragma trägt. Derselbe ist vielmehr an das Ocularröhrchen festzunieten und die Muttergewinde der Centrirschrauben durch ihn hindurchzuführen. Dass man erst nach Trennung des Oculars von der Auszugröhre zu der Fassung der Sammellinse gelangt, schützt diese vor zufälligen Verstellungen.

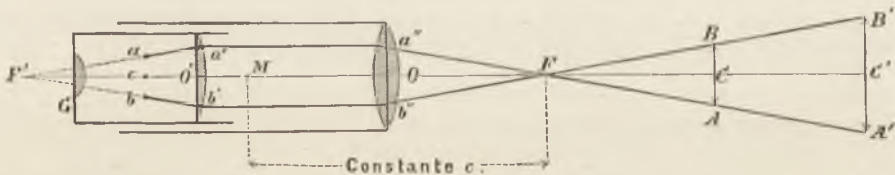
Auch hier empfiehlt es sich zu berechnen, welche Veränderung Δk der Constanten einer bestimmten Verschiebung der Sammellinse O' entspricht. Für Ertel's Distanzmesser gilt (Fig. 48)

$$k = OF : a' b' = f : a' b',$$

und wenn, ausser den bereits eingeführten Bezeichnungen, noch $ab = m_0$, $OF' = \varphi$ und $cF' = x$ gesetzt wird, findet sich mit Hülfe der Figur:

$$k = \frac{f x}{m_0 \varphi},$$

Fig. 48. Ertel's Distanzmesser.



woraus:

$$\Delta k = \frac{f \cdot \Delta x}{m_0 \varphi}$$

und:

$$\Delta k = \frac{\Delta x}{x} \cdot k.$$

Nun ist bei Huyghen's Ocular immer sehr nahe $x = \frac{2}{3} \varphi$, also auch

$$\Delta k = \frac{3 \Delta x}{2 \varphi} \cdot k.$$

Haben wir demnach die Brennweite φ der Collectivlinse direct und k durch Versuche bestimmt, sollen aber $k' = k + \Delta k$ machen, so berechnen wir die Verschiebung Δx der Sammellinse gegen das Augenglas (positive Richtung) aus der zuletzt angeschriebenen Gleichung. Da φ stets nur wenige Centimeter beträgt, so genügt eine kleine Verschiebung Δx zu einer beträchtlichen Veränderung der Constanten k .

Die Ziellatte muss nach Art gewöhnlicher Nivellirlatten getheilt sein, und zwar höchstens bis zu Centimetern, da Theile von Centimetern erfahrungsgemäss genauer abgeschätzt als an Zwischenstrichen abgelesen werden. Bei grossen Distanzen und unruhiger Luft muss zuweilen nach Theilen von halben und ganzen Decimetern geschätzt werden, wesshalb auch diese Maasse deutlich auf der Latte hervorgehoben werden sollten. Jedes Decimeter wird beziffert und die vollen Meter in auffallender Weise (etwa römisch). Ob der Nullpunkt der Scala mit dem Fusspunkte der Latte zusammenfällt oder einige Centimeter, selbst einige Meter darunter, ist gleichgültig. Nur muss die mit p (§ 51) bezeichnete Grösse darnach bestimmt werden.

Verwendet man mehrere Ziellatten zugleich, so ist die UeberEinstimmung ihrer Meterlänge zu prüfen. Es genügt, dass dieselbe bis auf 1 : 1200 identisch sei, doch kommen selbst mittlere Differenzen von 1 : 800 vor, wozu noch die Veränderungen wegen des Feuchtigkeitszustandes treten. Ist jene Bedingung erfüllt, so braucht man nicht weiter auf Differenzen zwischen der Ziellatteneinheit und der Einheit der Horizontalmessung zu achten, denn durch das angegebene Verfahren, die Constante k zu bestimmen, werden sie bereits berücksichtigt; ist nämlich das Meter der Ziellatte zu klein, so findet sich das Verhältniss k auch kleiner als es wirklich ist; dafür aber legen wir den Lattenabschnitten a zu grosse Werthe bei, wodurch das Product ak wieder richtig wird.

Wenn nicht sehr bedeutende Fehler durch schiefe Stellung der Latte entstehen sollen, so muss dieselbe durchaus mit einer Dosenlibelle versehen sein. Ein Senkel nützt wenig, weil er mehr die eignen Bewegungen als die der Latte angibt. Die Prüfung auf lothrechte Stellung bei einspielender Libelle ist nothwendig, aber zu einfach, um hier geschildert zu werden. Von den unvermeidlichen Fehlern wegen Lattenunruhe wird später die Rede sein (§ 60, e).

§ 55. Prüfung und Berichtigung des Theodolithen als Tachymeter.

1) Stellung der Libelle zur Verticalachse des Instrumentes. Es fragt sich, auf welchem Scalenpunkte (Spielpunkt) die Luftblase der Libelle einspielt, wenn die Verticalachse lothrecht steht. Die entsprechende Berichtigung des Instrumentes besteht darin, dass die Scalenmitte zum Spielpunkt gemacht wird.

Man stellt die Libelle in die Richtung zweier Fusschrauben, bringt sie zum Einspielen, dreht sie sodann um die Verticalachse des Instrumentes um 180° , wobei die Kreistheilung zu Hülfe genommen wird, und liest ihren Ausschlag ab. Um die Hälfte desselben liegt der Spielpunkt von der Scalenmitte entfernt. Nun hebt man das entgegengesetzte Ende der Libellenröhre, für sich allein, unabhängig von der Verticalachse,

soweit, dass die Luftblase um ihren halben Ausschlag gegen die Scalenmitte zurückkehrt, und hat damit die Libelle berichtigt. Geschah dies nicht vollkommen und zeigt sich noch ein Ausschlag von n Secunden in zwei um 180° verschiedenen Lagen, so wird die Verticalachse um höchstens $\frac{1}{2} n''$ gegen das Loth geneigt sein. Kennt man übrigens den Spielpunkt und liegt derselbe nicht allzuweit von der Scalenmitte entfernt, so ist eine Berichtigung überflüssig, denn die Verticalachse steht überhaupt dann lothrecht, wenn die Libelle in zwei auf einander senkrechte Verticallebenen gedreht wird und die Luftblase beidemale auf dem Spielpunkte zur Ruhe kommt (vorausgesetzt, dass der Achszapfen in seiner Büchse nicht schlottert).

2) Schiefe Stellung der Fernrohdrehachse bei lothrechter Verticalachse. Wie die Libelle auf dem Theodolithen angebracht ist oder welche von mehreren benutzt wird, bleibt bei 1) gleichgültig. Zur Untersuchung des zweiten Fehlers findet sich jedoch in vielen Fällen eine Setzlibelle eigens auf der Drehachse aufgestellt, in anderen wieder nicht; verschiedene Einrichtung bedingt hier einen verschiedenen Gang der Untersuchung.

a) Eine Setzlibelle stehe auf den Zapfen der Fernrohdrehachse oder sei an denselben aufgehängt; nach Lothrechtstellung der Verticalachse spiele die Luftblase ein. Sind die Libellenfüsse gleich lang, so steht die Drehachse senkrecht auf der Verticalachse; wenn nicht, so erkennt man ihre Ungleichheit und deren Betrag durch Umsetzen der Libelle. Die Hälfte des entstehenden Ausschlages wird an einem der Libellenfüsse, die andere Hälfte an einem der Fernrohrlager corrigirt. Spielte die Luftblase zuvor nicht ein, obwohl die Verticalachse lothrecht stand, so gilt das Gesagte für den Ausschlag vom Spielpunkt aus. Die Hälfte desselben wird am Fernrohrlager berichtigt, die andere kann unberichtigt bleiben, wenn sie den Spielpunkt der Libelle nicht zu weit verlegt.

b) Die Fernrohdrehachse trage keine Setzlibelle: Man richte die mittlere Visirlinie des Fernrohrs auf einen erhöhten Punkt und dessen Spiegelbild im Wasser oder Quecksilberhorizont, oder auf zwei ähnlich liegende Punkte einer Lothlinie überhaupt. Werden beide geschnitten, so liegt die Drehachse wagrecht, folglich senkrecht zur Verticalachse, welche lothrecht gestellt war. Geht die Visirlinie am Spiegelbilde des eingestellten Punktes vorüber, so wird die Lage der Drehachse durch Heben oder Senken eines ihrer Lager berichtigt. Auch durch die schiefe Projection eines erhöhten Zielpunktes auf das Instrumentalniveau lässt sich der Fehler erkennen, wenn diese Projection einmal in der ersten Lage, und einmal mit durchgeschlagenem Fernrohr bewirkt und die Richtungen der horizontalen Visur an einer wagrechten Scala in Instrumentenhöhe markirt werden. Beim berichtigten Instrument fallen die Horizontalprojectionen zusammen, wenn nämlich auch kein Collinationsfehler vorhanden ist.

Die schiefe Stellung der Fernrohdrehachse wird bei wechselndem Azimuth theils verstärkt, theils getilgt durch einen Fehler in der Lothrechtstellung der Verticalachse. Die Vereinigung φ beider Fehler 1) und 2) übt sowohl auf das Azimuth als auf den Höhenwinkel störenden Einfluss. Nennen wir den Fehler der einzelnen Azimuthalrichtung $\Delta\varrho$, den der einzelnen Höhenvisur $\Delta\alpha$, ferner den Höhenwinkel α und $\alpha + \Delta\alpha = \alpha'$, so findet sich aus dem stark gezeichneten sphärischen Dreiecke der Fig. 52:

$$\sin \Delta\varrho = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi, \text{ oder angenähert: } \Delta\varrho = \varphi \operatorname{tg} \alpha$$

und

$$\cos \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

woraus, wenn beide Seiten von der Einheit abgezogen werden, entsteht:

$$\sin \frac{1}{2} \Delta \alpha = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi \sin \alpha'}{\cos \frac{\alpha' + \alpha}{2}} \text{ oder angenähert } \Delta \alpha = \varphi^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{412530}$$

Fig. 52.



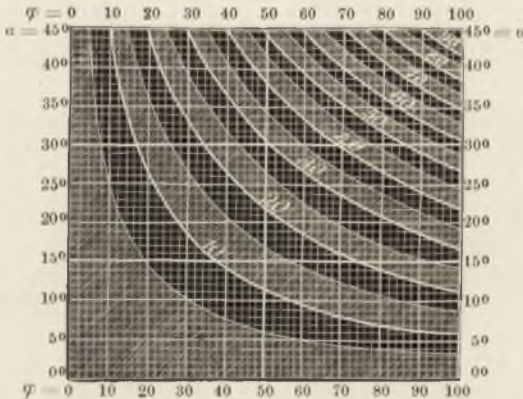
wonach denn der Fehler in Höhe weit geringer wird als der im Azimuth. Denn wenn wir in der ersten Näherungsformel ebenfalls α' statt α setzen, so beträgt $\Delta \alpha$ das $\varphi : 2 \times 206265$ -fache von $\Delta \rho$. Während wir demnach wegen $\Delta \alpha$ ohne Sorgen sein können, mag die Formel

$$\Delta \rho = \varphi \operatorname{tg} \alpha,$$

welche näherungsweise richtig bleibt, soweit wir überhaupt α bei den meisten Instrumenten verfolgen können, jedenfalls aber bis $\alpha = 45^\circ$, durch die Schichtentafel Fig. 53 ihre Darstellung finden. φ und $\Delta \rho$ sind dabei in einerlei Maass ausgedrückt.

Fig. 53. Einfluss einer Neigung der Fernrohdrehachse auf das Azimuth.

An den Isoplethen abzulesen: $\Delta \rho = \varphi \operatorname{tg} \alpha$.



Sind die anvisirten Objecte übrigens in gleicher Höhe und die Schiefstellung der Verticalachse gegenüber derjenigen der Fernrohdrehachse nur unbedeutend, so eliminirt sich $\Delta \rho$ wieder aus der Differenz zweier Richtungen, also aus dem Winkel. Durch

eine zweite Messung mit durchgeschlagenem Fernrohr lässt sich Δq bekanntlich ebenfalls eliminiren, in der Tachymetrie ist jedoch hiervon nur in besonderen Fällen Gebrauch zu machen.

3) Der Collimationsfehler besteht in der Abweichung der Visirlinie von einer Senkrechten zur Fernrohrdrehachse. Kann man diese in ihren Lagern umlegen, so lässt sich dadurch der Fehler in doppelter Grösse deutlich machen, denn um soviel weicht die Visur der zweiten Lage von der der ersten ab. Lässt sich das Fernrohr durchschlagen, so ergibt sich die Darstellung des Fehlers in doppelter Grösse ebenfalls sehr leicht durch Rückwärtsverlängerung der ersten Visirlinie mit freiem Auge und Vergleich mit der Visur der zweiten Lage. Besser sucht man, blos mit Fernrohrvisuren, den vierfachen Collimationsfehler auf durch Anvisiren einer Marke, Durchschlagen, Abstecken der neuen Visirrichtung, Rückkehr zur Marke in zweiter Lage des Fernrohres, abermaliges Durchschlagen und Abstecken der Visirrichtung. Die Visuren der zweiten und der letzten (= ersten) Lage schliessen den vierfachen Collimationsfehler ein. Corrigirt wird derselbe durch seitliches Verschieben des Diaphragmas im Ocular. Bei lothrechter Zapfenachse des Instrumentes und wagrechter Fernrohrdrehachse muss der corrigirte Fadenkreuzpunkt einen lothrecht gespannten Faden und dessen Spiegelbild im Quecksilberhorizont der ganzen Länge nach treffen. Geradlinige scheinbare Abweichungen davon deuten auf geneigte Fernrohrdrehachse, krummlinige auf einen Collimationsfehler, da die Fernrohrvisirlinie alsdann einen Kegelmantel beschreibt, welcher das Loth sowohl als dessen Spiegelbild einmal schneidet.

Erfolgt alle Visuren unter dem gleichen Elevationswinkel α , so würde der Collimationsfehler ψ wie eine blose Verstellung des Horizontalkreises gegen die Visirlinie wirken, also vollkommen unschädlich sein. Aus Fig. 54 geht aber hervor, dass

Fig. 54.



mit der Höhe sich auch die Verschiebung des Azimuths um Δq und der Höhenwinkel um $\Delta a = \alpha' - \alpha$ ändern, und zwar erhalten wir durch den Sinussatz in dem stark gezeichneten sphärischen Dreiecke:

$$\sin(\psi + \Delta\varrho) = \frac{\sin \psi}{\cos \alpha},$$

woraus näherungsweise folgt:

$$\Delta\varrho = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \cdot \psi;$$

ferner durch den Cosinussatz:

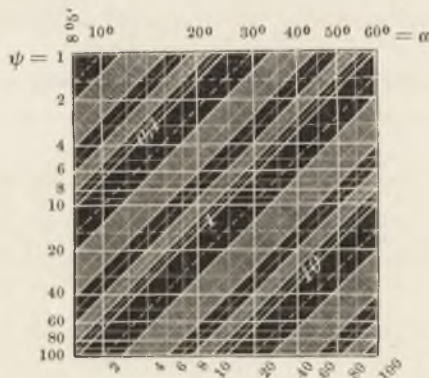
$$\cos \psi = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'},$$

und hieraus durch beiderseitiges Abziehen von der Einheit, wie unter 2):

$$\Delta\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{412530} \cdot \psi^2.$$

Den vorstehenden Fehler $\Delta\varrho$ der einzelnen Richtung bildet die logarithmische Schichten-
tafel Fig. 55 ab. Er kann die unter 1) und 2) berechneten Azimuthfehler verstärken
oder theilweise tilgen, je nach der Lage der Visirlinie, und er erreicht die Grösse ψ

Fig. 55. Einfluss des Collimationsfehlers auf das Azimuth.



$$\Delta\varrho = \psi (\sec \alpha - 1).$$

bei einem Höhenwinkel $\alpha = 60^\circ$, während $\Delta\varrho$ unter 2) schon bei 45° dem Fehler φ gleich wurde.

Will man eine Grenze für den Azimuthfehler des Tachymeters feststellen, etwa $\frac{1}{2}$ Minute, so darf die Summe φ der beiden ersten behandelten Fehler, vermehrt um die Hälfte (0,42) des dritten ψ , diesen Betrag nur wenig überschreiten, wenn man Höhenwinkel nur bis 45° benützt. Für die tachymetrische Detailaufnahme kann die Fehlergrenze noch etwas erweitert werden, bei wichtigeren Winkelmessungen aber, z. B. solchen, welche die Lage der Standpunkte festlegen sollen, wird man den Collimationsfehler sowohl als den Fehler in der Lage der Fernrohdrehachse durch Beobachtung in beiden Lagen des Fernrohrs gänzlich wirkungslos machen. Fehler in der Aufstellung der Verticalachse lassen sich jedoch auf solche Art nicht compensiren, wesshalb die Aufstellung in der Richtung senkrecht zu den Hauptvisuren mit besonderer Sorgfalt zu behandeln ist.

4) Der Indexfehler des Höhenkreises gibt die Neigung der Fernrohrvisirlinie bei der Nonienablesung Null oder 90° an, je nachdem der Höhenkreis für die Messung von Höhen α oder von Zenithdistanzen

(90 — α) beschrieben ist, wobei Lothrechtstellung der Verticalachse vorausgesetzt wird. Jede Ablesung muss demnach um den Indexfehler algebraisch vermehrt werden.

Seine Grösse findet man durch Messung einer Zenithdistanz in beiden Lagen des Fernrohrs. Das arithmetische Mittel der beiden gefundenen Zenithdistanzen, von denen die eine um den Indexfehler zu klein, die andere um seinen Betrag zu gross ausfiel, ist der wahren Zenithdistanz gleich. Die Differenz beider Zenithdistanzen gibt somit den doppelten Indexfehler. Corrigirt kann derselbe nur werden, wenn entweder das Diaphragma im Fernrohr nach oben und unten verschieblich, oder die Nonien des Höhenkreises verstellbar sind.

Wird die bisherige Voraussetzung, dass die Verticalachse des Instrumentes während der Höhenmessung lothrecht stehe, nicht erfüllt, so geht die Neigung dieser Achse gegen das Loth, in der Richtung der Visirebene gemessen, als Fehler in den Höhenwinkel ein, augenscheinlich in seinem vollen Betrage. Die vorausgegangenen Betrachtungen haben dagegen gezeigt, wie wenig der Höhenwinkel beeinflusst wird durch eine Neigung jener Achse in der Richtung senkrecht zur Visirebene. In Fällen, wo die Lothrechtstellung der Verticalachse oder die Erhaltung in dieser Stellung schwierig ist, bringt man daher eine ebenso einfache als practische Vorrichtung am Instrumente an: einen drehbaren Nonienarm, verbunden mit einer Libelle. Die Skizze Fig. 56 S. 178 stellt zwar keinen Theodolithen vor, zeigt aber den fraglichen Instrumententheil eben so deutlich. Ein Winkelhebel α , dessen Achse mit der Drehachse des Fernrohrs zusammenfällt, der aber an der Bewegung des letzteren nicht Theil nimmt, trägt zugleich die Nonien und die Libelle und ist mittelst einer leicht zugänglichen Mikrometerschraube am Fernrohrträger verstellbar. Der Indexfehler eines solchen Instrumentes ist die Neigung der Fernrohrvisirlinie, wenn bei einspielender Nonienlibelle der Höhenwinkel 0° (oder die Zenithdistanz 90°) abgelesen wird. Man bestimmt den Indexfehler ganz wie zuvor durch Messen einer Zenithdistanz in beiden Lagen des Fernrohrs, wobei man sich aber von der Stellung der Verticalachse des Instrumentes unabhängig macht, indem man die Nonienlibelle für sich zum Einspielen bringt. Stand die Verticalachse wirklich lothrecht, so zeigt sich an der Nonienlibelle beim Umdrehen in die zweite Lage keine Veränderung. Die Empfindlichkeit der Nonienlibelle richtet sich nach der erreichbaren Genauigkeit in der Messung der Höhenwinkel.

Man beseitigt in diesem Falle den Indexfehler zweckmässig entweder blos an der Nonienlibelle oder blos an den Nonien selbst durch die üblichen Correctionsschrauben. Die Beweglichkeit des Diaphragma's von unten nach oben, ferner entweder der Nonien für sich oder der Libelle für sich fällt also weg; denn überflüssige Correctionsvorrichtungen sind Schwächen eines Instrumentes.

Stimmen die Ablesungen an beiden Nonien nicht überein, so bezieht sich der Indexfehler auf das Mittel aus beiden Ablesungen. Beim tachymetrischen Aufnehmen der Detailpunkte darf man sich jedoch, wenn der Excentricitätsfehler des Höhenkreises klein und namentlich nicht veränderlich ist, eines einzigen Nonius bedienen, für welchen man den Indexfehler zu beseitigen hat; bei genaueren Messungen mittelst zweier Nonien muss dann der Höhenwinkel in beiden Lagen des Fernrohrs beobachtet werden.

In den meisten Fällen macht man von dem beweglichen Nonienarm des Tachymeters gar keinen Gebrauch, denn für die Aufnahme von Detailpunkten sind einige Secunden Fehler des Höhenwinkels ohnehin unschädlich. Für genauere Höhenwinkelmessung in zwei Lagen des Fernrohrs genügt es aber, wenn eine Libelle in der Fernrohrrichtung mit einem der Fernrohrträger fest verbunden ist. Gleichzeitig mit dem

Höhenkreis kann nun ein Ausschlag der Libelle abgelesen und dem Höhenwinkel beigefügt werden.

5) Die Boussole ist am Tachymeter nicht gerade unentbehrlich, aber eine wünschenswerthe Zugabe, und kann zur Orientirung der Tachymeteraufnahme dienen in Fällen, wo die Visur von Standpunkt zu Standpunkt des Theodolithen entweder als unmöglich oder als unnöthig erkannt wird. Wenn man auf jedem einzelnen Standpunkte die Ablesung bemerkt, bei welcher die Nadel einspielt, so entsprechen diesen Ablesungen parallele Lagen der Visirlinie, also gleiche Azimuthe. Ist der Theodolith zum Repetiren eingerichtet, sein Horizontalkreis also drehbar, so lässt sich dieser jedesmal so stellen, dass bei einspielender Nadel die Ablesung Null erscheint, wodurch das in § 53 besprochene Auflegen des Transporteurs auf den Plan vereinfacht wird. Im Falle zwei Tachymeter bei der Aufnahme verwandt werden, wird das Boussoleazimuth des einen auf das des anderen zu reduciren sein. Es bedarf dazu nur, dass beide Instrumente nach ein und derselben Richtung visiren, und dass die Ablesungen β mit den Ablesungen γ bei einspielender Nadel verglichen werden. Entstehen gleiche Differenzen:

$$\beta' - \gamma' = \delta' \quad \text{und} \quad \beta'' - \gamma'' = \delta'',$$

so ist offenbar keine Reduction nöthig; zur Beseitigung geringer Ungleichheiten der Differenzen δ' und δ'' findet sich mitunter die Möglichkeit durch Verstellen der Boussole auf der Nonienscheibe gegeben. Will man wissen, welches wahre Azimuth der Visirlinie bei einspielender Nadel zukommt, so darf man nur zum Vergleiche in einer Richtung visiren, deren wahres Azimuth ε (etwa durch eine Landesvermessung) schon bekannt ist. Das wahre Boussoleazimuth ζ findet sich aus:

$$\zeta = \varepsilon - (\beta - \gamma),$$

wenn β und γ die Bedeutung von vorhin beibehalten.

6) Das Stativ des Tachymeters muss standfest und die Verbindung mit dem Instrumente so solide sein, dass selbst nach mehrstündiger Arbeit keine Verrückung des Horizontalkreises zu bemerken ist, was durch die Rückkehr zur Ausgangsvisur und entsprechende Winkelablesung geprüft wird. Das Tachymeter von Starke in Wien leistet hierin alles Wünschenswerthe. Die französischen Tachymeter besitzen Versicherungsfernrohre zur Controle und eventuellen Correctur der Instrumentstellung.

§ 56. Erfordernisse, Prüfung und Berichtigung eines Messtischapparates für tachymetrische Aufnahmen.

Während Boussole und verstellbare Nonien mit Libelle keineswegs nothwendige Bestandtheile eines tachymetrischen Theodolithen sind, machen sie dagegen einen Messtischapparat erst zum Tachymeter.

Durch die Boussole, auch wenn sie nur als Hülfsinstrument in zweiter Linie zur Anwendung kommt, wird die Messtischorientirung ausserordentlich beschleunigt und unaufhörlich controlirt. Die Nonienlibelle Fig. 56 folg. S. ist unbedingt nothwendig wegen der Unebenheiten der Messtischplatten, durch welche der Indexfehler des Höhenkreises mit jeder neuen Visur wechselt. Das Auskunftsmittel, eine Libelle auf dem Fernrohr anzubringen und jeden Höhenwinkel aus einer doppelten Ablesung, nämlich bei geneigtem und horizontalem Fernrohr, zu gewinnen, ist unzureichend; es bewirkt eine grosse Zeitverschwendung und vermehrt die Aussicht auf Ablesungsfehler; besonders dann, wenn der Kreis nicht Zenithdistanzen, sondern Höhenwinkel angibt, da bei den vielen Ablesungen in der Nähe des Nullpunktes sich Fehlgriffe im Vorzeichen einstellen.

Den Prüfungen am tachymetrischen Theodolithen entsprechen eben so viele am Messtischapparat, welche hier in derselben Ordnung aufgezählt werden mögen. Es müssen untersucht, nöthigenfalls berichtigt werden:

1) Die Setzlibelle, welche zweckmässig durch eine Dosenlibelle vertreten wird.

2) Die horizontale Lage der Fernrohrdrehachse, wenn das Lineal der Kippregel horizontal liegt, oder eine mit der Drehachse irgendwie parallel verbundene Libelle einspielt. Die Prüfung geschieht ganz wie beim Theodolithen, wird aber nur dann scharf ausfallen, wenn eine Vorrichtung vorhanden ist, um für jede einzelne Visur die Libelle einspielen zu lassen. Die Correctur erfolgt an dieser Libelle und je nachdem dieselbe zum Umsetzen über der Drehachse eingerichtet ist oder nicht, wendet man das Prüfungsverfahren a) oder b) an.

3) Der Collimationsfehler, von dessen Einfluss, Untersuchung und Beseitigung fast Alles gilt, was bei dem Theodolithen gesagt wurde. Auch durch sorgfältiges Umsetzen der Kippregel an einer feinen Bleistiftlinie und Durchschlagen des Fernrohres wird er am Zielpunkt sichtbar.

4) Der Indexfehler, der an der Nonienlibelle oder an den fliegenden Nonien berichtigt wird.

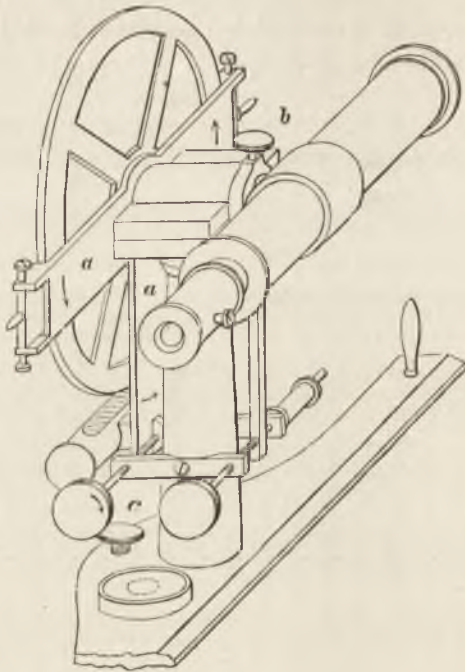
Zu diesen Untersuchungen kommt noch

5) Prüfung auf den Parallelismus der Linealkante und Fernrohrvisirebene. Es genügt, wenn derselbe nur oberflächlich hergestellt ist, und man überzeugt sich davon, indem man längs der Linealkante nach demselben Punkte blickt, auf welchen die Visirlinie weist.

Fig. 56 stellt das Schema einer brauchbaren Tachymeterkippregel dar, worin von wesentlichen Bestandtheilen nur das Oculargetriebe der Deutlichkeit wegen weggelassen wurde. Das Fernrohr zum Durchschlagen bewegt sich mit dem Höhenkreis um eine gemeinsame Drehachse. Die

Mikrometerschraube rechter Hand gestattet eine feine Bewegung, wird bei der Arbeit aber nur ausnahmsweise gebraucht, da beim Klemmen der Achse leicht unregelmässige Horizontaldrehungen derselben, also auch des Fernrohres erfolgen, die Lage der Visirebene gegen die Linealkante demnach schwankt. Dagegen soll die Klemmschraube *b* durch einen constanten Druck auf die Achse die Reibung soweit verstärken, dass die Visirlinie sich nicht durch das Eigengewicht des Fernrohres

Fig. 56. Tachymeter-Kippregel.



ändern kann. Der Kreis muss durchlaufend, von 0° bis 360° , beschrieben und am besten so gestellt sein, dass man direct Zenithdistanzen abliest. Die Theilstriche von Kreis und Nonien sollen für die Ablesung mit freiem Auge stark genug gezogen sein und wo möglich Minuten durch bloße Abschätzung der Intervalle ergeben.

Die Mikrometerschraube zur Linken bewegt den Winkelhebel *a* und mit ihm die fliegenden Nonien sowie die Nonienlibelle entweder in der Richtung der Pfeile oder in der entgegengesetzten. Durch die Beweglichkeit beider Nonien für sich ist es möglich, den Abstand ihrer Zeiger auf 180° zu bringen, sowie den Höhenwinkel 0° zu erhalten, wenn bei ein spielender Nonienlibelle die Visirlinie des Fernrohres wagrecht steht:

also den Indexfehler zu beseitigen. Dadurch werden alle Corrections-schrauben, sowohl für die Verticalbewegung des Fadenkreuzes, als auch an der Nonienlibelle überflüssig.

Mittelst der Schraube c , deren Spindelende von Elfenbein direct auf dem Tischblatt ruhen soll, kann das ganze Instrument etwas um die vordere Linealkante gedreht werden, bis die Fernrohrdrehachse wagrecht liegt, was beim Einspielen der Dosenlibelle oder einer querstehenden Röhrenlibelle stattfinden soll. Das Lineal muss daher einen schwach keilförmigen Querschnitt und seine Libelle eine Correctionsvorrichtung besitzen. Die Prüfung 2) auf horizontale Lage der Fernrohrdrehachse bei einspielender Lineallibelle wird wie unter 2 b) des Theodolithen ausgeführt.

Empfehlenswerth, aber in der Figur nicht angegeben, ist ein zweites schmales Lineal, das die eigentliche Zeichenkante enthält und durch ein einfaches Parallelogrammgestänge sich selbst parallel etwas zur Seite geschoben werden kann. Es erspart das Anlegen der Linealkante an den Standpunkt während des Visirens, da eine nachträgliche Parallelverschiebung des beweglichen Theiles denselben Dienst leistet. Der erzeugte Excentricitätsfehler ist unschädlich.

In Bezug auf das Distanzfernrohr der Kippregel ist noch anzuführen, dass die Constante c der Distanzformel (§ 49) auf einen ganz bestimmten Linealpunkt hindeutet, welcher demnach jedesmal an den Stationspunkt auf dem Plan angelegt werden müsste. Bei der Schwierigkeit, diese Bedingung auch nur näherungsweise zu erfüllen, ist, wenigstens für Aufnahmen in kleinem Maasstabe, das Verfahren des preussischen Generalstabes zulässig, welches der Formel für den Reichbach'schen Distanzmesser nur eine Constante K gibt und dieselbe so bestimmt, dass mittlere Distanzen dadurch richtig dargestellt werden und wesentliche Fehler nur bei extremen Distanzwerten auftreten. Ist a' die Lattenablesung für jene Distanz, bei welcher die Distanzformel

$$D' = a K \cos^2 \alpha$$

richtige Werthe liefert, so sind im Allgemeinen die hiernach berechneten Distanzen algebraisch zu vermehren um

$$D - D' = \frac{a_1 - a}{a_1} \cdot c \cos \alpha,$$

worin D die wahren Distanzen bezeichnet, und c die frühere Bedeutung der zweiten Instrumentalconstante beibehält.

§ 57. Bestimmung der Standpunkte des Tachymeters.

Der flüchtige Character der Tachymeteraufnahmen macht es selten möglich, ein hinreichend enges Netz von Standpunkten im Voraus über die aufzunehmende Gegend zu legen, wobei die Triangulations- oder die Polygonalmethode mit aller Strenge anzuwenden wäre. Die Festlegung der Stationen erfolgt vielmehr Hand in Hand mit der Detailmessung und es wird damit allerdings der Vorthiel erreicht, dass die Wahl der Standpunkte mit Rücksicht auf das Bedürfniss des Augenblicks erfolgen

kann. Dagegen schliesst dies Verfahren jene Sorgfalt aus, welche sonst auf die Verbindung der Standpunkte unter sich verwendet zu werden pflegt; es leidet darunter sowohl die Winkelmessung, als auch, und das besonders, die Messung der Stationsabstände, welche mit dem Distanzmesser erfolgen muss. Handelt es sich aber, wie es bei Vorarbeiten zu technischen Zwecken meistens der Fall sein wird, um die Aufnahme von Strecken, welche sich mehr in die Länge als Breite ausdehnen, so sind die erwähnten Uebel selten von solchem Belang, dass sie den Zweck der Aufnahme beeinträchtigen.

Hat man z. B. eine Bahnachse von mehreren Meilen Länge nach einer Tachymeteraufnahme vorläufig entworfen und die Hauptpunkte ins Terrain übertragen, so ist es höchst gleichgültig, ob die wirklichen Winkel der Brechungspunkte auf einige Minuten von denen abweichen, welche der Situationsplan ergeben hat, und ferner, ob die Nachmessung der Bahnachse auf dem Felde eine Längendifferenz von einigen 20 Metern aufdeckt: wenn nur der Hauptzweck erreicht wurde, dass die Trace sich so dem Terrain anschliesst, wie sie es nach dem tachymetrischen Schichtenplan thun sollte. Ist aber eine zusammenhängende topographische Aufnahme durch das Tachymeter beabsichtigt, so setzt dies schon das Vorhandensein einer Triangulation voraus, deren Dreieckspunkte dritter Ordnung in solcher Zahl über das Messgebiet zerstreut sind, dass sie keine grössere Anhäufung von Fehlern aufkommen lassen.

Das einfachste Verfahren, Tachymeterstände unter sich zu verbinden, besteht in einer flüchtigen Polygonaufnahme. Ehe der alte Stand verlassen wird, und nachdem man sich nochmals von der unveränderten Stellung des Instrumentes überzeugt hat, wird ein neuer Standpunkt ausgesucht, die Ziellatte dorthin getragen und anvisirt, und zwar in beiden Lagen des Fernrohres. Sodann wird das Instrument auf den neuen Standpunkt versetzt, eine Latte über dem alten aufgestellt und ebenfalls in beiden Fernrohrlagen anvisirt. Um aber später wieder die unveränderte Stellung des Tachymeters prüfen zu können, ohne die Latte neuerdings auf die vorige Station zurückzuschicken, wählt man sofort noch einen festen Zielpunkt aus, auf welchen das Fernrohr wieder in beiden Lagen gerichtet wird.

Dies Verfahren liefert zur Verbindung beider Stationen alles Erforderliche, gegenseitige Richtung, Entfernung und Höhenlage. War das Azimuth der Verbindungslinie für Station *I* gleich A , so ist es auf Station *II* gleich $A - 180$, und man kann demnach sofort für Station *II* die Horizontalkreisablesung bestimmen, welcher das Azimuth Null zukommt. Hat das Tachymeter zwei bewegliche Kreise, so ist es bequemer, mit dem Azimuth Null auch die Ablesung Null zu verbinden. Man klemmt zu dem Ende den Nonienkreis auf $A - 180$ fest und richtet das Fernrohr auf *I*, wonach auch der Horizontalkreis festgeklemmt und von da an unverrückt belassen wird. Ein Hauptübelstand bei dem beschriebenen Vorgang ist die Ungenauigkeit der Distanzmessung;

denn mit kurzen Distanzen kommt man nicht weit genug über den Bereich des ersten Standpunktes hinaus, eine lange Standlinie aber wird auch durch die wiederholte gegenseitige Messung ziemlich unsicher bestimmt. Es empfiehlt sich also, zwei bis drei gut bezeichnete Zwischenpunkte zunächst der Standlinie und etwa in der Mitte derselben aufzusuchen, deren Abstände (und Azimuthe) von beiden Stationen aus gemessen und auf die Standlinie durch Rechnung projectirt werden. Dadurch werden mehrere unabhängige Längenmessungen erhalten und eine Controle der Arbeit ermöglicht.

Der Haupteinwand gegen dies von Moinot empfohlene Verfahren betrifft die Nothwendigkeit einer genauen Centrirung des Theodolithen über dem Punkte, welcher durch die Ziellatte vorausbestimmt worden ist, eine Aufgabe, welche in gebirgigem Terrain zuweilen nur sehr schwer und mit Zeitverlust gelöst werden kann. Doch befreit man sich leicht von solchem Zwange, wenn man sich, fast in der gleichen Entfernung e von I , neben dem vorbestimmten Punkte II aufstellt, mit einem Meterstabe recht genau den Abstand m des Tachymetercentrums von II misst und den Winkel γ in Secunden berechnet aus:

$$\gamma = 206265 \cdot \frac{m}{e},$$

wobei m dann als positiv gilt, wenn aus I betrachtet der wirkliche Standpunkt rechts vom vorgewählten Zielpunkte liegt. Fügt man γ algebraisch zum Azimuth A der früher gemessenen Richtung $I-II$, so hat man das Azimuth A' der jetzigen und $A' - 180$ als Azimuth der Rückwärtsvisur. Um γ müssen auch die von I aus bestimmten Winkel corrigirt werden, unter welchen die Zwischenpunkte auf die Standlinie $I-II$ projectirt werden, um deren Länge zu ermitteln. Zur Berechnung von γ genügte eine vorläufige Bestimmung von e .

Wesentlich verschieden von Moinot's Polygonalmethode ist die Art, wie Porro zwei Stationen miteinander verbindet. Zwischen beiden Standpunkten I und II , aber nicht in der Nähe ihrer Verbindungslinie, werden zwei Detailpunkte a und b mit Hülfe der Ziellatte besonders genau aufgenommen, sowohl von I als von II aus. Eine gegenseitige oder auch nur einseitige Visur von Standpunkt zu Standpunkt unterbleibt, und es fällt damit die Rückkehr der Ziellatte auf die frühere Station sowie die Vorausbestimmung der künftigen weg. Dafür aber erfolgt die Uebertragung des Azimuths durch eine etwas umständliche Rechnung oder Construction aus den beiden Dreiecken Iab und $IIab$, in deren jedem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Die Gleichheit der gemeinschaftlichen dritten Seite \overline{ab} bildet zugleich eine Controle der Messung; eine weitere Prüfung wird durch die doppelte Berechnung des Höhenunterschiedes von a und b gewährt.

Will man nicht die Zeit, welche Porro's Verfahren an Messoperationen erspart, durch Berechnungen doppelt wieder verlieren, so müssen diese während der Feldarbeit einstweilen unterbleiben, und die Azimuthübertragung vorläufig durch die Boussole erfolgen, mit dem Vorbehalt späterer Verbesserung des Azimuths.

In manchen Fällen wird sogar die Verbindung zweier Stationen durch einen einzigen Zwischenpunkt nebst Uebertragung des Azimuths durch die Boussole allein vollkommen ausreichen. Da hierbei aber jede Controle fehlt, so ist es nicht rathsam, in solcher Weise eine grössere Reihe von Standpunkten aneinander zu fügen.

Die Stationirung eines tachymetrischen Messtischapparates hat wenig Eigenthümliches. Handelt es sich um die Aufnahme lang ausgedehnter Terrainstriche etwa in Thälern, die keine Uebersicht gewähren, so wird man häufig zu ähnlichen Methoden der Stationirung greifen, wie bei dem tachymetrischen Theodolithen, also durch Vorwärtsvisur und unmittelbare oder mittelbare Messung der Standlinie mittelst Distanzlatte; oder durch Vorwärtsvisur von *I* aus nach zwei Zwischenpunkten *a* und *b*, deren Distanzen von *II* aus sogleich bestimmt und zur Construction des Dreieckes *abII* benutzt werden, wonach der Messtisch nach den Richtungen *IIa* und *IIb* orientirt und zugleich der zwischenliegende Winkel controlirt wird. Endlich kann noch in Fällen von untergeordneter Bedeutung die Methode der sogenannten Springstände Anwendung finden, wobei die Orientirung mit der Boussole allein erfolgt und die gegenseitige Lage zweier Standpunkte durch Visur nach der Distanzlatte, welche auf einem einzigen Zwischenpunkte zur Aufstellung kommt, bestimmt wird.

Da aber der tachymetrische Messtisch schon seiner Form wegen sich weniger zur Aufnahme langgedehnter Striche als zur topographischen Flächenaufnahme eignet, so wird er hierbei auch häufiger zur Verwendung kommen. Die beste Art der Stationirung bei topographischen Vermessungen in kleinem Maassstabe ist aber das Rückwärtseinschneiden nach drei durch Triangulation festgelegten Punkten; diese Methode macht die Wahl der Standpunkte völlig unabhängig von früheren Visuren, verhütet die Uebertragung von Fehlern von Standpunkt zu Standpunkt, erspart das Mitführen von Signalen ausser denen, welche die trigonometrischen Punkte für längere Dauer bezeichnen, und verlangt von allen Methoden den geringsten Zeitaufwand; vorausgesetzt wird, dass eine Boussole die vorläufige Orientirung unterstützt und dass man sich nicht in ganz zweckloser Weise Zwang auferlegt durch vorläufiges Auspflocken des Messtischstandpunktes.*)

§ 58. Aufnahme der Detailpunkte des Terrains.

Ueber die Wahl der Detailpunkte tachymetrischer Aufnahmen lässt sich im Wesentlichen dasselbe sagen, was für die Höhenpunkte barometrischer Flächennivellements gilt (§ 44). Ein Unterschied ergibt sich

*) Das Rückwärtseinschneiden vorbezeichneter Standpunkte ist zwar auch mit dem Messtisch ausführbar, aber ohne irgend welche practische Bedeutung; ebensowenig knüpft sich ein theoretisches Interesse an die Lösung des complicirteren Problems, sondern lediglich die doppelte Arbeit.

jedoch dadurch, dass in der Regel noch kein fertiger Plan des Messgebietes vorliegt, sondern durch das Tachymeter erst hergestellt werden soll. In Folge dessen ist der Ingenieur also genöthigt, das Terraindetail nicht etwa bloß zum Anknüpfen der Höhenpunkte zu verwerthen, sondern dasselbe erst selbständig festzulegen. Er wird demnach Wege, Gewässer und Culturgrenzen in einen Handriss (Croquis) nach dem Augenmaasse eintragen und darin sämmtliche wichtigen Brechungspunkte zur Detailaufnahme vormerken, ohne Rücksicht darauf, ob dieselben auch für den zweiten Theil seiner Aufgabe, die Bestimmung der Bodengestalt brauchbar sind. Dazu wird ein zweites Punktsystem in dem Handrisse eingetragen, welches sich den charakteristischen Terrainlinien anschliesst und nur zufällig einzelne Punkte mit dem vorigen Systeme gemein hat. Ausser dem Terraindetail wird auch der muthmaassliche Lauf der Horizontalcurven skizzirt.

Sämmtliche Terrainpunkte werden nun in der Reihenfolge, wie sie sich am bequemsten und ohne Zeitverlust erreichen lassen, von den Lattenträgern besucht und nach der Ordnung ihrer Aufnahme vom Instrumente aus numerirt. Schon bei Verwendung nur einer Latte können Irrthümer in der Zählung der Punkte entstehen, wesshalb Signale verabredet werden, welche auf jedem zehnten einen Vergleich der laufenden Nummer gestatten. Noch leichter entstehen Irrthümer in dem sehr gewöhnlichen Falle, dass mehrere Lattenträger zugleich thätig sind. Der leitende Ingenieur hat dann zu sorgen, dass stets eine Latte zur Aufnahme bereit steht, während die übrigen ihre Plätze aufsuchen. Trifft ein Lattenträger ein, bevor sein Vormann abgerufen wurde, so stellt er die Latte einstweilen auf, aber mit der schmalen Kante gegen das Tachymeter. Bei Punkten von besonderer Wichtigkeit gibt der Ingenieur ein Zeichen, damit auf deren Aufnahme am Instrumente grössere Sorgfalt verwandt werde (Visur in 2 Lagen des Fernrohrs). Solche Punkte, zu welchen voraussichtlich zurückzukehren ist, werden durch kleine Pflöcke oder Schindeln sichtbar bezeichnet. Desgleichen die künftigen Standpunkte, bei deren Aufnahme wieder ein besonderes Zeichen mit dem Beobachter am Instrumente gewechselt wird.

Die Aufnahme am Tachymeter besorgt der Gehülfe des Ingenieurs mit einem Schreiber. Ersterer dictirt laut und in einer feststehenden Reihenfolge die Beobachtungszahlen, welche der Schreiber sogleich wiederholt und in das Feldbuch einträgt. Je mechanischer diese Arbeit vor sich gehen kann, desto weniger sind Fehler zu befürchten. Ausser durch die laufende Nummer werden nur besonders wichtige Punkte am Instrumente noch durch einen Zusatz bezeichnet, wie z. B. Boussolenazimuth, Wechselfunkt, Standpunkt II, Rückblick, Controlpunkt, Instrumentalniveau etc.

Das Feldbuch enthält die folgenden 11 Rubriken, von denen auf dem Felde selbst aber nur die 6 ersten und vielleicht die siebente ausgefüllt werden, welche letztere die Differenz a der Ablesung am unteren und oberen Faden aufnimmt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nr.	m	o	u	Horizontalkreis-	Höhenkreis-	a	D	$\pm h$	Q	Bemerk.
				Nonien	Nonien					
				<u>I</u> <u>II</u>	<u>I</u> <u>II</u>					

Die Zeichen bedeuten der Reihe nach 1) die laufende Nr., 2) die Einstellung m am Mittelfaden, 3) die Ablesung o am oberen und 4) u am unteren Ocularfaden, 7) und 8) das Lattenstück a und die Distanz D wie in Formel (2), 9) die Höhe h des anvisirten Lattenpunktes über dem Instrumentalniveau, nach Formel (3*) und endlich 10) die Quote Q des zugehörigen Terrainpunktes nach Formel (2*) der §§ 49 und 51. Von den Spalten 5 und 6 wird in der Regel nur eine Nonienrubrik ausgefüllt.

Das Feldbuch für tachymetrische Messtischaufnahmen kann zwei Spalten weniger enthalten, da die fünfte jedenfalls, die achte (D) aber dann wegfällt, wenn die Distanzen nicht berechnet, sondern vermittelt einer durchsichtigen Schichtentafel unmittelbar auf die Visirstrahlen aufgetragen werden. Jedem aufgetragenen Punkte wird sogleich die laufende Nummer beigeschrieben, welche ihm nach dem Feldbuche zukommt.

Im Uebrigen entspricht die Detailaufnahme mit dem Messtische ganz derjenigen mit dem Theodolithen, aber Aufstellung und Orientiren des Messtisches setzen eine grössere Vertrautheit mit der Theorie voraus, als die gleichen Operationen am Tachymeter, welche in Folge ihrer steten Wiederkehr auch von Ungeschulten leicht zu begreifen und auszuführen sind. Dadurch gewinnt der Leiter der Aufnahme eine grössere Freiheit der Bewegung und mehr Zeit für den Entwurf seines Handrisses, ohne Zweifel das schwierigste Geschäft, und das am meisten Scharfblick erfordert.

§ 59. Berechnung und Auftrag der Aufnahme.

Obwohl man auf dem Plane von einem gegebenen Stationspunkte aus die Richtung des nächsten ganz wie die eines Detailpunktes mit dem Transporteur auftragen könnte, so wird man dies doch höchstens bei Nebenstationen thun, nicht aber bei solchen, die in ihrer gegenseitigen Verbindung eine zusammenhängende Kette bilden, innerhalb welcher die Zeichnungsfehler zu denen der Messung hinzutreten und sich Glied zu Glied übertragen und vermehren könnten. Man berechnet vielmehr, wenn das Azimuth irgend einer Verbindungslinie von Standpunkten und die

Coordinaten eines derselben gegeben oder angenommen worden sind, die rechtwinkligen Coordinaten (in der Ebene) der übrigen in bekannter Weise, ebenso unter Benutzung aller vorhandenen Controlen die gegenseitige Höhenlage der Stationsniveaus, bezogen auf Visirhöhe. Diese Arbeit, nöthigenfalls auch noch das Auftragen der Coordinaten, wird der leitende Ingenieur selbst besorgen, da Fehler darin für die ganze Aufnahme verhängnissvoll werden. Auch wird es gut sein, wenn er selbst das Azimuth des Nullpunktes am Horizontalkreis für alle Stationen berechnet und einträgt, da diese Azimuthe bei Verwendung einfacher Theodolithe nie gleich sind und auch bei Repetitionsinstrumenten aus Versehen Ungleichheiten enthalten können, welche sorgfältig zu berichtigen sind ehe der Auftrag der Detailpunkte beginnt.

Berechnung und Auftrag von Lage und Quote der letzteren ist an der Hand von Schichtentafeln und Rechenschiebern eine rein mechanische Arbeit, zu welcher jeder zuverlässige und gewandte Vierspecies-Rechner geschickt ist. Zu grösserer Sicherheit wird man jedoch alle Grössen doppelt auswerthen lassen, am besten auf verschiedenen Wegen, indem man etwa zu der einen Berechnung den Rechenschieber, zu der anderen graphische Tafeln, zum Auftrag den einfachen Transporteur, zur Controle den in § 53 erwähnten Distanzenzirkel benützt, oder umgekehrt. Wie im Einzelnen Berechnung und Auftrag der Detailpunkte ausgeführt werden, setzen schon die §§ 51—53 des IX. Capitels ausführlich genug auseinander, und was endlich beim Entwerfen der Horizontalcurven zu beachten ist, wurde schon im II. Abschnitte (§ 45) erwähnt. Namentlich hierbei muss der Leiter der Aufnahme wieder eingreifen und, was er nicht selbst fertigt, wenigstens beständig überwachen und mit den Handrissen vergleichen, die er auf dem Felde entworfen hat.

§ 60. Genauigkeit der Tachymeteraufnahme.

Ein Leser des III. Abschnittes, wenn er Tachymeteraufnahmen noch nicht ausgeführt hat, könnte durch manche Vernachlässigung von Grössen befremdet worden sein, welche in Betracht zu ziehen die Theorie fordert und die nicht einmal schwierig zu berechnen oder zu beobachten sind. Eine Uebersicht der Fehlerquellen tachymetrischer Messungen und die Andeutung ihrer muthmaasslichen Gesamtwirkung genügt, die Vernachlässigungen, welche die Tachymetrie macht, als völlig sachgemäss zu rechtfertigen.

1) Fehler der optischen Distanzmessung.

Auf die Wichtigkeit einfacher und fester Verbindung der zusammengehörigen Theile optischer Distanzmesser ist bereits im § 54 hingewiesen worden. Es lässt sich ausserdem leicht nachweisen, dass die Verschiedenheit

der Wärmeausdehnung einzelner Fernrohrtheile nicht ohne Einfluss auf den Werth der Distanzmesserconstanten bleibt, allein diese Fehlerquelle wird von anderen zu sehr überwogen, als dass sie in der Tachymetrie Beachtung verlangte. Wir werden demnach die Coefficienten der Distanzformel als unveränderlich und so genau bestimmt voraussetzen, als es nöthig ist, um Fehler der Formel gegen solche der einzelnen Beobachtung verschwinden zu machen.

Von den beiden in die Distanzformel einzuführenden Beobachtungsgrößen, dem Lattenabschnitt a zwischen den äusseren Ocularfäden und der Neigung α der mittleren Visirlinie, ist die zweite jedenfalls mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten. Die entsprechende Differentialformel aus (2) § 49, worin wir das erste Glied unterdrücken dürfen, ergibt unter Rücksicht auf (3) § 51 (S. 155 und 159):

$$dD = -ak \sin 2\alpha d\alpha = -2h' d\alpha = -2D \operatorname{tg} \alpha d\alpha.$$

Aus der Interpretation dieser Formel folgt, dass jede Secunde Fehler im Höhenwinkel die gemessene Distanz etwa um ein Hunderttausendtel der Höhe des Zielpunktes über dem Instrumentalniveau ändert. Wenn man ein Tausendtel der Distanz als Fehlergrenze festhält, so dürfen die Winkelfehler hiernach betragen:

bei 45° : $1' 40''$; bei 30° : $2' 53''$; bei 15° : $6' 13''$; bei 5° : $19' 3''$.

Es sind also für die Distanzmessung nur jene Umstände von Belang, welche auf die Ablesung an den äusseren Fäden des Oculars fördernd oder störend einwirken. Das sind:

- a) Schlechte Scalentheilung auf der Ziellatte,
- b) Schätzungsvermögen des Auges,
- c) Vergrößerung des Fernrohres und Klarheit seiner Bilder,
- d) Unruhe der Fernrohrbilder in Folge von Schwankungen der Luft,
- e) Unruhe der Ziellatte.

a) Wer die Genauigkeit 1 : 500 erreichen will, möge untersuchen, ob die einzelnen Theile seiner Lattenscala nicht schon unter sich um mehrere Tausendtel ihrer Länge abweichen; im Allgemeinen pflegen die größten Fehler in den kleinsten Unterabtheilungen vorzukommen, sich demnach auch auf kurzen Distanzen relativ am stärksten geltend zu machen. So sind die Felder von verschiedener Farbe selten von gleicher Durchschnittsbreite etc. Es steht jedoch in der Hand des Ingenieurs, sich gute Waare zu verschaffen oder wenigstens die bezogene schlechte auszubessern.

b) Die Grenze des Schätzungsvermögens der Augen bei der Eintheilung von Flächen, welche sich wie die Fernrohrbilder in deutlicher Sehweite befinden, lässt sich nicht allgemein durch einen Winkelwerth ausdrücken, weil sie auch von der Form jener Flächen abhängt. Wie

ich aus Fehlergrößen, welche beim bayerischen Präcisionsnivellement auftraten, nachweisen konnte*), theilt das Auge rechteckige Scalenfelder wesentlich genauer ein, wenn der Ocularfaden die Mitte derselben trifft, als wenn er ihren Grenzen nahe steht oder dieselben bedeckt. Diese auch von Andern gemachte Erfahrung spricht gegen engere Scaleneintheilung als bis auf Centimeter. Ausserdem empfiehlt sich für die dunklen Felder oder Linien der Scala die Anwendung rother Farbe, von welcher sich der Ocularfaden wenigstens deutlich abhebt.

c) Den mittleren Schätzungs- und Einstellungsfehler φ des Auges hat Stampfer aus zahlreichen Versuchen, welche unter möglichst günstigen äusseren Verhältnissen angestellt worden sind, als eine einfache Function der Fernrohrvergrößerung erkannt, und zwar würde nach ihm jener Fehler zu berechnen sein aus**):

$$\varphi = \pm 8'' : v,$$

wenn v die Vergrößerung eines Fernrohrs bedeutet.

Indessen haben Erfahrungen, welche bei den Präcisionsnivellements Bayerns und der Schweiz gesammelt wurden, bewiesen*), dass unter den günstigsten Umständen, welche geometrische Nivellements beeinflussen, der mittlere Schätzungsfehler nicht viel unter eine Grösse sinkt, welche durch die Formel

$$\varphi = \pm 50'' : v$$

dargestellt wird und das sechsfache der Stampfer'schen beträgt; dies erklärt sich jedoch hinreichend aus den verschiedenen Beobachtungsverhältnissen bei Stampfer's Versuchen und geometrischen Nivellements. Auch die zweite Fehlerformel bezieht sich auf Fernrohre, welche in Hinsicht der Deutlichkeit ihrer Bilder tadellos construirt sind.

d) Dieser mittlere Schätzungsfehler vereinigt sich mit einem anderen, dessen Ursache die unaufhörlichen, nie ganz fehlenden, aber im Grade verschiedenen Schwankungen der Temperatur und Dichtigkeit der unteren Luftschichten sind. Bekanntlich bewirkt die mit der Höhe abnehmende Dichtigkeit der Luft eine Krümmung der hindurchgehenden Lichtstrahlen, welche im Durchschnitt $\frac{1}{7}$ der Erdkrümmung beträgt, also einer Ablenkung der Lichtstrahlen nach unten um fast 0,5 Secunden auf je 100m. gleichkommt. Diese Grösse ist aber nicht constant, sondern der erwähnten Temperaturschwankungen halber in dauerndem Wechsel begriffen, welcher sich gewöhnlich durch das Flimmern der Fernrohrbilder zu erkennen gibt, sich aber auch im günstigsten Falle nur hinter der unzureichenden Kraft des Fernrohres verbirgt. Es ist begreiflich, dass

*) Ziele und Hülfsm. geometrischer Präcisionsnivellements, München 1873, p. 56.

**) Prechtl's Jahrbücher des Wiener polytechnischen Instituts, Bd. 18 p. 231.

ein Theil von dieser Veränderlichkeit der Lichtablenkung als Beobachtungsfehler wahrgenommen wird, und wenn wir den mittleren Visurfehler Φ zusammensetzen nach der Gleichung:

$$\Phi^2 = \varphi^2 + D^2 \psi^2, \quad (6)$$

worin D die horizontale Entfernung des Zielpunktes in Metern bedeutet, so ist dies gleichbedeutend mit der Annahme, dass in jedem Augenblicke die Ablenkung der Lichtstrahlen auf der ganzen Länge die gleiche sei, aber der Zeit nach um beträchtliche Werthe schwanke, von welchen $\pm \psi$ Secunden auf das Meter als mittlerer Fehler der Visur zurückbleibe.

Ob diese Annahme der Wirklichkeit entspricht, ob namentlich die zweite Potenz der Distanz in (6) genügt, wenn ohne Einschränkung der Zielweiten auch bei ungünstiger Witterung gearbeitet werden soll, ist noch zweifelhaft und beispielsweise nicht unmöglich, dass alsdann das zweite Glied des Zielfehlerquadrates mit der dritten Potenz der Distanz wächst. Zur Entscheidung darüber liegt nicht genug Material vor und selbst dann, wenn es sich auf Grund der Gleichung (6) darum handelt, einen Zahlenwerth für ψ abzuleiten, der unter den gleichen Verhältnissen gelten soll, für welche φ berechnet wurde, fehlen directe Beobachtungen und muss zu einer indirecten Schätzung gegriffen werden. Bei dem erwähnten bayerischen Nivellement wurden die Zielweiten dadurch eingeschränkt, dass der Fehler einer Fadenablesung eine gewisse Grenze nicht überschreiten sollte, welche 1869 auf $\sqrt{3D}$ und 1870/71 auf $\sqrt{3/2D}$ Zehntelmillimeter festgesetzt war. Es konnte demzufolge bei jedem Wetter gearbeitet werden, ohne dass das Gewicht der Nivellements-Resultate ungleich wurde, und es geschah auch, wobei sich denn herausstellte, dass die Durchschnittzielweite bei der ersten Fehlergrenze 70m., bei der zweiten nur 60m. betrug (und dass die überhaupt angewandten Distanzen die Durchschnittzielweite fast eben so oft überschritten als nicht erreicht haben).

Wäre nun die vorgesteckte Fehlergrenze in der That jedesmal als Fehler aus der Beobachtung hervorgegangen, so liesse sich einmal behaupten, dass der Beobachtungsfehler von 60 auf 70m. Durchschnittzielweite in der angegebenen Weise wächst, wenn ohne Auswahl der Witterung gearbeitet wird und die Lichtstrahlen, welche von der Scala ins Fernrohr kommen, im Ganzen nahe der Erdoberfläche bleiben. Sodann aber liesse sich aussprechen, dass der Beobachtungsfehler der Durchschnittzielweite den wahrscheinlichen Fehler darstellt, welcher unter den eben genannten Umständen auftritt*).

In Wirklichkeit aber hat sich gezeigt, dass unter je 30 Beobachtungen die gesteckte Grenze im Durchschnitt viermal überschritten wurde, und dass andererseits alle nur möglichen kleineren Fehler als die Fehlergrenze vorkamen; als Beobachtungsfehler der Durchschnittsdistanz (oder als wahrscheinlichen Fehler bei unbeschränkter Wahl der Zielweiten) haben wir also nicht die Fehlergrenze, sondern den wirklich beobachteten wahrscheinlichen Fehler der Durchschnittsdistanz zu betrachten und von diesem in bekannter Weise auf den mittleren Fehler zu schliessen. Nach dem Gauss'schen Fehlergesetze haben die Wahrscheinlichkeit $26 : 30 = 0,867$ solche Fehler, welche kleiner sind als der 2,234fache wahrscheinliche Fehler oder als der 1,5fache mittlere. Also wird der mittlere Fehler zwei Drittel jener vorgesteckten Grenzwerte

*) Präcisionsnivellements, pag. 51.

betragen, oder auf 60m. Zielweite $\frac{1}{3} \sqrt{6 \times 60}$ und auf 70m. Zielweite $\frac{2}{3} \sqrt{3 \times 70}$ Zehntelmillimeter oder $\pm 0,633\text{mm.}$ und $0,965\text{mm.}$, welche Längenmaasse Winkelwerthen entsprechen von $2,17''$ und $2,84''$. Diese mittleren Fehler haben die Bedeutung von Φ (unter Voraussetzung unbeschränkter Wahl der Distanzen) und sind an Instrumenten mit der Vergrößerung $v = 33$ bis 34 gewonnen, so dass $\varphi = 50 : 33,5 = 1,5''$ wird. Indessen ist der zweite Werth ($2,84''$ für 70m. Zielweite), welcher dem Beobachtungsjahr 1869 seinen Ursprung verdankt, aus verschiedenen Gründen bei weitem nicht so sicher als der erste ($2,17''$ für 60m. Zielweite), den wir auf $2''$ abrunden und der ausserdem durch den Werth $1,9''$ bestätigt wird, welcher aus mehr als zehntausend Beobachtungen der Jahre 1870/71 durch Interpolation gefunden und für 60m. berechnet worden ist*).

Durch Einsetzen der genannten Zahlen, nämlich $\Phi = 2$, $D = 60$, $\varphi = 1,5$, in (6) erhalten wir zur Bestimmung von ψ die Gleichung:

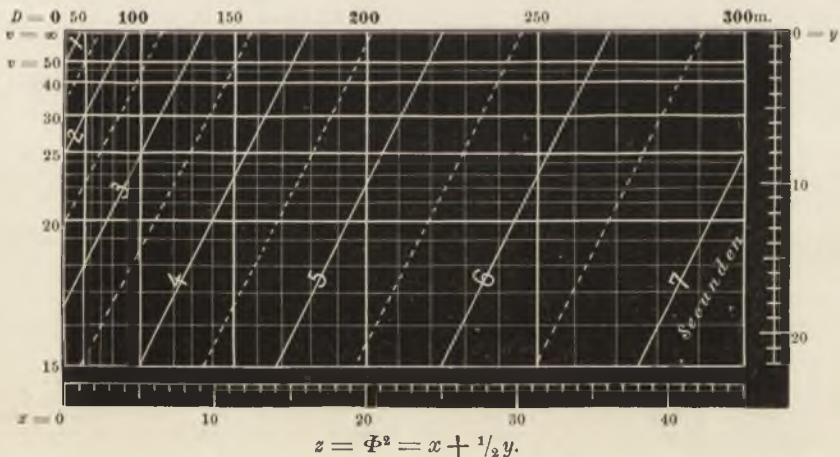
$$4,0 = 2,25 + 3600 \psi^2,$$

woraus folgt $\psi^2 = 0,0005$ und $\psi = 0,022$ Sekunden. Nach dieser Schätzung, welche ψ vielleicht noch zu klein ergibt, leitet sich die Gleichung für das Fehlerquadrat der einzelnen Visur ab, unbeschränkte Distanzenwahl bei jeder Witterung vorausgesetzt:

$$\Phi^2 = \left(\frac{50}{v}\right)^2 + 5 \left(\frac{D}{100}\right)^2 \tag{7}$$

und für den Lattenabschnitt a das Doppelte, weil er aus dem Unterschied zweier Fadenablesungen gewonnen wird. Φ ist in Sekunden aus-

Fig. 13. Visurfehler Φ in Sekunden.



gedrückt und aus der Schichtentafel Fig. 13 zu entnehmen, deren Construction schon auf S. 28 beschrieben wurde.

*) Am angeführten Orte, pag. 56.

Will man den mittleren Visirfehler ψ in Millimetern und zwar für das Stück a der lothrechten Lattenscala erhalten, so ist für D einzusetzen $D \sec^2 \alpha$ und ausserdem das Sekundenmaass in (7) mit $\sqrt{2} D \sec^2 \alpha : 206$, wenn α die Visirneigung bedeutet, zu multipliciren:

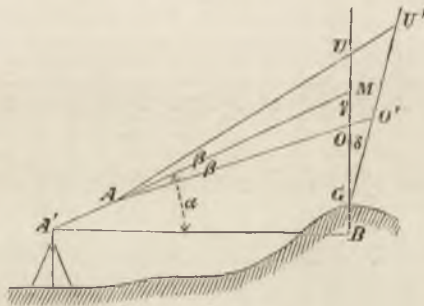
$$\psi^2 = 0,118 D^2 \sec^4 \alpha \left(\frac{1}{v^2} + 20 D^2 \frac{\sec^4 \alpha}{100^4} \right). \quad (8)$$

e) Eben so grosse Beachtung verdienen die Fehler wegen Unruhe der Ziellatte. Versuche haben gezeigt, dass ein geübter Lattenträger, wenn er sich nach einer Dosenlibelle richten kann, selbst bei heftigem Winde die Latte sehr genau in der Lothrichtung zu halten vermag, so dass die mittlere Lattenschiefe auf 500 Secunden geschätzt werden kann. Aber auch dieser Betrag reicht bei starken Visirneigungen hin, beträchtliche Distanzfehler zu erzeugen, namentlich auch darum, weil die Ablesungen beider Ocularfäden nicht gleichzeitig, sondern bei verschiedenen Neigungen der Ziellatte erfolgen, worauf kürzlich Helmert hingewiesen hat *).

Nennen wir wie früher die Fernrohrneigung α , definiren wieder β aus $2k = \cot \beta$, und sei δ die Lattenschiefe in der Richtung der Visirebene, endlich (Fig. 57) $u = GU$ und $o = GO$ die verlangten, $u' = GU'$ und $o' = GO'$ die wirklich erhaltenen Scalenableesungen am unteren und oberen Faden, wenn der Nullpunkt G der Scala mit dem Fusspunkte der Ziellatte zusammenfällt, so folgt aus der Figur nach dem Sinussatze:

$$o : o' = \sin(\gamma + \beta + \delta) : \sin(\gamma + \beta); \quad u : u' = \sin(\gamma - \beta + \delta) : \sin(\gamma - \beta);$$

Fig. 57.



hierin gilt das obere oder untere Vorzeichen je nach Lage der Latte hinter oder vor dem Lothe. Bilden wir $\Delta o = o' - o$ und $\Delta u = u' - u$, so findet sich:

$$\Delta o = \pm \frac{2 \cos \frac{1}{2} (2\gamma + 2\beta + \delta) \sin \frac{1}{2} \delta}{\sin(\gamma + \beta)} \cdot o; \quad \Delta u = \pm \frac{2 \cos \frac{1}{2} (2\gamma - 2\beta + \delta) \sin \frac{1}{2} \delta}{\sin(\gamma - \beta)} \cdot u.$$

Neben γ können die kleinen Winkel β und $\frac{1}{2} \delta$ vernachlässigt, und es darf ausserdem gesetzt werden: $\sin \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \sin \delta$, wodurch wir erhalten:

$$\Delta o = \pm o \cot \gamma \sin \delta = \pm o \operatorname{tg} \alpha \sin \delta; \quad \Delta u = \pm u \cot \gamma \sin \delta = \pm u \operatorname{tg} \alpha \sin \delta.$$

Verstehen wir unter δ den mittleren Betrag der Lattenschiefe, so sind Δo und Δu die

*) Einfluss schiefer Stellung der Latte bei Distanzmessungen etc. Zeitschrift des östr. Ing. und Arch. Vereins 1875, S. 154.

daraus entstehenden mittleren Ablesungsfehler, welche das Lattenstück $u - o = a$ fehlerhaft machen im Betrage A , der sich berechnet aus:

$$A^2 = Au^2 + Ao^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \delta (u^2 + o^2), \quad (9)$$

oder, wenn das arithmetische Mittel der Fadenablesungen $\frac{1}{2} (u + o) = m$ gesetzt wird und weil $\frac{1}{2} (u - o) = \frac{1}{2} a$ ist:

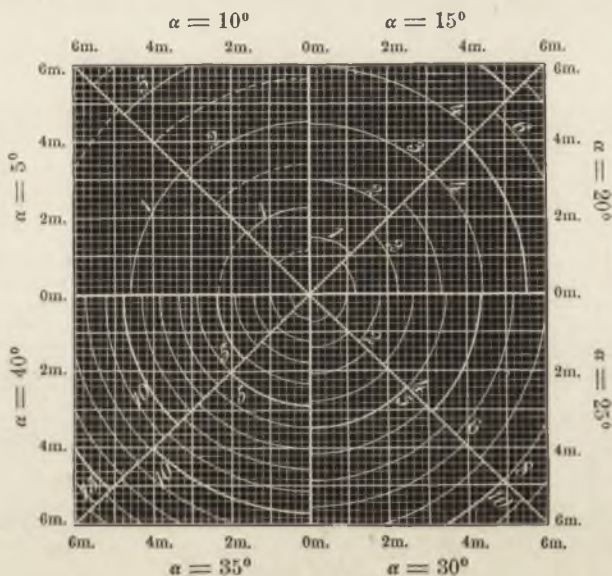
$$A^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \delta (2m^2 + \frac{1}{2} a^2), \quad (10)$$

worin wir δ nach den Eingangs erwähnten Versuchen bei geübten Lattenträgern auf etwa $\pm 500''$ und demnach $\sin \delta = \pm 1 : 400$ schätzen. Es geht aus (10) hervor, wie vortheilhaft es ist, m klein zu wählen, also den Mittelfaden, dessen Ablesung mit m nahe zusammentrifft, möglichst tief einzustellen, wenn nicht etwa das Flimmern der Fernrohrbilder für den unteren Theil der Zielsecala sich bedenklich stärker erweisen sollte als für den oberen.

Fig. 58 bildet A , in Millimetern ausgedrückt, nach der Formel:

$$A = 2,5 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{u^2 + o^2} \quad (11)$$

Fig. 58. Ablesungsfehler wegen Lattenschiefe, in Millimetern.



$$A = 2,5 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{u^2 + o^2}.$$

(u und o in Metern an den Coordinaten abzulesen).

in acht verschiedenen Feldern ab, in deren jedem ein anderer Werth für α angenommen wurde. Die Scalen der Argumente u und o sind gleichtheilig und die A -Isoplethen folglich Kreise. Sei $\alpha = 15^\circ$, $u = 4\text{m.}$, $o = 2\text{m.}$, so ergibt das dritte Feld für diesen Fall einen mittleren Ablesfehler A von $\pm 3\text{mm.}$

Wir fassen jetzt die unter d) und e) berechneten Fehler Ψ und A zum mittleren Gesamtfehler $\pm Aa$ der Lattenablesung a zusammen und setzen in Millimetern:

$$Aa = \pm \sqrt{\Psi^2 + A^2} = \pm \sqrt{\left\{ 0,118 \left(\frac{D}{v} \right)^2 \sec^4 \alpha + 2,36 \left(\frac{D}{100} \right)^4 \sec^8 \alpha + 6,25 \operatorname{tg}^2 \alpha (u^2 + o^2) \right\}}.$$

Sodann führen wir $a + \Delta a$ in die Distanzformel (2) S. 155 ein und erhalten aus dem Vergleich beider Formeln durch Subtraction den Distanzfehler ΔD in Metern nach der Gleichung:

$$\Delta D = k \cos^2 \alpha \Delta a = \pm 0,001 \sqrt{\left\{ 0,118 \frac{a^2 k^4 \cos^4 \alpha}{v^2} + 2,36 \frac{a^4 k^6 \cos^4 \alpha}{100^4} + 1,56 k^2 \sin^2 2 \alpha (2 m^2 + \frac{1}{2} a^2) \right\}}. \quad (12)$$

Bei der Umformung von D vernachlässigten wir, wie noch mehrfach geschehen wird, das erste Glied der Distanzformel. Um vorstehende Gleichung durch eine Schichtentafel darstellen zu können, müssen wir durch mehrere Annahmen die Zahl der Variablen auf zwei beschränken. Wir setzen also $k = 100$, $m = a$, $v = 20$, so dass (12) übergeht in:

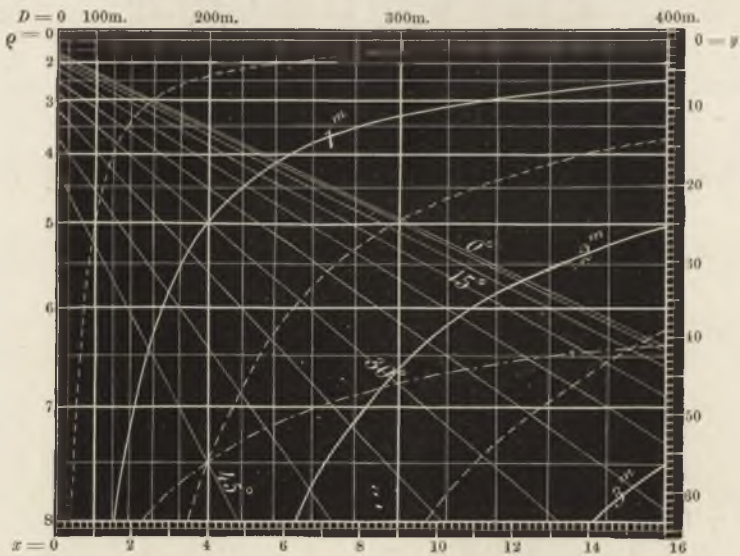
$$\Delta D = \pm 0,001 D \sqrt{\left\{ 2,95 + 15,63 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2,36 \operatorname{sec}^4 \alpha \left(\frac{D}{100} \right)^2 \right\}}. \quad (13)$$

Stellt ϱ den Fehler der Distanz in Tausendteln ihrer Grösse dar, ist also

$$\varrho = \frac{1000 \Delta D}{D},$$

so kann ϱ den Ordinaten einer geradlinigen Schichtentafel entnommen werden, wenn darin die Isoplethen für stufenweise wachsende α entworfen

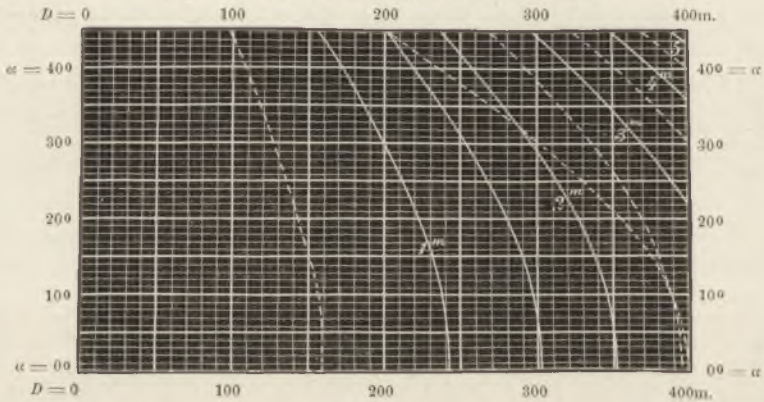
Fig. 14. ϱ = mittlerer Fehler der Distanzmessung in ‰ der Distanz.



sind, wie in Fig. 14 geschehen und auf S. 30 beschrieben worden ist. In Fig. 14 sind ausserdem die Curven eingetragen, für welche sich ϱ bestimmt aus:

$$\Delta D = 0,001 D \varrho = 1m, 2m, 3m, \dots$$

und so konnte aus Fig. 14 sehr leicht Fig. 59 abgeleitet werden, in welcher die AD -Isolethen von α und D als Argumenten abhängig erscheinen. Sucht man z. B. in Fig. 14 den Schnittpunkt der 1m.-Isolethe mit der geradlinigen Winkelisoplethe von 30° auf, so findet sich in Fig. 59 das Bild dieses Punktes als Schnitt der Ordinate 30° mit derselben Abscisse 200m., welche auch in Fig. 14 zu dem Punkt gehörte.

Fig. 59. Der Distanzfehler AD in Metern.

Auf beiden Figuren gibt eine Strichpunktecurve die Grenze an, bis zu welcher die Schichtentafeln überhaupt nur Geltung haben können, wenn für a kein grösseres Lattenstück verfügbar ist als 4m., und Höhenwinkel über 45° ausgeschlossen bleiben. Nach der oben gemachten Annahme $m = a$ müsste dazu die Latte etwa 6m. lang sein.

Für Starke's Tachymeter gelten andere Constanten, nämlich $k = 200$, ($c = 0$), $v = 30$, so dass sich aus (12) ergibt:

$$AD = \pm \sqrt{\{0,063 \sin^2 2\alpha (2m^2 + \frac{1}{2}a^2) + 0,210 a^2 \cos^4 \alpha + 1,51 a^4 \cos^4 \alpha\}}.$$

Helmert hat a. a. O. statt dessen für durchschnittliche Witterungszustände die Formel gefunden:

$$AD = \pm \sqrt{\left\{ \left(2m^2 + \frac{a^2}{2} \right) \sin^2 2\alpha + \frac{4}{15} a^4 \cos^4 \alpha \right\}}.$$

Hierin ist das zweite Glied unterm Wurzelzeichen durch Interpolation einer grösseren Reihe von Versuchswerthen auf Distanzen von 50 bis 500m. (gewonnen durch tachymetrische Aufnahmen mittelst Starke's Instrument), das erste aber unter der Annahme entstanden, dass $\sin \delta$ in e) den mittleren Werth 0,01 habe. Demnach bleiben nur diejenigen Glieder beider Formeln mit einander vergleichbar, welche von der Lattenschiefe unabhängig sind. Obwohl der Helmert'schen Gleichung unser erstes derartige Glied ganz fehlt*) und der Coefficient des zweiten nicht ganz ein Fünftel des ursprünglichen beträgt, scheint der letztere doch für jene Fälle noch nicht gross genug geschätzt zu

*) Wir sehen hier von einer zweiten Formel ab, welche Helmert unter Zuziehung von Distanzen bis zu 30m. abwärts entwickelt und welche in der That ein solches Glied besitzt, das aber um seinen ganzen Betrag unsicher wird. Seine Existenz hat Helmert indessen durch directe Versuche bestätigt.

sein, wo eine Beschränkung der Beobachtungszeiten oder der Distanzen (das beste Mittel zur Verkleinerung jenes Coefficienten) wegfällt. Der Helmert'sche Coefficient wird bei vernünftig geleiteten Messungen maassgebend sein, denn aus solchen ist er gewonnen. Dagegen mag die andere Formel warnen vor gewohnheitsmässigem Festhalten an den hergebrachten Distanzen auch dann, wenn Luftschwankungen die Lattenscala nur undeutlich erkennen lassen. Dem skizzirenden Ingenieur muss sein Gehülfe am Instrument durch Zeichen die Grenze angeben, bis zu welcher die Lattenträger sich entfernen dürfen.

Aus der allgemeinen Gleichung (12) erkennt man schliesslich noch, dass das Glied, welches v enthält, neben den übrigen um so mehr verschwinden wird, je grösser v und k sind.

2) Der mittlere zu befürchtende Höhenfehler Δh

setzt sich gemäss der Formel

$$h = D \operatorname{tg} \alpha$$

zusammen aus $\Delta D \operatorname{tg} \alpha$ und $\Delta \alpha \cdot D : \cos^2 \alpha$, wenn unter $\Delta \alpha$ der mittlere Fehler des Höhenwinkels im analytischen Maasse verstanden wird. Liest man nur an einem Nonius ab und zwar ohne jedesmal die Nonienlibelle neu einzustellen, so wird der mittlere Fehler $\Delta \alpha$ wohl nicht unter einer Minute anzunehmen sein, denn schon ungleiche Erwärmung der Beine durch Sonnenschein und Bodenstrahlung lässt bei manchen Stativen Neigungen der Verticalachse von 2 Minuten und mehr befürchten. (Sehr unbeweglich sind die breiten Tellerstative mit gabelförmigen Rundholzbeinen von Starke.) Also können wir auch schreiben:

$$\frac{D \Delta \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{ak}{3438}$$

und darnach ermittelt sich als mittlerer Höhenfehler eines Detailpunktes:

$$\Delta h = \pm \sqrt{\left(\Delta D^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{a^2 k^2}{11,8 \times 10^6} \right)}. \quad (14)$$

Damit sich dieser Fehler nicht etwa noch bedeutend vermehrt, muss man suchen, wenigstens die Höhenlage des Instrumentalniveaus mit aller Sorgfalt und unter Auswahl günstiger Umstände zu gewinnen.

Führen wir ΔD ein, so wird:

$$\Delta h = \pm 0,001 \sqrt{\left\{ 0,118 \frac{a^2 k^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{v^2} + 2,36 \frac{a^4 k^6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{100^4} \right.}$$

$$\left. + 6,25 k^2 \sin^4 \alpha (2m^2 + \frac{1}{2} a^2) + 0,0847 a^2 k^2 \right\}}.$$

Der Ueberblick über diese Formel lehrt, dass nur bei kleinen Winkeln das letzte Glied unter dem Wurzelzeichen vorwiegen wird. Wir setzen wieder $k = 100$, $m = a$, $v = 20$ und bekommen:

$$\Delta h = \pm 0,001 h \sqrt{\left\{ 2,95 + 15,6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \left[9,44 \left(\frac{h}{100} \right)^2 \right. \right.}$$

$$\left. \left. + 0,339 \right] \operatorname{cosec}^2 2 \alpha \right\}}.$$

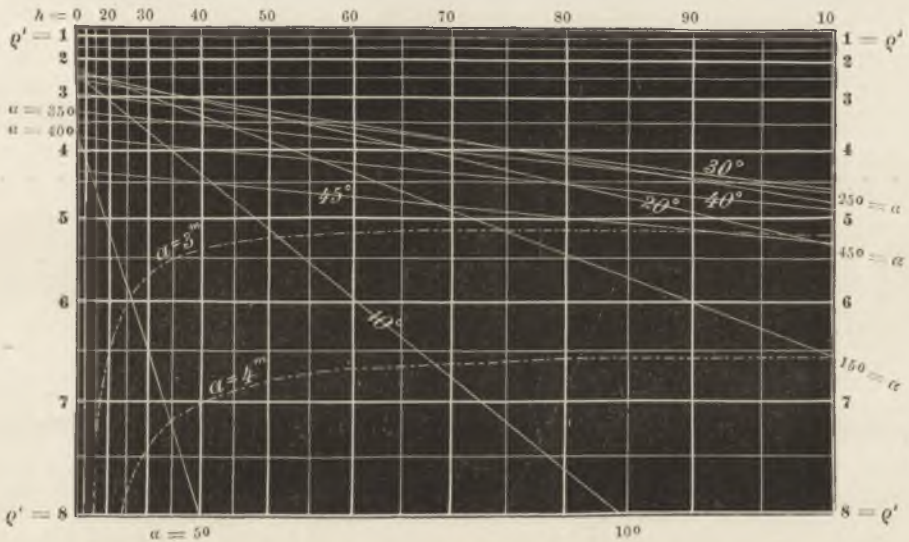
Es soll ferner $1000 \Delta h : h = q'$ sein, so dass die Gleichung gilt:

$$q'^2 = \underbrace{2,95 + 15,6 \operatorname{tg}^2 \alpha + 0,339 \operatorname{cosec}^2 2 \alpha}_p + \underbrace{9,44 \operatorname{cosec}^2 2 \alpha}_q \left(\frac{h}{100} \right)^2,$$

welche durch die angedeuteten Substitutionen, und wenn ausserdem $y = q'^2$ und $x = \left(\frac{h}{100} \right)^2$ gesetzt wird, übergeht in die lineare Gleichung:

$$y = p + qx.$$

Fig. 60. $q' =$ Mittlerer Fehler der Höhenmessung in $\%_0$ der Höhe.

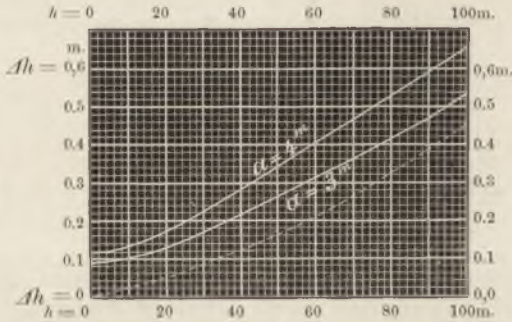


Gibt man also dem Winkel α stufenweise wachsende Werthe, so entstehen geradlinige α -Isoplethen, welche in Fig. 60 zur Darstellung gekommen sind. Dabei ist angenommen, dass α nicht über 45° betrage. Die mit $a = 3\text{m}$. und $a = 4\text{m}$. beschriebenen Curven scheidet die Schichtentafel je in zwei Theile, von denen nur derjenige Bedeutung hat, welcher die Coordinatenachsen enthält, wenn nämlich die für den Fadenabschnitt a verfügbare Lattenlänge 3m . und 4m . beträgt.

Diese Curven und die Isoplethe für $\alpha = 45^\circ$ enthalten in beiden Fällen zugleich die Maxima der möglichen mittleren Fehler q' , während die Umhüllende der α -Isoplethen auf der Abscissenseite die Minima derselben, wie angegeben in $\%_0$ der Höhe darstellt. Alle drei Curven, die

letztere punktirt, werden auch in Fig. 61 abgebildet und gestatten, bei gegebener Höhe h (für unbestimmtes α oder D) den grösst- und kleinstmöglichen mittleren Höhenfehler Δh in Metern an der Ordinate abzulesen. Man erkennt leicht, wie Fig. 61 aus Fig. 60 entstanden ist.

Fig. 61. Maxima und Minima der mittleren Höhenfehler Δh , wenn $\alpha \leq 45^\circ$.



Gleichung (14) für Δh gilt übrigens nur auf denjenigen Höhenpunkten, deren wahre Situation auf dem Felde wiedererkennbar und maassgebend bleibt. Schreibt man jedoch den Terrainpunkten diejenige Situation zu, welche sie nach dem Plane haben sollten, sucht man sie demnach mit Hülfe der Dimensionen wieder auf, welche die Tachymetermessung ergab, so wird derjenige Theil von Δh , welcher von dem Fehler der Distanzmessung herrührt, also das erste Glied der Wurzel in (14) verschwinden, wenn bei der Aufnahme Visirlinie und Terrainlinie einander parallel waren, was in sehr vielen Fällen eintreten kann; die berechnete Höhe kommt dann nämlich einem Punkte zu, welcher parallel der Visirlinie um ΔD weiter vor oder hinter dem Lattenfusse liegt, der Voraussetzung nach also einem wirklichen Terrainpunkte*). Ist γ die Neigung der Terrainlinie in der Visirrichtung und am Fusse der Latte, so wird statt $\Delta D \operatorname{tg} \alpha$ allgemein $\Delta D (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \gamma)$ in die Formel (14) einzusetzen sein, wenn es sich um blose Terrainpunkte handelt, die durch nichts auf dem Felde bezeichnet sind. Durch Fehler im Situationsplan können für solche Punkte jedoch noch andere Höhenfehler entstehen, wegen der Terrainneigung in seitlichen Richtungen, so dass gegenüber den Fehlerquellen, welche die tachymetrische Horizontalaufnahme einführt, die Unsicherheit der gemessenen Höhenwinkel in den Hintergrund tritt.

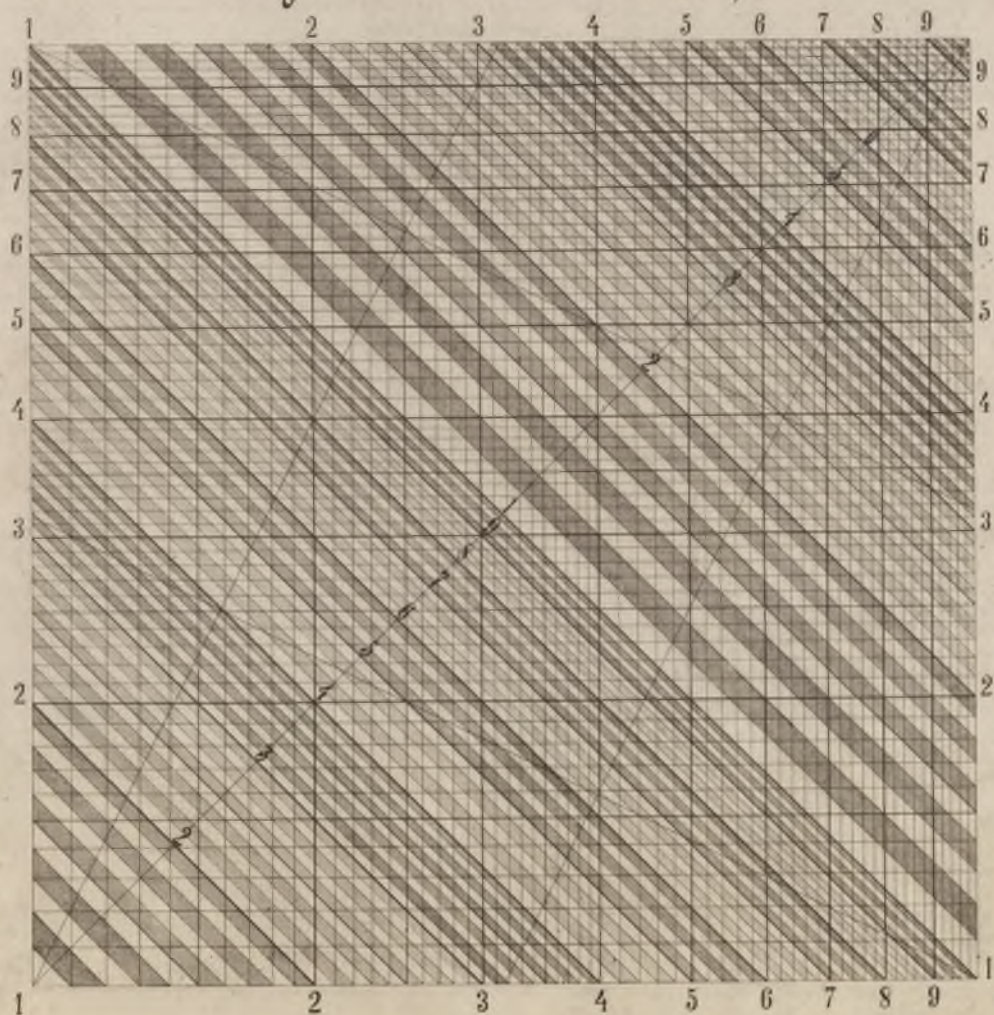
*) Helmert, Distanzmessung mit dem Tachymeter, Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1874, S. 325—334.

Berichtigungen.

Seite	27	Zeile	13 v. u.	lies: in den Punkten, für welche $\varphi(u) = 0$ etc.
„	33	„	5 v. o.	lies: Fig. 15 anstatt Fig. 46.
„	36	„	5 v. o.	lies: dem abgelesenen Functionswerthe der Argumente.
„	36	„	18 v. o.	lies: $\varphi(u)$ oder $\psi(v)$ anstatt u oder v .
„	54	„	4 v. u.	lies: „es“ anstatt „sie“.
„	73	„	3 v. o.	lies: grösstzulässigen Fehler anstatt Maximalfehler.
„	77	„	9 v. o.	lies: verändert anstatt veränderte.
„	98	„	3 v. o.	lies: stellen anstatt stellten.
„	123	„	19 v. u.	lies: Thermometer- anstatt Barometeramplituden.
„	130	„	9 v. o.	lies: (15) anstatt (13).

In der Formel auf Blatt II der Lichtdrucktafeln ist aus Versehen der Feuchtigkeitsbetrag der Constanten weggeblieben, durch welchen diese auf 18410 erhöht wird. Die Tafel ist nach § 34 (6) entworfen und gibt $H \pm 200m$.

Logarithmische Rechentafel



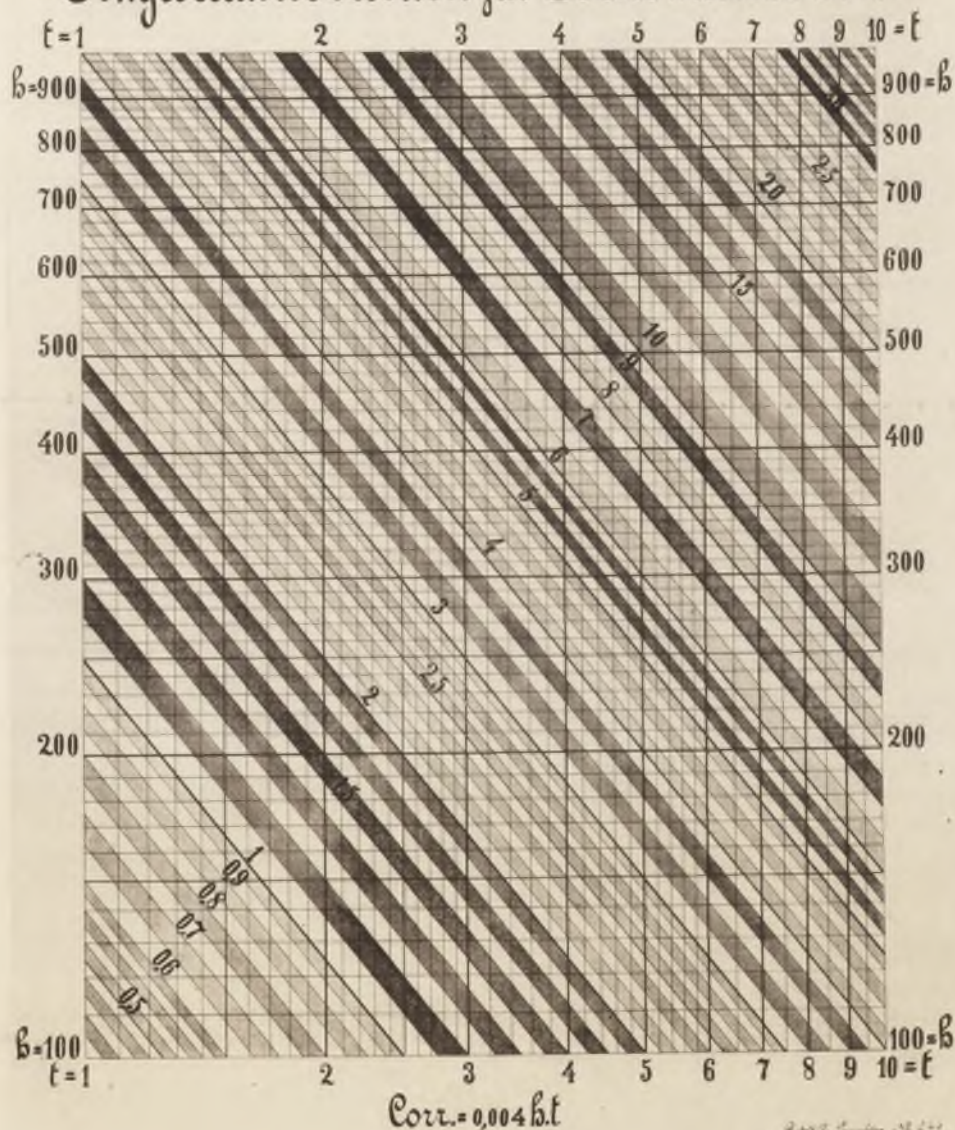
Seehöhentafel für Aneroidmessungen.

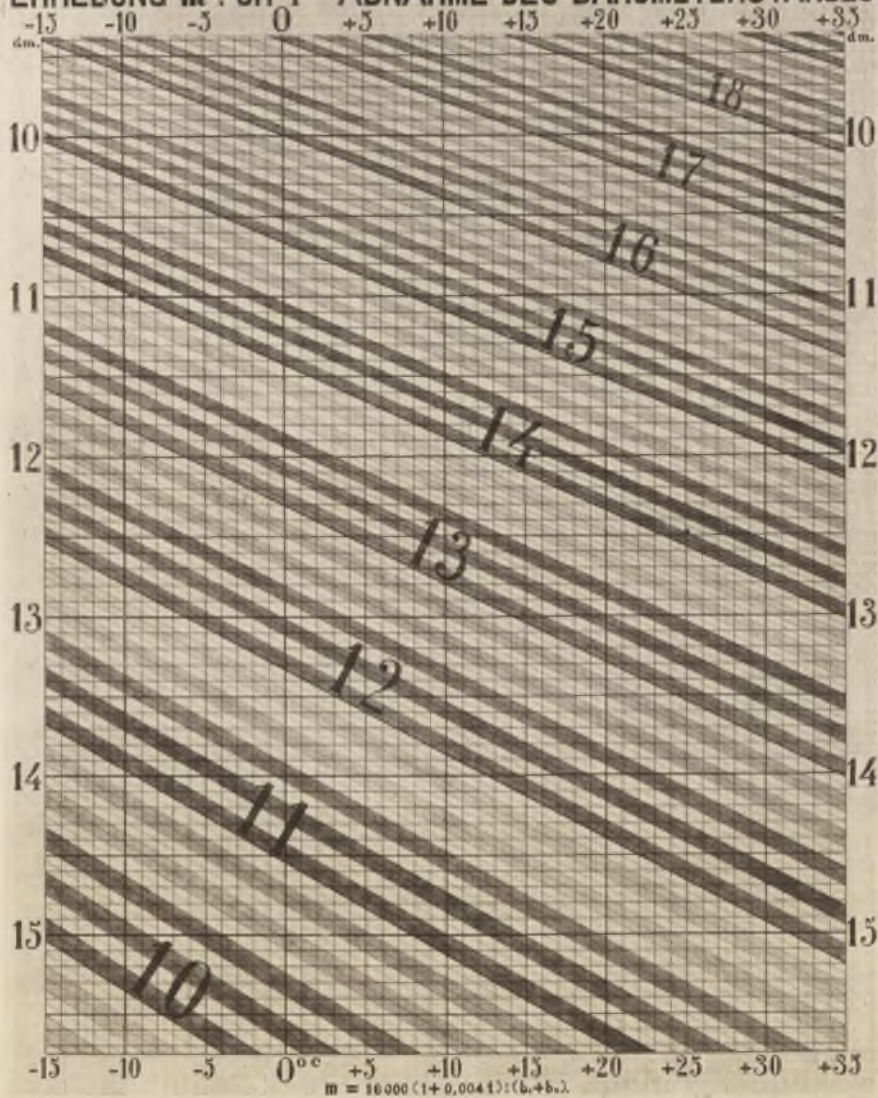
Lufttemperatur 0. Druck am Meeresspiegel 760. Breite 50.

0 100	120 120	121 121	122 122	123 123	124 124	125 125	126 126	127 127	128 128	129 129	130 130	100 200
200 300	129 129	130 130	131 131	132 132	133 133	134 134	135 135	136 136	137 137	138 138	139 139	400 500
400 500	138 138	139 139	140 140	141 141	142 142	143 143	144 144	145 145	146 146	147 147	148 148	600 700
600 700	147 147	148 148	149 149	150 150	151 151	152 152	153 153	154 154	155 155	156 156	157 157	800 900
800 900	156 156	157 157	158 158	159 159	160 160	161 161	162 162	163 163	164 164	165 165	166 166	1000 1100
1000 1100	165 165	166 166	167 167	168 168	169 169	170 170	171 171	172 172	173 173	174 174	175 175	1200 1300
1200 1300	174 174	175 175	176 176	177 177	178 178	179 179	180 180	181 181	182 182	183 183	184 184	1400 1500
1400 1500	183 183	184 184	185 185	186 186	187 187	188 188	189 189	190 190	191 191	192 192	193 193	1600 1700
1600 1700	192 192	193 193	194 194	195 195	196 196	197 197	198 198	199 199	200 200	201 201	202 202	1800 1900
1800 1900	201 201	202 202	203 203	204 204	205 205	206 206	207 207	208 208	209 209	210 210	211 211	2000 2100
2000 2100	210 210	211 211	212 212	213 213	214 214	215 215	216 216	217 217	218 218	219 219	220 220	2200 2300
2200 2300	219 219	220 220	221 221	222 222	223 223	224 224	225 225	226 226	227 227	228 228	229 229	2400 2500
2400 2500	228 228	229 229	230 230	231 231	232 232	233 233	234 234	235 235	236 236	237 237	238 238	2600 2700
2600 2700	237 237	238 238	239 239	240 240	241 241	242 242	243 243	244 244	245 245	246 246	247 247	2800 2900
2800 2900	246 246	247 247	248 248	249 249	250 250	251 251	252 252	253 253	254 254	255 255	256 256	3000

Seehöhe in Metern: $h = 1534,5 \left(\frac{p}{760} \right)^{1,054}$
 Die Tafel gibt $h + 200$.

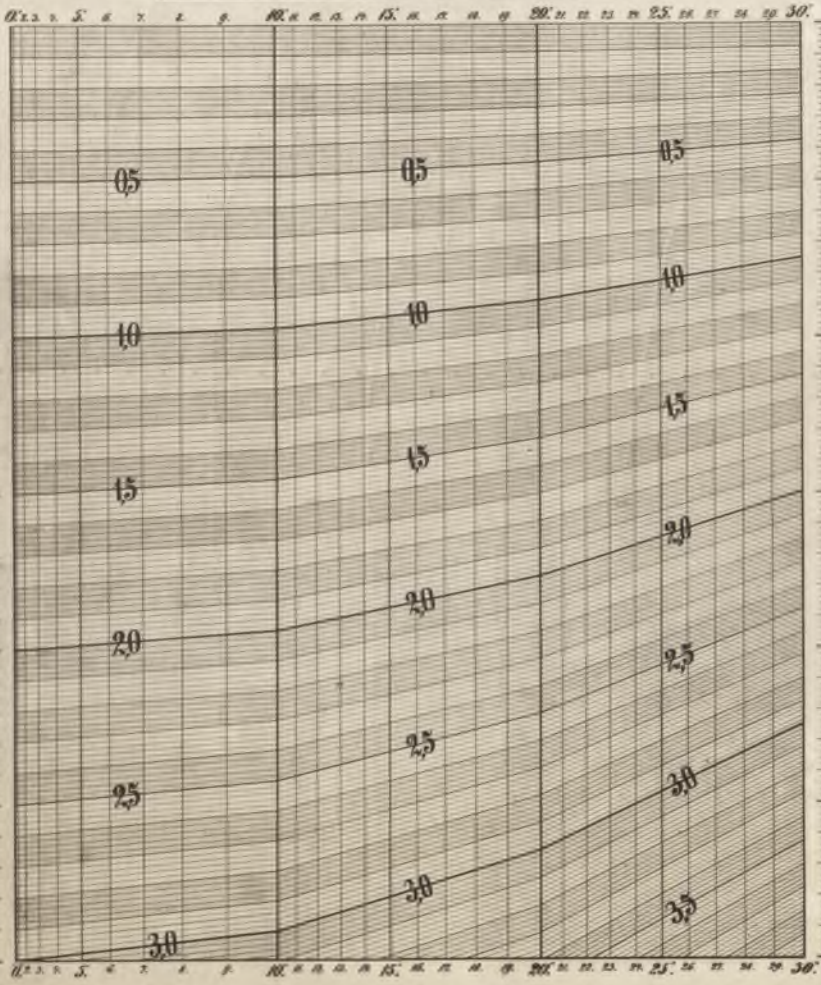
Temperaturcorrection für Barometerhöhen



ERHEBUNG m FÜR 1^{mm} ABNAHME DES BAROMETERSTANDES

REDUCTION AUF HORIZONTALE ENTFERNUNGEN.

Reichenbachs Distanzmesser mit lotrechter Latte.



$$D = C \cos \alpha + K \sin^2 \alpha.$$

Carl Reichenbach
 1812

HÖHEN TAFEL.

RECHENBACH'S DISTANZMESSER MIT LÖTHREITERLATTE.



$$H = c \sin \alpha + i k a \sin \alpha.$$

J. A. C. 1871.

